Носов Михаил Александрович

Устойчивость течений и переход к турбулентности

лекция №2

зачет с оценкой

http://ocean.phys.msu.ru/courses/currents/

2022

Анализ стационарных течений на устойчивость

устойчивость стационарных течений по отношению к бесконечно малым возмущениям или линейный анализ устойчивости

1-й этап

поиск стационарного решения системы Навье-Стокса: $\vec{v}_0, p_0$

$$\begin{cases} (\vec{v}_0\vec{\nabla})\vec{v}_0 = -\dfrac{\vec{\nabla}p_0}{\rho} + \nu\Delta\vec{v}_0, \\ \operatorname{div}\vec{v}_0 = 0. \end{cases}$$

2-й этап

внесение в решение малого возмущения: $\vec{v}_0 + \vec{v}', p_0 + p'$

3-й этап

анализ динамики возмущения:

нарастает (=> неустойчивость), убывает (=> устойчивость)

Технически 3-й этап сопряжен с линеаризацией полных уравнений Навье-Стокса вблизи положения равновесия

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}', \quad p = p_0 + p'$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}, \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\vec{v}_0 + \vec{v}')}{\partial t} + \Big((\vec{v}_0 + \vec{v}'), \vec{\nabla}\Big)(\vec{v}_0 + \vec{v}') = \\ \qquad = -\dfrac{\vec{\nabla}(p_0 + p')}{\rho} + \nu\Delta(\vec{v}_0 + \vec{v}'), \\ \operatorname{div}(\vec{v}_0 + \vec{v}') = 0. \end{cases}$$

$$\Big((\vec{v}_0 + \vec{v}')\nabla\Big)(\vec{v}_0 + \vec{v}') = (\vec{v}_0\vec{\nabla})\vec{v}_0 + (\vec{v}_0\vec{\nabla})\vec{v}' + (\vec{v}'\vec{\nabla})\vec{v}_0 + (\vec{v}'\vec{\nabla})\vec{v}'$$

$$\cancel{\frac{\partial\vec{v}_0}{\partial t}}+\underline{\frac{\partial\vec{v}'}{\partial t}}+(\vec{v}_0\vec{\nabla})\vec{v}_0+\underline{(\vec{v}_0\vec{\nabla})\vec{v}'}+\underline{(\vec{v}'\vec{\nabla})\vec{v}_0}+\cancel{(\vec{v}'\vec{\nabla})\vec{v}'}=$$

линеаризация

$$=-\frac{\vec{\nabla}p_0}{\rho}-\underline{\frac{\vec{\nabla}p'}{\rho}}+\nu\Delta\vec{v}_0+\underline{\nu\Delta\vec{v}'}$$

$$\operatorname{div}\vec{v}_0+\underline{\operatorname{div}\vec{v}'}=0$$

удовлетворяют стационарному уравнению

Линейная система уравнений для описания динамики малых возмущений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}_0 \vec{\nabla})\vec{v}' + (\vec{v}' \vec{\nabla})\vec{v}_0 = -\dfrac{\vec{\nabla} p'}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}', \\ \operatorname{div} \vec{v}' = 0. \end{cases}$$

Нормальные возмущения

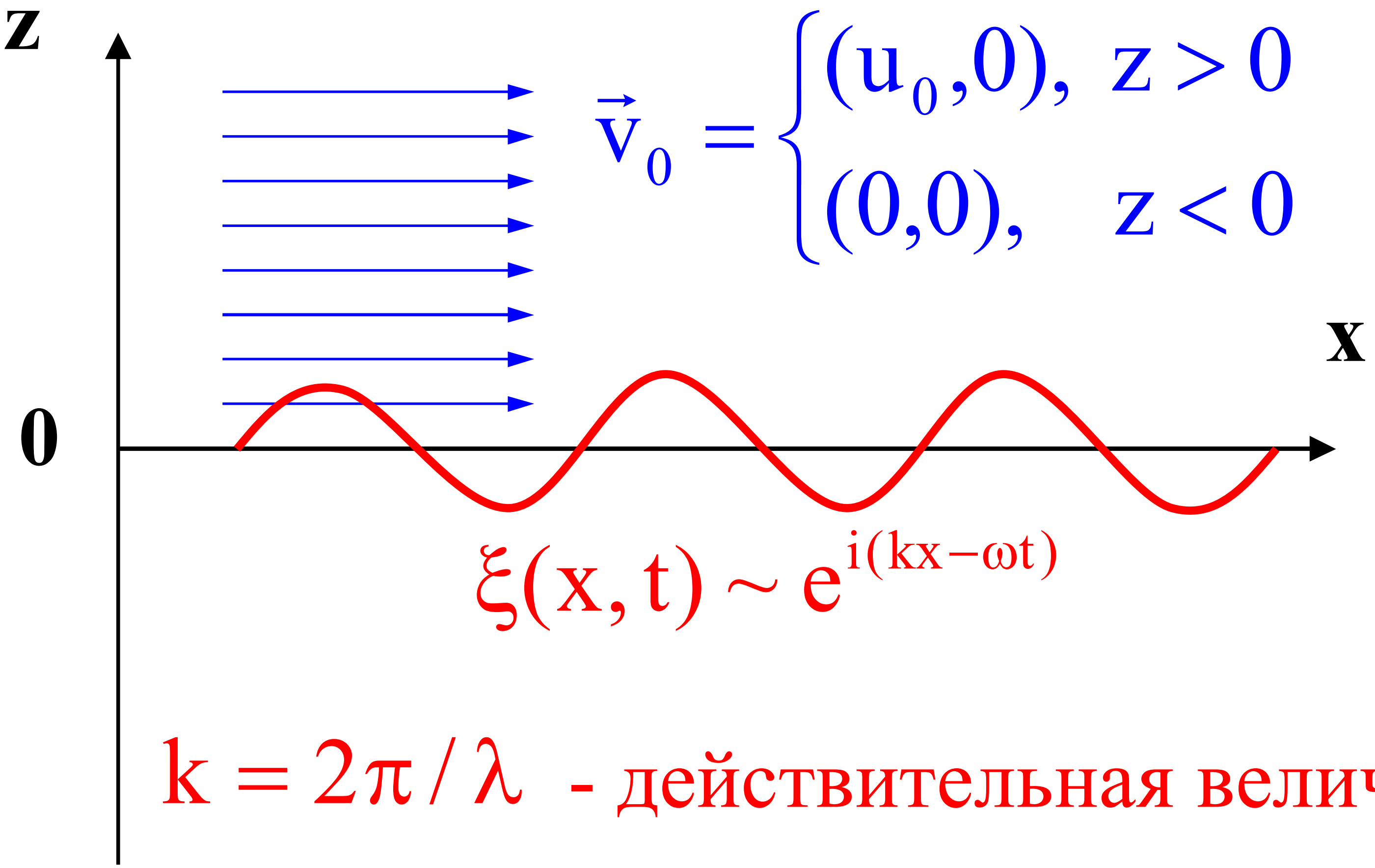
$$\vec{v}'(\vec{r}, t) \sim e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \qquad p'(\vec{r}, t) \sim e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

существование **Im ω** означает неустойчивость

$$e^{-i\omega t} = e^{-i[\mathrm{Re}(\omega) + i\,\mathrm{Im}(\omega)]t} = e^{\mathrm{Im}(\omega) t} e^{-i\,\mathrm{Re}(\omega) t}$$

Задача о тангенциальном разрыве скорости

[Helmholtz, 1868; Kelvin, 1871]



$$\vec{v}_0 = \begin{cases} (u_0, 0), & z > 0 \\ (0,0), & z < 0 \end{cases}$$

$$\xi(x,t) \sim e^{i(kx-\omega t)}$$

$k = 2\pi/\lambda$ - действительная величина

$$\vec{v}'(x,z,t) = (u', w') \qquad p'(x,z,t)$$

$S(x,z,t) \equiv \xi(x,t) - z = 0$ - ур-е поверхности раздела

$\dfrac{dS}{dt} = 0$ - кинематическое граничное условие

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} + w\frac{\partial S}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} - w = 0 \quad \Longrightarrow \quad w = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\xi(x,t) \sim e^{i(kx - \omega t)}$$

$$w' = -i\omega\xi + u_0 ik\xi = i(u_0 k - \omega)\xi$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}_0 \vec{\nabla})\vec{v}' + \cancel{(\vec{v}'\vec{\nabla})\vec{v}_0} = -\frac{\vec{\nabla} p'}{\rho} + \cancel{\nu \Delta \vec{v}'}$$

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} (u_0, 0), & z > 0 \\ (0,0), & z < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial x} = -\frac{\vec{\nabla} p'}{\rho} \quad \Big| \mathrm{div}$$

$$\frac{\partial\, \mathrm{div}(\vec{v}')}{\partial t} + u_0 \frac{\partial\, \mathrm{div}(\vec{v}')}{\partial x} = -\frac{\mathrm{div} \vec{\nabla} p'}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \Delta p' = 0$$

$$=0 \qquad =0$$

$$\Delta p' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p'_{xx} + p'_{zz} = 0$$

$$p' = f(z)\, e^{i(kx-\omega t)} \qquad -k^2 f\, e^{i(kx-\omega t)} + f_{zz}\, e^{i(kx-\omega t)} = 0$$

$$-k^2 f + f_{zz} = 0 \qquad f(z) = \text{const}\; e^{\pm kz}$$

$$p'(x,z,t) = \text{const}\; e^{\pm kz}\, e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial x} = -\frac{\vec{\nabla} p'}{\rho} \quad \xRightarrow{\mathbf{z}} \quad \frac{\partial w'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w'}{\partial x} = \mp \frac{k}{\rho} p'$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w'}{\partial x} = \mp \frac{k}{\rho} p'$$

$$p' \sim e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\Downarrow$$

$$w' \sim e^{i(kx-\omega t)}$$

$$-i\omega w' + u_0 i k w' = \mp \frac{k}{\rho} p'$$

$$w' = i(u_0 k - \omega)\xi$$

$$i(u_0 k - \omega) w' = \mp \frac{k}{\rho} p'$$

$$(u_0 k - \omega)^2 \xi = \pm \frac{k}{\rho} p'$$

$$(u_0 k - \omega)^2 \xi = \pm \frac{k}{\rho} p'$$

$$p_1' = -\xi (k u_0 - \omega)^2 \frac{\rho_1}{k}, z > 0$$

$$p_2' = +\xi \omega^2 \frac{\rho_2}{k}, \qquad z < 0$$

$$z = 0: \quad p_1' = p_2'$$

$$-\cancel{\xi}(k u_0 - \omega)^2 \frac{\rho_1}{\cancel{k}} = \cancel{\xi} \omega^2 \frac{\rho_2}{\cancel{k}}$$

$$\omega^2\rho_2 + (ku_0 - \omega)^2\rho_1 = 0$$

при $\rho_1 = \rho_2$

$$\omega_{1,2} = ku_0 \frac{\rho_1 \pm i\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1 + \rho_2}$$

$$\omega_{1,2} = ku_0 \frac{1 \pm i}{2}$$

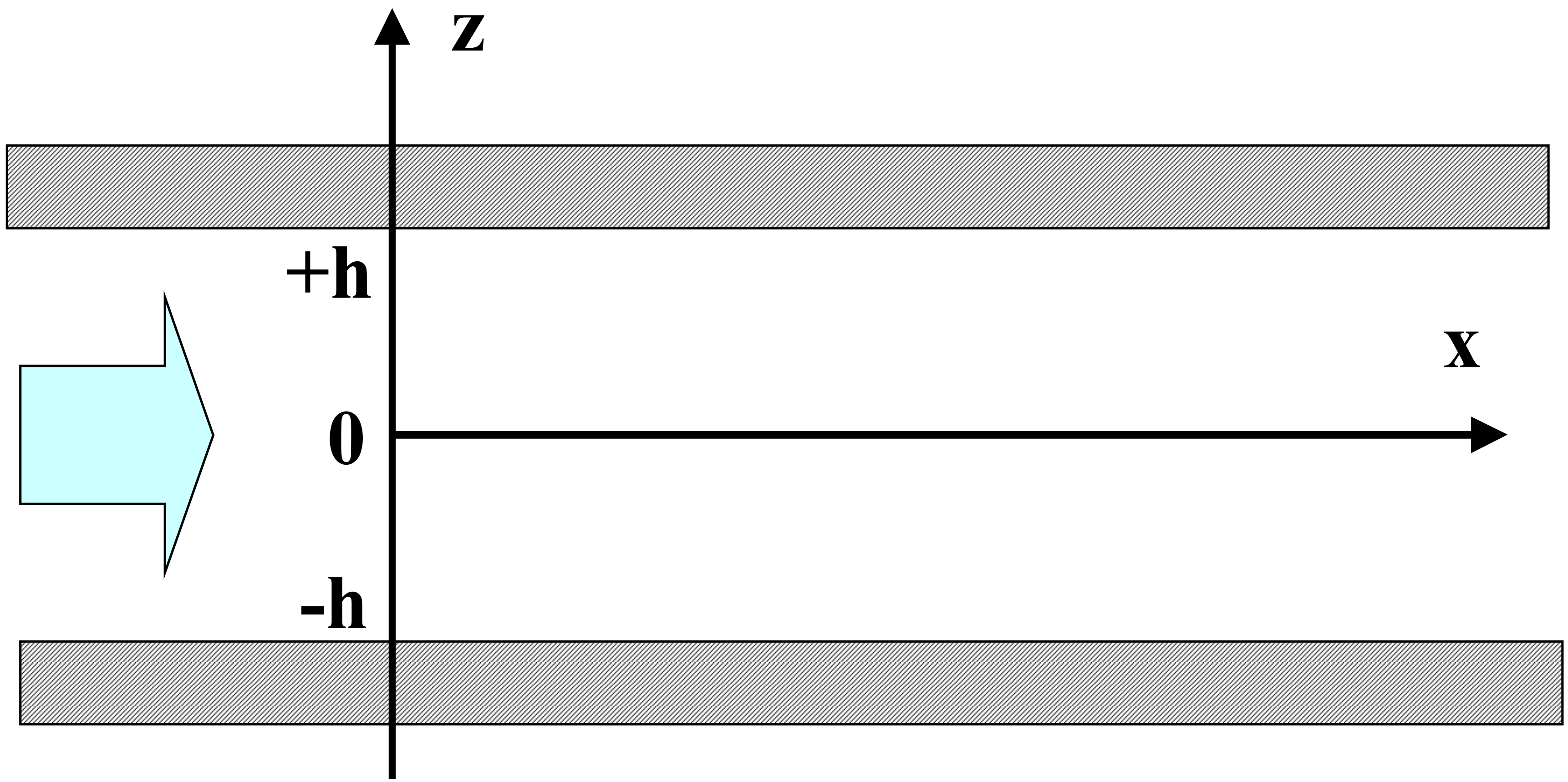
частота всегда имеет ненулевую мнимую часть => на скачке скорости развивается неустойчивость

неустойчивость развивается с инкрементом $\gamma = \dfrac{ku_0}{2}$

$$(u', w', p') \sim e^{\gamma t}$$

Устойчивость течения Пуазейля

Течение Пуазейля - течение вязкой жидкости между двумя параллельными поверхностями, которое вызывается постоянным градиентом давления



$\vec{v}_0 = (u_0(z), 0)$ - плоское стационарное течение

$$\underbrace{\frac{\partial u_0}{\partial t}}_{=0} + u_0 \underbrace{\frac{\partial u_0}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{w_0}_{=0} \frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial x} + \nu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}\right)$$

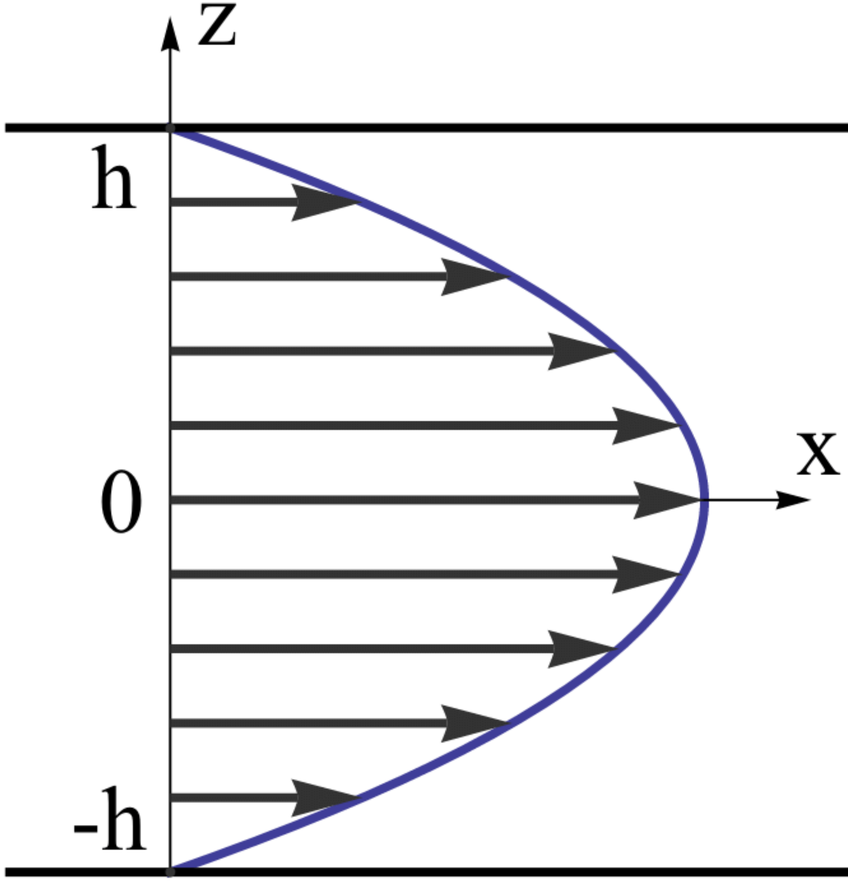
$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \frac{1}{\nu\rho}\frac{\partial p_0}{\partial x} = \mathrm{const}$$ - ОДУ

$$z = \pm h: \quad u_0 = 0$$ - граничное условие

$$u_0(z) = \frac{1}{2\rho\nu}\frac{\partial p_0}{\partial x}(z^2 - h^2)$$

Профиль скорости течения Пуазейля

$$u_0(z) = \frac{1}{2\rho\nu}\frac{\partial p_0}{\partial x}(z^2 - h^2)$$



Анализ устойчивости течения Пуазейля

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}_0 \vec{\nabla})\vec{v}' + (\vec{v}' \vec{\nabla})\vec{v}_0 = -\dfrac{\vec{\nabla} p'}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}', \\ \operatorname{div} \vec{v}' = 0. \end{cases}$$

шрихи далее опускаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Выразим поле скорости возмущений через функцию тока

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно!

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = 0$$

Выразим поле скорости возмущений через функцию тока $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u$$

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} - u_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \nu \Delta \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \Bigg| \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + u_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \Bigg| \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+u_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}=$$

$$=\nu\Delta\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)$$

сокращенный вид записи

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi+u_0\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}=\nu\Delta\Delta\psi$$

в безразмерных переменных

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi+u_0\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\Delta\psi$$

Граничные условия

$$z = \pm h: \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad u = 0 \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad w = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\psi = 0$$

граничные условия используются в виде:

$$z = \pm h: \quad \psi = 0 \qquad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

Представим функцию тока, описывающую возмущения, в виде нормальных возмущений:

$$\psi(x, z, t) = \varphi(z)\, e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega\psi \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -ik\psi \qquad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \varphi_z e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \left(\varphi_{zz} - k^2\varphi\right) e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\Delta\Delta\psi = \left(\varphi_{zzzz} - 2k^2\varphi_{zz} + k^4\varphi\right) e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + u_0\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\Delta\psi$$

$$i\omega\left(\varphi_{zz} - k^2\varphi\right)e^{i(\omega t - kx)} - iku_0\left(\varphi_{zz} - k^2\varphi\right)e^{i(\omega t - kx)} + ik\varphi\, e^{i(\omega t - kx)}\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\varphi_{zzzz} - 2k^2\varphi_{zz} + k^4\varphi\right)e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right)\left(\varphi_{zz} - k^2\varphi\right) - \varphi\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} =$$

уравнение Орра-Зоммерфельда

$$= \frac{i}{k\,\mathrm{Re}}\left(\varphi_{zzzz} - 2k^2\varphi_{zz} + k^4\varphi\right)$$

[Orr, 1907]
[Sommerfeld, 1908]