Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

А.В. Кистович, К.В. Показеев, Е.В. Степанова

ПОСОБИЕ
ПО ДИСЦИАЛИНЕ
«ОСНОВЫ АКУСТИКИ ОКЕАНА»

Москва 2012 г.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

А.В. Кистович, К.В. Показеев, Е.В. Степанова

ПОСОБИЕ ПО ДИСЦИАЛИНЕ «ОСНОВЫ АКУСТИКИ ОКЕАНА»

Москва 2012 г.

УДК 378(075.8):551.463

Кистович А.В., Показеев К.В., Степанова Е.В.

Пособие по дисциплине «Основы акустики океана»: — М.: МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, 2012-58 с., ил. 1.

В пособии даны методика решения и собственно решения задач по дисциплине «Основы акустики океана». Подбор материала соответствует действующей программе курса «Основы акустики океана», читаемого на кафедре физики моря и вод суши физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Данное издание вместе с вышеупомянутым курсом образуют единый комплекс по дисциплине «Основы акустики океана».

Учебный материал разбит на шесть разделов, в каждом из которых приведены основные формулы, задачи для самостоятельного решения и подробные решения этих задач. Степень трудности задач увеличивается по мере их появления.

Данные задачи, а также их различные вариации, используются на экзаменах и семинарах для проверки глубины усвоения материала курса. Приведённые подробные решения углубляют понимание основного курса и являются хорошим подспорьем студентам при самостоятельной подготовке.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов физических, механико-математических и гидрометеорологических факультетов университетов, а также для преподавателей при подготовке и проведении занятий по физике.

Пособие подготовлено при частичной финансовой поддержке гранта Президента РФ МК 4650.2011.1.

Рецензенты:

д.ф.-м.н., профессор В.А. Гордиенко
д.ф.-м.н., профессор А.С. Запевалов

Оглавление

Введение **5**

Методические указания к решению задач **6**

Глава 1. Математическая модель акустических процессов **7**

Задачи к Главе 1. **8**

Глава 2. Акустические явления на языке теории упругости **13**

Задачи к Главе 2. **14**

Глава 3. Общие свойства и характерные типы звуковых волн **20**

Задачи к Главе 3. **21**

Глава 4. Плоские звуковые волны **30**

Задачи к Главе 4 **31**

Глава 5. Геометрическая акустика
Глава 6. Лучевое описание звукового поля в неоднородных средах **41**

Задачи к Главам 5, 6. **42**

Глава 7. Волновое описание звукового поля в неоднородных средах
Глава 8. Отражение звуковых волн от дна океана **51**

Задачи к Главам 7, 8. **53**

Литература **58**

Введение

Данное пособие содержит около 30 задач по дисциплине «Основы акустики океана». Все задачи оригинальны и созданы в процессе работы авторов со студентами физического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Подбор материала соответствует действующей программе курса «Основы акустики океана», читаемого на кафедре физики моря и вод суши физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Данное пособие задумано как практическое применение изложенного в курсе теоретического материала и составляет, вместе с упомянутым курсом, единый комплекс по дисциплине «Основы акустики океана».

Все задачи разбиты на шесть разделов: «Математическая модель акустических процессов», «Акустические явления на языке теории упругости», «Общие свойства и характерные типы звуковых волн», «Плоские звуковые волны», «Геометрическая акустика. Лучевое описание звукового поля в неоднородных средах», «Волновое описание звукового поля в неоднородных средах. Отражение звуковых волн от дна океана». В каждом разделе приведены задачи, помогающие закрепить соответствующий материал. Во всех разделах приведены основные законы и формулы, при использовании которых решаются задачи данного раздела. Задачи рекомендуется решать в той последовательности, в которой они помещены в сборнике. Все задачи снабжены подробными решениями.

При составлении сборника авторы отдавали предпочтение задачам, во-первых, закрепляющих основы изучаемого курса, во-вторых, приближенных к проблемам реальных физических экспериментов, в-третьих, развивающих навыки теоретических исследований. Примерно половина задач относятся к разряду повышенной сложности и требуют неформального подхода к их решению.

Данные задачи, а также их различные вариации, используются на экзаменах и семинарах для проверки глубины усвоения материала курса. Приведённые подробные решения углубляют понимание основного курса и являются хорошим подспорьем студентам при самостоятельной подготовке.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов физических, механико-математических и гидрометеорологических факультетов университетов, а также для преподавателей при подготовке и проведении занятий по физике.

Методические указания к решению задач

При решении задач целесообразно руководствоваться следующими правилами:

- Прежде всего, внимательно прочесть условие задачи и вникнуть в поставленную проблему;
- Задачу нужно решать в общем виде, и лишь затем, если этого требуют условия, подставить численные значения в окончательный результат;
- Проанализировать полученное решение, проверить его работоспособность в предельных случаях;
- Только после получения окончательного результата ознакомиться с предлагаемым в сборнике решением;
- Если методы решений, полученных самостоятельно и представленных в сборнике, не совпадают, необходимо проверить их возможную эквивалентность.

Авторы надеются, что эти рекомендации окажутся полезными при решении задач.

Глава 1. Математическая модель акустических процессов

В основу результатов данной главы входят система уравнений линейной акустики с учётом диссипации волновой энергии

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla \tilde{p} + \nu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \nu/3)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}$$
$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \rho_0 c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}$ – колебательная скорость; $\tilde{\rho}$, $\tilde{p}$ – возмущения плотности и давления в звуковой волне; ρ_0 – исходная равновесная плотность среды; ν, μ – коэффициенты первой и второй кинематической вязкости соответственно; c – скорость звука в среде.

В недиссипативном пределе система (1) редуцируется к виду

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla \tilde{p}, \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \rho_0 c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1.2}$$

Недиссипативный предел линейной акустики даёт возможность ввести акустический потенциал φ, удовлетворяющий волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0 \tag{1.3}$$

Знание этого потенциала позволяет определить физические поля с помощью соотношений

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi, \quad \tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\tilde{p}}{c^2} \tag{1.4}$$

Таким образом, уравнение (3) формально можно рассматривать как единственное фундаментальное уравнение линейной акустики идеальных сред.

Задачи к Главе 1.

Задача 1.

Предельная чувствительность по давлению некоторого гидрофона составляет $2\cdot 10^{-5}$ Па. В рамках модели плоской звуковой волны дать оценку абсолютному значению колебательной скорости, соответствующей минимальному измеряемому давлению. Скорость звука в воде при условиях измерения $p_0 = 1$ атм, $T = +20^\circ$ С составляет $c_w = 1.49\cdot 10^3$ м/с, плотность воды – $\rho_w = 10^3$ кг/м^3.

Решение. В плоской волне акустический потенциал определяется соотношением $\varphi = f(x - c_w t)$, где f – произвольная функция, x – направление распространения плоской волны. Возмущение давления определяется выражением $\tilde{p} = -\rho_w \partial\varphi/\partial t = \rho_w c_w f'$, где штрихом обозначена производная функции по своему аргументу. Колебательная скорость задаётся соотношением $\mathbf{u} = \nabla\varphi$, так что $|\mathbf{u}| = |\nabla\varphi| = |\varphi'_x| = |f'|$. Таким образом, в плоской волне имеет место $|\tilde{p}| = \rho_w c_w |\mathbf{u}|$. Полагая, что минимально регистрируемая величина давления совпадает с чувствительностью гидрофона, получаем оценку колебательной скорости для этого случая:

$$|\mathbf{u}| = \frac{|\tilde{p}|}{\rho_w c_w} = \frac{2\cdot 10^{-5}\ \text{Па}}{10^3\ \text{кг/м}^3 \cdot 1.49\cdot 10^3\ \text{м/с}} = 1.34\cdot 10^{-11}\ \text{м/с}$$

К этому результату нужно относиться с большой осторожностью, поскольку полученная величина скорости слишком мала и заведомо находится под уровнем тепловых флуктуаций параметров воды.

Задача 2.

Определить относительное изменение плотности воды при минимально фиксируемом давлении в звуковой волне $2\cdot 10^{-5}$ Па.

Решение. Поскольку отклонения плотности и давления в звуковой волне связаны соотношением $\tilde{p} = \tilde{\rho} c_w^2$, то относительное изменение плотности воды составляет величину

$$\frac{|\tilde{\rho}|}{\rho_w} = \frac{|\tilde{p}|}{\rho_w c_w^2} = \frac{2 \cdot 10^{-5}\ \text{Па}}{10^3\ \text{кг}/\text{м}^3\, 1.49^2 \cdot 10^6\ \text{м}^2/\text{с}^2} = 9.0 \cdot 10^{-15}$$

Задача 3.

Определить относительное сжатие воды на дне вертикального столба высотой $H = 10$ м. Провести те же вычисления для воздуха.

Решение. Гидростатическое давление столба воды составляет величину $\Delta p = \rho_w g H$. Этому дополнительному давлению соответствует уплотнение среды на величину $\Delta\rho = \Delta p / c_w^2$. В результате, относительное сжатие воды на дне столба определяется величиной

$$\frac{|\Delta\rho|}{\rho_w} = \frac{|\Delta p|}{\rho_w c_w^2} = \frac{\rho_w g H}{\rho_w c_w^2} = \frac{gH}{c_w^2} = 4.42 \cdot 10^{-5}$$

Для воздуха аналогичная величина определяется значением

$$\frac{|\Delta\rho|}{\rho_a} = \frac{|\Delta p|}{\rho_a c_a^2} = \frac{\rho_a g H}{\rho_a c_a^2} = \frac{gH}{c_a^2} = 8.3 \cdot 10^{-4}$$

Видно, что сжимаемость воздуха примерно в 20 раз больше сжимаемости воды.

Задача 4.

Чувствительность человеческого уха по давлению составляет величину порядка 10^{-4} Па (у особенно чувствительных людей – порядка $5 \cdot 10^{-5}$ Па). Система “молоточек – наковальня – стремечко” передаёт сигнал от барабанной перепонки на вход слуховой улитки с коэффициентом усиления по давлению примерно $k = 90$. Определить, какой колебательной скоростью должна обладать плоская звуковая волна, попадающая в ухо человека с повреждённой барабанной перепонкой, чтобы он мог улавливать звуки того же уровня, что и до повреждения. При давлении $p_0 = 1$ атм и температуре $T = +20^\circ$ C плотность воздуха равна $\rho_a = 1.204$ кг/м^3, скорость звука в воздухе $c_a = 343$ м/с.

Решение. При нормально работающем слуховом аппарате чувствительность его уха по давлению связано с колебательной скоростью на входе ушной раковины соотношением $\tilde{p} = k\rho_a c_a |\mathbf{u}|$. Тогда $|\mathbf{u}| = \dfrac{\tilde{p}}{k\rho_a c_a}$. При повреждённой барабанной перепонке система среднего уха не работает, потому никакого усиления нет, $k = 1$. Так что в результате

$$|\mathbf{u}| = \frac{\tilde{p}}{\rho_a c_a} = \frac{10^{-4}\ \text{Па}}{1.204\ \text{кг/м}^3\ 343\ \text{м/с}} = 2.4 \cdot 10^{-7}\ \text{м/с}$$

Задача 5.

Определить физический смысл величины $\Delta\varphi$, где φ – акустический потенциал, Δ – оператор Лапласа.

Решение. Одно из уравнений линейной акустики имеет вид $\dfrac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \Delta\varphi = 0$. Рассмотрим возмущение плотности некоторого объёма выделенных частиц. Пусть до прихода звуковой волны эти частицы занимали объём V_1, а после прихода – объём V_2. Изменение плотности этих частиц определится величиной $\tilde{\rho} = \dfrac{m}{V_2} - \dfrac{m}{V_1} = m\dfrac{V_1 - V_2}{V_1 V_2} \approx -m\dfrac{\Delta V}{V^2} = -\rho_0 \dfrac{\Delta V}{V}$, где m – масса выделенного объёма, $|\Delta V| << V$, $V_1 \approx V$. Подстановка этого выражения в выписанное уравнение акустики сводит его к виду

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{V}\frac{\partial \Delta V}{\partial t}$$

из которого следует, что $\Delta\varphi$ – это скорость относительного изменению объёма выделенных частиц.

Задача 6.

Показать, что система (1.1) уравнений линейной акустики с учётом диссипации волновой энергии не позволяет ввести акустический потенциал, с помощью которого можно в общем случае однозначно определить все физические поля.

Решение. Для того чтобы ввести акустический потенциал, необходимо чтобы выполнялось соотношение $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Применение операции $\nabla \times$ к уравнению Навье-Стокса системы (1) приводит к результату

$$(\partial/\partial t - \nu\Delta)\nabla \times \mathbf{u} = 0$$

Решение этого уравнения представляется в виде суммы двух решений: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, где $\nabla \times \mathbf{u}_1 = 0$, $(\partial/\partial t - \nu\Delta)\mathbf{u}_2 = 0$. И если первое уравнение имеет решение вида $\mathbf{u}_1 = \nabla\varphi$, то второе уравнение решения такого вида, автоматически обращающего его в тождество, не имеет. Простое отбрасывание решения $\mathbf{u}_2$ аналогично случаю с уравнением Эйлера ($\partial\mathbf{u}_2/\partial t = 0$) недопустимо, поскольку уравнение $(\partial/\partial t - \nu\Delta)\mathbf{u}_2 = 0$ имеет решение, меняющееся как во времени, так и в пространстве.

Задача 7.

На основании системы уравнений (1.2) вывести (без использования акустического потенциала) уравнения для каждого физического поля ($\mathbf{u}$, $\tilde{\rho}$, $\tilde{p}$) в отдельности.

Решение. Сначала выведем уравнение для скорости. Применение к первому уравнению системы (1.2) операции $\partial/\partial t$ преобразует его к виду $\dfrac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\widetilde{p} = -\dfrac{1}{\rho_0}\nabla\dfrac{\partial \widetilde{p}}{\partial t}$. Использование второго уравнения системы (1.2) позволяет записать соотношение $\nabla\dfrac{\partial \widetilde{p}}{\partial t} = -\rho_0 c^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$. Объединение этих двух результатов приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - c^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 .$$

Как известно из векторного анализа, для произвольного вектора $\mathbf{a}$ справедливо тождество $\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta\mathbf{a}$. Так как $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, то для колебательного поля звуковой волны имеет место равенство $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \Delta\mathbf{u}$. Использование этого равенства приводит к окончательному результату

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - c^2 \Delta\mathbf{u} = 0 .$$

Для того чтобы получить уравнения для давления, достаточно к первому уравнению системы (1.2) применить операцию $\nabla \cdot$ (дивергенция), затем умножить его на $\rho_0 c^2$, после чего полученный результат нужно вычесть из второго уравнения системы (1.2), предварительно продифференцированного по времени. В результате сформируется волновое уравнение относительно возмущения давления $\widetilde{p}$:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{p}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \widetilde{p} = 0 .$$

Точно такому же уравнению подчиняется поведение возмущения плотности $\widetilde{\rho}$, поскольку оно (это возмущение) связано с возмущением давления соотношением $\widetilde{p} = \widetilde{\rho} c^2$.

Таким образом, акустическая волна представляет собой попеременное изменение во времени и пространстве всех физических полей среды.

Задача 8.

Доказать, что справедливость линейного приближения (1.2 – 1.4) требует выполнения условий: $\left|\tilde{\rho}\right| << \rho_0$, $\left|\tilde{p}\right| << \rho_0 c^2$, $\left|\mathbf{u}\right| << c$.

Решение. Уравнения (1.2 – 1.4) были получены на основе полных уравнений гидродинамики и уравнения состояния, записанного в неявном виде. Использование уравнения состояния обусловлено малыми отклонениями термодинамических полей среды от их равновесных значений ρ_0 и p_0, что позволяет применить разложение этого уравнения в ряд Тейлора по малым параметрам $\left|\tilde{\rho}/\rho_0\right|$ и $\left|\tilde{p}/p_0\right|$. Как следует из уравнений линейной акустики, справедлива связь между возмущениями давления и плотности: $\tilde{p} = \tilde{\rho} c^2$. Поскольку $\left|\tilde{\rho}/\rho_0\right| << 1$, то $\left|\tilde{p}\right| = \left|\tilde{\rho}\right| c^2 << \rho_0 c^2$. И, наконец, пренебрежение нелинейными членами в уравнении Эйлера означает выполнение условия $\rho_0 u^2 / 2 << \left|\tilde{p}\right|$. Так как $\left|\tilde{p}\right| << \rho_0 c^2$, то объединение этих результатов даёт $u^2/2 << c^2$, откуда и следует последнее условие $\left|\mathbf{u}\right| << c$.

Глава 2. Акустические явления на языке теории упругости

В этой главе показан переход от описания линейных явлений в идеальной упругой среде к описанию линейных акустических процессов в жидкости. В основе подхода лежит понятие малого вектора деформации ξ, эволюция которого подчиняется уравнению

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mu \Delta \xi + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \xi \qquad (2.1)$$

Здесь λ, μ – коэффициенты Ламе всестороннего сжатия и сдвига соответственно.

Для вектора деформации $\boldsymbol{\xi}$ допустимо представление

$$\boldsymbol{\xi} = \nabla\varphi + \nabla\times\boldsymbol{\psi} \tag{2.2}$$

с помощью скалярного φ и векторного $\boldsymbol{\psi}$ потенциалов, каждый из которых удовлетворяет своему волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c_{\parallel}^2\,\Delta\phi = 0,\quad c_{\parallel}^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho};\quad \frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} - c_{\perp}^2\,\Delta\boldsymbol{\psi} = 0,\ c_{\perp}^2 = \frac{\mu}{\rho} \tag{2.3}$$

где $c_{\parallel}$, $c_{\perp}$ – скорости распространения продольных и поперечных колебаний соответственно.

Переход от упругой среды к жидкости осуществляется наложением условия отсутствия упругих сдвиговых напряжений ($\mu = 0$).

Задачи к Главе 2.

Задача 1.

На основании условий на границе двух контактирующих упругих сред, для которых допускается проскальзывание: $n_i\sigma_{ij}^{(1)} = n_i\sigma_{ij}^{(2)}$, $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности раздела; $\sigma_{ik} = \lambda\xi_{pp}\delta_{ik} + 2\mu\,\xi_{ik}$ – тензор напряжений; элементы тензора деформаций определяются соотношением $\xi_{ik} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\xi_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\right)$, $\xi_{ik} = \xi_{ki}$; верхние индексы ${}^{(1)}$, ${}^{(2)}$ указывают на соответствующие характеристики контактирующих сред, вывести динамическое и кинематическое граничные условия на поверхности раздела двух жидкостей.

Решение. Так как переход к жидкой среде предполагает зануление сдвиговых напряжений ($\mu = 0$), выражение для тензора напряжений упрощается: $\sigma_{ik} = \lambda\,\xi_{pp}\delta_{ik}$. Подстановка этого выражения в динамическое граничное условие $n_i\sigma_{ij}^{(1)} = n_i\sigma_{ij}^{(2)}$ преобразует его к виду

$$\lambda^{(1)}\xi_{pp}^{(1)} n_i \delta_{ij} = \lambda^{(2)}\xi_{pp}^{(2)} n_i \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \lambda^{(1)}\xi_{pp}^{(1)} = \lambda^{(2)}\xi_{pp}^{(2)}$$

Для того чтобы продолжить исследование полученного соотношения, необходимо выписать в явном виде след тензора деформаций ξ_{pp}. Элементы тензора деформаций определяются через компоненты вектора деформаций $\boldsymbol{\xi}$ выражением $\xi_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right)$. Согласно представлению (2.2) вектор деформаций $\boldsymbol{\xi}$ задаётся через скалярный и векторный потенциалы формулой $\boldsymbol{\xi} = \nabla\varphi + \nabla\times\boldsymbol{\psi}$.

Пусть, для определённости, векторный потенциал имеет вид

$$\boldsymbol{\psi} = A\mathbf{e}_x + B\mathbf{e}_y + C\mathbf{e}_z$$

где $\mathbf{e}_i$ – соответствующие орты декартовой системы координат. Тогда

$$\xi_x = \varphi'_x + C'_y - B'_z, \quad \xi_y = \varphi'_y + A'_z - C'_x, \quad \xi_z = \varphi'_z + B'_x - A'_y$$

Поскольку $\xi_{xx} = \frac{\partial \xi_x}{\partial x}$, $\xi_{yy} = \frac{\partial \xi_y}{\partial y}$, $\xi_{zz} = \frac{\partial \xi_z}{\partial z}$, то след ξ_{pp} определяется выражением

$$\xi_{pp} = \xi_{xx} + \xi_{yy} + \xi_{zz} =$$

$$= \varphi''_{xx} + C''_{xy} - B''_{xz} + \varphi''_{yy} + A''_{yz} - C''_{xy} + \varphi''_{zz} + B''_{xz} - A''_{yz} =$$

$$= \varphi''_{xx} + \varphi''_{yy} + \varphi''_{zz} = \Delta\varphi$$

В результате динамическое граничное условие приобретает вид

$$\lambda^{(1)}\Delta\varphi^{(1)} = \lambda^{(2)}\Delta\varphi^{(2)}$$

Так как для жидких сред $\lambda^{(1)} = \rho_1 c_1^2$, $\lambda^{(2)} = \rho_2 c_2^2$ (здесь ρ_1, ρ_2 – плотности, c_1, c_2 – скорости звука контактирующих сред), то на основании волнового уравнения (2.3) для скалярных потенциалов динамическому граничному условию можно придать форму

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial t^2} = \rho_2 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial t^2}$$

Используемые здесь потенциалы $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ – это потенциалы несоленоидальной части вектора деформаций. Несоленоидальная часть скорости жидких частиц контактирующих сред определяется как производная по времени от несоленоидальной части вектора деформаций. Это позволяет ввести потенциалы несоленоидальных частей скорости в средах соотношениями

$$\varphi_{\text{v}}^{(1)} = \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t},\ \varphi_{\text{v}}^{(2)} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial t}$$

и с их помощью записать динамическое граничное условие

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_{\text{v}}^{(1)}}{\partial t} = \rho_2 \frac{\partial \varphi_{\text{v}}^{(2)}}{\partial t}$$

Это окончательная форма искомого условия, записанная через потенциалы полей скорости в контактирующих средах. Естественно, выражения в правой и левой частях условия вычисляются на границе раздела сред. Пусть эта граница задаётся в явном виде: $F = z - \zeta(x, y, t) = 0$, где функция $\zeta(x, y, t)$ описывает форму поверхности раздела. Тогда строгая запись динамического граничного условия имеет вид

$$\rho_1 \left. \frac{\partial \varphi_{\text{v}}^{(1)}}{\partial t} \right|_{z=\zeta(x,y,t)} = \rho_2 \left. \frac{\partial \varphi_{\text{v}}^{(2)}}{\partial t} \right|_{z=\zeta(x,y,t)}$$

Как следует из второго уравнения (1.4) линейной акустики, возмущения давлений в средах связаны с акустическими потенциалами соотношениями $\tilde{p}^{(1)} = -\rho_1 \dfrac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t}$, $\tilde{p}^{(2)} = -\rho_1 \dfrac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial t}$. И тогда динамические граничные условия можно записать также и через физические переменные

$$\left. \tilde{p}^{(1)} \right|_{z=\zeta(x,y,t)} = \left. \tilde{p}^{(2)} \right|_{z=\zeta(x,y,t)}.$$

Обратимся теперь к кинематическому граничному условию на границе раздела: $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi}^{(1)}=\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. Вектор нормали $\mathbf{n}$ к поверхности определяется выражением

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla F}{|\nabla F|}=\frac{\mathbf{e}_z-\zeta'_x\mathbf{e}_x-\zeta'_y\mathbf{e}_y}{\sqrt{1+\zeta'^2_x+\zeta'^2_y}}$$

Подстановка этого результата в кинематическое граничное условие приводит к соотношению

$$\xi_z^{(1)}-\zeta'_x\xi_x^{(1)}-\zeta'_y\xi_y^{(1)}\Big|_{z=\zeta(x,y,t)}=\xi_z^{(2)}-\zeta'_x\xi_x^{(2)}-\zeta'_y\xi_y^{(2)}\Big|_{z=\zeta(x,y,t)}$$

Так как мы проводим исследования в рамках линейной модели акустических потенциалов, полученное выражение нужно упростить, отбросив нелинейные члены, так что

$$\xi_z^{(1)}\Big|_{z=\zeta(x,y,t)}=\xi_z^{(2)}\Big|_{z=\zeta(x,y,t)}$$

или

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z}+\frac{\partial B^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial A^{(1)}}{\partial y}\bigg|_{z=\zeta(x,y,t)}=\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial z}+\frac{\partial B^{(2)}}{\partial x}-\frac{\partial A^{(2)}}{\partial y}\bigg|_{z=\zeta(x,y,t)}$$

.

Так как выражения $\dfrac{\partial B^{(i)}}{\partial x}-\dfrac{\partial A^{(i)}}{\partial y}$ описывают неакустические части полей скорости в соприкасающихся средах, то при описании **исключительно** акустических процессов их нужно отбросить, сведя кинематические условия к виду

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta(x,y,t)}=\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta(x,y,t)}$$

Для того чтобы из полученного кинематического условия, записанного через потенциал вектора деформаций перейти к потенциалу скоростей, необходимо продифференцировать это соотношение по времени, что даёт

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta(x,y,t)}\right)=\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial z\partial t}+\zeta'_t\frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial z^2}\bigg|_{z=\zeta(x,y,t)}=$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\left. \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \right|_{z=\zeta(x,y,t)} \right) = \left. \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial z \partial t} + \zeta'_t \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial z^2} \right|_{z=\zeta(x,y,t)}$$

Пренебрежение нелинейными членами и переход к потенциалам $\varphi_{\mathrm{v}}^{(1)}$, $\varphi_{\mathrm{v}}^{(2)}$ приводит к окончательному результату

$$\left. \frac{\partial \varphi_{\mathrm{v}}^{(1)}}{\partial z} \right|_{z=\zeta(x,y,t)} = \left. \frac{\partial \varphi_{\mathrm{v}}^{(2)}}{\partial z} \right|_{z=\zeta(x,y,t)}$$

Использование первого уравнения (1.4) позволяет записать данное кинематическое граничное условие через физические величины

$$\left. u_z^{(1)} \right|_{z=\zeta(x,y,t)} = \left. u_z^{(2)} \right|_{z=\zeta(x,y,t)}$$

что означает равенство соответствующих компонент полей скорости по разные стороны границы раздела.

Задача 2.

Показать, что правая часть уравнения (2.1) для вектора деформации носит упругий характер, в отличие от правой части уравнения для колебательной скорости системы (1.1), которая определяет диссипацию звуковых волн.

Решение. Для наглядности выпишем здесь уравнение (2.1), которому подчиняется вектор деформации:

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \mu \, \Delta \boldsymbol{\xi} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}$$

Представим решение этого уравнения в виде

$$\boldsymbol{\xi} = \int_0^\infty \boldsymbol{\xi}_0(\omega) \exp(i(\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \, d\omega$$

где $\mathbf{k}(\omega)$ – волновой вектор, соответствующий частоте ω.

Использование свойства линейности как уравнения для $\boldsymbol{\xi}$, так и оператора интегрирования позволяет рассматривать свойства отдельной гармоники вектора деформации:

$$\boldsymbol{\xi}(\omega)=\boldsymbol{\xi}_0(\omega)\exp(i(\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t)).$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\xi}(\omega)=\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\xi}_0(\omega)\exp(i(\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t))= \\ =-i\omega\boldsymbol{\xi}_0(\omega)\exp(i(\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t)),$$

то $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{\xi}(\omega)=-\omega^2\boldsymbol{\xi}_0(\omega)\exp(i(\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t))$.

Кроме того, справедливы соотношения

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_0(\omega)\exp(i(\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t))=\nabla\big(\exp(i(\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t))\big)\cdot\boldsymbol{\xi}_0(\omega)= \\ =i\big(\mathbf{k}(\omega)\cdot\boldsymbol{\xi}_0(\omega)\big)\exp(i(\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t))$$

$$\nabla\big(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_0(\omega)\exp(i(\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t))\big)= \\ =\nabla\big(i\big(\mathbf{k}(\omega)\cdot\boldsymbol{\xi}_0(\omega)\big)\exp(i(\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t))\big)= \\ =i\big(\mathbf{k}(\omega)\cdot\boldsymbol{\xi}_0(\omega)\big)\nabla\big(\exp(i(\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t))\big)= \\ =-\mathbf{k}(\omega)\big(\mathbf{k}(\omega)\cdot\boldsymbol{\xi}_0(\omega)\big)\exp(i(\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t))$$

$$\Delta\boldsymbol{\xi}_0(\omega)\exp(i(\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t))=-\mathbf{k}^2(\omega)\boldsymbol{\xi}_0(\omega)\exp(i(\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t))$$

Подстановка этих выражений в уравнение для вектора деформации и отбрасывания во всех членах величины $\exp(i(\mathbf{k}(\omega)\cdot\mathbf{r}-\omega t))$ (поскольку она заведомо не обращается в ноль) приводит к уравнению вида

$$\rho\omega^2\boldsymbol{\xi}_0(\omega)-\mu\mathbf{k}^2\boldsymbol{\xi}_0(\omega)-(\lambda+\mu)\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}_0(\omega))=0$$

Домножим скалярно полученное уравнение на волновой вектор $\mathbf{k}$, в результате чего предыдущее уравнение преобразуется к виду

$$\big(\rho\omega^2-(\lambda+2\mu)\mathbf{k}^2\big)(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}_0(\omega))=0$$

Это уравнение удовлетворяется двумя способами:

1. $\mathbf{k}\cdot\xi_0(\omega)=0$, 2. $\rho\omega^2-(\lambda+2\mu)\mathbf{k}^2=0$.

В первом случае нам необходимо вернуться к предыдущему уравнению, из которого следует:

1. $\rho\omega^2-\mu\mathbf{k}^2=0$.

Поскольку ω, ρ, μ – неотрицательные действительные величины, то вектор $\mathbf{k}$ тоже действительная величина.

Во втором случае λ также неотрицательная действительная величина, следовательно, $\mathbf{k}$ – действительный вектор.

Таким образом, в интегральном представлении для вектора деформации ξ все волновые векторы $\mathbf{k}(\omega)$ – действительные величины. Это означает, что уравнение (2.1) отесывает недиссипативные процессы.

Задача 3.

Как следует изменить запись тензора напряжений, чтобы на основании общего подхода получить уравнение для эволюции вектора деформаций вязко-упругой среды?

***Решение*.** Необходимую подсказку при решении поставленной задачи даёт вид первого уравнения системы (1.1). При отбрасывании в этом уравнении члена с давлением образуется уравнение параболического типа, которое и порождает существование решений с диссипацией. В таком случае, при отбрасывании в искомом уравнении для эволюции вектора деформаций вязко-упругой среды его упругой (недиссипативной) части $\mu\Delta\xi+(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\xi$, оставшиеся члены должны сформировать уравнение условного вида

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=\eta\Delta\mathbf{A}+\zeta\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}$$

где η, ζ – некоторые диссипативные характеристики среды.

Поскольку в левой части уравнения (2.1) стоит величина $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$, то в качестве величины $\mathbf{A}$ нужно выбрать $\mathbf{A}=\dfrac{\partial\xi}{\partial t}$. Таким образом, общий вид искомого уравнения представим соотношением

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\mu\Delta\xi+(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\xi+\eta\Delta\frac{\partial\xi}{\partial t}+\zeta\nabla\nabla\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}$$

При этом мы не придаём конкретный физический смысл диссипативным коэффициента η, ζ, так как его выяснение входит в задачу другого раздела механики.

Глава 3. Общие свойства и характерные типы звуковых волн

В этой главе показывается, что плотность энергии в звуковой волне определяется соотношением

$$\mathrm{E}=\frac{c^2\tilde{\rho}^2}{2\rho_0}+\rho_0\frac{\mathbf{u}^2}{2} \tag{3.1}$$

а плотность импульса – выражением

$$\mathbf{j}=\rho_0\mathbf{u}+\tilde{p}\mathbf{u}/c^2 \tag{3.2}$$

причём имеет место закон сохранения

$$\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\tilde{p}\mathbf{u}\right)=0 \tag{3.3}$$

так что величина $\tilde{p}\mathbf{u}$ имеет смысл плотности потока звуковой энергии.

Акустические потенциалы монохроматических плоской, цилиндрической и сферической волн задаются выражениями:

$$\begin{gathered}\varphi_p=\varphi_0\exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)),\ \ \varphi_c=\varphi_0H_0^{(1)}(kr)\exp(-i\omega t)\\ \varphi_s=\varphi_0\frac{\exp(i(kr-\omega t))}{r}\end{gathered} \tag{3.4}$$

где ω – частота волны, $\mathbf{k}$ – волновой вектор, k – волновое число, $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка.

В общем случае описание процесса излучения звука требует записи уравнений (1.2) линейной акустики в форме

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \tilde{p} + \mathbf{f}, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = m, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \qquad (3.5)$$

где $\mathbf{f} = -\nabla U(\mathbf{r}, t)$ и m – плотности источников силы и массы.

Задачи к Главе 3.

Задача 1.

Показать, что справедливость закона сохранения (3.3) требует выполнения условий $|\tilde{\rho}| << \rho_0$, $|\mathbf{u}| << c$.

<u>Решение</u>. Вычислим величину $\dfrac{\partial E}{\partial t}$, входящую в закон сохранения (3.3):

$$\frac{\partial E}{\partial t} = c^2 \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

Подстановка этого выражения в закон сохранения придаёт ему вид

$$c^2 \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \tilde{p} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{p} = 0$$

Если воспользоваться нелинеаризованным видом уравнений Эйлера и непрерывности

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} \right) = -\nabla \tilde{p}, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + (\rho_0 + \tilde{\rho}) \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\rho} = 0$$

то часть величин, входящих в закон сохранения, можно выразить с помощью соотношений

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \tilde{p} - \rho_0 (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -(\rho_0 + \tilde{\rho}) \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\rho}$$

Подстановка этих выражений в закон сохранения, с учётом связи $\tilde{p} = \tilde{\rho} c^2$, приводит к результату

$$\mathbf{u} \cdot \left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \nabla \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} + \frac{(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}}{c^2} \right) = 0$$

Так как в общем случае поле колебательной скорости звуковой волны не ортогонально величине, стоящей в скобках, выполнение закона сохранения требует, чтобы величина

$$\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\nabla\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}+\frac{(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}}{c^2}$$

имела второй порядок малости.
Это означает необходимость сформулированных условий задачи.

Задача 2.

По выражениям (3.4) для акустических потенциалов плоской и сферической волн определить вид соответствующего источника, который должен стоять в правой части волнового уравнения (1.3).

Решение. Рассмотрим сначала плоскую волну. Для упрощения задачи будем считать, что всё пространство разбито плоскостью (x,y) на две половины, в одной из которых плоская волна распространяется вдоль оси z, а в другой – против этой оси. Также положим, что амплитуды этих волн равны A_+ и A_- соответственно. Таким образом, полный акустический потенциал во всём пространстве представляется в виде

$$\varphi = A_+ e^{i(kz-\omega t)}\theta(z) + A_- e^{-i(kz+\omega t)}\theta(-z)$$

где $\theta(z)$ – единичная функция Хевисайда.

Нам необходимо выяснить, какая функция $F(\mathbf{r},t)$ должна стоять в правой части волнового уравнения

$$\varphi''_{tt} - c^2\Delta\varphi = F(\mathbf{r},t)$$

чтобы решение этого уравнения задавалось представленным выше потенциалом.

С помощью заданного потенциала вычислим левую часть волнового уравнения. Двойное дифференцирование потенциала по времени даёт результат

$$\varphi''_{tt} = -\omega^2 A_+ e^{i(kz-\omega t)}\theta(z) - \omega^2 A_- e^{-i(kz+\omega t)}\theta(-z) = -\omega^2\varphi$$

Так как потенциал не зависит от пространственных координат x и y, то $\Delta\varphi = \varphi''_{zz}$ и остаётся лишь вычислить вторую производную по z. Последовательно действуя, получим:

$$\begin{aligned}\varphi'_z &= ikA_+ e^{i(kz-\omega t)}\theta(z) + A_+ e^{i(kz-\omega t)}\delta(z) - \\ &\quad - ikA_- e^{-i(kz+\omega t)}\theta(-z) - A_- e^{-i(kz+\omega t)}\delta(z) = \\ &= ik\left(A_+ e^{i(kz-\omega t)}\theta(z) - A_- e^{-i(kz+\omega t)}\theta(-z)\right) + \left(A_+ - A_-\right)e^{-i\omega t}\delta(z)\end{aligned}$$

где $\delta(z)$ – функция Дирака.

Далее:

$$\begin{aligned}\varphi''_{zz} &= -k^2\left(A_+ e^{i(kz-\omega t)}\theta(z) - A_- e^{-i(kz+\omega t)}\theta(-z)\right) + ikA_+ e^{i(kz-\omega t)}\delta(z) + \\ &\quad + ikA_- e^{-i(kz+\omega t)}\delta(z) + \left(A_+ - A_-\right)e^{-i\omega t}\delta'(z) = \\ &= -k^2\varphi + ik\left(A_+ + A_-\right)e^{-i\omega t}\delta(z) + \left(A_+ - A_-\right)e^{-i\omega t}\delta'(z)\end{aligned}$$

Подстановка полученных выражений в волновое уравнение, с учётом дисперсионного соотношения $\omega = kc$, даёт окончательный результат

$$F(\mathbf{r},t) = -c^2\left(ik\left(A_+ + A_-\right)\delta(z) + \left(A_+ - A_-\right)\delta'(z)\right)e^{-i\omega t}$$

Видно, что генерация плоских монохроматических волн вызывается источником, сосредоточенным на плоскости, интенсивность которого гармонически меняется во времени. Величина $-ikc^2(A_+ + A_-) = -i\omega c(A_+ + A_-)$, стоящая при функции Дирака $\delta(z)$, интерпретируется как объёмная плотность m массовых монополей, равномерно распределённых по плоскости источника. Величина $-c^2(A_+ - A_-)$, стоящая при производной от функции Дирака $\delta'(z)$ представляет собой поверхностную плотность q однонаправленных массовых диполей, равномерно распределённых по плоскости источника, причём дипольные моменты перпендикулярны плоскости источника.

При заданных характеристиках источника, а именно, при известных плотностях m и q, амплитуды волн определяются на основании соотношений

$$A_+ = -\frac{\omega q - imc}{2\omega c^2}, \quad A_- = \frac{\omega q + imc}{2\omega c^2}$$

Если на поверхности расположены только массовые монополи ($q = 0$), то амплитуды волн равны $A_+ = A_-$ и синфазны, если имеются только массовые диполи ($m = 0$), то $A_+ = -A_-$ – амплитуды равны, но противофазны. Промежуточный случай описывается вышеприведёнными общими соотношениями.

Обратимся теперь к источнику сферической волны, потенциал которой зададим выражением

$$\varphi = A\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

Видно, что

$$\varphi''_{tt} = -\omega^2 A\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} = -\omega^2\varphi$$

В наших обозначениях $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Так как ни A, ни $e^{-i\omega t}$ не зависят от пространственных координат, то $\Delta\varphi = Ae^{-i\omega t}\Delta\frac{e^{ikr}}{r}$. Последовательно вычислим величину $\Delta\frac{e^{ikr}}{r}$. Начнём с производной по координате x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}e^{ikr} + e^{ikr}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = \left(\frac{ik}{r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\right)e^{ikr}$$

Функция $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ есть однородная обобщённая функция степени $\lambda = 1$, так как

$$r(ax, ay, az) = \sqrt{a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2} =$$
$$= a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ar(x, y, z)$$

Функция $1/r(x,y,z) = 1\Big/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ есть однородная обобщённая функция степени $\lambda = -1$, так как

$$1/r(ax,ay,az) = 1\Big/\sqrt{a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2} =$$
$$= a^{-1}\,1\Big/\sqrt{x^2+y^2+z^2} = a^{-1}\,1/r(x,y,z)$$

Размерность пространства задачи $n = 3$. Поскольку $1-\lambda \neq n$ при $\lambda = \pm 1$, то производные $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{r}$ вычисляются в обычном смысле:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -\frac{x}{r^3}$$

Таким образом, имеет место

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{ikr}}{r} = \left(\frac{ikx}{r^2} - \frac{x}{r^3}\right)e^{ikr}$$

Вычислим вторую производную по x:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ikx}{r^2} - \frac{x}{r^3}\right)e^{ikr} = \frac{ikx^2}{r^4}(ikr-1)e^{ikr} + e^{ikr}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ikx}{r^2} - \frac{x}{r^3}\right)$$

Функция $\dfrac{x}{r^2}$ есть однородная функция степени $\lambda = -1$. Так как в этом случае $1-\lambda \neq n$, то производная вычисляется в обычном смысле:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{ikx}{r^2} = ik\frac{r^2 - 2x^2}{r^4}$$

Функция $\dfrac{x}{r^3}$ есть однородная функция степени $\lambda = -2$. Поскольку в данном случае $1-\lambda = n$, то производная вычисляется в обобщённом смысле:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5} + \delta(x,y,z)\oint_{\Gamma}\frac{x\,dy\,dz}{r^3}$$

где $\delta(x,y,z)=\delta(x)\delta(y)\delta(z)$, Γ – поверхность единичной сферы, окружающей начало координат.

Окончательно

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{e^{ikr}}{r}=\left[-\frac{k^2x^2}{r^3}+(ikr-1)\frac{r^2-3x^2}{r^5}-\delta(x,y,z)\int_\Gamma\frac{x\,dy\,dz}{r^3}\right]e^{ikr}$$

Аналогичные выкладки показывают, что

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{e^{ikr}}{r}=\left[-\frac{k^2y^2}{r^3}+(ikr-1)\frac{r^2-3y^2}{r^5}-\delta(x,y,z)\int_\Gamma\frac{y\;dz\,dx}{r^3}\right]e^{ikr}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{e^{ikr}}{r}=\left[-\frac{k^2z^2}{r^3}+(ikr-1)\frac{r^2-3z^2}{r^5}-\delta(x,y,z)\int_\Gamma\frac{z\;dx\,dy}{r^3}\right]e^{ikr}$$

Таким образом

$$\Delta\frac{e^{ikr}}{r}=\left[-\frac{k^2}{r}-\delta(x,y,z)\int_\Gamma\frac{x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy}{r^3}\right]e^{ikr}=$$

$$=-\left(\frac{k^2}{r}+4\pi\delta(x,y,z)\right)e^{ikr}$$

Последнее равенство обусловлено тем, что интеграл представляет собой телесный угол, под которым видна сфера из своего центра, то есть 4π.

Подстановка полученных результатов в волновое уравнение с учётом дисперсионного соотношения $\omega=kc$ приводит к определению функции источника сферической волны:

$$F(\mathbf{r},t)=4\pi c^2 A\,\delta(x,y,z)\,e^{-i\omega t}$$

Задача 3.

Показать, что эквивалентность силовых и массовых источников (в смысле идентичности создаваемых ими физических полей) в системе (3.5) достигается лишь в том случае, когда и U, и m удовлетворяют волновому уравнению (1.3). Определить при этом связь между U и m, обеспечивающую эту эквивалентность.

Решение. Исключим из системы (3.5) возмущение плотности, в результате чего эта система примет вид

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \widetilde{p} + \mathbf{f}, \qquad \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial t} + c^2 \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = m$$

Если первое уравнение полученной системы продифференцировать по времени, а ко второму уравнению применить оператор Лапласа, а затем составить разность результатов дифференцирования, получится уравнение

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right) \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} - c^2 \Delta m = -\Delta \left(\frac{\partial U}{\partial t} + c^2 m \right)$$

Если теперь первое уравнение умножить на c^2, а затем к нему применить операцию $\nabla \cdot$ (дивергенция), второе уравнение продифференцировать по времени и снова составить разность полученных результатов, то возникнет уравнение вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \right) \widetilde{p} = c^2 \left(\frac{\partial m}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{f} \right) = c^2 \left(\frac{\partial m}{\partial t} + \Delta U \right)$$

Для того, чтобы имела место эквивалентность силовых и массовых источников, необходимо, чтобы правые части этих уравнений совпадали друг с другом в случаях $U = 0,\ m \neq 0$ и $U \neq 0,\ m = 0$. Из первого уравнения следует, что при замене источников одного типа на источники другого типа должно выполняться условие

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 m$$

а из второго уравнения следует условие

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \Delta U$$

Совместность этих условий приводит к тому, что как массовые, так и силовые источники должны удовлетворять волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta\right)U = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta\right)m = 0$$

а необходимая связь между источниками задаётся любым из вышеприведённых условий.

Задача 4.

На основании асимптотического выражения для поля давления точечного акустического диполя

$$\widetilde{p} \approx -\frac{1}{4\pi r^3}\mathbf{r}\cdot\left(\dot{\mathbf{q}}(t - r/c) + \frac{r}{c}\ddot{\mathbf{q}}(t - r/c)\right), \quad r = |\,\mathbf{r}\,|$$

где $\mathbf{q}$ – дипольный момент, определить поле точечного акустического квадруполя; точки сверху обозначают дифференцирование по времени.

Решение. Акустический квадруполь представляет собой совокупность двух диполей, дипольные моменты которых одинаковы по величине, но противоположны по знаку. Пусть диполи расположены в точках $\pm\mathbf{r}_0$, а значение возмущения давления, создаваемого ими, вычисляется в точке $\mathbf{r}$. Точечность квадруполя означает, в том числе, выполнение соотношения $|\,\mathbf{r}_0| / |\,\mathbf{r}\,| << 1$. В таком случае поле квадруполя определяется выражением

$$\widetilde{p} \approx -\frac{(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)}{4\pi|\,\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|^3}\cdot\left(\dot{\mathbf{q}}(t - |\,\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|/c) + \frac{|\,\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}{c}\ddot{\mathbf{q}}(t - |\,\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|/c)\right) +$$

$$+\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{4\pi|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\cdot\left(\dot{\mathbf{q}}(t - |\,\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|/c) + \frac{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\ddot{\mathbf{q}}(t - |\,\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|/c)\right)$$

Здесь $\mathbf{r}+\mathbf{r}_0$ – вектор, направленный из точечного диполя с моментом $\mathbf{q}$, расположенного в точке $-\mathbf{r}_0$, а $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ – вектор, направленный из точечного диполя с моментом $-\mathbf{q}$, расположенного в точке $+\mathbf{r}_0$.

Для дальнейших вычислений понадобятся величины $\left|\mathbf{r}\pm\mathbf{r}_0\right|$, вычисленные с учётом соотношения $\left|\mathbf{r}_0\right|/\left|\mathbf{r}\right| << 1$.

$$\left|\mathbf{r}\pm\mathbf{r}_0\right| = \sqrt{(\mathbf{r}\pm\mathbf{r}_0)^2} = \sqrt{\mathbf{r}^2 \pm 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0^2} = \sqrt{\mathrm{r}^2 \pm 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0^2} =$$
$$= r\sqrt{1 \pm 2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0/r^2 + \mathbf{r}_0^2/r^2} \approx r\left(1 \pm \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0/r^2\right)$$

Тогда

$$\frac{1}{\left|\mathbf{r}\pm\mathbf{r}_0\right|^3} \approx \frac{1}{r^3}\frac{1}{\left(1\pm\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0/r^2\right)^3} \approx \frac{1}{r^3}\left(1\mp 3\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0/r^2\right)$$

Кроме того, необходимо вычислить величины вида $\mathbf{f}(t-\left|\mathbf{r}\pm\mathbf{r}_0\right|/c)$. На основании вышеприведённых соотношений

$$\mathbf{f}(t-\left|\mathbf{r}\pm\mathbf{r}_0\right|/c) \approx \mathbf{f}\left(t-\frac{r}{c}\left(1\pm\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0}{r^2}\right)\right) = \mathbf{f}\left(t-\frac{r}{c}\mp\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0}{rc}\right) \approx$$
$$\approx \mathbf{f}(t-r/c) \mp \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0}{rc}\dot{\mathbf{f}}(t-r/c)$$

На основании этих вспомогательных формул позволяет поле давления квадруполя записывается в виде:

$$\tilde{p} \approx$$
$$\approx \left(1+3\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0}{r^2}\right)\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{4\pi r^2}\cdot\left[\dot{\mathbf{q}}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0}{rc}\ddot{\mathbf{q}}+\frac{r}{c}\left(1-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0}{r^2}\right)\left(\ddot{\mathbf{q}}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0}{rc}\dddot{\mathbf{q}}\right)\right]-$$
$$-\left(1-3\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0}{r^2}\right)\frac{(\mathbf{r}+\mathbf{r}_0)}{4\pi r^2}\cdot\left[\dot{\mathbf{q}}-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0}{rc}\ddot{\mathbf{q}}+\frac{r}{c}\left(1+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0}{r^2}\right)\left(\ddot{\mathbf{q}}-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0}{rc}\dddot{\mathbf{q}}\right)\right]\approx$$
$$\approx \frac{1}{4\pi r^2}\left(6\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0}{r^2}\mathbf{r}-2\mathbf{r}_0\right)\cdot\left(\dot{\mathbf{q}}+\frac{r}{c}\ddot{\mathbf{q}}\right)-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0}{4\pi r^2c^2}\left(6\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0}{r^2}\mathbf{r}_0-2\mathbf{r}\right)\cdot\dddot{\mathbf{q}}$$

Использование того факта, что вектор $\mathbf{r}_0$ ортогонален дипольному моменту $\mathbf{q}$ (то есть $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{q} = 0$), позволяет упростить полученный результат:

$$\widetilde{p} \approx \frac{1}{4\pi r^4}(2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0)\mathbf{r}\cdot\left(3\dot{\mathbf{q}} + 3\frac{r}{c}\ddot{\mathbf{q}} + \frac{r^2}{c^2}\dddot{\mathbf{q}}\right)$$

Пусть вектор $\mathbf{r}$ пересекает плоскость квадруполя под углом φ, а его проекция на эту плоскость составляет с направлением дипольного момента $\mathbf{q}$ угол θ. Тогда $2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0 = 2rr_0\cos\varphi\sin\theta$, $\mathbf{r}\cdot\mathbf{q} = rq\cos\varphi\cos\theta$, где $q = |\mathbf{q}|$. Если вести величину $s = 2r_0 q$, называемую квадрупольным моментом, то полученный результат для поля давления можно представить в виде

$$\widetilde{p} \approx \frac{\sin\theta\cos\theta}{4\pi r^2}\cos^2\varphi\left(3\dot{s} + 3\frac{r}{c}\ddot{s} + \frac{r^2}{c^2}\dddot{s}\right) = \frac{D(\varphi,\theta)}{4\pi r^2}\left(3\dot{s} + 3\frac{r}{c}\ddot{s} + \frac{r^2}{c^2}\dddot{s}\right)$$

Величина $D(\varphi,\theta) = \sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi$ представляет собой диаграмму направленности квадруполя. В случае, когда характерное время изменения квадрупольного момента существенно больше времени задержки r/c, которое необходимо сигналу, чтобы достичь точки наблюдения, выражение для давления существенно упрощается:

$$\widetilde{p} \approx \frac{3\dot{s}}{4\pi r^2}D(\varphi,\theta)$$

Здесь необходимо отметить, что в полученных выражениях в качестве аргумента функций $\mathbf{q}$ и s выступает величина $t - r/c$, которая опущена для сокращения записи результатов.

Глава 4. Плоские звуковые волны

Основные результаты данного раздела состоят в том, что процесс прохождения и отражения плоских волн от плоской границы раздела подчиняются закону Снеллиуса

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{c_1}{c_2} \qquad (4.1)$$

где θ_1, θ_2 – углы падения и прохождения, c_1, c_2 – скорости звука в граничащих средах.

Закон Снеллиуса есть следствие совпадения у всех волн (падающей, прошедшей и отражённой) проекции их волновых векторов на плоскую поверхность раздела.

Коэффициент отражения R и прохождения T плоской волны определяются как отношения абсолютных значений средних по времени плотностей потока энергии отраженной и прошедшей волн к средней по времени плотности потока энергии падающей волны.

При падении сферической волны на плоскую границу раздела двух сред с существенно различными акустическими импедансами для расчёта физических полей применим приближённый метод зеркальных источников.

Задачи к Главе 4.

Задача 1.

Пространство задачи представляет собой две полубесконечные области, скорости звука в которых равны c_1 и c_3, разделённые плоскопараллельным слоем толщины H. Скорость звука в слое – c_2. При этом имеет место соотношение между скоростями $c_1 < c_2 < c_3$. Определить предельный угол падения плоской волны из первой области, при превышении которого в третью область звук не пройдёт. Изменится ли результат, если $c_1 < c_3 < c_2$?

Решение. Существует формальный подход к решению поставленной задачи. Пусть в верхней полуплоскости волна распространяется под углом θ_1, в слое – под углом θ_2, а в третьей области – под углом θ_3.

Согласно закону Снеллиуса для этой волны выполняются соотношения

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2}, \quad \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3} = \frac{c_2}{c_3}$$

Умножение первого соотношения на второе приводит к связи

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_3} = \frac{c_1}{c_3}$$

Для того чтобы волна не прошла в третью область, необходимо выполнение условия

$$\frac{c_3}{c_1}\sin\theta_1 \geq 1$$

Отсюда следует предельное значение угла θ_1, при превышении которого звук не пройдёт в третью область:

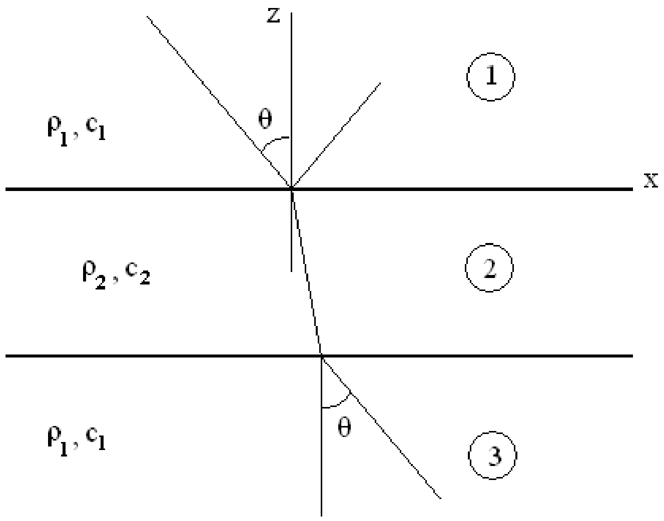
$$\theta_1^* = \arcsin c_1/c_3$$

Данный результат не зависит ни от толщины слоя H, ни от соотношения скоростей в плоскопараллельном слое и в третьей среде. Этот результат верен, однако неверен способ его получения. Дело в том, что при выполнении условия $\frac{c_2}{c_1}\sin\theta_1 \geq 1$ в слое нет плоской волны, распространяющейся под углом θ_2. При $\frac{c_2}{c_1}\sin\theta_1 < 1$ вышеприведённые рассуждения справедливы, и для таких углов падения θ_1 данный способ решения остаётся в силе. Правильный способ решения для случая $\frac{c_2}{c_1}\sin\theta_1 \geq 1$ приведён в решении задачи 5.

Задача 2.

Рассчитать коэффициенты отражения и прохождения плоской волны при падении её под углом θ на плоскопараллельную пластину толщиной d. Частота волны равна ω, плотность среды и скорость звука в ней задаются величинами ρ_1, c_1. Аналогичные характеристики пластины определяются величинами ρ_2, c_2.

Решение. На рисунке представлено схематическое изображение процесса падения плоской монохроматической волны на плоскопараллельную пластину.



Плоскость (x, z) совмещена с плоскостью падения волны. Акустические потенциалы в выделенных областях представляются в виде:

$$\varphi_1 = A_+ e^{i(kx+\kappa_1 z-\omega t)} + A_- e^{i(kx-\kappa_1 z-\omega t)}$$

$$\varphi_2 = B_+ e^{i(kx+\kappa_2 z-\omega t)} + B_- e^{i(kx-\kappa_2 z-\omega t)}$$

$$\varphi_3 = C e^{i(kx+\kappa_1 z-\omega t)}$$

Здесь A_+, A_- – амплитуды волн, бегущих в области “1” в отрицательном (падающая волна) и положительном (отражённая волна) направлениях оси z соответственно; B_+, B_- – амплитуды волн, бегущих в области “2” в отрицательном и положительном направлениях оси z соответственно; C – амплитуда прошедшей волны в области “3”. Компоненты волновых векторов всех волн в направлении оси x обозначены символом k, а символами κ_1, κ_2 обозначены компоненты волновых векторов вдоль оси z в соответствующих средах.

Так как падающая, отражённая и прошедшая за пластину волны распространяются в областях с одинаковыми характеристиками, то коэффициенты отражения R и прохождения T определяются соотношениями

$$R = \frac{|A_-|^2}{|A_+|^2}, \quad T = \frac{|C|^2}{|A_+|^2}$$

Для того, чтобы определить отношения соответствующих амплитуд, необходимо использовать граничные условия, которые имеют вид

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\bigg|_{z=0} = \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\bigg|_{z=0}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\bigg|_{z=0}$$

$$\rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\bigg|_{z=-d} = \rho_1 \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}\bigg|_{z=-d}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\bigg|_{z=-d} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\bigg|_{z=-d}$$

Подстановка в эти выражения представлений для акустических потенциалов порождает систему алгебраических уравнений для амплитуд A_+, A_-, B_+, B_- и C:

$$\rho_1 (A_+ + A_-) = \rho_2 (B_+ + B_-), \quad \kappa_1 (A_+ - A_-) = \kappa_2 (B_+ - B_-)$$

$$\rho_2 (B_+ e^{-i\kappa_2 d} + B_- e^{-i\kappa_2 d}) = \rho_1 C e^{-i\kappa_1 d}$$

$$\kappa_2 (B_+ e^{-i\kappa_2 d} - B_- e^{-i\kappa_2 d}) = \kappa_1 C e^{-i\kappa_1 d}$$

Исключение из этой системы амплитуд $B_\pm$ позволяет определить коэффициенты отражения и прохождения величинами

$$R = \frac{2a^2 b^2 \left(1 - \cos(2\kappa_2 d)\right)}{a^4 + b^4 - 2a^2 b^2 \cos(2\kappa_2 d)}, \quad T = \frac{\left(a^2 - b^2\right)^2}{a^4 + b^4 - 2a^2 b^2 \cos(2\kappa_2 d)}$$

где

$$a = \rho_1 \kappa_2 + \rho_2 \kappa_1, \quad b = \rho_1 \kappa_2 - \rho_2 \kappa_1$$

Теперь необходимо выразить k, κ_1, κ_2 через параметры задачи. Волновое число звуковых волн в областях “1” и “3” задаётся величиной ω/c_1 и потому $k = \omega\sin\theta/c_1$, $\kappa_1 = -\omega\cos\theta/c_1$. Согласно закону Снеллиуса $\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta^*} = \dfrac{c_1}{c_2}$, где θ^* – угол, который составляет с осью z направление распространения волн в области "2". В то же время, $\kappa_2 = -\omega\cos\theta^*/c_2$. В результате волновое число κ_2 задаётся выражением $\kappa_2 = -\dfrac{\omega}{c_1 c_2}\sqrt{c_1^2 - c_2^2\sin^2\theta}$. Подстановка полученных величин k, κ_1, κ_2 в формулы для R и T определяет окончательный результат, выраженный через данные исходной задачи.

Из выражений для коэффициентов отражения и прохождения, в частности, следует, что если на толщине пластины d укладывается целое число полуволн, распространяющихся в области "2", то $R = 0$, $T = 1$ – отражение от пластины отсутствует (полуволновая пластина). А если на этой толщине укладывается нечётное число четвертей длины волны в среде "2", то имеет место минимум прохождения звука через пластину (четвертьволновая пластина).

Задача 3.

Пусть в центре сферической полости радиуса R, плотность среды в которой и скорость звука задаются величинами ρ_1, c_1, расположен источник монохроматической сферической волны частоты ω. Полость окружена неограниченной средой с характеристиками ρ_2, c_2. Определить коэффициент прохождения волны из полости в окружающее пространство.

<u>Решение</u>. Запишем акустические потенциалы для внутренней и внешней частей сферической полости. Во внутренней части потенциал задаётся выражением

$$\varphi_1 = A_+ \frac{e^{i(k_1 r - \omega t)}}{r} + A_- \frac{e^{-i(k_1 r + \omega t)}}{r}, \quad k_1 = \frac{\omega}{c_1}$$

представляющим собой сумму потенциалов волн бегущих от центра (амплитуда A_+) и к центру (амплитуда A_-).

Во внешней части потенциал описывается уходящей от полости сферической волной

$$\varphi_2 = B\frac{e^{i(k_2 r-\omega t)}}{r}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

Коэффициент прохождения звуковой волны определяется отношением плотностей потока энергии прошедшей волны к падающей. Плотность потока энергии звуковой волны определяется величиной $\mathrm{S} = \overline{\tilde{p}\,\mathbf{u}}$, где черта сверху означает усреднение за период колебаний. Но эта формула записана для действительных величин возмущений давления и колебательной скорости. Так как здесь используется комплексное описание физических полей, эту формулу необходимо видоизменить:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4}\left(\overline{\tilde{p}\,\mathbf{u}} + \overline{\tilde{p}\,\mathbf{u}^*} + \overline{\tilde{p}^*\,\mathbf{u}} + \overline{\tilde{p}^*\,\mathbf{u}^*}\right)$$

где “звёздочка” обозначает комплексное сопряжение.

Поскольку все физические величины задачи имеют временную зависимость вида $e^{-i\omega t}$, то $\overline{\tilde{p}\,\mathbf{u}} = \overline{\tilde{p}^*\,\mathbf{u}^*} = 0$, $\overline{\tilde{p}\,\mathbf{u}^*} = \tilde{p}\,\mathbf{u}^*$, $\overline{\tilde{p}^*\,\mathbf{u}} = \tilde{p}^*\,\mathbf{u}$, так что

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4}\left(\tilde{p}\,\mathbf{u}^* + \tilde{p}^*\,\mathbf{u}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\tilde{p}\,\mathbf{u}^*\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\tilde{p}^*\,\mathrm{u}\right)$$

В падающей волне

$$\tilde{p}_+ = -\rho_1\frac{\partial}{\partial t}A_+\frac{e^{i(k_1 r-\omega t)}}{r} = i\omega\rho_1 A_+\frac{e^{i(k_1 r-\omega t)}}{r}$$

$$\mathbf{u}_+ = \frac{\partial}{\partial r}A_+\frac{e^{i(k_1 r-\omega t)}}{r} = A_+\frac{e^{i(k_1 r-\omega t)}}{r^2}(ik_1 r - 1)$$

И тогда

$$\left|\mathbf{S}_+\right| = \frac{1}{4}\left(\frac{i\omega\rho_1\left|A_+\right|^2}{r^3}(-ik_1r-1) - \frac{i\omega\rho_1\left|A_+\right|^2}{r^3}(ik_1r-1)\right) =$$

$$= \frac{\omega k_1\rho_1\left|A_+\right|^2}{r^2}$$

Аналогичные выкладки показывают, что в прошедшей волне

$$\left|\mathbf{S}\right| = \frac{1}{4}\left(\frac{i\omega\rho_2\left|B\right|^2}{r^3}(-ik_2r-1) - \frac{i\omega\rho_2\left|B\right|^2}{r^3}(ik_2r-1)\right) =$$

$$= \frac{\omega k_2\rho_2\left|B\right|^2}{r^2}$$

так что коэффициент прохождения определяется величиной

$$T = \frac{\left|\mathbf{S}\right|}{\left|\mathbf{S}_+\right|} = \frac{k_2\rho_2\left|B\right|^2}{k_1\rho_1\left|A_+\right|^2} = \frac{c_1\rho_2\left|B\right|^2}{c_2\rho_1\left|A_+\right|^2}$$

Для того чтобы окончательно определить коэффициент прохождения, необходимо знать отношение $\left|B\right|^2 \Big/ \left|A_+\right|^2$. Чтобы его найти, нужно воспользоваться граничными условиями, которые для рассматриваемой задачи имеют вид

$$\rho_1 \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right|_{r=R} = \rho_2 \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right|_{r=R}, \quad \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=R} = \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=R}$$

Подстановка в эти соотношения потенциалов φ_1 и φ_2 порождает систему уравнений, связывающих амплитуды A_+, $A\_$ и B.

$$\rho_1\left(A_+e^{ik_1R} + A\_e^{-ik_1R}\right) = \rho_2 Be^{ik_2R}$$

$$A_+e^{ik_1R}(ik_1R-1) - A\_e^{-ik_1R}(ik_1R+1) = Be^{ik_2R}(ik_2R-1)$$

Исключение из этой системы амплитуды $A\_$:

$$2ik_1\rho_1R\,e^{ik_1R}A_+ = (\rho_2 - \rho_1 + iR(k_1\rho_2 + k_2\rho_1))e^{ik_2R}B$$

позволяет определить искомое отношение $|B|^2 \big/ |A_+|^2$, так что в результате коэффициент прохождения определяется выражением

$$T = \frac{4\rho_1\rho_2 c_1 c_2 \omega^2 R^2}{(\rho_2 - \rho_1)^2 c_1^2 c_2^2 + \omega^2 R^2 (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}$$

Задача 4.

В центре сферического пузырька воздуха, окружённого водой, излучается короткий звуковой импульс, длительность которого существенно меньше времени пробега звуковой волны от центра к границе пузырька. Оценить за какое время звуковая волна, сгенерированная в пузырьке воздуха диаметром 1 мм, излучит долю $q = 0.5$ своей энергии в окружающую его воду. Плотность воздуха принять равной $1.22\,\text{кг}\big/\text{м}^3$. Частота заполнения звукового импульса $f = 5 \cdot 10^5$ Гц.

Решение. Поскольку волна сферическая, то её фазовый фронт на границе пузырька совпадает с самой границей. В этом случае коэффициент передачи энергии волны за один акт падения на границу можно приближённо оценить величиной $x \approx 10^{-3}$ (результат задачи 2).

Во время первого акта падения волны на границу в воду пройдёт доля x её энергии, а внутри пузырька останется доля $1 - x$. Во время второго акта в воду перейдёт доля $x(1 - x)$, а в пузырьке останется доля $1 - x - x(1 - x) = (1 - x)^2$. За третий акт в воду перейдёт доля $x(1 - x)^2$, а в пузырьке останется доля $(1 - x)^3$ и т.д. За N актов падения волны в воду перейдёт доля

$$x(1 + (1 - x) + (1 - x)^2 + \ldots) = x\sum_{i=0}^{N-1}(1 - x)^i = x\frac{1 - (1 - x)^N}{1 - (1 - x)} =$$

$$= 1 - (1 - x)^N = q$$

В таком случае, число актов падения звуковой волны на поверхность пузырька, необходимое для излучения доли q, определится величиной

$$N = \frac{\ln(1-q)}{\ln(1-x)}$$

Между актами падения протекает время $\Delta T = d/c$, где d – диаметр пузырька, c – скорость звука в воздухе. В результате искомое время излучения доли q энергии волны в воду составляет величину

$$T = N\,\Delta T = \frac{d}{c}\frac{\ln(1-q)}{\ln(1-x)}$$

Подстановка $d = 10^{-3}$ м, $c = 343$ м/с, $q = 0.5$, $x = 10^{-3}$ приводит к оценке $T \approx 2 \cdot 10^{-3}$ с. Волна практически полностью излучит свою энергию в воздух ($q = 0.99$) за $T \approx 1.4 \cdot 10^{-2}$ с.

Задача 5.

Дать решение задачи 1 для случая $\frac{c_2}{c_1}\sin\theta_1 \geq 1$ на основе волнового описания физических полей.

Решение. Введём систему координат, в которой ось x расположена в плоскости падения волны и направлена вдоль поверхности раздела первой и второй областей. Ось z направим перпендикулярно границе в первую область. В первой области акустический потенциал падающей волны описывается соотношением

$$\phi_1 = \left(A_+ e^{i\lambda z} + A_- e^{-i\lambda z}\right) e^{i(kx-\omega t)}, \quad k = \frac{\omega}{c_1}\sin\theta_1, \quad \lambda = -\frac{\omega}{c_1}\cos\theta_1$$

Так как $\frac{c_2}{c_1}\sin\theta_1 \geq 1$, то во второй области потенциал задаются выражением

$$\phi_2 = \left(B_+ e^{\mu z} + B_- e^{-\mu z}\right) e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\mu = \sqrt{k^2 - \omega^2/c_2^2} = \frac{\omega}{c_1}\sqrt{\sin^2\theta_1 - c_1^2/c_2^2}$$

По условию задачи $c_1 < c_3$ и потому в третьей области

$$\phi_3 = De^{\nu z}\, e^{i(kx-\omega t)}, \quad \nu = \sqrt{k^2 - \omega^2/c_3^2} = \frac{\omega}{c_1}\sqrt{\sin^2\theta_1 - c_1^2/c_3^2}$$

Использование определения давления и колебательной скорости в звуковой волне ($\tilde{p} = -\rho\,\partial\varphi/\partial t$, $\mathbf{u} = \nabla\varphi$) позволяет записать физические поля задачи в виде

$$\tilde{p}_1 = i\omega\rho_1\left(A_+e^{i\lambda z} + A_-e^{-i\lambda z}\right)e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\mathbf{u}_1 = \left[ik\left(A_+e^{i\lambda z} + A_-e^{-i\lambda z}\right)\mathbf{e}_x + i\lambda\left(A_+e^{i\lambda z} - A_-e^{-i\lambda z}\right)\mathbf{e}_z\right]e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\tilde{p}_2 = i\omega\rho_2\left(B_+e^{\mu z} + B_-e^{-\mu z}\right)e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\mathbf{u}_2 = \left[ik\left(B_+e^{\mu z} + B_-e^{-\mu z}\right)\mathbf{e}_x + \mu\left(B_+e^{\mu z} - B_-e^{-\mu z}\right)\mathbf{e}_z\right]e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\tilde{p}_3 = i\omega\rho_3 De^{\nu z}\, e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\mathbf{u}_3 = \left[ik\, De^{\nu z}\,\mathbf{e}_x + \nu\, De^{\nu z}\,\mathbf{e}_z\right]e^{i(kx-\omega t)}$$

Здесь $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_z$ – единичные орты вдоль осей x и z соответственно.

На основании этих соотношений вычисляются усреднённые за период колебаний плотности потоков акустической энергии в падающей, отражённой волнах в первой области, а также во второй и третьей областях. Делается это с помощью соотношения

$$\mathrm{S} = \frac{1}{4}\left(\tilde{p}\,\mathbf{u}^* + \tilde{p}^*\,\mathbf{u}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\tilde{p}\,\mathbf{u}^*\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\tilde{p}^*\,\mathrm{u}\right)$$

Таким образом, в падающей и отражённой волнах

$$\mathbf{S}_+ = \frac{\omega\rho_1}{2}|A_+|^2(k\mathbf{e}_x + \lambda\mathbf{e}_z), \quad \mathbf{S}_- = \frac{\omega\rho_1}{2}|A_-|^2(k\mathbf{e}_x - \lambda\mathbf{e}_z)$$

В области 2 имеет место

$$\mathbf{S}_2 = \frac{\omega\rho_2 k}{2}\left(\left| B_+\right|^2 e^{2\mu z} + \left| B_-\right|^2 e^{-2\mu z} + B_+ B_-^* + B_+^* B_-\right)\mathbf{e}_x +$$

$$+ i\frac{\omega\rho_2\mu}{2}\left(B_+^* B_- - B_+ B_-^*\right)\mathbf{e}_z$$

И, наконец, в третьей области

$$\mathbf{S}_3 = \frac{\omega\rho_3 k}{2}\left| D\right|^2 e^{2\nu z}\mathbf{e}_x$$

Из результата, полученного для третьей области сразу видно, что акустическая энергия не переносится внутрь этой области и следует ожидать, что падающая волна целиком отразится от границы между первой и второй областями. Но этот результат ещё нужно доказать. Поскольку в третьей области нет переноса энергии вдоль оси z, то во второй области при $z = -H$ (то есть на границе между плоскопараллельным слоем и третьей областью) также отсутствует перенос энергии вдоль этой оси. Это, как следует из выражения для $\mathbf{S}_2$ приводит к требованию: $B_+^* B_- - B_+ B_-^* = 0$. Для того чтобы показать выполнение этого соотношения, необходимо воспользоваться граничными условиями при $z = -H$:

$$\left.\tilde{p}_2\right|_{z=-H} = \left.\tilde{p}_3\right|_{z=-H}, \quad \left.\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_z\right|_{z=-H} = \left.\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{e}_z\right|_{z=-H}$$

Подстановка в эти условия вычисленных выше выражений для физических полей приводит к уравнениям

$$\rho_2\left(B_+ e^{-\mu H} + B_- e^{\mu H}\right) = \rho_3 D e^{-\nu H}, \mu\left(B_+ e^{-\mu H} - B_- e^{\mu H}\right) = \nu D e^{-\nu H}$$

Из этих уравнений следует

$$B_+ = \frac{\mu\rho_3 + \nu\rho_2}{2\mu\rho_2} D e^{(\mu-\nu)H}, \qquad B_- = \frac{\mu\rho_3 - \nu\rho_2}{2\mu\rho_2} D e^{-(\mu+\nu)H}$$

Так как ρ_2, ρ_3, μ и ν – действительные величины, то требование $B_+^* B_- - B_+ B_-^* = 0$ выполняется и во второй среде отсутствует перенос энергии вдоль оси z. Но тогда в первой среде на границе первой и второй сред должен отсутствовать поток энергии вдоль этой оси. Из выражений для $\mathbf{S}_\pm$ это означает равенство $|A_+|^2 = |A_-|^2$. Так как коэффициент отражения определяется величиной $R = \dfrac{|\mathbf{S}_-|}{|\mathbf{S}_+|} = \dfrac{|A_-|^2}{|A_+|^2}$, то видно, что $R = 1$ – падающая волна полностью отразится, и этот результат не зависит ни от толщины слоя H, ни от соотношения между скоростями во второй и третьей областях.

Главы 5, 6. Геометрическая акустика. Лучевое описание звукового поля в неоднородных средах

Глава посвящена описанию акустических волн в неоднородных средах, таких что в локальной области пространства волна представима в виде набора лучей, для которых акустический потенциал имеет вид

$$\phi = A(\mathbf{r},t)\exp(i\psi(\mathbf{r},t)) \tag{5.1}$$

где $\psi(\mathbf{r},t)$ – эйконал, $A(\mathbf{r},t)$ – медленно меняющаяся (по сравнению с эйконалом) амплитуда.

Для этих функций приближённо справедливы уравнения эйконала и переноса амплитуды

$$\left(\psi_t'\right)^2 - c^2\left(\nabla\psi\right)^2 = 0, \quad 2\nabla A\nabla\psi + A\Delta\psi = 0 \tag{5.2}$$

При этом эйконал локально должен удовлетворять приближённым соотношениям

$$\nabla\psi \approx \mathbf{k}, \quad \psi_t' \approx -\omega \tag{5.3}$$

В неоднородной среде звуковой луч испытывает явление рефракции, количественное описание которого опирается на уравнение

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{c}\left(\mathbf{n}\cdot\nabla c\right) \tag{5.4}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к траектории луча, R – радиус кривизны траектории в точке наблюдения.

Условие применимости лучевой теории имеет вид

$$\frac{\lambda}{c}\left|\nabla c\right| << 1 \tag{5.5}$$

где λ – длина волны.

Важной характеристикой конкретного звукового луча является его лучевой инвариант (неизменная величина), определяемый выражением

$$I = \frac{\sin\theta(\mathbf{r})}{c(\mathbf{r})} \tag{5.6}$$

Здесь $\theta(\mathbf{r})$ – угол между направлением распространения луча и градиентом скорости звука в точке наблюдения.

Задачи к Главам 5, 6.

Задача 1.

В двумерном случае, когда распределение скорости звука в воде зависит только от вертикальной координаты z, определить предельный угол θ к вертикали излучения луча из точки, находящейся на глубине H, такой что луч отразится от поверхности воды, не достигнув точки поворота.

Решение. Для того чтобы ответить на этот вопрос нужно использовать понятие лучевого инварианта $I = \dfrac{\sin\theta(z)}{c(z)}$. В исходной точке, на глубине $z = -H$ этот инвариант принимает значение $I(-H) = \dfrac{\sin\theta}{c(-H)}$. Если в какой-либо точке $z_* \in [-H, 0]$ ($z = 0$ – координата поверхности) луч поворачивается, то есть $\sin\theta(z_*) = 1$, инвариант представляется в виде $I(z_*) = \dfrac{1}{c(z_*)}$. Для того чтобы луч достиг поверхности необходимо выполнение соотношения

$$I(-H) < I(z_*), \quad \forall z \in [-H, 0]$$

Отсюда следует, что угол θ должен удовлетворять условию

$$\theta < \arcsin\frac{c(-H)}{c(z_*)}, \quad \forall z \in [-H,0]$$

Это условие определяет предельный угол выражением

$$\theta_* = \arcsin\frac{c(-H)}{\max c(z)}, \quad z \in [-H,0]$$

Если угол излучения меньше, чем данный предельный угол, луч дойдёт до поверхности.

Задача 2.

Рассматривается двумерное распространение звукового луча в плоскости (x,z). Скорость звука зависит только от координаты z. Рассчитать траекторию луча, выходящего из точки (x_0,z_0) под углом θ к вертикали, при условии, что скорость звука на длине пути луча изменяется на малую величину, а сама длина пути не превышает длину волны.

<u>Решение</u>. Рассмотрим дифференциально малый отрезок траектории, которому соответствуют дифференциально малые смещения луча dx и dz вдоль осей x и z соответственно. Использование текущего угла $\theta(x,z)$ наклона луча к вертикали позволяет записать соотношение

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\sin\theta(x,z)}{\cos\theta(x,z)}$$

Вдоль луча сохраняется лучевой инвариант I, который в начальной точке (x_0,z_0) имеет значение

$$I = \frac{\sin\theta}{c(z_0)}$$

Так как $I = \text{const}$, то имеет место равенство

$$\frac{\sin\theta}{c(z_0)} = \frac{\sin\theta(x,z)}{c(z)}$$

Из этого равенства определяются величины $\sin\theta(x,z)$ и $\cos\theta(x,z)$:

$$\sin\theta(x,z) = \frac{c(z)}{c(z_0)}\sin\theta$$

$$\cos\,\theta(x,z) = \sqrt{1-\sin^2\theta(x,z)} = \frac{c(z)}{c(z_0)}\sqrt{\frac{c^2(z_0)}{c^2(z)} - \sin^2\theta}$$

В результате уравнение траектории приобретает вид

$$\frac{d\,x}{d\,z} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\dfrac{c^2(z_0)}{c^2(z)} - \sin^2\theta}}$$

Интегрирование этого уравнения позволяет связать горизонтальную и вертикальную координаты точки траектории луча:

$$x = x_0 + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\sin\theta\,d\,\xi}{\sqrt{\dfrac{c^2(z_0)}{c^2(\xi)} - \sin^2\theta}}$$

Это соотношение справедливо, если на своём пути луч не достигает точки поворота, вертикальная координата которой определяется уравнением

$$c(z_*) = \frac{c(z_0)}{\sin\theta}$$

Примем, для простоты, что на своём пути луч не испытывает поворота за счёт рефракции. Теперь, используя малую изменчивость скорости звука на пути луча, разложим величину $c^2(z_0)/c^2(\xi)$ в ряд:

$$\frac{c^2(z_0)}{c^2(\xi)} = \frac{c^2(z_0)}{\left(c(z_0) - (z_0-\xi)c'(z_0) + (z_0-\xi)^2 c''(z_0)/2 + \ldots\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\left(1 - (z_0-\xi)c'(z_0)/c(z_0) + (z_0-\xi)^2 c''(z_0)/2c(z_0) + \ldots\right)^2} \approx$$

$$\approx 1 + \frac{2(z_0-\xi)c'(z_0)}{c(z_0)}$$

Последнее равенство обусловлено тем, что в лучевом приближении выполняется условие применимости лучевой теории $\frac{\lambda}{c}\left|\nabla c\right| << 1$, которое в данном случае имеет вид $\left|\frac{(z-\xi)c'(z_0)}{c(z_0)}\right| << 1$, что справедливо, поскольку $\left|z-\xi\right| < \lambda$.

Подстановка полученного разложения в подынтегральное выражение определяет связь между координатами формулой

$$x \approx x_0 + \sin\theta \int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{2(z_0-\xi)c'(z_0)}{c(z_0)}}} =$$

$$= x_0 + \frac{c(z_0)\sin\theta}{c'(z_0)}\left(\cos\ \theta - \sqrt{\cos^2\theta + \frac{2(z_0-z)c'(z_0)}{c(z_0)}}\right)$$

Полученное соотношение выражает горизонтальную координату точки траектории луча через её вертикальную координату. Зачастую удобнее иметь обратную связь, которая, как следует из представленной формулы, имеет вид:

$$z = z_0 + (x-x_0)\operatorname{ctg}\theta - \frac{c'(z_0)(x-x_0)^2}{2c(z_0)\sin^2\theta}$$

Видно, что квадратичный по $(x-x_0)$ член описывает явление рефракции в локальной окрестности точки излучения.

Задача 3.

Получить решение задачи 2 при условии, что размеры области распространения луча может превышать длину волны.

<u>Решение</u>. Общий ход решения повторяет подход, изложенный выше, отличие состоит лишь в аппроксимации величины $c^2(z_0)/c^2(\xi)$. Пусть вертикальная координата луча в рассматриваемой области ограничена некоторой величиной $z=\zeta$. Так как отклонения скорости звука предполагаются малыми, допустима линейная аппроксимация

$$\frac{c^2(z_0)}{c^2(\xi)} = \alpha(\xi - z_0) + 1, \quad \xi \in [z_0, \zeta]$$

Здесь $\alpha = \dfrac{c^2(z_0)}{\zeta - z_0}\left(\dfrac{1}{c^2(\zeta)} - \dfrac{1}{c^2(z_0)}\right)$ – средний градиент величины $c^2(z_0)/c^2(\xi)$ на отрезке $\xi \in [z_0, \zeta]$. Видно, что на концах отрезка аппроксимируемая величина принимает необходимые значения.

Таким образом, имеет место выражение

$$x = x_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{\sin\theta\, d\xi}{\sqrt{\cos^2\theta + \alpha(\xi - z_0)}}$$

интегрирование которого приводит к соотношению

$$x = x_0 + \frac{2\sin\theta}{\alpha}\left(\sqrt{\cos^2\theta + \alpha(z - z_0)} - \cos\theta\right)$$

Обратная связь определяется формулой

$$z = z_0 + (x - x_0)\operatorname{ctg}\theta + \frac{\alpha(x - x_0)^2}{4\sin^2\theta}.$$

Справедливость подходов к решению задач 2, 3, основанных на малости вариаций скорости звука, подтверждается обширными измерительными данными.

Задача 4.

Рассчитать фазовый набег, возникающий при распространении луча, излучённого монохроматическим источником частоты ω, в условиях задачи 3. Представить результат в двух видах: как функцию вертикальной координаты z точки луча и как функцию горизонтальной координаты x.

Решение. Для того чтобы вычислить фазовые набеги при движении звукового луча, необходимо учесть длину криволинейного пути, проходимого лучом, и распределение фазовой скорости вдоль этого пути. С этой целью воспользуемся уравнением эйконала $\left(\psi'_t\right)^2 - c^2\left(\nabla\psi\right)^2 = 0$, которое при переходе в систему координат, связанную с самим лучом, имеет вид

$$\frac{d\,\psi(z)}{d\,l(z)} = \frac{\omega}{c(z)}$$

где $d\,l(z)$ – дифференциальное малое смещение вдоль луча вблизи точки его траектории с координатами (x, z) (зависимость только от z определяется наличием связи между горизонтальной и вертикальной координатами точки на луче).

Поскольку дифференциал дуги определяется соотношением

$$d\,l = \sqrt{d\,x^2 + d\,z^2} = \sqrt{\left(\frac{d\,x}{d\,z}\right)^2 + 1}\; d\,z = \frac{c(z_0)}{c(z)} \frac{d\,z}{\sqrt{\frac{c^2(z_0)}{c^2(z)} - \sin^2\theta}}$$

то

$$d\,\psi(z) = \frac{\omega c(z_0)}{c^2(z)} \frac{d\,z}{\sqrt{\frac{c^2(z_0)}{c^2(z)} - \sin^2\theta}} = \frac{\omega c^2(z_0)}{c(z_0)c^2(z)} \frac{d\,z}{\sqrt{\frac{c^2(z_0)}{c^2(z)} - \sin^2\theta}} =$$

$$= \frac{\omega}{c(z_0)} \frac{\alpha(z - z_0) + 1}{\sqrt{\alpha(z - z_0) + \cos^2\theta}} d\,z$$

Таким образом, фазовый набег на пути луча определяется интегралом

$$\psi(z) = \frac{\omega}{c(z_0)} \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\alpha(\xi - z_0) + 1}{\sqrt{\alpha(\xi - z_0) + \cos^2\theta}} d\,\xi =$$

$$= \frac{2\omega}{3c(z_0)} (z - z_0)\sqrt{\alpha(z - z_0) + \cos^2\theta} +$$

$$+ \frac{2\omega}{3\alpha c(z_0)} (1 + 2\sin^2\theta)\left(\sqrt{\alpha(z - z_0) + \cos^2\theta} - \cos\theta\right)$$

Использование связи между горизонтальной и вертикальной координатами точки луча (см. задачу 3) позволяет получить представление для фазового набега как функции горизонтальной координаты:

$$\psi(x)=\frac{\omega}{c(z_0)}\frac{x-x_0}{\sin\theta}\left(1+\frac{\alpha(x-x_0)}{2}\operatorname{ctg}\theta+\frac{\alpha^2(x-x_0)^2}{12\sin^2\theta}\right)$$

Задача 5.

Приняв за основу условия задачи 3, рассчитать величину ослабления звукового луча, задавшись моделью сферического расхождения звука в среде.

<u>Решение</u>. Для решения этой задачи нужно вычислить длину криволинейного пути L, пройденного лучом. Тогда ослабление равно $1/L$. Длина пути определяется соотношением

$$L(z)=\int_{z_0}^{z} l(\xi)\,d\xi=\int_{z_0}^{z}\frac{c(z_0)}{c(\xi)}\frac{d\xi}{\sqrt{\dfrac{c^2(z_0)}{c^2(\xi)}-\sin^2\theta}}=$$

$$=\int_{z_0}^{z}\frac{\sqrt{\alpha(\xi-z_0)+1}}{\sqrt{\alpha(\xi-z_0)+\cos^2\theta}}\,d\xi$$

Для того чтобы проинтегрировать это соотношение вводится переменная y, такая что

$$y=\frac{\sqrt{\alpha(\xi-z_0)+1}}{\sqrt{\alpha(\xi-z_0)+\cos^2\theta}}$$

В этом случае $\xi=z_0+\dfrac{y^2\cos^2\theta-1}{\alpha(1-y^2)}$ и, соответственно,

$$d\xi=-\frac{2y\sin^2\theta}{\alpha(1-y^2)}dy\,.$$

Подстановка этих замен в интеграл определяет длину пути выражением

$$L(z) = -\frac{2\sin^2\theta}{\alpha}\int_{y_-}^{y_+}\frac{y^2 d\,y}{(y^2-1)^2} =$$

$$= -\frac{\sin^2\theta}{2\alpha}\int_{y_-}^{y_+}\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}+\frac{1}{(y-1)^2}+\frac{1}{(y+1)^2}\right)d\,y$$

Здесь $y_- = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $y_+ = \sqrt{\dfrac{\alpha(z-z_0)+1}{\alpha(z-z_0)+\cos^2\theta}}$.

Элементарное вычисление табличных интегралов приводит к окончательному результату:

$$L(z) = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{(\alpha(z-z_0)+1)(\alpha(z-z_0)+\cos^2\theta)} - \cos\theta\right) -$$

$$-\frac{\sin^2\theta}{2\alpha}\ln\frac{(y_+-1)(1+\cos\theta)}{(y_++1)(1-\cos\theta)}$$

Задача 6.

Для заданного распределения $c(z)$ определить максимальный радиус кривизны луча. Как точка максимального радиуса кривизны луча соотносится с точкой поворота?

Решение. Радиус кривизны траектории луча определяется формулой $\dfrac{1}{R} = -\dfrac{1}{c}(\mathbf{n}\cdot\nabla c)$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к траектории. Для того чтобы конкретизировать это выражение, необходимо определить вектор $\mathbf{n}$. Если траектория задана выражением $f(x,z)=0$, то $\mathbf{n} = \nabla f \big/ |\nabla f|$. Как было показано в задаче 2, координаты точки луча связаны соотношением

$$x = x_0 + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\sin\theta\, d\xi}{\sqrt{\dfrac{c^2(z_0)}{c^2(\xi)} - \sin^2\theta}}$$

Таким образом, уравнение траектории имеет вид:

$$f(x,z) = x - x_0 - \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\sin\theta\, d\xi}{\sqrt{\dfrac{c^2(z_0)}{c^2(\xi)} - \sin^2\theta}} = 0$$

Поскольку $\nabla f = f'_x \mathbf{e}_x + f'_z \mathbf{e}_z$, а $\nabla c(z) = c'_z \mathbf{e}_z$, то радиус кривизны в данном случае определяется выражением

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{c(z)}(\mathbf{n}\cdot\nabla c) = -\frac{1}{c(z)} \frac{(f'_x \mathbf{e}_x + f'_z \mathbf{e}_z)\cdot c'_z \mathbf{e}_z}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_z}} =$$

$$= -\frac{1}{c(z)} \frac{f'_z c'_z}{\sqrt{f'^2_x + f'^2_z}}$$

Нетрудно вычислить необходимые производные:

$$f'_x = 1, \quad f'_z = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{\dfrac{c^2(z_0)}{c^2(z)} - \sin^2\theta}}$$

Так как

$$f'^2_x + f'^2_z = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\dfrac{c^2(z_0)}{c^2(z)} - \sin^2\theta} = \frac{1}{\dfrac{c^2(z_0)}{c^2(z)} - \sin^2\theta} \frac{c^2(z_0)}{c^2(z)},$$

то приходим к окончательному результату:

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin\theta\, c'_z}{c(z_0)}$$

Поскольку величина $\sin\theta / c(z_0)$ есть лучевой инвариант, то максимум радиуса кривизны луча достигается при минимуме производной c'_z. Таким образом, имеем:

$$R_{\max} = \frac{c(z_0)}{\sin\theta\,(c'_z)_{\min}}$$

В случае, когда луч излучён вертикально вверх ($\theta = 0$), траектория луча представляет собой прямую линию с $R = \infty$ независимо от вида функции $c(z)$ и радиус кривизны при этом принимает самое максимальное значение из всех возможных.

Другой возможный случай обращения радиуса кривизны в бесконечность достигается в точке, где $c'_z = 0$ – это точка локальной однородности среды и луч в окрестности этой точки также идёт по прямой.

В общем случае максимальный радиус кривизны никак не соотносится с точкой поворота. Если же известно, что максимум радиуса кривизны достигается именно в точке поворота, то это налагает определённые условия на функцию $c(z)$. Действительно, в точке поворота выполняется условие

$$\frac{c(z_0)}{\sin\theta} = c(z)$$

Это следствие уравнения для лучевого инварианта. Таким образом, в окрестности точки поворота $R = \dfrac{c(z)}{c'_z}$. Наличие экстремума радиуса кривизны в точке поворота приводит к требованию, чтобы в её окрестности распределение скорости звука определялось выражением

$$c(z) = c_0 \exp(az + b)$$

где c_0, a и b – некоторые постоянные.

Главы 7, 8. Волновое описание звукового поля в неоднородных средах. Отражение звуковых волн от дна океана

В неоднородных средах волновое уравнение учитывает зависимость скорости звука от координаты точки наблюдения, то есть имеет вид

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2(\mathbf{r})\Delta\phi = f(\mathbf{r},t) \qquad (6.1)$$

где $f(\mathbf{r},t)$ – функция, описывающая распределение источников звука и их изменение во времени.

В случае, когда в качестве модели дна океана выбирается “жидкая” модель – описание физических полей в нём проводится на основе одного акустического потенциала ϕ. В случае модели “твёрдого” дна необходимо использовать как скалярный потенциал ϕ, так и векторный $\boldsymbol{\psi}$.

В двумерном случае, когда плоскости распространения волн совпадают с плоскостью (x,z) декартовой системы координат, а границы раздела описываются соотношениями вида $z = z_0$, векторный потенциал имеет лишь одну компоненту $\boldsymbol{\psi} = \psi\,\mathbf{e}_y$, нормальные напряжения в жидких средах определяются величиной

$$\rho_f c_f^2 \Delta\phi_f \qquad (6.2)$$

где ρ_f, c_f и ϕ_f – плотность жидкой среды, скорость звука в ней и акустический потенциал соответственно; тангенциальные напряжения в жидкости равны нулю; нормальные напряжения в упругой среде задаются выражением

$$\lambda\Delta\phi + 2\mu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right) \qquad (6.3)$$

где ϕ, ψ – скалярный и векторный потенциалы в упругой среде; касательные напряжения представляются соотношением

$$2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \qquad (6.4)$$

Нормальные компоненты скоростей в жидкости и упругом теле определяются величинами

$$\frac{\partial\phi_f}{\partial z} \qquad (6.5)$$

для жидкости и

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6.6}$$

для упругого тела.

Условия на границе между жидкостью и упругим телом формируются в результате приравнивания выражений (6.2) и(6.3) (динамическое граничное условие для нормальных напряжений), обращения в ноль выражения (6.4) (динамическое граничное условие для касательных напряжений), приравнивания выражений (6.5) и (6.6) (кинематическое граничное условие).

Задачи к Главам 7, 8.

Задача 1.

На плоскую границу раздела между водой (плотность ρ_w, скорость звука c) и упругим телом (плотность ρ, продольная и поперечная скорости – $c_{\|}$, $c_{\perp}$ соответственно) под углом θ падает (из воды) плоская монохроматическая волна частоты ω единичной амплитуды. Определить амплитуду волны Стонели, возбуждаемой на границе раздела.

Решение. Для существования волны Стонели должны выполняться условия

$$k > \frac{\omega}{c}, \quad k > \frac{\omega}{c_{\perp}}, \quad k > \frac{\omega}{c_{\|}}$$

где k – волновое число этой волны.

Описанный в задаче способ возбуждения волны Стонели характерен тем, что волновой вектор $\mathbf{k}$ должен совпадать с проекцией на границу раздела волнового вектора падающей плоской волны. Таким образом, $k = \frac{\omega}{c}\sin\theta$. Это означает, что первое из приведённых выше условий не выполняется никогда. Следовательно, волну Стонели подобным способом нельзя возбудить, то есть её амплитуда равна нулю.

Задача 2.

Определить все возможные структуры физических полей в воде и морском дне, если из воды на плоское горизонтальное дно под углом θ к вертикали падает плоская монохроматическая волна. Скорость звука в воде – c_1. Плотность – ρ_1. Дно представляет собой плоский горизонтальный слой толщины H и плотности ρ, со скоростями продольных и поперечных волн $c_{\|}$ и $c_{\perp}$ соответственно ($c_{\|} > c_{\perp}$), который расположен на полубесконечной "жидкой" подложке характеризуемой скоростью звука c_2 и плотностью ρ_2. Возможно ли в данной постановке возбуждение волны Стонели? Если это возможно, то указать на какой поверхности и при каких условиях она возбуждается.

Решение. Для описания всех физических полей достаточно знать потенциалы (скалярный и векторный) во всех областях задачи. В первой области (над пластиной) всё отесывается одним скалярным потенциалом

$$\varphi_1 = \left(e^{i\alpha z} + Ae^{-i\alpha z}\right)e^{i(kx-\omega t)}, \quad k = \frac{\omega}{c_1}\sin\theta, \quad \alpha = -\frac{\omega}{c_1}\cos\theta$$

где A – амплитуда отражённой волны, а амплитуда падающей принята равной единице.

В области под пластиной также достаточно одного скалярного потенциала, общий вид которого представлен ниже:

$$\varphi_2 = Fe^{i\kappa z}\, e^{i(kx-\omega t)}$$

Подстановка этого выражения в волновое уравнение $\dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} - c_2^2\Delta\varphi_2 = 0$ приводит к определению волнового числа κ:

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} - k^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}\left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - \sin^2\theta\right)$$

При $\dfrac{c_1}{c_2} > \sin\theta$ значение κ чисто действительное, а при $\dfrac{c_1}{c_2} < \sin\theta$ – чисто мнимое. Таким образом, имеются два варианта структуры потенциала φ_2:

$$I.\ \frac{c_1}{c_2} > \sin\theta,\ \varphi_2 = Fe^{i\kappa z}\, e^{i(kx-\omega t)},\ \kappa = -\frac{\omega}{c_1}\sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} - \sin^2\theta}$$

$$II.\ \frac{c_1}{c_2} < \sin\theta,\ \varphi_2 = Fe^{\kappa z}\, e^{i(kx-\omega t)},\ \kappa = \frac{\omega}{c_1}\sqrt{\sin^2\theta - \frac{c_1^2}{c_2^2}}$$

В пластине необходимо описать два потенциала – скалярный φ и векторный $\boldsymbol{\psi}$. В связи с тем, что задача двумерна (нет зависимости от координаты y), векторный потенциал представим в виде $\boldsymbol{\psi} = \psi \mathbf{e}_y$, так что необходимо описать структуру только двух скалярных функций φ и ψ. Общий вид этих функций приведён ниже:

$$\varphi = \left(B_+ e^{i\beta z} + B_- e^{-i\beta z}\right) e^{i(kx-\omega t)}, \quad \psi = \left(D_+ e^{i\gamma z} + D_- e^{-i\gamma z}\right) e^{i(kx-\omega t)}$$

Подстановка φ и ψ в волновые уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c_{\parallel}^2 \Delta\varphi = 0, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c_{\perp}^2 \Delta\psi = 0$$

приводит к соотношениям

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c_{\parallel}^2} - k^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}\left(\frac{c_1^2}{c_{\parallel}^2} - \sin^2\theta\right)$$

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c_{\perp}^2} - k^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}\left(\frac{c_1^2}{c_{\perp}^2} - \sin^2\theta\right)$$

В зависимости от соотношений между c_1, $c_{\parallel}$, $c_{\perp}$ имеют место три случая.

1. $c_1 > c_{\parallel} > c_{\perp}$

$$\varphi = \left(B_+ e^{i\beta z} + B\_ e^{-i\beta z}\right) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \beta = -\frac{\omega}{c_1}\sqrt{\frac{c_1^2}{c_{\parallel}^2} - \sin^2\theta}$$

$$\psi = \left(D_+ e^{i\gamma z} + D\_ e^{-i\gamma z}\right) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \gamma = -\frac{\omega}{c_1}\sqrt{\frac{c_1^2}{c_{\perp}^2} - \sin^2\theta}$$

2. $c_{\parallel} > c_1 > c_{\perp}$

$$\phi = \left(B_+ e^{\beta z} + B\_ e^{-\beta z}\right) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \beta = \frac{\omega}{c_1}\sqrt{\sin^2\theta - \frac{c_1^2}{c_{\parallel}^2}}$$

$$\psi = \left(D_+ e^{i\gamma z} + D\_ e^{-i\gamma z}\right) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \gamma = -\frac{\omega}{c_1}\sqrt{\frac{c_1^2}{c_{\perp}^2} - \sin^2\theta}$$

3. $c_{\parallel} > c_{\perp} > c_1$

$$\varphi = \left(B_+ e^{\beta z} + B\_ e^{-\beta z}\right) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \beta = \frac{\omega}{c_1}\sqrt{\sin^2\theta - \frac{c_1^2}{c_{\parallel}^2}}$$

$$\psi = \left(D_+ e^{\gamma z} + D\_ e^{-\gamma z}\right) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \gamma = \frac{\omega}{c_1}\sqrt{\sin^2\theta - \frac{c_1^2}{c_{\perp}^2}}$$

Таким образом, имеются $2 \times 3 = 6$ возможных ситуаций, которые описываются комбинацией одной из двух структур поля под пластиной и одной из трёх структур поля в пластине.

Волна Стонели представляет собой поверхностную волну, характеристики которой экспоненциально убывают при удалении от границы, вдоль которой она распространяется. Ясно, что вблизи верхней границы пластины ($z = 0$) такая волна существовать не может, поскольку поле φ_1 не обладает требуемыми свойствами. Однако она может существовать вблизи нижней границы ($z = -H$), так как совокупность решений (II, 3) допускает существование такой волны.

Задача 3.

В постановке предыдущей задачи рассмотреть вопрос о точном и приближённом существовании одной лишь волны Стонели в области $z < 0$.

Решение. Как было показано в решении предыдущей задачи, волна Стонели возникает в варианте (II, 3). Условие существования одной лишь этой волны при $z < 0$ приводит к необходимому требованию $B_+ = D_+ = 0$. Таким образом, требуемая структура решения должна иметь вид

$$\varphi_1 = \left(e^{i\alpha z} + Ae^{-i\alpha z}\right)e^{i(kx-\omega t)}, \quad z > 0$$

$$\varphi = B\_e^{-\beta z}\, e^{i(kx-\omega t)}, \;\; \psi = D\_e^{-\gamma z}\, e^{i(kx-\omega t)}, \quad 0 > z > -H$$

$$\varphi_2 = Fe^{\kappa z}\, e^{i(kx-\omega t)}, \quad -H > z$$

Подстановка полученных выражений в граничные условия на обеих границах приводит к системе уравнений, определяющих искомые амплитуды. Не приводя систему уравнений в полном виде, выпишем только условия отсутствия тангенциальных напряжений на границах пластины:

$$2ik\beta B_- + (k^2 + \gamma^2)D_- = 0, \quad 2ik\beta B\_e^{\beta H} + (k^2 + \gamma^2)D\_e^{\gamma H} = 0$$

Условие нетривиальной разрешимости этих уравнений относительно амплитуд B_-, D_- имеет вид

$$\exp((\gamma - \beta)H) = 1$$

Так как $\beta \neq \gamma$, то это условие не может быть точно выполнено никогда, что означает наличие в пластине, помимо волны Стонели, волн иного типа (описываемых членами с амплитудами B_+ и D_+). Однако это условие может приближённо удовлетворено, если $|\gamma - \beta|H << 1$. Так как

$$|\gamma - \beta|H = \frac{\omega}{c_1}H\left|\sqrt{\sin^2\theta - \frac{c_1^2}{c_{\parallel}^2}} - \sqrt{\sin^2\theta - \frac{c_1^2}{c_{\perp}^2}}\right|$$

то требование $|\gamma-\beta|H \ll 1$ означает выполнение соотношения $\frac{\omega}{c_1}H \ll 1$.

Таким образом, для того чтобы хотя бы приближённо возбудить одну лишь волну Стонели в области $z<0$, необходимо чтобы длина падающей плоской волны существенно превышала толщину пластины.

Литература

1. Кистович А.В, Показеев К.В. Основы акустики океана. М: Макс-Пресс, 2007, 188 с.
2. Анисимова Е.П., Показеев К.В. Введение в физику гидросферы. М: Физический факультет МГУ, 2002, 171 с.
3. Трухин В.И., Показеев К.В., Куницын В.Е., Шрейдер А.А. Основы экологической геофизики. М: Изд-во Лань, 2004, 384 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М: Наука, 1986, 736 с.
5. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1982, 264 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М: Наука, 1987, 248 с.
7. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М: Мир, 1973, 758 с.
8. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М: Наука, 1990, 432 с.
9. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М: Наука, 1973, 344 с.