

Министерство общего и профессионального образования Российской Федерации

Пермский государственный технический университет

Кафедра математического моделирования систем и процессов

П.Г.Фрик

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ: МОДЕЛИ И ПОДХОДЫ

Курс лекций

Часть II

Рекомендовано учебно-методическим советом по направлению
«Электроника и прикладная математика» в качестве учебного пособия
для студентов специальности «Прикладная математика»

Пермь 1999

УДК 532.517.4
Ф88

Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. / П.Г.Фрик;
Перм. гос. техн. ун-т. Часть II. Пермь, 1999. 136 с.

Вторая часть курса лекций включает в себя введение и четыре из семи разделов курса «Турбулентность: модели и подходы» (три первых раздела: «Основы», «Хаос в динамических системах» и «Полуэмпирические модели» вошли в первую часть курса). В четвертом разделе излагаются модели однородной и изотропной турбулентности, начиная с теории Колмогорова и кончая современными моделями перемежаемости в развитой турбулентности. Пятый раздел посвящен некоторым специальным турбулентным потокам. Рассмотрены особенности поведения двумерной турбулентности и турбулентности, вызванной силами Архимеда. В шестом разделе излагаются модели, основанные на применении специальных функциональных базисов, названных иерархическими, и дается краткое изложение вейвлет-анализа, с примерами его применения к гидродинамическим системам. Последний, седьмой раздел посвящен каскадным моделям турбулентности - простейшим моделям развитой турбулентности, доказавшим свою эффективность в моделировании свойств турбулентности в инерционных интервалах при очень высоких числах Рейнольдса.

Для студентов и аспирантов физико-математических специальностей.
Ил.89. Библиогр.: 35 назв.

Рецензенты: кафедра общей физики Пермского
государственного технического университета,
д-р физ.-мат.наук, профессор Д.В.Любимов

ISBN 5-88151-193-X

1.
1999

© Пермский государственный
технический университет,

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ОСНОВЫ	5
2. ХАОС В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ	5
3. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ	5
4. ОДНОРОДНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ	6
4.1. ОДНОРОДНАЯ И ИЗОТРОПНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ	6
4.2. БАЛАНС ЭНЕРГИИ ПО МАСШТАБАМ. КАСКАД	9
4.3. ТЕОРИЯ КОЛМОГорова 1941 ГОДА (K41)	13
4.4. ЛОГНОРМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ (K62)	22
4.5. ФРАКТАЛЫ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ	27
4.6. ЛОГПУАССОНОВСКИЕ МОДЕЛИ	35
5. ДВУМЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ	45
5.1. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ИНЕРЦИОННЫЕ ИНТЕРВАЛЫ	46
5.2. ЛАБОРАТОРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ	51
5.3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ	53
5.4. ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ В ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ	59
5.5. КОНВЕКТИВНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ	65
6. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ И ВЕЙВЛЕТЫ	71
6.1. ИЕРАРХИЧЕСКИЙ БАЗИС ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОЛЕЙ	71
6.2. ИЕРАРХИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУМЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ	80
6.3. ВЕЙВЛЕТЫ	87
6.4. НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ	90
6.5. ДИСКРЕТНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ	95
6.6. ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	102
7. КАСКАДНЫЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ	109
7.1. КАСКАДНЫЕ МОДЕЛИ	109
7.2. МОДЕЛЬ НОВИКОВА - ДЕСНЯНСКОГО	110
7.3. МОДЕЛЬ GOY	113
7.4. СКЕЙЛИНГ И ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ В КАСКАДНЫХ МОДЕЛЯХ РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ	119
7.5. МОДЕЛЬ КОНВЕКТИВНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ	124
7.6. КАСКАДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МГД-ТУРБУЛЕНТНОСТИ	130
8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ	136

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий курс лекций ставит своей целью дать представления о разнообразных подходах и методах, применяемых в исследованиях развитой турбулентности.

Курс состоит из двух частей. Первая часть включала три главы: 1. Основы, 2. Хаос в динамических системах, 3. Полуэмпирические модели. Первая глава содержала базовые сведения об уравнениях движения идеальной и реальной жидкости и краткий обзор методов и некоторых результатов исследования устойчивости гидродинамических систем. Во второй главе обсуждались методы и подходы теории динамических систем, позволившей значительно углубить понимание процессов перехода от детерминированного поведения к хаотическому. Третья глава кратко знакомила с подходом Рейнольдса к описанию средних полей в развитых турбулентных течениях и вытекающими из него полуэмпирическими моделями турбулентности.

Нужно отметить, что в первую часть курса были включены в основном сведения, которые можно найти в различных учебниках и монографиях. Настоящая, вторая часть содержит результаты, которые, за редким исключением, не вошли еще в книги и могут быть найдены только в оригинальных статьях. Эта часть, предлагаемая вниманию читателя, состоит из четырех глав (с четвертой по седьмую, так как для обеих частей принята сквозная нумерация).

Четвертая глава посвящена моделям однородной и изотропной турбулентности. Здесь собраны модели мелкомасштабной турбулентности, начиная со знаменитой теории Колмогорова 1941 года. Описаны первые попытки учета перемежаемости (лог-нормальная модель, бета-модель). Показано, что дало применение к теории турбулентности идеи фрактальности и как использование новых экспериментальных данных о структуре поля диссипации энергии и о поведении высших статистических моментов привело к появлению новых моделей, основанных на лог-пуассоновской статистике турбулентных полей.

Пятый раздел посвящен некоторым специальным турбулентным потокам. Рассмотрены особенности поведения двумерной турбулентности, в которой наличие дополнительного закона сохранения приводит к качественно иному поведению мелкомасштабного течения. На примере турбулентности, вызванной силами плавучести (т.е. конвективной турбулентности), показано, как может меняться динамика инерционного интервала под действием дополнительного силового поля.

В шестом разделе излагаются модели, основанные на применении специальных функциональных базисов, воспроизводящих структуру турбулентных потоков. Эти базисы получили название иерархических и по современной терминологии относятся к вейвлет-базисам. Вейвлет-анализ (возникший заметно позже первых иерархических моделей) превратился на сегодня в развитую область матфизики и его значение для исследования стохастических гидродинамических систем и турбулентности не исчерпывается применением вейвлет-базисов для численного моделирования течений. Учитывая, что до настоящего времени литература о вейвлетах на русском языке практически отсутствует, в этой же главе дается краткое изложение основ вейвлет-анализа, с примерами его применения к гидродинамическим системам.

Последний, седьмой раздел посвящен каскадным моделям турбулентности - простейшим моделям развитой турбулентности, доказавшим свою эффективность в моделировании свойств турбулентности в инерционных интервалах при очень высоких числах Рейнольдса. Эти модели, являясь динамическими системами относительно высокого порядка (несколько десятков уравнений), описывают каскадные процессы в широком интервале масштабов. Дано изложение методов построения моделей этого типа, приведены примеры построения моделей для различных турбулентных течений и рассмотрены некоторые результаты их применения.

Курс предназначен для студентов специальности "Прикладная математика", ориентирующихся на работу в научно-исследовательских учреждениях и на кафедрах, в особенности тех, что связаны с решением задач механики жидкости и газа. В то же время, в курсе рассматриваются и общие подходы к моделированию сложных динамических систем, которые могут быть полезными специалистам, занимающимся моделированием самых различных (и не только механических) систем и явлений.

1. ОСНОВЫ

2. ХАОС В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

3. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

4. ОДНОРОДНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

4.1. Однородная и изотропная турбулентность

Начиная изучение свойств мелкомасштабной турбулентности, сделаем несколько важных замечаний, частично повторяющих выводы, обсуждавшиеся в первой части курса. Прежде всего напомним, что мы ограничиваемся рассмотрением течений несжимаемой жидкости, описываемых уравнениями Навье - Стокса, которые запишем в виде

$$\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i = -\rho^{-1} \partial_i p + \nu \partial_{jj}^2 v_i + f_i, \quad (4.1)$$

$$\partial_k v_k = 0. \quad (4.2)$$

Здесь v_i - компоненты скорости, f_i - компоненты силы, ρ - плотность, p - давление, ν - вязкость. При этом нужно не забывать, что сама возможность применения уравнений (4.1)-(4.2) к описанию турбулентных течений при огромных значениях числа Рейнольдса не является очевидной, так как при их выводе использовано предположение о том, что тензор вязких напряжений является линейной функцией только первых производных поля скорости (см. вводные замечания к разделу 3).

Важно также подчеркнуть, что рассматривается развитая турбулентность, характеризуемая наполненными спектрами Фурье (как временными, так и пространственными), что свидетельствует о существовании многомасштабной структуры поля скорости. Именно многомасштабность и является важнейшим признаком развитой турбулентности, приводя к возбуждению гигантского числа степеней свободы.

Мы уже говорили о том, что любой подход к описанию развитой турбулентности по сути представляет собой тот или иной способ ограничения числа степеней свободы, приводящий к соответствующим моделям. В главе 3 был рассмотрен подход Рейнольдса, состоящий в представлении входящих в (4.1)-(4.2) полей в виде сумм средних полей и пульсаций:

$$v_i(\vec{r}, t) = U_i(\vec{r}, t) + u_i(\vec{r}, t), \quad p(\vec{r}, t) = P(\vec{r}, t) + p'(\vec{r}, t), \quad f(\vec{r}, t) = F(\vec{r}, t) + f'(\vec{r}, t). \quad (4.3)$$

Подход приводит к уравнениям для средних величин

$$\partial_t U_i + U_j \partial_j U_i = -\rho^{-1} \partial_i P + \nu \partial_{jj}^2 U_i - \partial_j \langle u_j u_i \rangle + F_i, \quad (4.4)$$

$$\partial_k U_k = 0, \quad (4.5)$$

включающим новый член - тензор напряжений Рейнольдса (угловые скобки по-прежнему обозначают осреднение по ансамблю реализаций). Различные способы замыкания уравнений (4.4)-(4.5) составляют суть полуэмпирических моделей.

Подход Рейнольдса (и связанные с ним полуэмпирические модели) направлен на описание средних полей скорости, возникающих в конкретных потоках. Каждая полуэмпирическая модель адаптируется для заданного (как правило, достаточно узкого) класса течений и включает ряд параметров, экспериментально определяемых именно для данного класса течений и справедливых в определенном диапазоне значений числа Рейнольдса. Таким образом, делается попытка ограничиться описанием крупномасштабных полей, а влияние мелкомасштабных полей охарактеризовать с помощью небольшого числа параметров.

Зададимся теперь вопросом о том, есть ли у турбулентности некие универсальные свойства, не зависящие от конкретных условий ее возбуждения? Очевидно, что рассчитывать на обнаружение таких универсальных свойств можно только вдали от границ и на масштабах, существенно меньших размеров области, занятых турбулентным течением. Таким образом, мы начинаем изучение мелкомасштабной турбулентности, в смысле, что основной интерес представляют для нас масштабы $l \ll L$ (L - внешний, или интегральный масштаб турбулентности). В то же время, говоря о развитой турбулентности, мы подразумеваем, что числа Рейнольдса столь велики, что остается широкий диапазон возбужденных масштабов, удовлетворяющих этому условию. Иначе говоря, $\lambda \ll l \ll L$, где λ - микромасштаб турбулентности, характеризующий масштабы пульсаций скорости, на которых становится существенной вязкая диссипация.

На рис.4.1 схематически показаны три различных турбулентных потока (турбулентный след, течение в трубе и конвективный факел) и области

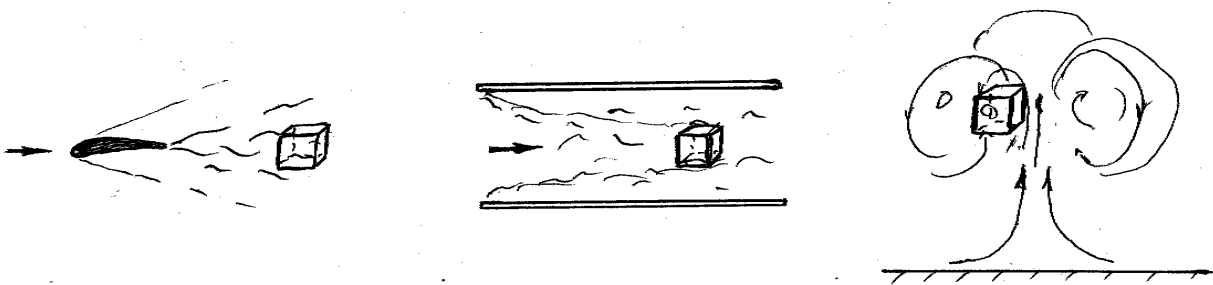


Рис.4.1

в них, изображенные в виде кубов, в которых можно надеяться на выявление

ние таких универсальных свойств. При наличии осредненного течения (поток в трубе) выделенный куб движется со средней скоростью этого потока.

Выделенные области не случайно имеют кубическую форму. Дело в том, что, желая избежать влияния границ, мы в то же время хотим рассматривать ограниченную область потока, причем свойства течения в этой области не должны зависеть от ее точного положения (другими словами, используется гипотеза об однородности турбулентности на масштабах, много меньших масштаба ее возбуждения L). Наиболее простой путь удовлетворения этих противоречивых требований состоит в рассмотрении кубической области с ребром D , на гранях которого выполняются периодические граничные условия. Это условие состоит в том, что для всякой функции и любых целых n, m, q

$$f(x+nD, y+mD, z+qD) = f(x, y, z). \quad (4.6)$$

Такая постановка задачи очень удобна для прямых численных решений уравнений (4.1)-(4.2). Именно для куба с периодическими граничными условиями (для квадрата в случае двумерных течений) выполнены практически все численные эксперименты по исследованию свойств однородной турбулентности. Заметим, что условие однородности немедленно приводит к тому, что уравнение (4.4) допускает только тривиальное решение $\vec{U}(t, \vec{r}) = 0$. Кубическая геометрия и условие периодичности создают идеальные условия для применения спектральных (и спектрально-сеточных) методов, так как любая функция $f(t, \vec{r})$ может быть представлена в виде

$$f(t, \vec{r}) = \sum_{n,m,q} \hat{f}_{nmq}(t) e^{\frac{2\pi i}{D}(nx+my+qz)} = \sum_{\vec{k}} \hat{f}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (4.7)$$

где $\vec{k} = \frac{2\pi}{D}(n\vec{e}_x + m\vec{e}_y + q\vec{e}_z)$ есть волновой вектор, а коэффициенты Фурье определяются формулой

$$\hat{f}_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{D^3} \int_0^D \int_0^D \int_0^D f(t, \vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r}. \quad (4.8)$$

В свете поставленной задачи фурье-представление удобно тем, что каждая гармоника соответствует движению определенного пространственного масштаба. Для того, чтобы получить энергию всех движений заданного масштаба $l = 2\pi/k$, нужно просуммировать все гармоники, волновые векторы которых равны по модулю

$$E(k) = \sum_{|\vec{k}|=k} |\hat{v}_{\vec{k}}|^2. \quad (4.9)$$

4.2. Баланс энергии по масштабам. Каскад

Для получения уравнения, описывающего баланс энергии в одном отдельно взятом масштабе, нужно записать уравнения Навье - Стокса (4.1)-(4.2) в пространстве Фурье. При этом можно воспользоваться рядами Фурье вида (4.7), имея в виду кубическую геометрию с периодическими условиями, либо интегралами Фурье, опираясь на рассмотрение турбулентного течения в ограниченной части бесконечного пространства. Чтобы не создать впечатление, что получающиеся уравнения связаны с искусственно выбранной формой области, воспользуемся в данном параграфе интегралами Фурье (вывод уравнений для рядов оставим для домашних упражнений).

Итак, пусть течение занимает ограниченную область, затухая на бесконечности, и все входящие в уравнения Навье - Стокса величины допускают представление в виде

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}, \quad (4.10)$$

где

$$\widehat{f}(\vec{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r}, \quad (4.11)$$

$\vec{r} = (x, y, z)$ - радиус-вектор, $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ - волновой вектор.

Все величины в уравнении (4.1) выразим через фурье-образы (4.10)

$$\begin{aligned} & \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(\vec{k}', t) e^{i\vec{k}'\vec{r}} d\vec{k}' + \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(\vec{k}'', t) e^{i\vec{k}''\vec{r}} d\vec{k}'' \nabla \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(\vec{k}''', t) e^{i\vec{k}'''\vec{r}} d\vec{k}''' = \\ & = -\rho^{-1} \nabla \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{p}(\vec{k}', t) e^{i\vec{k}'\vec{r}} d\vec{k}' + \nu \Delta \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(\vec{k}', t) e^{i\vec{k}'\vec{r}} d\vec{k}' + \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\vec{k}', t) e^{i\vec{k}'\vec{r}} d\vec{k}' \end{aligned}$$

и воспользуемся теоремой о дифференцировании (см. параграф 2.4.2 части 1)

$$\begin{aligned} & \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(\vec{k}', t) e^{i\vec{k}'\vec{r}} d\vec{k}' + \frac{i}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [i \widehat{v}(\vec{k}'') \vec{k}''] \widehat{v}(\vec{k}''') e^{i(\vec{k}'' + \vec{k}''')\vec{r}} d\vec{k}'' d\vec{k}''' = \\ & = -\frac{i}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{k}' \widehat{p}(\vec{k}', t) e^{i\vec{k}'\vec{r}} d\vec{k}' - \nu \int_{-\infty}^{\infty} k'^2 \widehat{v}(\vec{k}', t) e^{i\vec{k}'\vec{r}} d\vec{k}' + \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\vec{k}', t) e^{i\vec{k}'\vec{r}} d\vec{k}'. \end{aligned}$$

Для упрощения записи во всех функциях здесь и далее опускается аргумент t . Уравнение умножается на $e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ и интегрируется по $d\vec{r}$. Учитывая, что

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{r}} d\vec{r} = \delta(\vec{k}'-\vec{k}), \quad \text{а} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{k}')\delta(\vec{k}'-\vec{k})d\vec{k}' = f(\vec{k}),$$

и переобозначив $\vec{k}'' = \vec{q}$, получаем

$$\partial_t \widehat{v}(\vec{k}) + \frac{i}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} [\widehat{v}(\vec{q})(\vec{k}-\vec{q})] \widehat{v}(\vec{k}-\vec{q}) d\vec{q} = -i\rho^{-1} \vec{k} \widehat{p}(\vec{k}) - \nu k^2 \widehat{v}(\vec{k}) + \widehat{f}(\vec{k}). \quad (4.12)$$

Уравнение неразрывности (4.2) в пространстве Фурье имеет простой вид

$$\vec{k} \cdot \widehat{v}(\vec{k}) = 0 \quad (4.13)$$

и может быть использовано для исключения из уравнения (4.12) члена с давлением. Умножение (4.12) на \vec{k} с учетом (4.13) приводит к выражению

$$\rho^{-1} \widehat{p}(\vec{k}) = \frac{-\vec{k}}{8\pi^3 k^2} \int_{-\infty}^{\infty} [\widehat{v}(\vec{q})(\vec{k}-\vec{q})] \widehat{v}(\vec{k}-\vec{q}) d\vec{q} - \frac{i\vec{k}}{k^2} \widehat{f}(\vec{k}). \quad (4.14)$$

Подставляя (4.14) в (4.12) и используя формулу $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ для объединения нелинейных членов, приходим к уравнению

$$\partial_t \widehat{v}(\vec{k}) + \frac{i}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\vec{k} \times (\widehat{v}(\vec{k}-\vec{q}) \times \vec{k})]}{k^2} [\widehat{v}(\vec{q})(\vec{k}-\vec{q})] d\vec{q} = -\nu k^2 \widehat{v}(\vec{k}) + \widehat{f}'(\vec{k}), \quad (4.15)$$

где $\widehat{f}'(\vec{k}) = k^{-2} [\vec{k} \times (\widehat{f} \times \vec{k})]$.

Целью проводимых преобразований является уравнение для энергии, заключенной в данных масштабах (волновых числах), которая получается путем интегрирования квадрата модуля фурье-компонент поля скорости по всем волновым векторам с заданным значением модуля $|\vec{k}| = k$:

$$E(k) = \int_{\vec{k}=|\vec{k}|} \widehat{v}(\vec{k})^2 d\vec{k}. \quad (4.16)$$

Соответствующее уравнение получается из (4.15) путем его домножения на $\hat{v}^*(\vec{k})$ и интегрирования в пространстве Фурье по поверхности сферы заданного радиуса k и имеет следующую структуру

$$\partial_t E(k) = T(k) - D(k) + F(k) \quad (4.17)$$

Здесь $T(k)$ - член, получающийся из нелинейного слагаемого уравнения (4.15) и описывающий перенос энергии в заданный масштаб в результате взаимодействия пульсаций скорости различного масштаба, $D(k) = -\nu k^2 E(k)$ и описывает скорость диссипации энергии за счет действия молекулярной вязкости, а $F(k)$ характеризует приток энергии за счет сил, поддерживающих турбулентное течение (работа внешних сил). Точный вид для $T(k)$ и $F(k)$ легко получается из (4.15). Мы не выписываем соответствующих выражений, так как интересующие нас выводы можно сделать исходя из общих соображений об их структуре.

Рассмотрим случай стационарного турбулентного потока. Стационарность означает, что энергия, вводимая в поток за единицу времени, в точности равна энергии, превращающейся в тепло за счет действия вязкости, а $\partial_t E(k) = 0$ для любого значения волнового числа (для любого масштаба). Следовательно,

$$T(k) - D(k) + F(k) = 0,$$

причем приток энергии в течение и ее диссипация происходят в различных масштабах. Ситуацию поясняет рис.4.2, где схематически изображены функции $D(k)$ и $F(k)$. Приток энергии происходит вблизи волнового числа k_L , соответствующего макромасштабу турбулентности L . Диссипация становится эффективной только на малых масштабах (больших волновых числах), так как $D(k) \approx k^2$ и функция $D(k)$ локализована вблизи волнового числа k_λ (λ - микромасштаб турбулентности, называемый часто масштабом Колмогорова). Отметим, что площади, заключенные под обеими кривыми, должны быть в точности равны друг другу. Между двумя кривыми остается значительный (тем больший, чем больше число Рейнольдса) интервал масштабов $k_L \ll k \ll k_\lambda$, в которых $D(k) = F(k) = 0$, а следовательно и $T(k) = 0$. Этот интервал масштабов называют инерционным интервалом и его при-

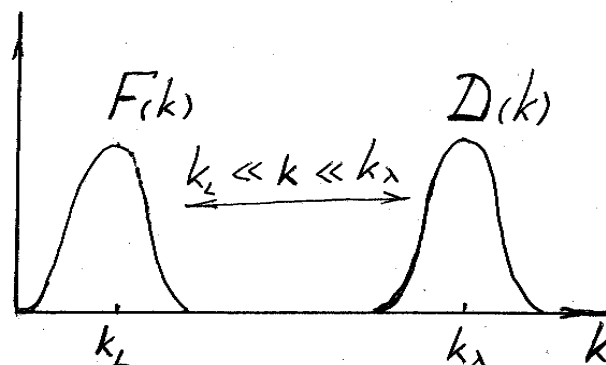


Рис.4.2

существование является признаком развитой турбулентности. Поскольку энергия вносится в поток на одном краю инерционного интервала, а выносится - на другом, то она очевидным образом должна быть перенесена вдоль всего интервала. Условие $T(k)=0$ означает, что приток в данный масштаб из больших масштабов в точности равен оттоку энергии из данного масштаба в меньшие.

Полезно рассмотреть величину

$$E(k) = \int_0^k E(k') dk',$$

равную энергии, заключенной во всех масштабах, больших данного ($k' < k$). Соответствующее уравнение получается интегрированием уравнения (4.17) от нуля до текущего значения волнового числа и имеет вид

$$\partial_t E(k) = \Pi(k) - \int_0^k D(k') dk' + \int_0^k F(k') dk' .$$

Если рассмотреть масштаб, принадлежащий инерционному интервалу, и считать течение стационарным, то

$$\Pi(k) = \Phi = const .$$

$\Pi(k)$ есть поток энергии через текущий масштаб k . Этот поток равен суммарной энергии Φ , вносимой в поток за единицу времени на единицу массы. Этот поток равен и скорости диссипации энергии, то есть энергии, превращающейся в тепло за единицу времени на единицу массы.

Таким образом, мы подошли к ключевому моменту теории мелкомасштабной турбулентности, состоящему в том, что процессы возбуждения течения, нелинейных взаимодействий вихрей и вязкой диссипации, сосуществующие в физическом пространстве, строго разнесены в пространстве масштабов. Первый шаг в понимании проблемы сделал Л.Ричардсон, который выдвинул в 1922 году идею каскада энергии, то есть процесса передачи энергии по цепочке от больших вихрей - меньшим. Строгую формулировку проблемы, давшую количественные результаты, предложил А.Н.Колмогоров в серии работ 1941 года.

4.3. Теория Колмогорова 1941 года (К41)

4.3.1. Анализ размерностей

А.Н.Колмогоров в своей классической работе, положившей начало систематическому изучению мелкомасштабной турбулентности, сформулировал две гипотезы, касающиеся статистических свойств однородной и изотропной турбулентности при больших числах Рейнольдса.

1-я гипотеза Колмогорова. Статистические свойства в инерционном и диссипативном интервале (т.е. на масштабах $l \ll L$) не зависят от способа возбуждения турбулентности и универсальным образом определяются тремя параметрами: скоростью диссипации энергии ε , кинематической вязкостью ν и самим масштабом l .

2-я гипотеза Колмогорова. Статистические свойства турбулентности в инерционном интервале универсальны и зависят только от скорости диссипации энергии ε и масштаба l .

Эти гипотезы содержат ответ на вопрос, какие величины могут влиять на динамику инерционного интервала. Говоря о статистических свойствах, мы в первую очередь имеем в виду распределение энергии между движениями различного масштаба, хотя, конечно же, помним, что поле скорости - это поле случайной величины и чтобы описать его, нужно знать функцию распределения вероятности, либо, что то же самое, совокупность всех статистических моментов этой величины.

Рассмотрим две точки, отстоящие друг от друга на расстоянии l (рис.4.3), и в качестве характеристики пульсаций скорости на масштабе l выберем разность проекций скорости в этих точках на направление, связывающее эти точки

$$\delta v_l = v_l(\vec{r} + \vec{l}) - v_l(\vec{r}) . \quad (4.18)$$

Введенная таким образом величина δv_l характеризует продольные пульсации скорости (на связи продольных и поперечных пульсаций мы остановимся ниже). Статистические моменты этой величины

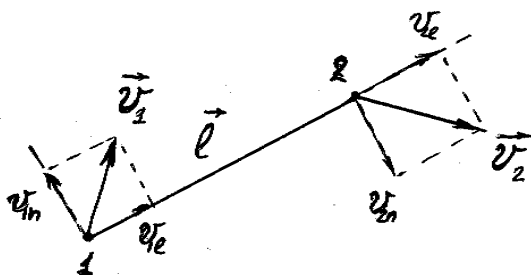


Рис.4.3

$$S_q(l) = \langle \delta v_l^q \rangle \quad (4.19)$$

называют структурными функциями и в силу изотропии течения они не должны зависеть от направления отрезка \vec{l} . Наряду со структурными функциями S_q рассматривают и структурные функции вида

$$T_q(l) = \langle |\delta v_l|^q \rangle . \quad (4.20)$$

Очевидно, что структурные функции (4.19) и (4.20) четных порядков q идентичны и отличия появляются только в функциях нечетных порядков.

Вторая гипотеза Колмогорова утверждает, что в инерционном интервале структурные функции зависят только от масштаба и скорости диссипации энергии

$$S_q(l) = f(\varepsilon, l) .$$

Далее делается самое сильное предположение, являющееся по сути главной гипотезой теории К41. Оно состоит в том, что скорость диссипации энергии считается универсальной константой для заданного течения, то есть в любой момент времени и в любой точке пространства диссипация энергии за единицу времени на единицу массы равна ε . Величина ε определяется энергией, вводимой в поток на единицу массы, и характеризует поток энергии, прокачиваемой вдоль всего инерционного интервала до диссипативных масштабов.

Приняв сформулированные гипотезы, можно получить ряд важных результатов, пользуясь только соображениями размерности. Напомним, что, говоря об энергии, мы все время имеем в виду энергию на единицу массы, то есть энергия измеряется в $\dot{\nu}^2/\tilde{n}^2$. Тогда размерность скорости диссипации энергии есть $\dot{\nu}^2/\tilde{n}^3$, и для пульсаций скорости можно составить только одну комбинацию величин ε и l с требуемой размерностью ($\dot{\nu} / \tilde{n}$)

$$\delta v_l \sim (\varepsilon l)^{1/3} . \quad (4.21)$$

Эту зависимость называют законом Колмогорова - Обухова.

Попытка применить соображения размерности к структурным функциям произвольного порядка очевидным образом приводит к формуле

$$S_q(l) \sim (\varepsilon l)^{q/3} . \quad (4.22)$$

Соображения размерности позволяют получить и форму энергетического спектра пульсаций скорости (4.16). Размерность энергии имеет величина $E(k)dk$. Следовательно, размерность величины $E(k)$ есть $\dot{\nu}^3/\tilde{n}^2$. Поскольку спектр энергии может зависеть только от величин ε и k , то единственно возможная комбинация есть

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3} k^{-5/3} . \quad (4.23)$$

Формулу (4.23) называют законом Колмогорова, а входящую в нее константу C - константой Колмогорова.

Чтобы увидеть степенной закон, соответствующую зависимость нужно представить в логарифмических координатах (рис.4.4). В таком представлении инерционному интервалу соответствует прямолинейный участок спектра, наклон которого должен быть равен показателю степени в законе (4.23).

Можно ли оценить диссипативный масштаб λ ? Исходя из первой гипотезы Колмогорова этот масштаб может зависеть только от скорости диссипации энергии и величины молекулярной вязкости (размерность кинематической вязкости $[\nu] = l^2 / \bar{n}$). Тогда подбор нужной размерности приводит к формуле

$$\lambda \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}. \quad (4.24)$$

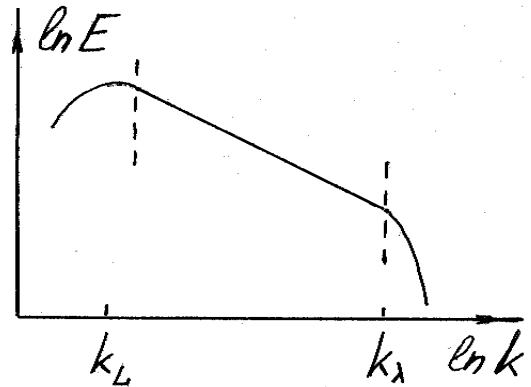


Рис.4.4

Интересно выразить диссипативный (внутренний) масштаб через макропараметры турбулентности. Пусть течение на макромасштабе L характеризуется скоростью U . Характеристикой течения является число Рейнольдса $R = UL/\nu$. Скорость диссипации энергии, равная скорости подвода энергии в турбулентность, может быть выражена и через макропараметры $\varepsilon \sim U^3 L^{-1}$. Тогда

$$\lambda \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \sim \left(\frac{\nu^3 L}{U^3} \right)^{1/4} \sim \left(\frac{\nu^3 L^4}{U^3 L^3} \right)^{1/4} \sim LR^{-3/4}. \quad (4.25)$$

Формула (4.25) дает возможность оценить число степеней свободы, возбужденных в турбулентном течении при заданном числе Рейнольдса. Считая, что $N \sim (L/\lambda)^3$, немедленно получаем

$$N \sim \left(\frac{L}{LR^{-3/4}} \right)^3 \sim R^{9/4}. \quad (4.26)$$

Выражение (4.26) может служить оценкой размеров сетки, необходимой для прямого численного моделирования турбулентного течения с заданным числом Рейнольдса.

4.3.2. Корреляционные функции

Методом анализа размерностей удалось получить оценки (4.21)-(4.22), качественно описывающие корреляции скорости в двух точках однородного и изотропного турбулентного течения, отстоящих друг от друга на расстояние l . Продолжая следовать работам Колмогорова 1941 года, покажем, что существует и точный результат, касающийся структурной функции третьего порядка.

Рассмотрим двухточечный корреляционный тензор второго ранга

$$B_{ik} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k}) \rangle, \quad (4.27)$$

где \vec{v}_1 и \vec{v}_2 - скорости в двух точках, отстоящих на расстоянии l (см. рис.4.3). Считаем, по-прежнему, что турбулентность однородна и изотропна, а средняя скорость равна нулю.

Введенный тензор в силу изотропии и однородности потока может зависеть только от модуля вектора \vec{l} , соединяющего две точки. Введем единичный вектор \vec{n} , направленный вдоль вектора \vec{l} , и запишем общий вид симметричного тензора второго ранга, зависящего от расстояния l ,

$$B_{ik} = A(l)\delta_{ik} + B(l)n_i n_k. \quad (4.28)$$

Чтобы придать физический смысл функциям $A(l)$ и $B(l)$, направим вектор \vec{l} вдоль одной из осей координат (это возможно опять же благодаря изотропии). Компоненту скорости вдоль этой оси обозначим как v_l , а перпендикулярную компоненту - как v_n . В таком представлении компонента B_{ll} равна среднему квадрату относительной скорости частиц в двух точках в направлении друг к другу. Компонента B_{nn} равна среднему квадрату относительной скорости частиц в перпендикулярном направлении и характеризует, таким образом, вращательное движение частиц относительно друг друга. При выбранном направлении отрезка единичный вектор $\vec{n} = (1,0,0)$ и согласно (4.28)

$$B_{ll}(l) = A(l) + B(l), \quad B_{nn}(l) = A(l), \quad B_{ln}(l) = 0. \quad (4.29)$$

Используя (4.29), перепишем (4.28) в виде

$$B_{ik} = B_{nn}(l)\delta_{ik} + (B_{ll}(l) - B_{nn}(l))n_i n_k. \quad (4.30)$$

Раскроем произведение в определении (4.27)

$$B_{ik} = \langle v_{2i} v_{2k} \rangle - \langle v_{1i} v_{2k} \rangle - \langle v_{1k} v_{2i} \rangle + \langle v_{1i} v_{1k} \rangle$$

и учтем, что в силу однородности потока одноточечные корреляции не зависят от положения точки

$$\langle v_{2i} v_{2k} \rangle = \langle v_{1i} v_{1k} \rangle = \frac{\delta_{ik}}{3} \langle v^2 \rangle,$$

а в силу изотропии

$$\langle v_{1i} v_{2k} \rangle = \langle v_{1k} v_{2i} \rangle$$

(при перестановке точек местами результат не меняется). Тогда

$$B_{ik} = \frac{2}{3} \langle v^2 \rangle \delta_{ik} - 2b_{ik}, \quad (4.31)$$

где $b_{ik} = \langle v_{1i} v_{2k} \rangle$ есть вспомогательный, симметричный тензор, компоненты которого стремятся к нулю при $l \rightarrow \infty$ (бесконечно удаленные точки статистически независимы).

Выражение (4.31) продифференцируем по координатам точки 2 и воспользуемся уравнением неразрывности:

$$\partial_{2k} B_{ik} = -2\partial_{2k} b_{ik} = -2 \langle v_{1i} \partial_{2k} v_{2k} \rangle = 0. \quad (4.31)$$

Дифференцирование B_{ik} по координате второй точки эквивалентно дифференцированию по соответствующей проекции вектора \vec{l} , поскольку тензор зависит только от этого вектора. Следовательно, $\partial_{2k} B_{ik} = \partial_k B_{ik} = 0$ и, подставляя в эту формулу выражение (4.30), получим

$$\begin{aligned} \partial_k B_{ik} &= \delta_{ik} B'_{mm}(l) \partial_k l + (B'_{ll}(l) - B'_{mm}(l)) n_i n_k \partial_k l + (B_{ll}(l) - B_{mm}(l)) \partial_k (n_i n_k) = \\ &= \left(B'_{ll} + \frac{2}{l} (B_{ll} - B_{mm}) \right) n_i = 0 \end{aligned}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по l . При вычислениях было учтено, что

$$\begin{aligned} \partial_k l &= \partial_k \sqrt{x_i^2} = x_k / l = n_k, \\ \partial_k n_i &= \partial_k (x_i / l) = (\delta_{ik} - n_i n_k) / l, \\ \partial_k n_k &= 2/l, \\ \partial_k (n_i n_k) &= n_k \partial_k n_i + n_i \partial_k n_k = 2n_i / l. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили уравнение, называемое первым уравнением Кармана - Ховарта, полученное этими авторами в 1937 году.

$$B'_{ll} + \frac{2}{l}(B_{ll} - B_{mm}) = 0 . \quad (4.32)$$

Это уравнение дает связь между продольными и поперечными корреляциями B_{ll} и B_{mm} . Важно подчеркнуть, что при его выводе использовалось только уравнение неразрывности. Уравнение (4.32) перепишем в виде

$$B_{mm} = B_{ll} + \frac{l}{2} B'_{ll} = \frac{\partial_l(l^2 B_{ll})}{2l} \quad (4.33)$$

и посмотрим, как выглядит связь между величинами B_{ll} и B_{mm} при конкретных степенных законах для корреляций. Пусть l столь малы, что соответствуют диссипативному интервалу ($l < \lambda$). В этом случае можно ограничиться первым членом ряда Тейлора и, предположив, что $\delta v_l \sim l$, записать

$$B_{ll} = cl^2 \quad (4.34)$$

где c - некоторая константа. Подставляя (4.34) в (4.33), легко получаем, что $B_{mm} = 2cl^2$. Следовательно, в диссипативном интервале корреляции связаны как

$$B_{mm} = 2B_{ll} .$$

В инерционном интервале ($\lambda \ll l \ll L$) согласно (4.21) имеем оценку $B_{ll} = c_1 l^{2/3}$. С помощью (4.33) вновь получается связь продольных и поперечных корреляций, которая в этом случае имеет вид

$$B_{mm} = \frac{4}{3} B_{ll} .$$

Важный вывод, который следует из уравнений (4.32), состоит в том, что при любом степенном поведении корреляционные функции B_{ll} и B_{mm} с точностью до постоянного множителя следуют одному и тому же степенному закону.

Теперь введем корреляционный тензор третьего ранга

$$B_{ikm} = \langle (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})(v_{2l} - v_{1l}) \rangle \quad (4.35)$$

и вспомогательный тензор

$$b_{ik,m} = \langle v_{1i} v_{1k} v_{2m} \rangle = - \langle v_{2i} v_{2k} v_{1m} \rangle. \quad (4.36)$$

Тензор $b_{ik,m}$ симметричен по первой паре индексов, относящихся к одной точке, и меняет знак при перестановке точек местами, так как эта перестановка эквивалентна изменению знака \vec{l} , а инверсия координат меняет знак тензора третьего ранга. При $l \rightarrow \infty$ все компоненты тензоров (4.35) и (4.36) должны стремиться к нулю.

Раскрывая произведение в (4.35) и учитывая, что $\langle v_{1i} v_{1k} v_{1m} \rangle = \langle v_{2i} v_{2k} v_{2m} \rangle = 0$ (среднее значение произведения нечетного числа случайных сомножителей, среднее значение каждого из которых равно нулю), получаем

$$B_{ikm} = 2(b_{ik,m} + b_{km,i} + b_{mi,k}). \quad (4.37)$$

Затем записываем общий вид тензора, симметричного по первой паре индексов и зависящего от компонент единичного вектора \vec{n} :

$$b_{ik,m} = C(l)\delta_{ik}n_m + D(l)(\delta_{im}n_k + \delta_{km}n_i) + F(l)n_in_kn_m. \quad (4.38)$$

Требуется выразить функции $C(l)$, $D(l)$ и $F(l)$ через имеющие физический смысл корреляционные функции третьего порядка. Для этого снова воспользуемся уравнением неразрывности, из которого следует, что

$$\partial_{2m} b_{ik,m} = \langle v_{1i} v_{1k} \partial_{2m} v_{2m} \rangle = 0. \quad (4.39)$$

Подставляем в (4.39) выражение (4.38) и учитывая, что

$$\partial_{2m}(n_in_kn_m) = \frac{2n_in_k}{l},$$

получаем два уравнения, позволяющие выразить функции $D(l)$ и $F(l)$ через $C(l)$:

$$D = -C - \frac{lC'}{2}, \quad F = lC' - C.$$

В результате

$$b_{ik,m} = C\delta_{ik}n_m - (C + \frac{1}{2}lC')(\delta_{im}n_k + \delta_{km}n_i) + (lC' - C)n_in_kn_m$$

и выражение для корреляционного тензора также включает только одну неизвестную функцию $C(l)$:

$$B_{ikm} = -2(lC' + C)(\delta_{ik}n_m + \delta_{im}n_k + \delta_{km}n_i) + 6(lC' - C)n_in_kn_m. \quad (4.40)$$

Вновь направим вектор \vec{l} вдоль одной из осей координат ($\vec{n} = (1,0,0)$) и выпишем компоненты тензора (4.40):

$$B_{ll} = -12C, \quad B_{lm} = -2(C + lC'), \quad B_{ln} = B_{mn} = 0. \quad (4.41)$$

Таким образом, отличны от нуля только две компоненты тензора, которые можно связать соотношением

$$B_{lm} = \frac{1}{6}(lB_{ll})'. \quad (4.42)$$

Комбинируя формулы (4.38)-(4.41), выразим вспомогательный тензор $b_{ik,m}$ через компоненты тензора B_{ikm} (это есть 2-е уравнение Кармана - Ховарта)

$$b_{ik,m} = -\frac{1}{12}B_{ll}\delta_{ik}n_m + \frac{1}{24}(lB_{ll}' + 2B_{ll})(\delta_{im}n_k + \delta_{km}n_i) - \frac{1}{12}(lB_{ll}' - B_{ll})n_in_kn_m. \quad (4.43)$$

Еще раз подчеркнем, что при выводе уравнений Кармана - Ховарта использовалось только уравнение непрерывности. Чтобы связать корреляционные тензоры второго и третьего порядка нужно использовать уравнение Навье - Стокса.

Вычислим производную по времени от тензора $b_{ik} = \langle v_{li}v_{2k} \rangle$, используя уравнение Навье - Стокса для производных от скорости

$$\begin{aligned} \partial_t b_{ik} &= \langle v_{2k}\partial_t v_{li} \rangle + \langle v_{li}\partial_t v_{2k} \rangle = \\ &= -\partial_{1j} \langle v_{lj}v_{li}v_{2k} \rangle - \partial_{2j} \langle v_{li}v_{2k}v_{2j} \rangle - \rho^{-1}(\partial_{li} \langle p_1 v_{2k} \rangle + \partial_{2k} \langle p_2 v_{li} \rangle) + \\ &+ \nu(\partial_{1jj}^2 \langle v_{li}v_{2k} \rangle + \partial_{2jj}^2 \langle v_{li}v_{2k} \rangle). \end{aligned}$$

Двухточечная корреляционная функция давления и скорости равна нулю. Это следует из того, что в силу изотропии эта функция должна иметь вид

$$\langle p_1 \vec{v}_2 \rangle = \vec{n} f(l),$$

а ее дивергенция должна быть равна нулю ($\partial_{2k} \langle p_1 v_{2k} \rangle = \langle p_1 \partial_{2k} v_{2k} \rangle = 0$). Действительно, чтобы удовлетворить последнему требованию, нужно положить $f(l) = c/l^2$ (тогда $\partial_{2k} \left(\frac{c}{l} n_k \right) = c \left(\frac{-2}{l^3} n_k^2 + \frac{1}{l^2} \frac{2}{l} \right) = 0$), а так как при $l \rightarrow 0$ корреляционная функция должна быть конечна, то единственно возможное значение константы есть $c = 0$.

Следующий шаг состоит в замене производных по координатам точек 1 и 2 на производные по компонентам вектора \vec{l} . Это оправдывается тем, что все корреляционные характеристики в однородном потоке зависят только от этого вектора. При этом $\partial_{1k} = -\partial_k$, а $\partial_{2k} = \partial_k$. Получаем

$$\partial_t b_{ik} = \partial_j \langle v_{1j} v_{1i} v_{2k} \rangle - \partial_j \langle v_{1i} v_{2k} v_{2j} \rangle + 2\nu \Delta \langle v_{1i} v_{2k} \rangle$$

и, окончательно,

$$\partial_t b_{ik} = \partial_j (b_{ij,k} + b_{kj,i}) + 2\nu \Delta b_{ik}. \quad (4.44)$$

В уравнение (4.44) необходимо подставить выражения для тензоров $b_{ij,k}$ (4.43) и b_{ik} (4.34). При вычислении производной по времени от последнего появляется производная по времени от среднего квадрата скорости, которая есть скорость диссипации энергии

$$\partial_t \frac{\langle v^2 \rangle}{3} = \frac{3}{2} \varepsilon.$$

Опуская достаточно длинные вычисления, приведем окончательное уравнение

$$-\frac{2}{3} \varepsilon - \frac{1}{2} \partial_t B_{ll} = \frac{1}{6l^4} (l^4 B_{lll})' - \frac{\nu}{l^4} (l^4 B_{ll}')'. \quad (4.45)$$

Рассматривая стационарную или, по крайней мере, квазистационарную турбулентность, когда член $\partial_t B_{ll}$ все равно много меньше скорости диссипации, можно отбросить слагаемое с производной по времени. Интегрирование (4.45) по l дает уравнение Колмогорова

$$B_{lll} = -\frac{4}{5} \varepsilon l + 6\nu B_{ll}'. \quad (4.46)$$

Константа интегрирования принята равной нулю в силу требования обращения в нуль корреляций при $l \rightarrow \infty$.

Уравнение (4.46), как и уравнение (4.45), включает две независимые корреляционные функции и не является достаточным для их нахождения. Попытка написать дополнительное уравнение для корреляционного тензора третьего порядка приведет к уравнению, содержащему тензор четвертого порядка и т.д. Таким образом, снова возникает проблема замыкания, с которой мы уже сталкивались при рассмотрении уравнений для одноточечных моментов турбулентных полей.

Уравнение (4.46) справедливо для всех $l \ll L$, то есть и для инерционного, и для диссипативного интервалов. В инерционном интервале послед-

ним слагаемым, пропорциональным вязкости, можно пренебречь и получить замкнутое уравнение для корреляционной функции третьего порядка

$$B_{III} = -\frac{4}{5}\varepsilon l. \quad (4.47)$$

Уравнение (4.47), которое часто называют «законом 4/5», остается одним из важнейших результатов, полученных для мелкомасштабной турбулентности. Следует еще раз подчеркнуть, что закон (4.47) представляет собой точный результат, полученный для инерционного интервала только на основе уравнений Навье - Стокса. Таким образом, среди оценок (4.22) есть одна, справедливость которой является доказанной, а именно,

$$S_3(l) \sim \varepsilon l.$$

Для всех остальных структурных функций формула (4.22) является лишь оценкой, на слабость которой впервые указал Л.Ландау уже в 1942 году. Суть знаменитого замечания Ландау состоит в том, что в правой части формулы стоит скорость диссипации энергии ε , которая в действительности не является постоянной, а также представляет собой случайную величину, характеризуемую собственной функцией распределения. В выражение для структурной функции третьего порядка входит собственно среднее значение скорости диссипации и проблемы среднего значения не возникает. Во всех остальных случаях в оценки входят различные степени случайной величины и, естественно, среднее значение от величины в некоторой степени не есть эта же степень от среднего.

4.4. Логнормальная модель (К62)

Экспериментальные исследования статистических свойств мелкомасштабной турбулентности ведутся, начиная с пятидесятых годов. На первых порах основной интерес представляло экспериментальное подтверждение закона «пяти третей» (4.23) и определение входящей в него константы. В многочисленных экспериментах было подтверждено существование инерционного интервала с распределением энергии пульсаций скорости, близким к закону «5/3». Измерения входящей в закон константы дали значения $C \approx 1.5$, но интерес к точному измерению этой величины упал после того,

как стало ясно, что закон (4.23) описывает реальную ситуацию только приблизительно.

Наиболее точные измерения энергетического спектра однородной турбулентности показывают, что он подчиняется степенному закону вида

$$E(k) \sim k^{-\alpha} \quad (4.48)$$

с показателем степени $\alpha = 1.71 \pm 0.02$. Отличие от пяти третей, на первый взгляд, не велико, но оно принципиально. Более полную картину можно получить, исследуя поведение структурных функций высоких порядков. На практике измеряют значения скорости в двух точках, вычисляют структурные функции (4.19) и, ожидая существования степенных законов вида

$$S_q(l) \sim l^{\zeta_q}, \quad (4.49)$$

строят структурные функции в двойном логарифмическом масштабе. При выполнении (4.49) должна получиться картинка, изображенная на рис.4.5,а - в инерционном интервале возникают линейные участки, наклон которых дает величину степенных показателей ζ_q . Качественно вид получающегося графика для показателей степени представлен на рисунке 4.5,б. Пунктирная линия соответствует зависимости (4.20) и помечена надписью «К41». На этой линии выделены две точки, для которых оценка (4.22) является точной. Это начало координат ($\zeta_0 = 0$) и точка $\zeta_3 = 1$, соответствующая закону «четырёх пятых» (4.47). Экспериментальная кривая действительно пересекает эти две точки, удаляясь от прямой $\zeta_q = q/3$ по мере роста порядка q . Подчеркнем, что измерение структурных функций высоких порядков является чрезвычайно сложной задачей и только в последние годы появились надежные измерения для структурных функций порядка $q > 10$. Тем не менее, уже первые измерения структурных функций относительно невысоких порядков подтвердили справедливость замечания Ландау - локальные вариации скорости диссипации энергии на-

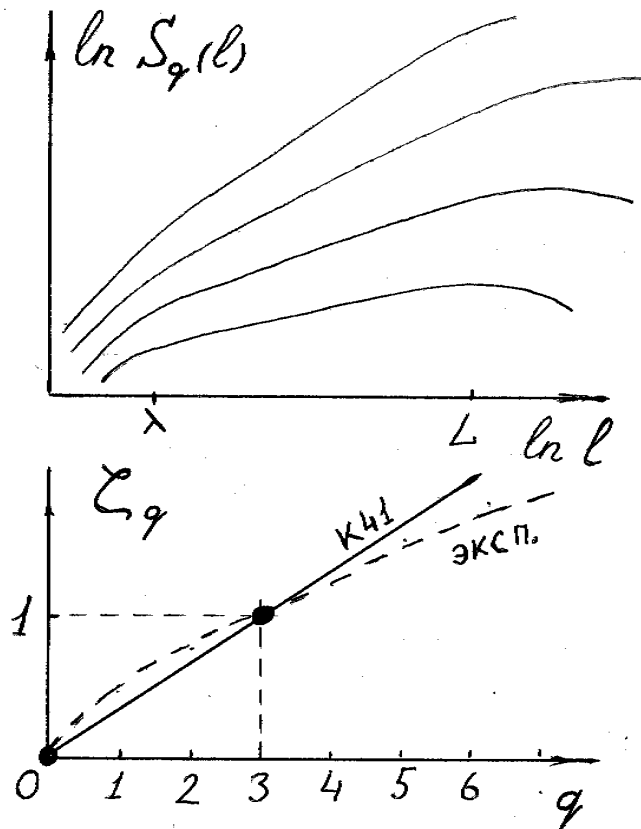


Рис.4.5

рушают колмогоровский сценарий однородной турбулентности.

Нарушение локальной однородности турбулентности получило название «перемежаемости». Суть этого явления состоит в том, что в турбулентности даже при сколь угодно больших числах Рейнольдса активные области сосуществуют с пассивными, в которых течение квазиламинарно.

Первую попытку скорректировать закон (4.22) путем учета статистических свойств поля диссипации энергии сделал сам Колмогоров в 1962 году (эту модель будем называть К62).

Для учета структуры поля диссипации энергии Колмогоров ввел в рассмотрение величину ε_l , которая представляет собой среднюю скорость диссипации, измеренную внутри объема с характерным размером l (например, сферы или куба). Модель держится на двух дополнительных гипотезах.

Первая гипотеза - это гипотеза подобия

$$S_q(l) = \langle \delta v_l^q \rangle \sim \langle \varepsilon_l^{q/3} \rangle l^{q/3}, \quad (4.50)$$

обобщающая формулу (4.22) в том смысле, что теперь в правой части стоит не постоянная величина ε в степени $q/3$, а статистический момент порядка $q/3$, характеризующий структуру случайного поля диссипации энергии на соответствующих масштабах l .

Гипотезу подобия (4.50) можно записать в другом виде. Если предположить существование степенных законов вида (4.49) и для моментов поля диссипации, то есть

$$\langle \varepsilon_l^q \rangle \sim l^{\tau_q}, \quad (4.51)$$

то гипотеза (4.50) выражается в виде простого соотношения между показателями степени в (4.49) и (4.51):

$$\zeta_q = \frac{q}{3} + \tau_{q/3}. \quad (4.52)$$

Очевидно, что (4.52) возвращает нас к модели К41, если $\tau_q = 0$ для любых q .

Вторая гипотеза К62 касается вида функции распределения вероятности для величины ε_l . Обычно в качестве простейшей вероятностной модели рассматривается нормальное распределение, однако, в нашем случае оно не годится, так как диссипация - величина сугубо положительная, а хвост нормального распределения уходит в область отрицательных значений. Колмогоров предложил избежать эту трудность путем рассмотрения логнормального распределения (по нормальному закону распределен логарифм диссипации энергии)

$$P(\varepsilon_l) = ce^{-\frac{(\ln \varepsilon - a)^2}{2\sigma_l^2}}. \quad (4.53)$$

Здесь P - функция распределения вероятности, $a = \ln \bar{\varepsilon}$, σ_l^2 - дисперсия, равная на масштабе l величине

$$\sigma_l^2 = A + \mu \ln(L/l). \quad (4.54)$$

Логнормальная модель приводит к следующим выражениям для показателей степени:

$$\tau_q = \frac{\mu}{2} q(1-q), \quad \zeta_q = \frac{q}{3} + \frac{\mu}{18} q(3-q). \quad (4.55)$$

Величина μ , называемая коэффициентом перемежаемости, имеет простой физический смысл - с точностью до знака это показатель степени для момента второго порядка поля диссипации энергии ($\tau_2 = -\mu$), т.е.

$$\langle \varepsilon_l^2 \rangle \sim l^{-\mu}.$$

Связанный со вторым моментом поля диссипации шестой момент поля скорости также позволяет просто определить коэффициент перемежаемости. Действительно, согласно (4.55),

$$\zeta_6 = 2 - \mu,$$

то есть коэффициент перемежаемости равен отклонению степенного показателя ζ_6 от значения, следующего из модели однородной турбулентности К41.

Гипотеза о логнормальном распределении была опровергнута и экспериментально, и теоретически. Экспериментальные измерения функции распределения вероятности показывают, что в координатах $(\ln \varepsilon, \ln P)$ функция распределения имеет несимметричный вид, в то время как логнормальное распределение в таких координатах должно приводить к параболе.

Относительно свойств функции $\zeta(q)$ было доказано два утверждения¹. Во-первых, $\zeta(q)$ - функция выпуклая, т.е. $\zeta'' < 0$ и, во вторых, $\zeta_{q+1} \geq \zeta_q$ для любых q . Формула (4.55) удовлетворяет первому требованию (а также обеспечивает выполнение условий $\zeta_0 = 0$ и $\zeta_3 = 1$), но не удовлетворяет второму - при некотором значении q функция (это парабола) имеет максимум, после которого значения $\zeta(q)$ начинают убывать.

¹ U.Frisch. Turbulence. Cambridge University Press. 1995. 296 p.

В отличие от второй гипотезы, гипотеза подобия (4.50) используется до настоящего времени, хотя ее интерпретация претерпела существенные изменения. Дело в том, что в формулировке (4.50) эта гипотеза несет в себе два противоречия. Во-первых, левая часть выражения содержит величину, относящуюся к инерционному интервалу, а правая - величину, эффективную только в диссипативном. Во-вторых, диссипация энергии есть величина сугубо положительная, а пульсации скорости - нет. В таком случае трудно рассчитывать, что статистические свойства этих величин одинаковы, а именно в этом и состоит суть гипотезы подобия.

Избежать отмеченных противоречий можно следующим образом. Выделим в пространстве, занятом турбулентным течением, произвольный объем с характерным размером l и рассмотрим изменения плотности энергии пульсаций скорости в этом объеме:

$$\begin{aligned} \partial_t e_1 &= \partial_t \frac{1}{V} \int_V \frac{v^2}{2} d\vec{r} = -\frac{1}{V} \int_V \vec{v}(\nabla \vec{v}) \vec{v} d\vec{r} - \frac{1}{V\rho} \int_V \vec{v} \nabla P d\vec{r} + \frac{v}{V} \int_V \vec{v} \Delta \vec{v} d\vec{r} + \frac{1}{V} \int_V \vec{v} \vec{f} d\vec{r} = \\ &= \frac{1}{V} \int_V \operatorname{div} \left[\left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) \vec{v} \right] d\vec{r} - \varepsilon_1 + q_1 = \\ &= \frac{1}{V} \oint_S \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) \vec{v} d\vec{s} - \varepsilon_1 + q_1 = \\ &= \eta_1 - \varepsilon_1 + q_1. \end{aligned}$$

Здесь ε_1 есть диссипация энергии за единицу времени на единицу массы, q_1 - приток энергии за счет работы внешних сил (также за единицу времени и на единицу массы). Первое слагаемое в правой части, обозначенное как η_1 , описывает приток энергии в выделенный объем через его поверхность.

Из скорости диссипации энергии можно выделить ее среднее значение $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon} + \varepsilon'_1$. Если рассматривается стационарно возбуждаемая турбулентность, то средняя скорость диссипации должна быть равна плотности притока энергии за счет внешних сил, т.е. $q_1 = \bar{\varepsilon}$. Тогда

$$\partial_t e_1 = \eta_1 - \varepsilon'_1, \quad (4.56)$$

то есть изменения энергии в выделенном объеме определяются потоком энергии через его поверхность и вариациями диссипации. Избежать отмеченных выше противоречий можно путем рассмотрения не скорости диссипации энергии в объеме заданного масштаба, а потоков энергии через поверхность этого объема. Последний определяется действием нелинейного

члена в уравнении Навье - Стокса, то есть именно того члена, который определяет нелинейную динамику потока при больших числах Рейнольдса.

Именно величина η_l и будет использована в дальнейшем как характеристика потоков энергии на различных масштабах движения. Необходимо отметить, что переход от использования ε_l к η_l произошел совсем недавно, а традиция применения в моделях мелкомасштабной турбулентности скорости диссипации энергии столь крепка, что часто даже в работах, где реально пользуются величиной η_l , авторы, тем не менее, используют термин «скорость диссипации энергии».

4.5. Фракталы и турбулентность

Колмогоровская модель однородной турбулентности (К41) подразумевает равномерное заполнение пространства вихрями каждого масштаба. Таковую структуру турбулентности иллюстрирует рис.4.6,а, на котором схематически изображен каскад энергии от вихрей большего масштаба к вихрям меньшего масштаба и для простоты представлена ситуация, когда каждый вихрь данного масштаба имеет под собой два вихря меньшего. При этом вихри каждого масштаба занимают все пространство (на рисунке оно одномерно).

Иная картина соответствует турбулентности с перемежаемостью (рис.4.6,б). В рамках аналогичной схемы в этом случае часть вихрей не получает энергию от вихрей верхнего уровня. На следующем уровне энергия оставшихся (активных) вихрей вновь передается только части вихрей и так далее. В результате в пространстве образуется многомасштабная система активных и пассивных областей, которая по построению представляет собой фрактальное множество (см. п.2.6 части 1).

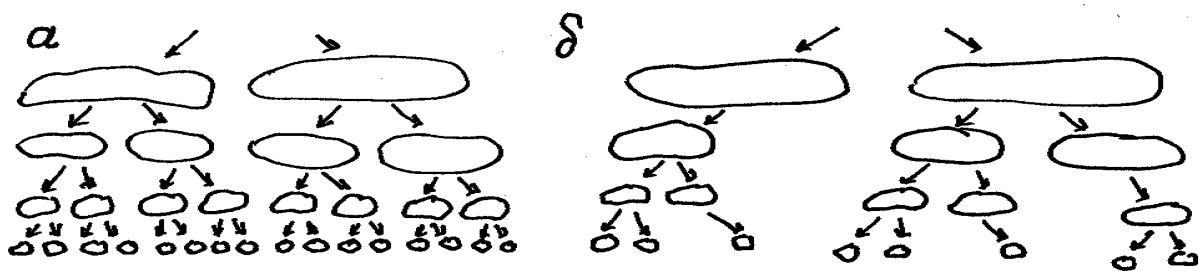


Рис.4.6

Идея использования фракталов для описания структуры поля диссипации энергии впервые была высказана в работе Новикова и Стьюарта в

1964г.² Простейшая динамическая модель инерционного интервала, приводящая к фракталам, предложена в работе³. Эта модель, названная авторами β -моделью, описана в следующем параграфе.

Фракталы принесли в теорию турбулентности еще одну важную идею - идею о неоднозначности масштабных показателей, иначе говоря, идею о сосуществовании в развитых турбулентных полях подмножеств с различными законами масштабного подобия (скейлинга).

Напомним, что уравнения Навье - Стокса подчиняются шести принципам инвариантности, то есть, допускают шесть видов преобразований, при которых любое решение уравнений $\vec{v}(\vec{r}, t)$ остается решением этих уравнений:

- 1) пространственный сдвиг,
- 2) сдвиг по времени,
- 3) преобразование Галилея,
- 4) четность,
- 5) вращение,
- 6) масштабная инвариантность (скейлинг).

Последнее свойство означает, что уравнения Навье - Стокса инвариантны к преобразованию

$$t, \vec{r}, \vec{v} \mapsto \lambda^{1+\alpha} t, \lambda \vec{r}, \lambda^{-\alpha} \vec{v}.$$

Действительно, такое преобразование приводит к появлению в уравнении движения следующих множителей

$$\lambda^{-2\alpha-1} \partial_t \vec{v} + \lambda^{-2\alpha-1} [(\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v}] + \rho^{-1} \nabla P = \nu \lambda^{-\alpha-2} \Delta \vec{v}.$$

При конечной вязкости инвариантность (подобие) обеспечивается единственно возможным решением $\alpha = 1$, эквивалентным требованию постоянства числа Рейнольдса (во сколько раз увеличивается масштаб, во столько же раз должна быть уменьшена скорость). Однако, при $\nu \rightarrow 0$ масштабное подобие обеспечивается любым α . К41 дает решение $\alpha = 1/3$, монофрактальная модель типа β -модели приводит к другому, но также единственному, решению. Бифрактальная модель (параграф 4.5.2) предполагает сосуществования в потоке двух подмножеств с различными законами подобия (различными α), а мультифрактальная модель (параграф 4.5.3) рассматривает непрерывную последовательность таких подмножеств, приводя к понятию мультифрактального спектра.

² Новиков Е.А., Стюарт Р.В. Перемежаемость турбулентности и спектр диссипации энергии // Изв.АН СССР: Серия геофизическая. 1964. N.3. С.408-413.

³ Frisch U., Sulem P.-L., Nelkin M. A simple dynamic model of intermittent fully developed turbulence // J.Fluid Mechanics. 1978. Vol.87. P.719-736.

4.5.1. β -модель

Обратимся к турбулентности в кубической области и рассмотрим последовательность масштабов

$$l_n = l_0 2^{-n}.$$

На каждом масштабе n исходная область разбивается на кубики с ребром l_n , общее число которых есть $N = (l_0 / l_n)^3 = 2^{3n}$.

Следуя схеме рис.4.6,б, будем считать, что при переходе к каждому следующему масштабу активной остается только заданная часть кубиков β , причем эта часть есть величина постоянная, являющаяся параметром модели. Двумерная картинка, соответствующая такому построению с $\beta = 3/4$, представлена на рис.4.7.

На масштабе n число активных вихрей есть $M = N\beta_n$, где

$$\beta_n = \beta^n = \left(\frac{l_0}{l_n}\right)^{D-3} = 2^{n(D-3)}, \quad (4.57)$$

а D есть фрактальная размерность активной области. Величина $d = 3 - D$, равная разности размерности пространства и размерности фрактального множества, называется коразмерностью и просто связана с параметром β :

$$d = \frac{\ln 2}{\ln \beta}. \quad (4.58)$$

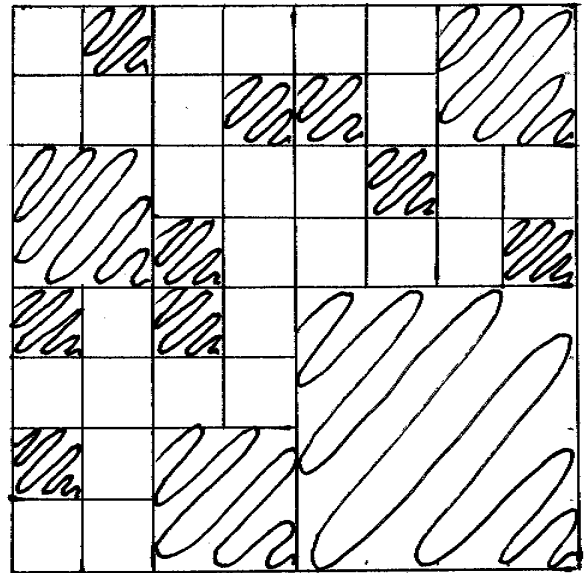


Рис.4.7

Рассмотрим теперь каскад энергии в такой модели. Характерное значение пульсации скорости на масштабе l_n обозначим как δv_n . Тогда характерное время (время оборота вихря соответствующего масштаба) есть $t_n \sim l_n / \delta v_n$. При сплошном заполнении пространства (случай однородной турбулентности) плотность энергии пульсаций масштаба n

$$E_n \sim \delta v_n^2, \quad (4.59)$$

а скорость переноса энергии через данный масштаб есть

$$\varepsilon_n \sim \frac{E_n}{t_n} \sim \frac{\delta v_n^3}{l_n}. \quad (4.60)$$

Тогда из гипотезы постоянства потока энергии в любом масштабе, относящемся к инерционному интервалу,

$$\varepsilon_n = \bar{\varepsilon} = \text{const} \quad (4.61)$$

немедленно получается колмогоровское выражение

$$\delta v_n \sim (l_n \bar{\varepsilon})^{1/3}. \quad (4.62)$$

В β - модели энергия данного масштаба сосредоточена только в активной части потока и средняя плотность энергии на этом масштабе равна

$$E_n \sim \delta v_n^2 \beta_n. \quad (4.63)$$

Гипотеза (4.61) остается в силе - поток энергии по-прежнему постоянен, но, по мере движения к малым масштабам, он сосредотачивается все в меньшей части пространства. Следовательно,

$$\varepsilon_n \sim \frac{E_n}{t_n} \sim \frac{\beta^n \delta v_n^3}{l_n} = \bar{\varepsilon}, \quad (4.64)$$

а вместо (4.62) получается следующая оценка для пульсаций скорости:

$$\delta v_n \sim (l_n \bar{\varepsilon})^{1/3} \beta^{-n/3} \sim \bar{\varepsilon}^{1/3} l_n^{(D-2)/3}. \quad (4.65)$$

Очевидно, что фрактальная размерность D не может быть меньше двух, так как в этом случае интенсивность пульсаций скорости будет нарастать с уменьшением масштабов.

Получим теперь оценку для структурных функций произвольного порядка. Имеем

$$S_q(l_n) = \langle \delta v_l^q \rangle \sim \beta_n \delta v_n^q \sim \bar{\varepsilon}^{q/3} l_n^{q/3} \beta^{n(1-q/3)} \sim \bar{\varepsilon}^{q/3} l_n^{q/3 + (3-D)(3-q)/3} \quad (4.66)$$

или

$$\zeta_q = \frac{q}{3} + \frac{(3-D)(3-q)}{3}. \quad (4.67)$$

В отличие от логнормальной модели, которая дает квадратичную поправку к колмогоровскому закону $q/3$ для масштабных показателей, β -

модель дала линейную поправку, которая удовлетворяет условию $\zeta_3 = 1$, но нарушает требование $\zeta_0 = 0$.

4.5.2. Бифрактальная модель

В основе β -модели лежит представление о турбулентном поле скоростей, как об однородном фрактале, характеризуемом единственным параметром. Даваемый этой моделью результат представляется разумным для больших q , где линейная зависимость $\zeta(q)$ хорошо согласуется с известными экспериментальными данными, однако вступает в явные противоречия и с экспериментальными данными, и с теоретическими соображениями при $q \rightarrow 0$.

Среди попыток усовершенствования β -модели можно выделить две. Первая - это так называемая случайная β -модель. Если в стандартной β -модели области делятся на активные и пассивные, то есть вероятность того, что турбулентность в данной точке существует, равна либо нулю, либо единице, то в случайной β -модели вводятся два дополнительных параметра p_1 и p_2 , определяющие

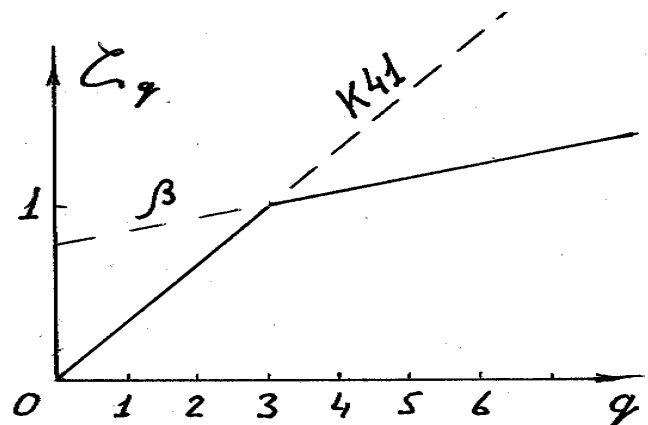


Рис.4.8

вероятность существования турбулентности при очередном дроблении на более активную и менее активную части.

Остановимся более подробно на второй модификации β -модели, получившей название бифрактальной модели. Идея этой модели состоит в том, что предполагается сосуществование двух фрактальных подмножеств с различными законами скейлинга вида (4.65) и соответствующими размерностями D_1 и D_2 . Для пульсаций скорости на масштабе n получаем оценку

$$\delta v_n \sim \mu_1 l_n^{\alpha_1} P_1 + \mu_2 l_n^{\alpha_2} P_2,$$

где μ_i - некоторые числовые множители, а вероятности появления элементов подмножеств определяются точно так же, как в предыдущем параграфе и равны $P_i = \beta_i^n = (l_n / l_0)^{3-D_i}$. В результате, для пульсаций скорости имеем

$$\delta v_n \sim \mu_1 (l_n / l_0)^{\alpha_1 + 3 - D_1} + \mu_2 (l_n / l_0)^{\alpha_2 + 3 - D_2},$$

а для структурных функций произвольного порядка

$$S_q(l_n) = \langle \delta v_l^q \rangle \sim \mu_1 l_n^{q\alpha_1} P_1 + \mu_2 l_n^{q\alpha_2} P_2 \sim \mu_1 (l_n / l_0)^{q\alpha_1 + 3 - D_1} + \mu_2 (l_n / l_0)^{q\alpha_2 + 3 - D_2}. \quad (4.68)$$

Нас интересует вид масштабных множителей в степенных законах $S_q(l) \sim l^{\zeta_q}$ (4.49). Поскольку (l_n / l_0) есть величина малая, то определяющий вклад в выражении (4.68) дает слагаемое с наименьшим показателем степени. Из этого следует, что

$$\zeta_q = \min(q\alpha_1 + 3 - D_1, q\alpha_2 + 3 - D_2). \quad (4.69)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда одно из двух подмножеств представляет собой однородное колмогоровское поле ($D_1 = 3, \alpha_1 = 1/3$), а второе - фрактальное ($2 < D_2 < 3, \alpha_2 = (D_2 - 2)/3$). Условие (4.69) приводит к

$$\zeta_q = \begin{cases} \frac{q}{3} & q \leq 3 \\ \frac{q}{3} + \frac{(3 - D_2)(3 - q)}{3} & \text{при } q > 3. \end{cases} \quad (4.70)$$

Полученный результат иллюстрирует рис.4.8, на котором показаны решения, соответствующие K41, β -модели и их комбинации (4.70), к которой приводит бифрактальная модель.

4.5.3. Мультифрактальная модель

Естественным обобщением описанной выше бифрактальной модели является мультифрактальная модель, которая основана на предположении, что в турбулентности существует непрерывная последовательность подмножеств, каждое из которых характеризуется своим показателем α . Значения α лежат в интервале $\alpha_{\min} < \alpha < \alpha_{\max}$.

Структурные функции получают вклад от всех подмножеств и определяются интегралами

$$S_q = \langle \delta v_l^q \rangle \sim \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \left(\frac{l}{l_0} \right)^{q\alpha} P(\alpha) d\alpha ,$$

в которых распределение вероятности записывается в виде $P(\alpha) \sim \left(\frac{l}{l_0} \right)^{-f(\alpha)}$.

Тогда

$$S_q \sim \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \left(\frac{l}{l_0} \right)^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha . \quad (4.71)$$

Поскольку $l/l_0 \ll 1$, то наибольший вклад в интеграл дает составляющая с минимальным показателем степени. Следовательно,

$$\zeta_q = \min(q\alpha - f(\alpha)). \quad (4.72)$$

Условие минимума дает

$$q = f'(\alpha). \quad (4.73)$$

В такой модели α есть локальная характеристика скейлинговых свойств, а функция $f(\alpha)$, называемая мультифрактальным спектром, описывает глобальную природу распределения областей с различным скейлингом. Очевидно, что мультифрактальная модель имеет по сути бесконечное число параметров и может описать любую экспериментально обнаруженную зависимость $\zeta(q)$.

Рассмотрим алгоритм вычисления мультифрактального спектра. Пусть имеется положительно определенная величина ξ (это может быть плотность энергии, завихренности, скорости диссипации и т.д.). Исследуемую область разобьем на кубики с ребром l (всего N кубиков) и введем величины

$$\rho_i = \frac{\xi_i}{\sum_{i=1}^N \xi_i} ,$$

где ξ_i есть среднее по кубику i значение рассматриваемой величины. Определим структурные функции

$$S_q = \sum_i \rho_i^q , \quad (4.74)$$

и вспомним введенное в параграфе 2.6.3 части 1 понятие обобщенной размерности, которая есть (см. формулу (2.37))

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_i \rho_i^q}{(q-1) \ln l}. \quad (4.75)$$

Исходя из мультифрактальной структуры рассматриваемого поля, то есть считая, что в различных точках пространства исследуемая величина подчиняется масштабному закону типа $\rho(l) \sim l^\alpha$ с различными значениями показателя α , структурные функции можно записать в виде (4.71), а именно

$$S_q \sim \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} l^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha. \quad (4.76)$$

При $l \rightarrow 0$ в интеграле (4.76) доминирующую роль играют области, обеспечивающие минимальное значение показателя степени. Следовательно, значение величины ζ_q определяется условиями (4.72)-(4.73).

Пусть $\tilde{\alpha}(q)$ есть значение α , обеспечивающее условие минимума (4.73) для заданного значения q . Тогда

$$S_q \sim l^{q\tilde{\alpha} - f(\tilde{\alpha})}.$$

Согласно определению (4.75)

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln S_q}{(q-1) \ln l} \cong \frac{q\tilde{\alpha} - f(\tilde{\alpha})}{(q-1)}$$

или

$$f(\tilde{\alpha}) = q\tilde{\alpha}(q) - D_q(q-1). \quad (4.77)$$

Выражение (4.77) дифференцируем по q . Учитывая, что $\frac{df}{dq} = \frac{df}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dq}$ и условие (4.73), получаем

$$\tilde{\alpha}(q) = \frac{d}{dq} [(q-1)D_q]. \quad (4.78)$$

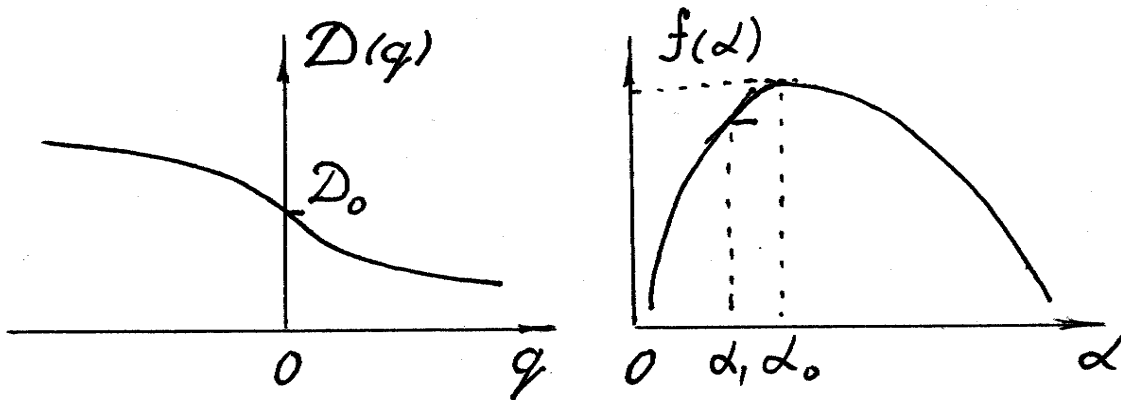


Рис.4.9

Таким образом, алгоритм вычисления мультифрактального спектра состоит в следующем. Имея измерения ξ_i , по формуле (4.75) вычисляют размерность $D(q)$ для различных значений q (как положительных, так и отрицательных). Затем по формуле (4.78) определяют значения $\tilde{\alpha}(q)$, обеспечивающие минимум (4.72) для данного q . После этого по формуле (4.77) вычисляют спектр $f(\alpha)$.

Типичный вид функций $D(q)$ и $f(\alpha)$ показан на рис.4.9. Функция $D(q)$ пересекает ось ординат в точке, дающей размерность пространства (три, если речь идет об обычном трехмерном потоке, либо два, если исследуется двумерная картина). На графике $f(\alpha)$ точка максимума соответствует моменту нулевого порядка ($f'(\alpha) = q = 0$). Абсцисса этой точки, обозначенная на рисунке как α_0 , дает среднее значение показателя скейлинга α . Наиболее вероятное значение величины α дает точка α_1 , определяющая точку кривой, в которой $q = f' = 1$.

4.6. Логпуассоновские модели

В этом разделе мы рассмотрим модели последнего поколения, возникшие в середине 90-х годов. Первой описана модель, предложенная Ше и Левеком в 1994 году⁴. Основанная на трех гипотезах, из которых две казались не очень убедительными, модель дала простую формулу для зависимости ζ_q . По счастливому стечению обстоятельств, в это же время группой итальянских и французских исследователей экспериментально был обнаружен любопытный факт, получивший название расширенной автомодельности, который позволил существенно повысить точность экспериментального определения показателей ζ_q для структурных функций высоких порядков. Новые экспериментальные результаты удивительно хорошо совпали с формулой Ше - Левека. Существенное обобщение этой модели было сделано Б.Дюбрюль⁵, которая включила в модель и идею расширенной автомодельности. Расширенной автомодельности посвящен второй параграф раздела. Модель Дюбрюль описана в последнем параграфе этого раздела.

⁴ She Z.S., Leveque E. Universal scaling laws in fully developed turbulence // Physical Review Letters, 1994. Vol.72. P.336-339.

⁵ Dubrulle B. Intermittency in fully developed turbulence: log-Poisson statistics and generalized scale covariance // Physical Review Letters, 1994. Vol.73. P.959-962.

4.6.1. Модель Ше - Левека

Модель Ше - Левека держится на трех гипотезах. Первая - это гипотеза подобия, введенная Колмогоровым в модели К62

$$S_q(l) = \langle \delta v_l^q \rangle \sim \langle \varepsilon_l^{q/3} \rangle l^{q/3}, \quad (4.50)$$

которая записывалась выше и в виде

$$\zeta_q = \frac{q}{3} + \tau_{q/3}, \quad (4.52)$$

предполагающем существование степенного закона $\langle \varepsilon_l^q \rangle \sim l^{\tau_q}$ для статистических моментов поля диссипации энергии.

Модель содержит в себе и идею мультифрактальности развитой турбулентности. Напомним, что основной (качественный) вывод из мультифрактального подхода к проблеме мелкомасштабной турбулентности состоит в том, что в потоке сосуществуют области с различными законами скейлинга и что для моментов (структурных функций) различного порядка определяющую роль играют области с различным скейлингом. В рассматриваемой модели считается, что диссипация энергии ε_l характеризуется «иерархией флуктуирующих структур» $\varepsilon_l^{(q)}$, которые определяются как отношение последующих моментов поля диссипации

$$\varepsilon_l^{(q)} = \frac{\langle \varepsilon_l^{q+1} \rangle}{\langle \varepsilon_l^q \rangle}. \quad (4.79)$$

Последовательность относительных моментов $\varepsilon_l^{(q)}$ ограничена, с одной стороны, членом $\varepsilon_l^{(0)}$, который соответствует среднему значению скорости диссипации ($\varepsilon_l^{(0)} = \bar{\varepsilon}$), и членом

$$\varepsilon_l^{(\infty)} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\langle \varepsilon_l^{q+1} \rangle}{\langle \varepsilon_l^q \rangle} \quad (4.80)$$

с другой стороны. Относительные моменты (4.79) удобны тем, что все они имеют размерность скорости диссипации. Поле диссипации крайне неоднородно и формируется структурами с различными скейлинговыми свойствами. Чем больше номер относительного момента q , тем более неоднородные структуры он описывает. Считается, что предел последовательности (4.80) существует и определяется видом предельных диссипативных структур, в которых скорость диссипации достигает экстремально больших значений. Исходя из экспериментальных наблюдений последних лет, авто-

ры модели предположили, что эти предельные структуры имеют вид вихревых нитей с размерностью $D=1$.

Две оставшиеся гипотезы касаются свойств относительных моментов $\varepsilon_l^{(q)}$. Гипотеза 2 вводит универсальную связь, связывающую старший момент с младшим,

$$\varepsilon_l^{(q+1)} = A_q \varepsilon_l^{(q)\beta} \varepsilon_l^{(\infty)(1-\beta)}. \quad (4.81)$$

Соотношение включает неизвестный пока параметр β и является, пожалуй, самым сильным предположением, сделанным при построении модели. Ясно, что любая гипотеза относительно связи статистических моментов различных порядков есть, по сути, гипотеза относительно функции распределения случайной величины, моменты которой рассматриваются. Забегая вперед, скажем, что гипотеза (4.81) подразумевает логпуассоновскую функцию распределения (этот факт был обнаружен позже, независимо Ч.-З.Ше и Б.Дюбрьоль).

Третья гипотеза касается величины $\varepsilon_l^{(\infty)}$. Предполагается, что она подчиняется степенному закону

$$\varepsilon_l^{(\infty)} \sim l^{-2/3}. \quad (4.82)$$

Физическая мотивировка (4.82) состоит в следующем. Как указывалось выше, величина $\varepsilon_l^{(\infty)}$ зависит от предельных диссипативных структур и имеет размерность скорости диссипации энергии. Следовательно, из размерных соображений

$$\varepsilon_l^{(\infty)} \sim \frac{\delta E^\infty}{t_l},$$

где δE^∞ есть плотность энергии, доступной диссипации в тех нитевидных структурах, о которых идет речь. Считается, что в этих диссипативных структурах имеет место квазиразрыв, то есть независимо от масштаба $\delta v_l \approx \delta v_0$ и энергия не зависит от масштаба l . Масштаб времени принимается колмогоровским ($t_l \sim \bar{\varepsilon}^{-1/3} l^{2/3}$), что приводит к оценке

$$\varepsilon_l^{(\infty)} \sim \frac{1}{t_l} \sim l^{-2/3}.$$

На основе введенных гипотез можно получить выражение для структурных функций поля диссипации, а затем и поля скорости. Из третьей гипотезы (4.82) следует, что при $q \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_l^{(q)} = \frac{\langle \varepsilon_l^{q+1} \rangle}{\langle \varepsilon_l^q \rangle} \sim \frac{l^{\tau_{q+1}}}{l^{\tau_q}} \sim l^{-2/3}$$

и, следовательно, при больших q

$$\tau_q = -\frac{2}{3}q + C. \quad (4.83)$$

Пользуясь представлениями о фрактальной структуре с размерностью D можно записать (по-прежнему для больших q)

$$\langle \varepsilon_l^q \rangle \sim l^{-2q/3} l^{3-D},$$

откуда следует, что константа C имеет смысл коразмерности, а поскольку сделано предположение о том, что структуры есть нити, то их коразмерность равна двум. Таким образом, $C = 2$.

Для произвольных значений q к выражению (4.83) следует добавить функцию, вид которой определяется с помощью второй гипотезы. Итак,

$$\tau_q = f(q) - \frac{2}{3}q + C, \quad (4.84)$$

причем $f(q) \rightarrow 0$ при $q \rightarrow \infty$. Выражение (4.81) перепишем в виде

$$\frac{\langle \varepsilon_l^{q+2} \rangle}{\langle \varepsilon_l^{q+1} \rangle} = A_q \left(\frac{\langle \varepsilon_l^{q+1} \rangle}{\langle \varepsilon_l^q \rangle} \right)^\beta \varepsilon_l^{(\infty)(1-\beta)},$$

эквивалентном уравнению

$$\tau_{q+2} = (1 + \beta)\tau_{q+1} - \beta\tau_q - \frac{2}{3}(1 - \beta).$$

Пользуясь формулой (4.84), получаем уравнение для функции $f(q)$

$$f(q+2) - (1 + \beta)f(q+1) + \beta f(q) = 0, \quad (4.85)$$

решение которого есть $f(q) = \alpha\beta^q$ и, следовательно,

$$\tau_q = \alpha\beta^q - \frac{2}{3}q + C.$$

Входящие в решение константы определяются из условий $\tau_0 = \tau_1 = 0$ ($\langle \varepsilon_l^0 \rangle = 1, \langle \varepsilon_l^1 \rangle = \bar{\varepsilon} \sim l^0$). Из первого условия

$$\alpha = -C = -2,$$

из второго -

$$\beta = \frac{C - 2/3}{C} = \frac{2}{3}.$$

Окончательно имеем

$$\tau_q = -\frac{2q}{3} + 2 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^q \right), \quad (4.86)$$

а пользуясь первой гипотезой - гипотезой подобия К62 (4.52), получаем искомую формулу для показателей степени структурных функций поля скорости

$$\zeta_q = \frac{q}{9} + 2 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{q}{3}} \right). \quad (4.87)$$

Модель Ше - Левека претендует на то, что она лишена параметров. Это не совсем так, поскольку лежащие в ее основе гипотезы содержат в себе количественные характеристики (например, степень две трети в гипотезе 3). Тем не менее, полученная формула замечательным образом воспроизводит экспериментальные данные для величин ζ_q . На рис.4.10 экспериментальные данные, взятые из различных работ, приведены вместе с кривыми, соответствующими всем рассмотренным нами моделям.

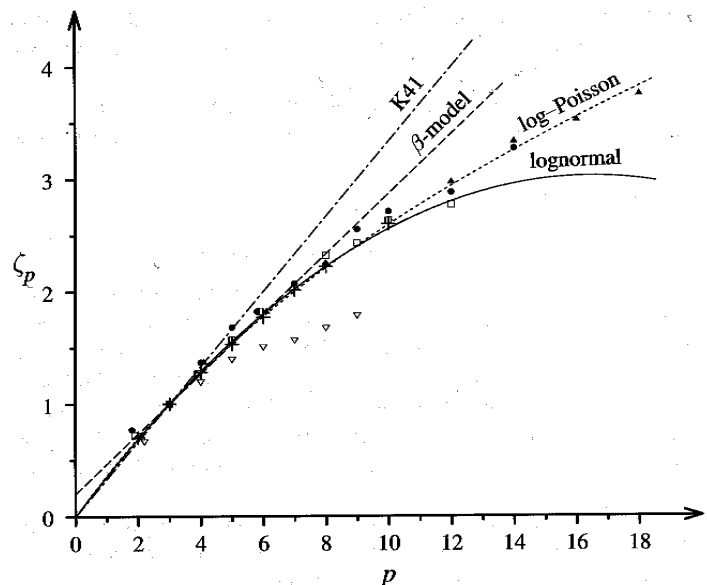


Рис.4.10

4.6.2. Расширенная автомодельность

Расширенная автомодельность (в оригинале - Extended Self Similarity, давшая уже устоявшуюся аббревиатуру ESS, которой мы также будем пользоваться) - это экспериментально установленный факт, не нашедший еще достаточного теоретического осмысления.

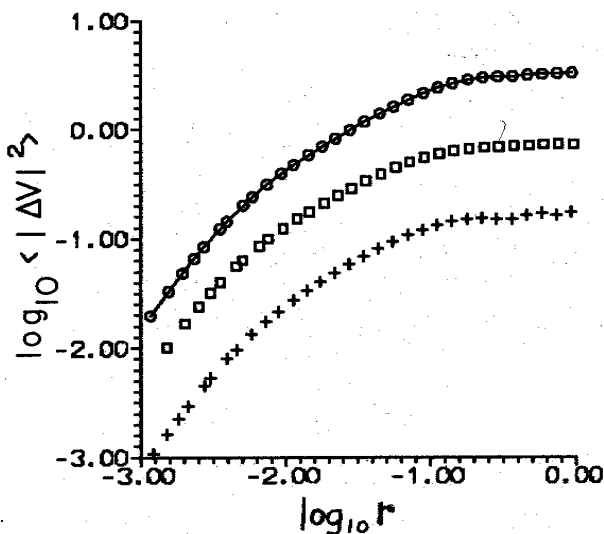
Первые результаты были получены при измерениях свойств мелко-масштабной турбулентности в аэродинамической трубе и опубликованы в

работе ⁶. Цель работы состояла в изучении свойств структурных функций $S_q(l)$ и $T_q(l) = \langle |\delta v_l|^q \rangle$ (4.20). Во-первых, в этой работе было показано, что функции T_q статистически более устойчивы (для их определения требуется меньшее число реализаций) и подчиняются тем же степенным законам, что и функции S_q (речь идет о функциях нечетных порядков, поскольку для четных функции просто совпадают). Во-вторых, была обнаружена интересная связь между структурными функциями различных порядков.

Напомним, что для определения степенных показателей ζ_q обычно используют двойные логарифмические координаты, откладывая логарифм соответствующей структурной функции в зависимости от логарифма масштаба. На графиках выделяют прямолинейный участок и, считая, что именно он соответствует инерционному интервалу, определяют по его наклону показатель ζ_q . Чем выше порядок структурной функции, тем короче и менее выраженным становится прямолинейный участок на графике.

На рис.4.11 показаны результаты измерения структурной функции второго порядка, полученные для течения в аэродинамической трубе при трех значениях числа Рейнольдса (квадраты - $Re = 6000$, кружки - $Re = 22500$ и кресты - $Re = 47000$). Изучая эти данные, можно видеть, что вопрос об идентификации инерционного интервала далеко не прост даже для достаточно высоких значений числа Рейнольдса.

Обработывая результаты измерений структурных функций пульсаций скорости, авторы предложили необычное представление данных. По оси абсцисс вместо масштаба l была отложена структурная функция третьего порядка S_3 . В инерционном интервале, согласно закону «четырёх пятых» (4.46), эта замена тождественна и не может изменить наклон кривой. Неожиданный результат состоял в том, что при представлении результатов в координатах $(\ln S_q, \ln S_3)$ инерционный интервал становится более выраженным - прямолинейный участок графика продляется до масштабов,



⁶ Benzi R., Ciliberto S., Tripiccone R., Baudet C., Massai

Рис.4.11

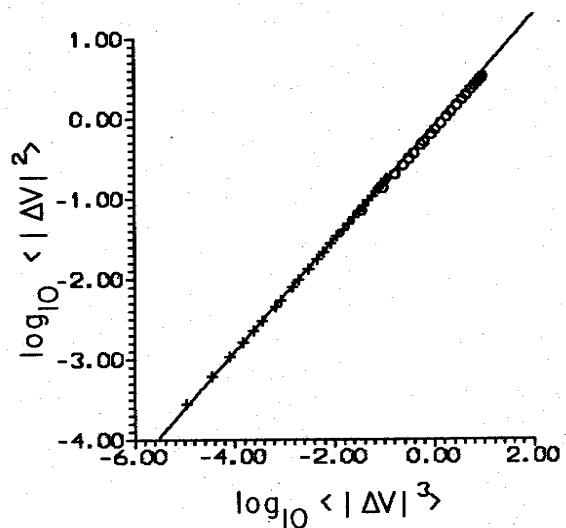


Рис.4.12

лишь в несколько раз превышающих диссипативный масштаб λ . Важно, что наклон кривой остается при этом прежним.

На рис.4.12, взятом из той же работы, все данные предыдущего рисунка представлены в таких координатах. Видно, что все данные (даже принадлежащие разным режимам течения) легли на одну прямую, определение наклона которой не вызывает труда. Таким образом, обнаруженный эффект позволяет значительно увеличить точность определения показателей ζ_q .

Интересно, что ESS приводит к появлению «инерционного интервала» и при относительно низких значениях числа Рейнольдса, когда в обычном представлении инерционный интервал не обнаруживается вовсе.

В более общем виде расширенная автомодельность (ESS) проявляется при любом представлении вида

$$S_q(l) = S_p^{\zeta_q/\zeta_p}, \quad (4.88)$$

то есть расширение инерционного интервала происходит при использовании в качестве осей координат любой пары структурных функций.

4.6.3. Модель Ше - Левека - Дюбрюль

В заключение рассмотрим обобщение модели Ше - Левека, предложенное Б.Дюбрюль. В основе обобщения лежат следующие идеи. Во-первых, используя расширенную автомодельность, избавиться от абсолютного масштаба l . Во-вторых, отказаться от попытки получения беспараметрической модели. Последнее означает, что уменьшается число гипотез, априорно заложенных в модель, но в расплату за это являются дополнительные параметры, требующие экспериментального определения. В-третьих, вместо величины ε_l рассматривается безразмерная величина

$$\pi_l = \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_l^{(\infty)}}, \quad (4.89)$$

являющаяся безразмерной характеристикой поля диссипации энергии (либо потока энергии) на масштабе l .

В формулировке Дюбрюль три гипотезы Ше - Левека приобретают следующий вид:

I) модифицированная гипотеза подобия

$$\frac{\delta v_l^3}{\langle \delta v_l^3 \rangle} \stackrel{stat}{=} \frac{\varepsilon_l}{\langle \varepsilon_l \rangle} = \frac{\pi_l}{\langle \pi_l \rangle}, \quad (4.90)$$

где знак $\stackrel{stat}{=}$ означает наличие одинаковых статистических свойств;

II) иерархия моментов

$$\frac{\langle \pi_l^{q+1} \rangle}{\langle \pi_l^q \rangle} = A_q \left(\frac{\langle \pi_l^q \rangle}{\langle \pi_l^{q-1} \rangle} \right)^\beta; \quad (4.91)$$

III) гипотеза о перемежаемости (о наличии степенного закона для величины $\langle \pi_l \rangle$)

$$\langle \pi_l \rangle \sim \left(\frac{\langle \delta v_l^3 \rangle}{\varepsilon \lambda} \right)^\Delta. \quad (4.92)$$

Связь модифицированной гипотезы подобия с гипотезой подобия К62 будет обсуждена ниже. Вторая гипотеза представляет собой точную копию соответствующей гипотезы Ше - Левека, переписанной в терминах величины π_l . В третьей гипотезе появился независимый параметр Δ , характеризующий скейлинговые свойства экстремальных структур (в выражении (4.98) в знаменателе стоит величина $\varepsilon_l^{(\infty)}$).

Гипотезы (4.90)-(4.92) позволяют получить после несложных вычислений формулу для показателей ζ_q . Для этого, пользуясь второй гипотезой, получаем связь высших моментов величины π_l с первым. Действительно, (4.91) можно записать в виде

$$\langle \pi_l^{q+1} \rangle = \langle \pi_l^q \rangle^{\beta+1} \langle \pi_l^{q-1} \rangle^{-\beta} \quad (4.93)$$

и построить цепочку выражений

$$\begin{aligned} \langle \pi_l^2 \rangle &= \langle \pi_l \rangle^{1+\beta}, \\ \langle \pi_l^3 \rangle &= \langle \pi_l^2 \rangle^{1+\beta} \langle \pi_l \rangle^{-\beta} = \langle \pi_l \rangle^{1+\beta+\beta^2}, \\ &\dots, \\ \langle \pi_l^q \rangle &= \langle \pi_l \rangle^{\sum_{k=0}^{q-1} \beta^k}. \end{aligned}$$

Вычислив сумму ряда

$$\sum_{k=0}^{q-1} \beta^k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k - \sum_{k=q}^{\infty} \beta^k = \frac{1}{1-\beta} - \frac{\beta^q}{1-\beta} = \frac{1-\beta^q}{1-\beta},$$

получаем

$$\langle \pi_l^q \rangle \approx \langle \pi_l \rangle^{\frac{1-\beta^q}{1-\beta}}. \quad (4.94)$$

Используя третью гипотезу (4.92), приходим к выражению

$$\langle \pi_l^q \rangle \sim \langle \delta v_l \rangle^{\frac{1-\beta^q}{1-\beta}}. \quad (4.95)$$

Чтобы получить выражение для структурных функций пульсаций поля скорости, нужно воспользоваться первой гипотезой (4.90)

$$\langle \delta v_l^q \rangle \sim \langle \delta v_l^3 \rangle^{q/3} \frac{\langle \pi_l^{q/3} \rangle}{\langle \pi_l \rangle^{q/3}} = \langle \delta v_l^3 \rangle^{\frac{q(1-\Delta)+\Delta(1-\beta^{q/3})}{3}}.$$

Тогда формула для показателей степени есть

$$\zeta_q = \frac{q}{3}(1-\Delta) + \Delta \frac{1-\beta^{q/3}}{1-\beta}. \quad (4.96)$$

В результирующую формулу входят два параметра, которые должны быть определены опытным путем: β и Δ . В последующих главах мы увидим, что эти параметры в различных случаях могут принимать различные значения, делая модель работоспособной в самых разнообразных турбулентных потоках. Очевидно, что выбор $\beta = \Delta = 2/3$ делает формулу (4.96) эквивалентной формуле Ше - Левека (4.87).

Еще один важный результат работы Дюбрюль состоял в том, что был показан смысл гипотезы об «иерархической связи моментов». Точнее говоря, ей удалось доказать, что гипотеза (4.91) при $A_q \equiv 1$ соответствует требованию о лог-пуассоновском распределении величины π_l .

Распределению Пуассона соответствует функция распределения вероятности вида

$$P(y) = \frac{\mu^y e^{-\mu}}{\Gamma(y+1)}, \quad (4.97)$$

где $\mu = \langle y \rangle$, а Γ есть гамма-функция. Логпуассоновское распределение, удовлетворяющее гипотезе (4.91), получается при

$$y = \frac{\ln \pi_l}{\ln \beta}.$$

Некоторые аргументы в пользу логпуассоновского распределения вероятности в турбулентных течениях будут даны ниже. Справедливости ра-

ди, следует отметить, что в последние годы были сделаны попытки описать случайные турбулентные поля и с помощью других функций распределения (например, лог-леви) и окончательный ответ на вопрос о законах распределения вероятности в турбулентных потоках далеко не ясен.

Список рекомендуемой литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
2. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965. Ч.1. 639 с.
3. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1967. Ч.2. 720 с.
4. Frisch U. Turbulence. Cambridge: Cambridge University Press. 1995. 296 p.

5. ДВУМЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Распространенным способом упрощения физической задачи при ее теоретическом и численном решении является снижение размерности пространства. Именно для двумерной постановки получены почти все точные решения уравнений Навье - Стокса. Как правило, и численные решения задач о ламинарном течении жидкости проводят для двумерной геометрии. При переходе к турбулентным течениям, когда число точек, необходимых для моделирования потока, растет согласно оценке (4.26) как число Рейнольдса в степени « $9/4$ » и быстро достигает пределов возможностей вычислительных машин, также кажется естественным начать численное моделирование турбулентности с рассмотрения плоских течений.

Однако, турбулентность - явление существенно трехмерное и в случае турбулентных потоков переход к плоской геометрии приводит к качественным изменениям свойств течений. Факт, что двумерная турбулентность не является упрощенной моделью трехмерной, был установлен независимо Крейчнаном и Бэтчелором в середине шестидесятых годов. Практически сразу стало ясно и то, что шансов на реализацию чисто двумерной турбулентности в природных и даже в лабораторных условиях фактически нет. Несмотря на это, двумерная турбулентность привлекла к себе значительное внимание исследователей, которое не ослабевает и по сегодняшний день. Объясняется это несколькими причинами. Во-первых, качественное своеобразие двумерной турбулентности дает прекрасные возможности для опробования различных моделей турбулентности (модель, претендующая на адекватное описание турбулентности, должна быть чувствительной к изменению размерности пространства и правильно отражать ее свойства в случае трех и двух измерений). Во-вторых, двумерная турбулентность стала доступной для прямых численных экспериментов уже в 70-х годах (в 80-х с появлением ЭВМ типа «Cray» удалось выйти на сетки размером 1024×1024 , достаточные для приличного воспроизведения инерционных интервалов), а такое же разрешение для трехмерных потоков стало возможным только в последние годы. Третья причина состоит в том, что, хотя строго двумерных турбулентных течений и не существует, некоторые черты двумерной турбулентности проявляют многие крупномасштабные геофизические и астрофизические течения (в этих случаях обычно говорят о квазидвумерной турбулентности).

5.1. Законы сохранения и инерционные интервалы

Снова вернемся к уравнениям Навье - Стокса и остановимся на вопросе об интегралах движения, то есть величинах, сохраняемых уравнениями при невязкой эволюции. Уравнение движения запишем в переменных Лагранжа

$$d_t \vec{v} = -\rho^{-1} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{v}, \quad (5.1)$$

умножим на скорость и проинтегрируем по объему V , включающему всю движущуюся жидкость

$$d_t \int_V \frac{v^2}{2} dV = -\rho^{-1} \int_V \vec{\nabla} p \vec{v} dV + \nu \int_V \vec{v} \Delta \vec{v} dV. \quad (5.2)$$

Первый интеграл в правой части уравнения (5.2) равен нулю. Действительно,

$$\int_V \vec{\nabla} p \vec{v} dV = \int_V \vec{\nabla} (p \vec{v}) dV - \int_V p \vec{\nabla} \vec{v} dV = \int_V \vec{\nabla} (p \vec{v}) dV = \oint_S p \vec{v} d\vec{S} = 0.$$

При вычислении интеграла использовано уравнение непрерывности и теорема Гаусса, с помощью которой от интеграла по объему перешли к интегралу по поверхности. Поверхность выбирается такой, что она охватывает весь объем, занятый движущейся жидкостью, и скорость в любой точке этой поверхности равна нулю.

Последнее слагаемое в (5.2) преобразуем, используя две формулы векторного анализа,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}, \quad (5.3)$$

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (5.4)$$

и получим

$$\begin{aligned} \int_V \vec{v} \Delta \vec{v} dV &= - \int_V \vec{v} (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})) dV = \int_V \vec{\nabla} (\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})) dV - \int_V (\vec{\nabla} \times \vec{v}) (\vec{\nabla} \times \vec{v}) dV = \\ &= \oint_S (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}) d\vec{S} - \int_V (\text{rot } \vec{v})^2 dV = - \int_V (\text{rot } \vec{v})^2 dV. \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} \quad (5.5)$$

(напомним, что $\vec{\omega}$ называется завихренностью), приходим к уравнению для эволюции общей энергии движения жидкости

$$d_t \dot{A} = -\nu \int_V |\bar{\omega}|^2 dV = -2\nu\Omega, \quad (5.6)$$

где величина

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_V |\bar{\omega}|^2 dV, \quad (5.7)$$

равная интегралу от квадрата завихренности по всему объему, называется энтрофией.

Свободная эволюция трехмерной турбулентности сопровождается, как мы выяснили выше, переносом энергии к малым масштабам. В терминах спектральной плотности энергии $E(k)$ это соответствует переносу энергии к большим волновым числам. Для энтрофии также можно ввести спектральную плотность $\Omega(k)$, причем в силу (5.5) она связана со спектральной плотностью энергии простым соотношением

$$\Omega(k) \sim k^2 E(k), \quad (5.8)$$

из которого следует, что перенос энергии к большим волновым числам (малым масштабам) влечет за собой рост энтрофии. Рост энтрофии, в свою очередь, согласно (5.6) приводит к росту скорости диссипации энергии ($\varepsilon \equiv d_t E$). Эти рассуждения приводят к следующей качественной картине для эволюции скорости диссипации энергии в трехмерной турбулентности (рис.5.1): на ранних этапах происходит увеличение скорости диссипации с последующим ее убыванием. Изменение ε носит при этом крайне нерегулярный характер, изобилуя кратковременными всплесками и провалами.



Рис.5.1

Качественно процессы передачи энергии к малым масштабам с одновременным ростом завихренности описываются так называемым «механизмом растяжения вихревых трубок». Этот механизм состоит в следующем. Вихрь, попадая в зону деформации вихря большего масштаба, растягивается и раскручивается в силу действия закона сохранения момента импульса. При этом деформируются вихри, ориентированные перпендикулярно большому вихрю, то есть механизм имеет принципиально трехмерную природу.

Отметим, что трехмерные уравнения Навье - Стокса имеют еще один интеграл движения. В невязком пределе сохраняющейся величиной является спиральность, определяемая как

$$H = \frac{1}{2} \int_V \vec{v} \vec{\omega} dV . \quad (5.9)$$

В отличие от энергии и энтропии, спиральность не является положительно определенной величиной. Она является псевдоскаляром (меняет знак при переходе от правовинтовой системы координат к левовинтовой) и отлична от нуля в случае, если в течении существуют спиральные вихри и количество спиралей с правой закруткой больше (меньше), чем левой. Эта величина становится существенной только в некоторых специальных течениях, как правило, анизотропных. К таким течениям относятся многие гео- и астрофизические течения. Особенно важную роль играет спиральность в задачах возбуждения магнитных полей в течениях проводящей жидкости (проблема магнитогидродинамического динамо).

Запишем уравнение для завихренности, для чего на уравнение (5.1) необходимо подействовать оператором rot ,

$$\partial_t \vec{\omega} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{\omega} = -(\vec{\omega} \vec{\nabla}) \vec{v} + \nu \Delta \vec{\omega} \quad (5.10)$$

и рассмотрим вопрос об интегралах движения при двумерном движении жидкости. Двумерность движения подразумевает, что вектор скорости имеет только две отличные от нуля компоненты $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$, а завихренность - только одну $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, становясь, таким образом, псевдоскалярной величиной.

Уравнение (5.10) принимает в этом случае чрезвычайно простой вид

$$\partial_t \omega + (\vec{v} \vec{\nabla}) \omega = \nu \Delta \omega , \quad (5.11)$$

совпадая с уравнением переноса скалярной примеси. На сходстве и различии уравнения для завихренности и уравнения для пассивной примеси мы остановимся более подробно ниже, а сейчас запишем (5.11) в переменных Лагранжа

$$d_t \omega = \nu \Delta \omega . \quad (5.12)$$

Из (5.12) очевидным образом следует, что при $\nu \rightarrow 0$ жидкая частица переносит завихренность без изменений, а следовательно, любая функция $f(\omega)$ становится интегралом движения. Таким образом, двумерный поток в невязком пределе обладает бесконечным набором интегралов движения. Среди этих интегралов особое место занимает энтропия (5.7), которая, как и энергия, остается сохраняющейся величиной и при конечномерном представлении полей скорости и завихренности (при обрыве рядов Фурье, если говорить о спектральном представлении полей).

Запишем уравнение для эволюции энтропии при двумерном течении

$$\begin{aligned}
 d_t \Omega &= d_t \int_V \frac{\omega^2}{2} dV = \nu \int_V \omega \Delta \omega dV = \nu \int_V \omega \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \omega) dV = \\
 &= \nu \int_V \vec{\nabla} (\omega \vec{\nabla} \omega) dV - \nu \int_V (\vec{\nabla} \omega)^2 dV = -\nu \int_V (\vec{\nabla} \omega)^2 dV.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$d_t \Omega = -\nu \int_V (\vec{\nabla} \omega)^2 dV = -\varepsilon_\omega, \quad (5.13)$$

где ε_ω есть скорость диссипации энтропии.

Отличия в свободной эволюции двумерной турбулентности от эволюции трехмерной следуют из совместного анализа уравнений (5.6) и (5.13). При нулевой вязкости энтропия есть величина постоянная, а при конечной вязкости энтропия, как видно из (5.13), может только убывать со временем. Это означает, что и скорость диссипации энергии в двумерном потоке может лишь монотонно убывать со временем (рис.5.2). Физически в двумерном потоке блокирован механизм растяжения вихревых трубок, который обеспечивает рост энтропии в трехмерном течении.

Появление второй сохраняющейся величины меняет и характер каскадных процессов в турбулентности. В двумерном турбулентном потоке имеются две квадратичные величины, переносимые от одних масштабов к другим, и процессы переноса определяются теперь двумя величинами - скоростью диссипации энергии ε и скоростью диссипации энтропии ε_ω .

Если энергия и энтропия вносятся в поток на неких промежуточных масштабах k_l , далеких от диссипативного масштаба, то они обе должны вовлекаться в каскадный процесс. Однако, связь спектральных плотностей энергии и энтропии (5.8) запрещает одновременный перенос обеих величин к мелким масштабам. При свободной эволюции турбулентности средние спектральные потоки энергии и энтропии должны быть направлены к противоположным концам спектра, причем к малым масштабам направлен поток энтропии, а к большим - поток энергии.

В развитой турбулентности можно ожидать появления двух инерционных интервалов. В больших масштабах (малых волновых числах $k < k_l$) каскадный процесс определяется скоростью диссипации энергии ε и анализ размерности естественно приводит нас к формуле Колмогорова

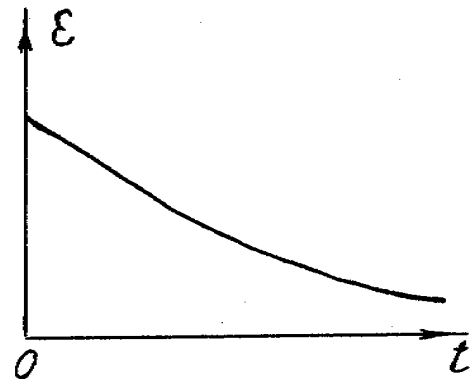


Рис.5.2

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (5.14)$$

с тем существенным отличием, что энергия передается от меньших масштабов к большим - имеет место обратный (красный) каскад энергии.

Для малых масштабов ($k > k_l$) определяющей величиной является скорость диссипации энтропии. Ее размерность $[\varepsilon_\omega] = 1/\tilde{n}^3$ и единственно возможная комбинация дает спектральное распределение

$$E(k) = C_\omega \varepsilon_\omega^{2/3} k^{-3}, \quad (5.15)$$

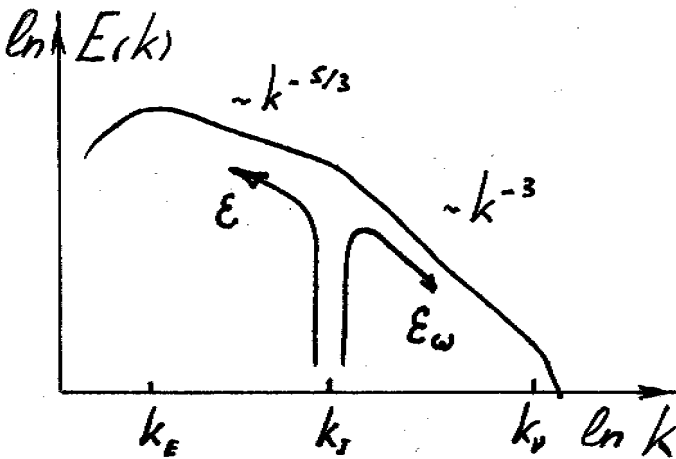


Рис.5.3

Граница инерционного интервала переноса энтропии определяется величиной вязкости и потоком энтропии от больших масштабов. Требуемую размерность дает выражение

$$k_v \sim \left(\frac{\varepsilon_\omega}{\nu^3} \right)^{1/6}. \quad (5.16)$$

Левая граница инерционного интервала переноса энергии не может быть постоянной, так как диссипации энергии в этих масштабах не происходит. Следовательно, масштаб, на который приходится максимум энергии в спектре, $k_E = f(\varepsilon, t)$ и соображения размерности дают оценку

$$k_E \sim \left(\frac{\varepsilon}{t^3} \right)^{-1/2}, \quad (5.17)$$

которая характеризует процесс накопления энергии в больших масштабах и соответствующий дрейф максимума в спектре в сторону малых волновых чисел.

описывающее инерционный интервал переноса энтропии. Каскад энтропии - это прямой каскад, то есть энтропия переносится от больших масштабов к меньшим.

Качественную структуру спектра двумерной турбулентности иллюстрирует рис.5.3. На рисунке показаны оба инерционных интервала с законами (5.14) и (5.15) и направления переноса по спектру энергии и энтропии.

5.2. Лабораторные эксперименты

Совершенно особенное поведение двумерной турбулентности делает интересным детальное изучение ее свойств и заставляет задуматься над вопросом, существует ли турбулентность с такими свойствами. Надеяться на существование чисто двумерного турбулентного потока при больших числах Рейнольдса, по-видимому, не приходится. Однако, можно рассчитывать на существование «квазидвумерных потоков», обладающих некоторыми чертами двумерной турбулентности.

Простейший фактор, приводящий к «двумеризации» турбулентного потока - это геометрия полости, в которой существует турбулентность. Точнее говоря, речь идет о тонких слоях жидкости, в которых один размер области значительно меньше двух других. Начиная с первых же работ по двумерной турбулентности, обсуждалась возможность обнаружения свойств двумерной турбулентности в крупномасштабных течениях океана и атмосферы. Действительно, толщина плотной атмосферы всего лишь 10 км, в то время как характерный масштаб крупномасштабных вихрей (циклонов и антициклонов) составляет тысячи километров.

Геометрия - только один из возможных способов подавления движений вдоль одной из координат. К другим возможностям относятся устойчивая стратификация жидкости, сильное вращение, магнитные поля.

Первая попытка реализовать двумерную турбулентность в лабораторных условиях была основана на идее подавления одной компоненты поля скорости магнитным полем. Опыты проводились в Институте физики в Риге, где исследовалось турбулентное течение жидкого металла (ртути) за решеткой при включении сильного поперечного магнитного поля. Удалось показать, что движения вдоль поля действительно менее интенсивны, чем в двух других направлениях, но измеренные спектры с трудом поддавались даже качественной интерпретации.

Следующий эксперимент по двумерной турбулентности был проведен И.Кудером, который изучал движения жидкости в мыльных пленках. В

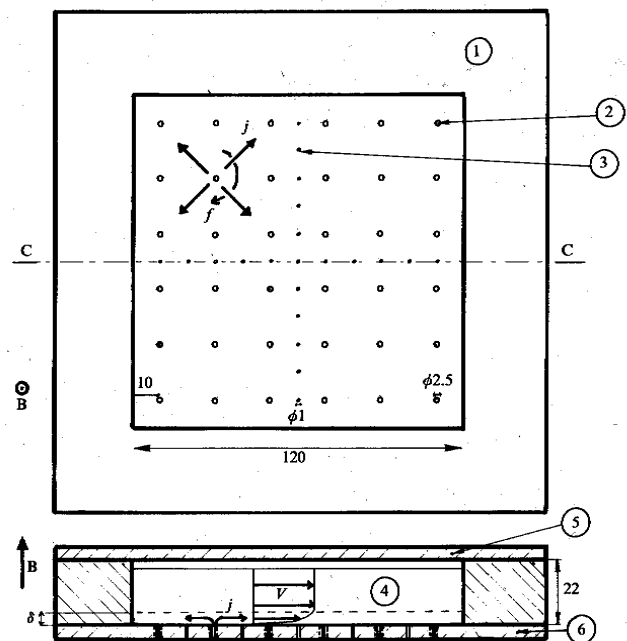


Рис.5.4

этих опытах удалось показать наличие обратного каскада энергии (точнее говоря, был зафиксирован рост среднего размера вихря со временем).

Наиболее удачным экспериментом по двумерной турбулентности остается работа Соммерия⁷, которую мы рассмотрим более подробно. В этой работе исследовался обратный каскад энергии в плоском течении в тонком слое ртути, возбуждаемом электромагнитными силами на малых масштабах. Схема эксперимента показана на рис.5.4. На плоскую горизонтальную кювету размерами 120x120x22мм, заполненную ртутью, накладывалось

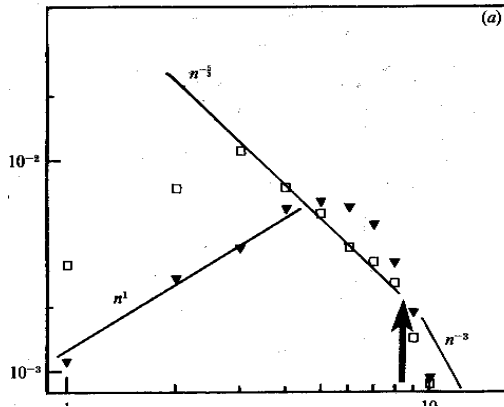


Рис.5.5

вертикальное магнитное поле, достигавшее величины 1 Тл. Такое сильное магнитное поле практически подавляет вертикальные движения и приводит к формированию горизонтального течения с вертикальным профилем, описываемым известным решением Гартмана. Гартмановский профиль характеризуется наличием ядра с однородным распределением скорости и узким пограничным слоем, толщина которого тем меньше, чем сильнее наложенное магнитное поле. Предполагаемый профиль скорости также изображен на рис.5.4.

Для описания плоских течений в тонких слоях жидкости существует простой, но эффективный способ, состоящий в том, что поле скорости $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ представляется в виде

$$\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(x, y) f(z), \quad (5.18)$$

где функция $f(z)$ описывает структуру профиля поперек слоя (в нашем случае это решение Гартмана). Выражение (5.18) подставляется в трехмерные уравнения движения, которые интегрируются затем поперек слоя

$$\partial_i \vec{v} \int_0^h f(z) dz + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} \int_0^h f^2(z) dz = -\rho^{-1} \vec{\nabla} \int_0^h p dz + \nu \Delta_{\perp} \vec{v} \int_0^h f(z) dz + \nu \vec{v} \int_0^h f''(z) dz.$$

Оператор Лапласа представлен в виде $\Delta = \Delta_{\perp} + \partial_{zz}$, где $\Delta_{\perp} = \partial_{xx} + \partial_{yy}$. Получается двумерное уравнение

$$\partial_i \vec{v} + \alpha (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = -\rho^{-1} \vec{\nabla} \bar{p} + \nu \Delta_{\perp} \vec{v} - \mu \vec{v}, \quad (5.19)$$

в котором коэффициенты α и μ зависят от конкретного профиля течения в слое. Уравнение (5.19) называют часто уравнением с линейным трением.

⁷ Sommeria J. Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box // J.Fluid Mechanics. 1986. Vol.170. P.139-168.

Линейное трение, в отличие от обычной вязкости, одинаково эффективно на всех масштабах (физически это трение в вязком погранслое) и осуществляет отвод энергии из течения на энергосодержащих масштабах k_E . Это приводит к тому, что этот масштаб перестает зависеть от времени. Учитывая, что коэффициент линейного трения μ имеет размерность обратной секунды, легко получить оценку

$$k_E = k_E(\varepsilon, \mu) \sim \sqrt{\frac{\mu^3}{\varepsilon}}. \quad (5.20)$$

Возбуждение течения в опытах производилось с помощью электромагнитных сил. В дно кюветы были встроены 36 точечных электродов, к которым подводилось постоянное напряжение (полярность чередовалась в шахматном порядке). Растекающиеся в слое электрические токи взаимодействовали с вертикальным магнитным полем и приводили к формированию 36 планарных вихрей, закрученных также в шахматном порядке. Варьируя значения приложенного магнитного поля и силы тока, можно было менять интенсивность движения и величину линейного трения.

В опытах исследовались турбулентные режимы, в которых удалось наблюдать формирование обратного каскада энергии со спектром «-5/3» и показать справедливость оценки (5.20). На рис.5.5 приведен экспериментальный спектр пульсаций скорости, полученный в этой работе, и отмечен ожидаемый наклон спектра. Очевидно, что диапазон масштабов, в котором можно ожидать формирования инерционного интервала, достаточно мал и результат носит скорее качественный характер, но именно эта работа убедительно доказала возможность существования (и наблюдения) обратного каскада энергии в квазидвумерных турбулентных потоках.

5.3. Численные исследования

Мы уже упоминали о том, что основным объектом численных исследований однородной турбулентности являются двумерные течения. Справедливо и обратное утверждение: основные результаты по двумерной турбулентности получены численными методами. Мы кратко остановимся на методах решения уравнений и перечислим основные результаты. В следующем параграфе мы отдельно обсудим результаты применения к двумерной турбулентности модели, описанной в параграфе 4.5.3.

При численных решениях уравнения движения рассматриваются, как правило, в переменных функция тока - завихренность (вывод этих уравнений можно найти, например, в параграфе 1.5 части 1)

$$\partial_t \omega + \{\psi, \omega\} = \nu \Delta \omega + f + D, \quad (5.21)$$

$$\omega = \Delta \psi, \quad (5.22)$$

где ψ - функция тока, ω - завихренность. Уравнения дополнены двумя членами: f - это функция, описывающая силы, возбуждающие течение, D - функция, описывающая дополнительную диссипацию энергии. Введение внешних сил необходимо для получения стационарной турбулентности. Дополнительная диссипативная функция также неизбежна для получения стационарной картины, так как в двумерной турбулентности происходит накопление энергии на крупных масштабах, и требуется обеспечить ее отвод именно из больших масштабов.

Решение проводится практически всегда для квадратной области с периодическими граничными условиями. В качестве методов решения в ранних работах использовали либо сеточные, либо спектральные методы, но после появления алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) практически во всех вычислениях используют спектрально-сеточный метод Орсага. Суть метода состоит в следующем: 1) на каждом шаге по времени сначала решается уравнение (5.21) методом сеток и получают поле завихренности, 2) используя БПФ, получают фурье-разложение поля завихренности, 3) в пространстве Фурье решают уравнение (5.22) (мы уже говорили о том, что решение уравнения Пуассона в пространстве Фурье тривиально, так как сводится к делению амплитуды каждой гармоники на квадрат волнового числа), 4) вновь используют БПФ для получения поля функции тока в физическом пространстве. Метод использует лучшие свойства и сеточных, и спектральных методов и дает значительный выигрыш в скорости вычислений.

Все численные эксперименты можно разделить на две группы. Первая группа - это эксперименты по свободному вырождению турбулентности, вторая - по стационарно возбуждаемой турбулентности. Свободное вырождение подразумевает отсутствие внешних сил. В этом случае в (5.20) $f = D = 0$ и решение зависит только от начальных условий.

С точки зрения динамики инерционных интервалов (5.14) и (5.15) более интересны эксперименты по моделированию стационарной турбулентности. Для получения стационарных режимов необходимо обеспечить подвод энергии. В двумерной турбулентности интересны динамические процессы по обе стороны от масштабов возбуждения, поэтому сила f записывается в пространстве Фурье таким образом, что она поддерживает на заданном уровне энергию гармоник с заданным модулем волнового числа $|\vec{k}| = k_l$.

Особого разговора заслуживает диссипативный член D . Во-первых, он должен обеспечить отвод энергии из течения на больших масштабах (малых волновых числах). Во-вторых, для получения более выраженного инерционного интервала переноса энтропии часто модифицируют и характер трения в малых масштабах (больших волновых числах). При написании обычного диссипативного слагаемого в фурье-представлении полу-

чаем член вида $D(k) \sim \nu k^2$. В численных экспериментах искусственным образом повышают степень волнового числа и записывают диссипацию в виде

$$D(k) = -\mu k^{-n} - \nu k^m \quad (5.23)$$

с типичным значением показателей степени $n = m = 8$. Диссипативный член вида (5.23) приводит к тому, что действие диссипации концентрируется в узких интервалах вблизи граничных значений рассматриваемых волновых чисел.

Численные решения уравнений (5.21)-(5.22) для больших чисел Рейнольдса принесли много неожиданных результатов. Большой неожиданностью стал очень крутой спектр в инерционном интервале переноса энтропии. Вместо закона (5.15) с наклоном «-3» численные эксперименты дали значения от -3.5 до -5. Напомним, что в трехмерной турбулентности перемежаемость дает поправки к закону «-5/3» порядка нескольких сотых, а в двумерной расхождение составило единицы!

Рассмотрим три численных эксперимента, которые будем называть А, В и С, взятые из работы ⁸. Эксперимент А моделирует прямой каскад энтропии. Используется сетка 1024x1024, случайная сила действует на волновых числах $k_l = 10$, диссипативный член используется в форме (5.23). Эксперимент В моделирует обратный каскад энергии. Сетка также 1024x1024, но сила действует на малых масштабах ($k_l = 256$). В третьем численном эксперименте (С) делается попытка одновременно получить оба инерционных интервала. Использована сетка 1728x1728 и возбуждение на промежуточных масштабах ($k_l = 40$). На рисунках 5.6-5.8 показаны спектры энергии для всех трех случаев.

⁸ Babiano A., Frick P., Dubrulle B. Scaling properties of numerical two-dimensional turbulence // Physical Review E, 1995. Vol.52. N.4. P.3719-3729.

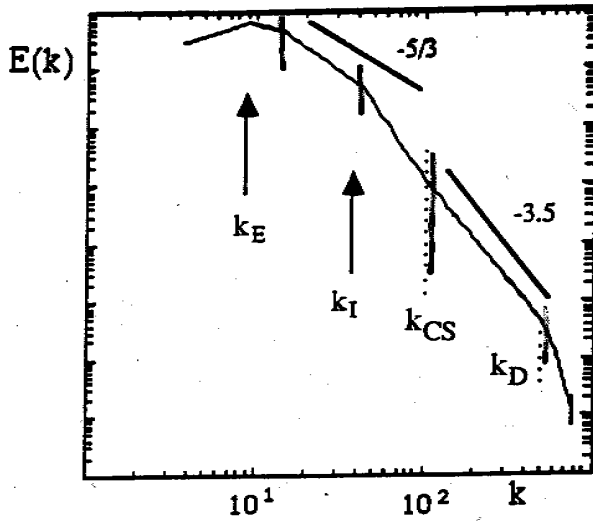
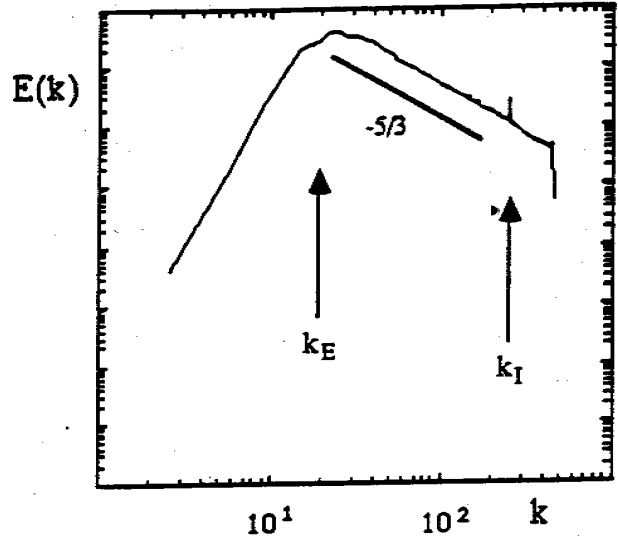
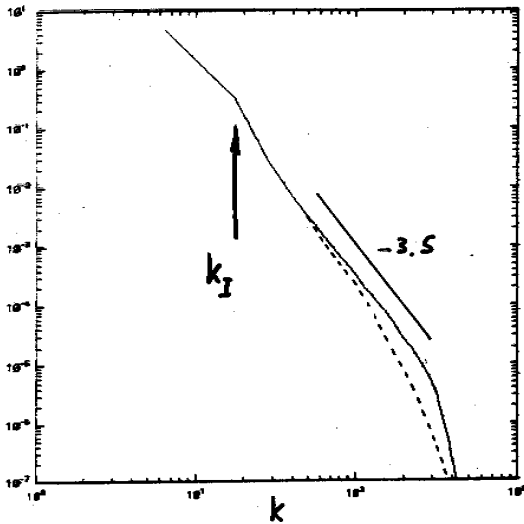


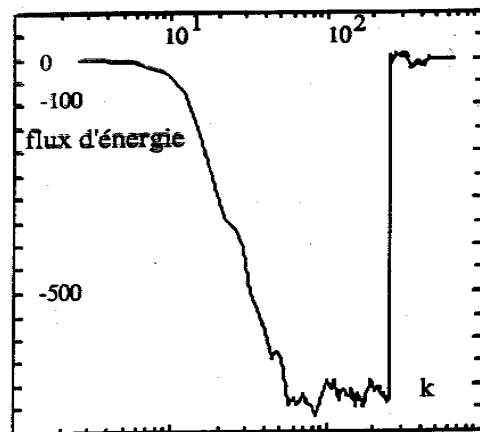
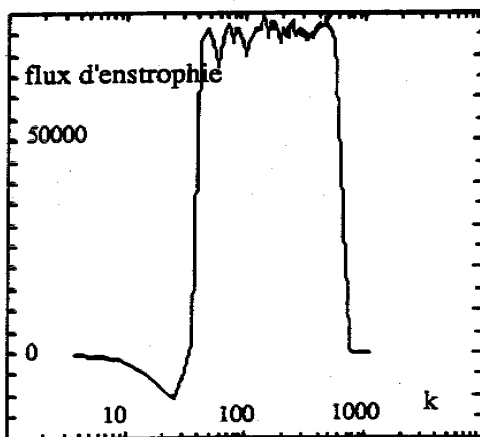
Рис.5.6

Рис.5.7

Рис.5.7

Рис.5.8

Рис.5.10



На рис.5.9 показан график зависимости потока энтропии по спектру, полученный в эксперименте А. Видно, что в крупных масштабах (малых k) поток энтропии практически отсутствует, а в малых масштабах выделяется интервал с постоянным значением величины, переносимой по

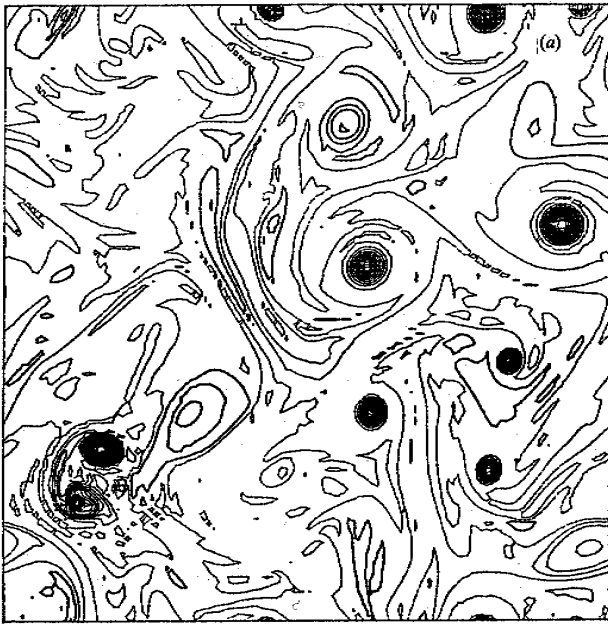


Рис.5.11

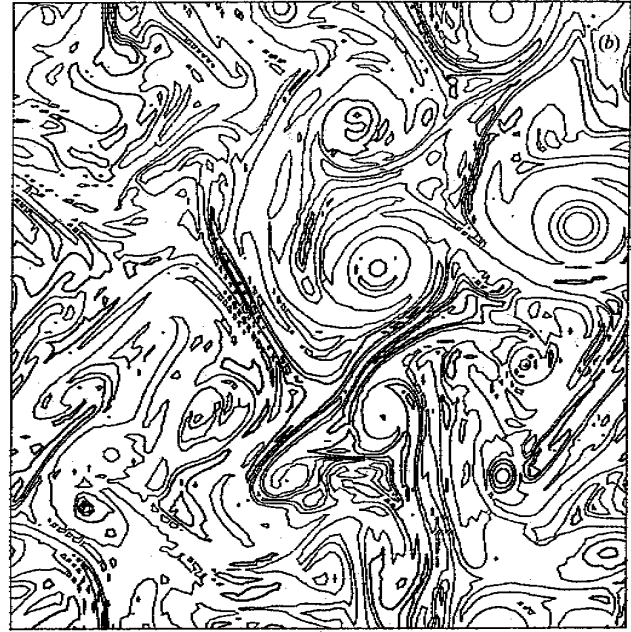


Рис.5.12

спектру энтропии. На следующем рисунке (рис.5.10) показан спектральный поток энергии, соответствующий численному эксперименту В. В этом случае виден участок с постоянным отрицательным потоком, являющимся признаком инерционного интервала переноса энергии к крупным масштабам (обратный каскад). Именно наличие интервалов с постоянным потоком и является определяющим признаком наличия инерционного интервала (соответствующая квадратичная величина переносится от масштаба к масштабу без диссипации).

На рис.5.11 показан пример поля завихренности, полученный при моделировании инерционного интервала переноса энтропии (этот и два последующих рисунка взяты из работы ⁹). На рисунке показаны линии равной завихренности. Темные пятна указывают на области с высокой завихренностью, характеризуемые большой плотностью изолиний. Эти области имеют близкие размеры и получили название «когерентных структур», хотя это название нельзя признать удачным. Правильнее говорить об изолированных вихрях, которые, как будет видно из дальнейшего изложения, слабо взаимодействуют с окружающим их турбулентным потоком. Именно эти изолированные вихри и являются причиной возникновения столь крутых спектров. В цитируемой работе был проведен интересный эксперимент. Изолированные вихри разрушались искусственно таким образом, что при этом не изменялось распределение энергии по спектру (это делается путем внесения случайных сдвигов фаз в фурье-компоненты). В результате спектральное распределение энергии возвращалось к виду (5.15).

⁹ Babiano A., Basdevant C., Legras B., Sadourny R. Vorticity and passive-scalar dynamics in two-dimensional turbulence // J. Fluid Mechanics. 1987. Vol.183. P.379-397.

Мы уже говорили о том, что уравнение для завихренности (5.11) совпадает по виду с уравнением для переноса пассивной скалярной примеси. В качестве пассивной примеси может выступать, например, температура, уравнение для которой имеет вид

$$\partial_t T + \{\psi, T\} = \chi \Delta T, \quad (5.24)$$

где χ - температуропроводность жидкости. В инерционном интервале переноса энтропии, где спектральная плотность энергии следует закону (5.15), спектр энтропии согласно соотношению (5.8) подчиняется закону

$$\Omega(k) \sim k^{-1}. \quad (5.25)$$

Соображения размерности очевидным образом приводят к такой же форме зависимости и для спектральной плотности пульсаций температуры.

Однако, аналогия между уравнениями (5.11) и (5.24) не работает. На рис.5.12 показано поле концентраций пассивной примеси (температуры), полученной в том же численном эксперименте, что и поле завихренности, показанное на предыдущем рисунке. Существенное отличие состоит в том, что в поле пассивной примеси нет столь выраженных изолированных структур. След от каждого изолированного вихря можно ясно увидеть и в поле пассивной примеси, и это кажется естественным, но при этом не наблюдается интенсивный рост концентрации к центру вихря, как это имеет место в случае завихренности. На рис.5.13 показаны спектры пульсаций завихренности и концентрации пассивной примеси, соответствующие показанным полям. Можно видеть, что спектр пассивной примеси соответствует закону (5.25), в то время как спектр завихренности (энтропии) после сравнительно короткого участка, близкого к наклону «-1», дает крутой спад с законом, близким к «-3» (это закон «-5» для спектра энергии).

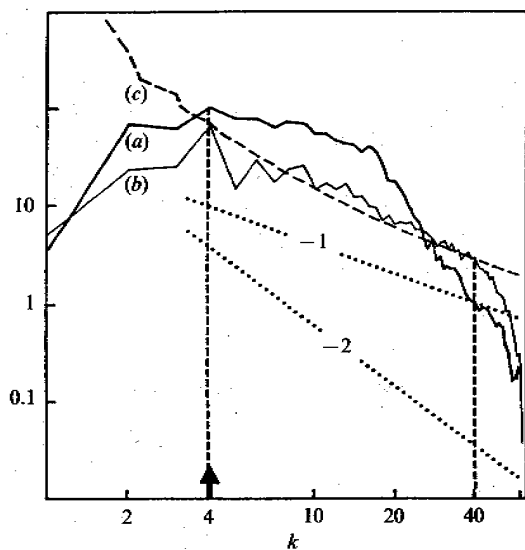


Рис.5.13

Различие в спектральном поведении завихренности и пассивной примеси обусловлено тем, что при всем сходстве уравнений (5.11) и (5.24) между ними существует принципиальное отличие. Стоит оно в том, что в уравнении (5.24) функция тока (поле скорости) действительно не зависит от поля температуры (примесь пассивна), а в уравнении (5.11) функция тока и завихренность однозначно связаны уравнением (5.12).

Спектр энергии, полученный в эксперименте С (см. рис.5.8) показывает общую структуру спектра двумерной турбулентности при наличии широкого интервала масштабов и возбуждении на про-

межуточных масштабах. Влево от масштаба возбуждения формируется инерционный интервал переноса энергии и спектр близок закону «-5/3» (5.14). Справа от масштаба возбуждения присутствует достаточно широкая область ($k_I < k < k_{KS}$), в которой нет выраженного степенного закона. Эта область масштабов соответствует тем самым изолированным вихрям (когерентным структурам), о которых шла речь выше. Далее ($k_{KS} < k < k_D$) виден инерционный интервал переноса энтропии, наклон спектра в котором в этом численном эксперименте близок к «-4».

5.4. Перемежаемость в двумерной турбулентности

Мы видели, что в двумерной турбулентности, как и в трехмерной, получаемые спектральные распределения отличаются от законов, предсказываемых из соображений размерности. Локальная структура оказывается значительно сложнее, чем предполагает гипотеза о статистической однородности турбулентности. В этом параграфе мы попытаемся дать количественные характеристики перемежаемости в двумерной турбулентности на основе модели Ше - Левека - Дюбрюль и сравнить полученные характеристики с теми, что были получены для трехмерной турбулентности. Мы будем использовать результаты тех же трех численных экспериментов (А, В, С), о которых уже шла речь выше.

Приложение модели, описанной в параграфе 4.5.3, к двумерной турбулентности требует ряда дополнительных комментариев. Прежде всего, нужно остановиться на вопросе о том, что понимать под величиной π_1 . Этот вопрос распадается, в свою очередь, на два: какую из двух квадратичных величин (энергии и энтропии) рассматривать и что конкретно и как измерять в численном

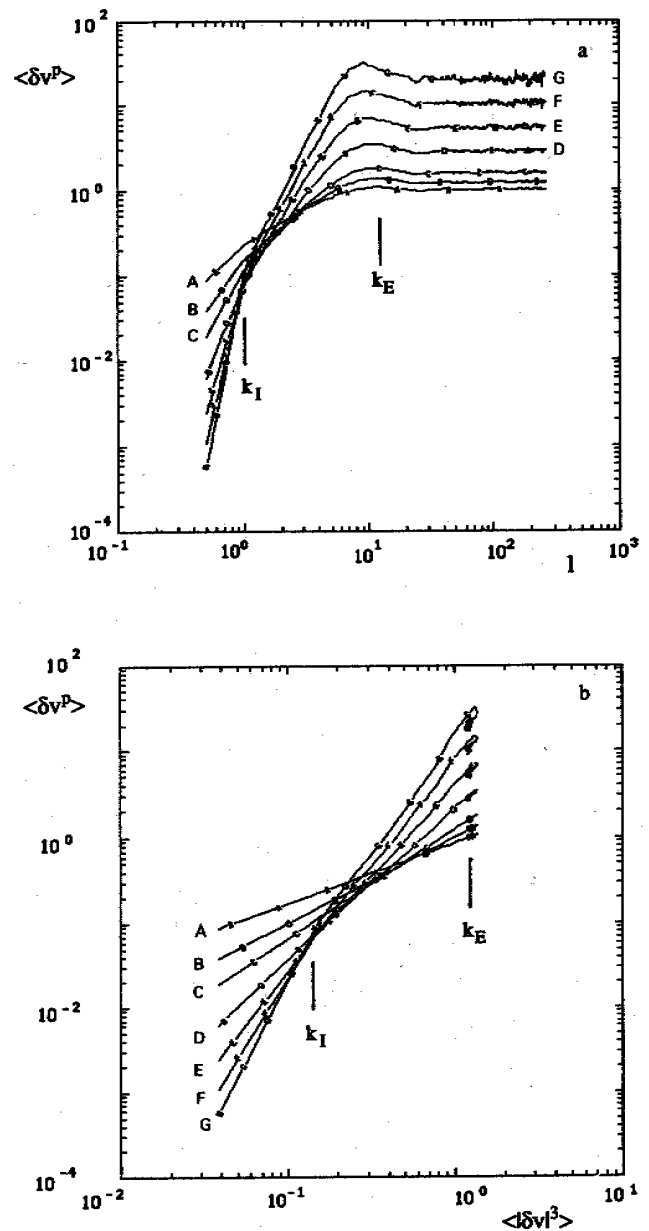
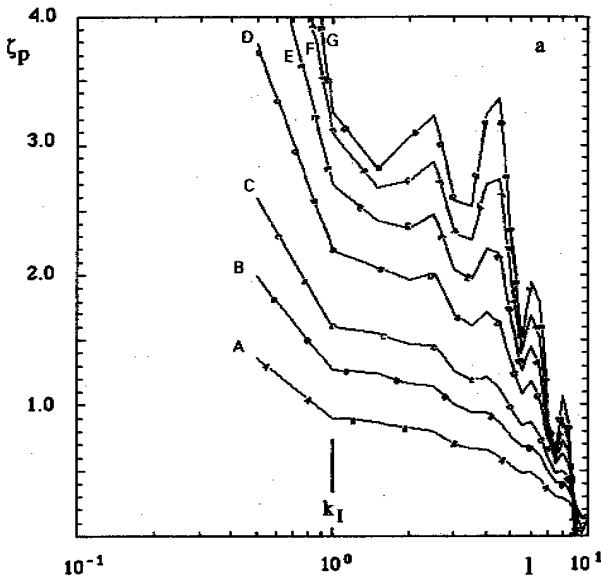


Рис.5.14

эксперименте?

Мы уже обсуждали выше вопрос о том, что вместо скорости диссипации энергии, которая традиционно присутствует во всех моделях турбулентности, следует рассматривать спектральный поток, который реально определяет динамику инерционного интервала. В двумерном случае речь может идти о потоке энергии, либо о потоке энтропии. Численные опыты показывают, что использовать можно и ту и другую величину, причем независимо от того, рассматривается ли интервал переноса энергии или энтропии. Статистически более устойчивые результаты получаются при вычислении потоков энтропии. Итак, определим в качестве характеристики спектрального потока на масштабе l величину

$$\eta_l = l^{-2} \int_S |\omega(\vec{v}\vec{\nabla})\omega| dS = l^{-2} \oint_L \omega^2 v_n dl, \quad (5.26)$$



равную потоку завихренности через границу области (квадрата) со стороной l . Далее, следуя модели ШЛБ (см. п.4.5.3), введем величину

$$\pi_l = \frac{\eta_l}{\eta_l^\infty}, \quad \eta_l^\infty = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\langle \eta_l^{q+1} \rangle}{\langle \eta_l^q \rangle}. \quad (5.27)$$

Требуется доказать справедливость гипотез и предположений, лежащих в основе модели. Модель ШЛБ включает в себя идею расширенной автомодельности (ESS). Для начала необходимо убедиться в том, что она работает в двумерной турбулентности. На рис.5.14,а показаны структурные функции поля скорости четных порядков ($q = 2,3,4,6,8,10,12.$) и третьего порядка, вычисленные в эксперименте В и представленные в двойных логарифмических координатах как функции масштаба. На рис.5.14,б эти же структурные функции представлены с использованием идеи расширенной автомодельности, то есть по оси абсцисс отложена структурная функция третьего порядка. Можно видеть, что линии на графике выпрямляются, но особенно на-

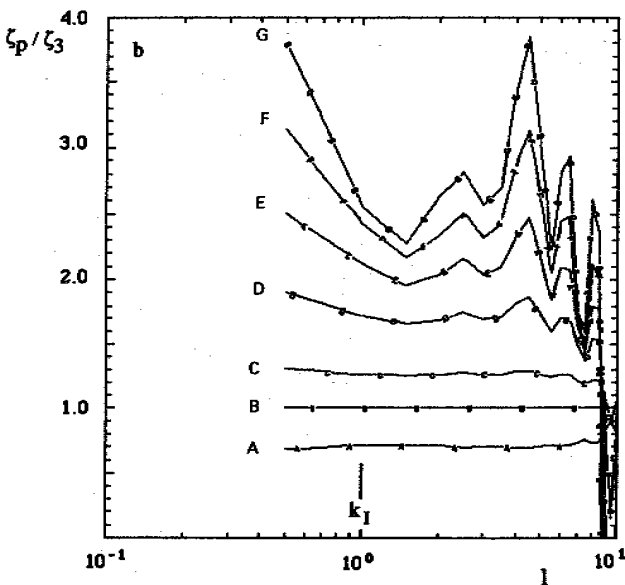


Рис.5.15

глядно эффект виден на рис.5.15, где показаны степенные показатели ζ_q ,

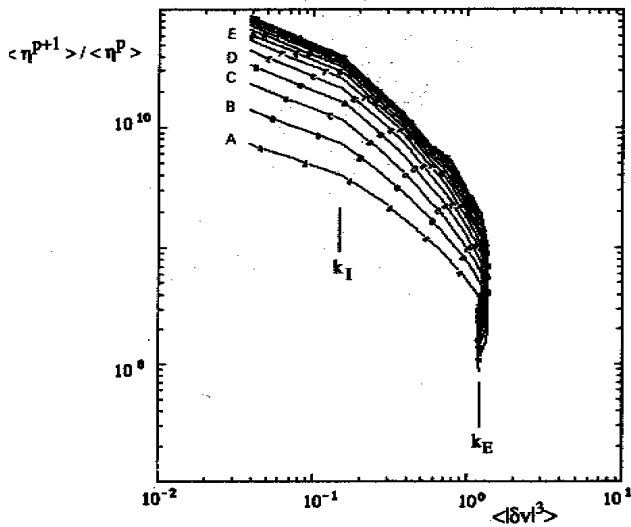


Рис.5.16

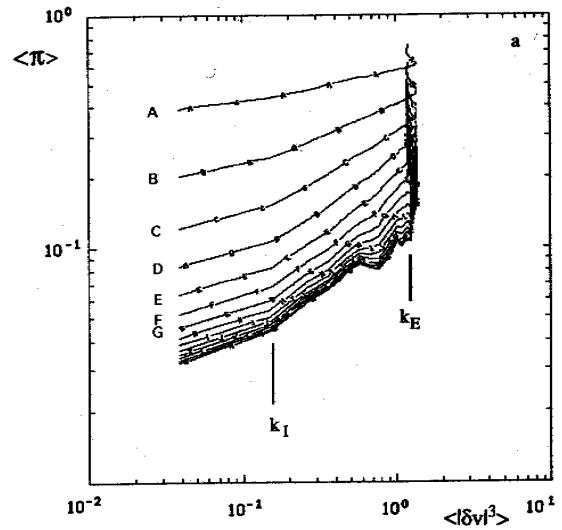


Рис.5.17

вычисленные соответственно по данным рисунка 5.14,а и 5.14,б. Если в первом случае (рис.5.15,а) на графике вовсе отсутствуют горизонтальные участки (а именно они и должны подтверждать наличие инерционного интервала), то во втором случае (рис.5.15,б) выраженные горизонтальные участки появляются, по крайней мере, для $q < 8$. Следует обратить внимание на то, как быстро растет уровень ошибок с ростом порядка структурных функций. Таким образом, применение ESS действительно помогает выделить инерционный интервал и определить значения степенных показателей.

Следующим положением, требующим проверки, является существование предельной величины η_l^∞ (5.27) и возможность ее получения с помощью поддающихся измерению моментов относительно небольшого порядка. Наличие предела последовательности (5.27) подтверждает рис.5.16, причем можно видеть, что последовательность сходится уже при $q \approx 10$. Убедившись в существовании предельной величины η_l^∞ , можно приступить к непосредственной проверке третьей гипотезы модели ШЛД (4.92), касающейся наличия степенного закона у величины π_l . На рис.5.17 показана последовательность гра-

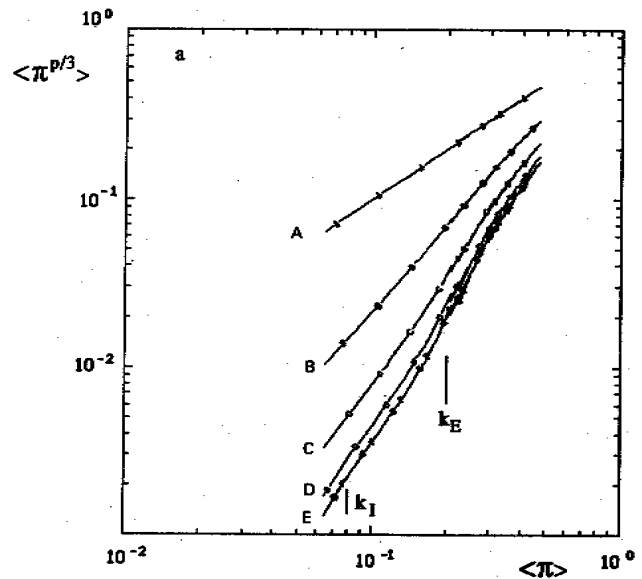


Рис.5.18

фиков величин $\langle \eta_l \rangle / \langle \eta_l(q) \rangle$ для все возрастающих значений q , полученных также для данных эксперимента В. По оси абсцисс отложены значения структурной функции поля скорости третьего порядка. Используются логарифмические координаты. Можно видеть, что последовательность сходится и в интервале каскадного переноса энергии ($k_E < k < k_I$) предельная функция подчиняется степенному закону. Наклон прямой дает значение показателя степени в законе (4.92) $\Delta = 0.47$. Аналогичные измерения, проведенные в эксперименте А для инерционного интервала переноса энтропии, дали значение $\Delta = 0.13$. Близкие значения были получены и в эксперименте С, где одновременно наблюдались оба интервала ($\Delta = 0.4$ для интервала переноса энергии и $\Delta = 0.1$ для интервала переноса энтропии). Заметим, что малые значения Δ соответствуют низкому уровню перемежаемости (в трехмерном случае $\Delta = 0.67$) и, следовательно, полученные результаты свидетельствуют о том, что именно в инерционном интервале переноса энтропии перемежаемость почти отсутствует (несмотря на то, что отклонение от ожидаемого закона «-3» очень значительно).

Вторая гипотеза модели ШЛД (4.91) может быть проверена двумя способами. Можно строить моменты различного порядка $\langle \pi_l^q \rangle$ как функции момента первого порядка, проверяя тем самым справедливость соотношения (4.94), вытекающего из (4.92). При выполнении гипотезы на графиках должны выделяться инерционные интервалы, а углы наклона дадут оценку параметра β . Такой график, построенный для эксперимента С, показан на рис.5.18, на котором хорошо различимы оба инерционных интервала.

Возможна и прямая проверка формулы (4.92). Этот способ иллюстрирует рис.5.19, на котором сведены вместе результаты вычислений для экспериментов А и В. В точном соответствии с формулой (4.92) строятся отношения последовательных моментов друг от друга. Каждая группа точек соответствует определенному значению величины q . При невыполнении связи (4.92) эти группы точек дали бы непараллельные отрезки (либо вообще не отрезки), а при выполнении равенства с отличающимися константами A_q отрезки были бы параллельны, но не лежали бы на одной прямой.

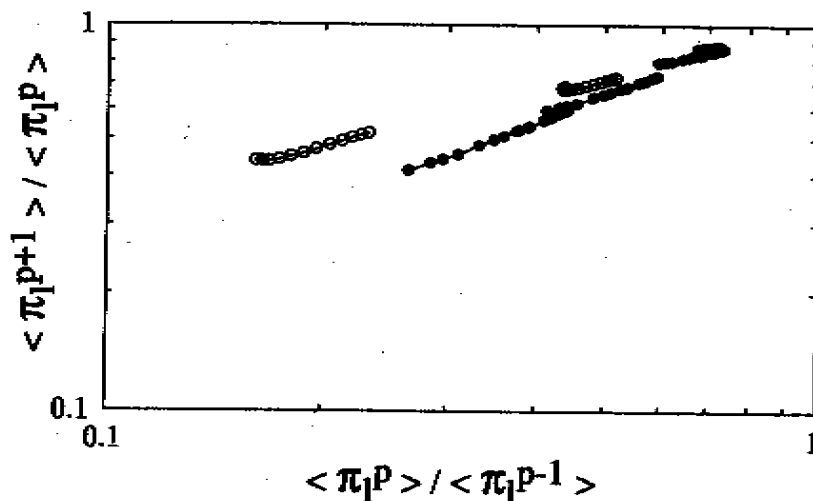


Рис.5.19

Таким образом, рисунок свидетельствует о выполнении соотношения (4.92), причем с одинаковыми константами A_q . Последнее обстоятельство свидетельствует в пользу логпуассоновского закона распределения случайных величин.

Вычисленные значения параметра β дали близкие, но отличающиеся значения ($\beta = 0.7$ в интервале переноса энергии и $\beta = 0.55$ - в интервале переноса энтропии).

Вернемся к вопросу о физическом смысле гипотез, лежащих в основе модели. В соотношение (4.91) (и/или (4.81)) входят относительные моменты, каждый из которых также можно записать в степенной форме вида

$$\eta_l^{(q)} = \frac{\langle \eta_l^{q+1} \rangle}{\langle \eta_l^q \rangle} \sim l^{-\delta_q}. \quad (5.28)$$

Последовательность показателей δ_q ограничена, с одной стороны, членом δ_0 , характеризующим поведение среднего значения потока $\eta_l^{(0)} = \langle \eta_l \rangle$, и членом δ_∞ , отвечающим за поведение $\eta_l^{(\infty)}$, с другой стороны. Ряд δ_q образует неубывающую последовательность и может иметь одну из следующих четырех форм (рис.5.20): случай а) соответствует модели К41 ($\delta_q \equiv 0$); случай б) характеризует ситуацию, когда даже момент первого порядка зависит от масштаба, но степень неоднородности не растет с ростом порядка ($\delta_q \equiv \tilde{N}$); случай в) воспроизводит картину, заложенную в модель Ше - Левека (среднее значение не зависит от масштаба усреднения, но существует предел для больших моментов, $\delta_0 = 0$, $\delta_\infty = 2/3$); и последний случай г) описывает ситуацию, когда среднее значение зависит от масштаба, но показатель растет с ростом q .

Легко видеть, что гипотеза (4.92) эквивалентна утверждению

$$\Delta = \frac{\delta_\infty - \delta_0}{\zeta_3}, \quad (5.29)$$

то есть параметр Δ в модели ШЛД характеризует разность $\delta_\infty - \delta_0$. Ряд δ_q можно представить тогда в виде

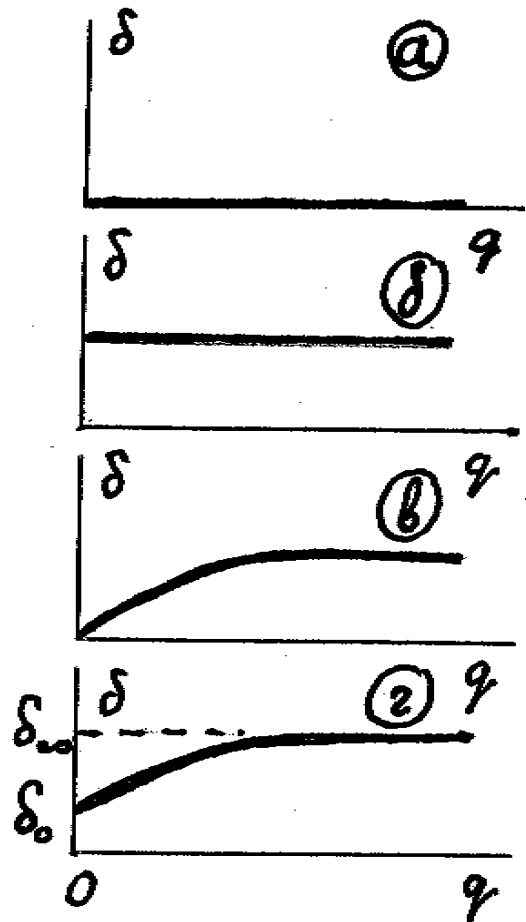


Рис.5.20

$$\delta_q = \delta_\infty + \zeta_3 \Delta h(q), \quad (5.30)$$

где $h(q)$ есть монотонно убывающая функция, такая, что $h(0) = 1$, а $h(\infty) = 0$. Простейшая подходящая функция есть экспонента $h(q) = \exp\{-aq\}$, причем $a = \delta_q'(0)/(\zeta_3 \Delta)$. Непосредственная подстановка (5.30) в (4.81) показывает, что вторая гипотеза Ше - Левека равносильно предположению об экспоненциальной форме функции $h(q)$ и $\beta = \exp\{-a\}$.

Возвращаясь к результатам численного моделирования двумерной турбулентности, нужно отметить, что ее поведение различно в интервалах переноса энергии и энтропии, но нигде не соответствует модели Ше - Левека (т.е. рис.5.20,в). В интервале переноса энтропии уровень перемежаемости низок (Δ близка к нулю), но первый момент потока η (среднее значение) зависит от масштаба усреднения. Такая ситуация отвечает случаю, показанному на рис.5.20,б, и вызвана наличием сильных изолированных вихрей. Именно с вихрями связано сильное отличие в спектре инерционного интервала энтропии (а не с перемежаемостью, как таковой).

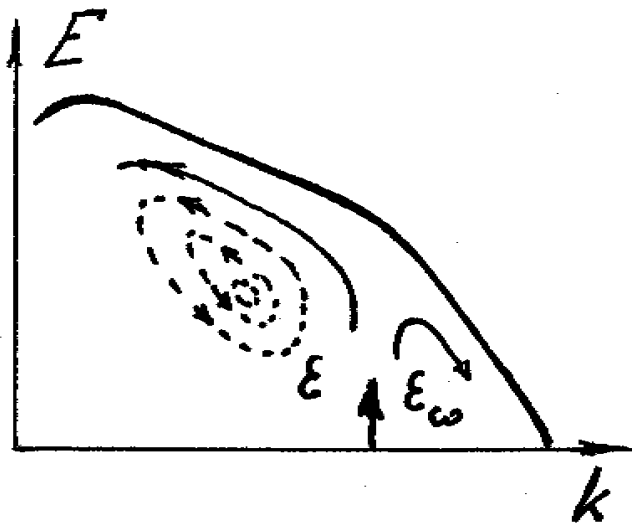


Рис.5.21

Более сложное поведение в интервале обратного каскада энергии. Уровень перемежаемости в нем близок тому, что получается в трехмерных течениях, но в отличие от последних $\delta_0 \neq 0$. Это означает, что нарушается основная гипотеза Колмогорова относительно постоянства потока энергии по спектру! Естественно, речь не идет о нарушении закона сохранения энергии и нужно еще раз обратить внимание на определение величин η , (5.26) (и величины ε ,

в случае трехмерной турбулентности). Эта величина характеризует интенсивность процессов переноса энергии независимо от их направления. Это означает, что полученный нами результат свидетельствует о наличии потоков энергии, обратных основному направлению переноса, и общая интенсивность потоков изменяется с изменением масштаба. Качественно такой сценарий переноса энергии по спектру иллюстрирует рис.5.21.

Последний важный вопрос касается связи гипотезы подобия в форме (4.90), использованной в модели ШЛД с гипотезой подобия К62 (4.50). Из (4.90) следует, что

$$\frac{\langle \delta v_l^q \rangle}{\langle \delta v_l^3 \rangle^{q/3}} \sim \frac{\langle \delta \pi_l^{q/3} \rangle}{\langle \delta \pi_l \rangle^{q/3}},$$

а это равносильно утверждению

$$\zeta_q = (\zeta_3 + \delta_0) \frac{q}{3} + \tau_{q/3}. \quad (5.31)$$

Очевидно, что (5.31) совпадает с модифицированной гипотезой подобия Колмогорова (К62) только в случае, когда $\zeta_3 = 1$ и $\delta_0 = 0$. Оба условия выполняются в трехмерной турбулентности, но нарушаются в двумерной, где, таким образом, применима только гипотеза подобия в виде (4.90).

5.5. Конвективная турбулентность

В заключение этой главы рассмотрим пример турбулентности, развивающейся под действием силового поля, связанного с самим течением. Таким примером является конвективное течение при больших числах Релея (Грассгофа). Мы рассмотрим специфику конвективной турбулентности как в случае трехмерного, так и в случае двумерного движения.

Выпишем уравнения термогравитационной конвекции в приближении Буссинеска, которые мы выводили в разделе 1.3 части 1 этого курса,

$$\partial_t \bar{v} + (\bar{v} \nabla) \bar{v} = -\nabla P + \Delta \bar{v} + G T \bar{e}_z, \quad (5.32)$$

$$\partial_t T + (\bar{v} \nabla) T = \sigma^{-1} \Delta T, \quad (5.33)$$

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0. \quad (5.34)$$

Уравнения записаны в безразмерной форме и включают два безразмерных параметра: число Грассгофа $G = g \beta T_0 L^3 / \nu^2$ и число Прандтля $\sigma = \nu / \chi$ (смысл этих безразмерных параметров обсуждался в п.1.3).

Малые числа Грассгофа соответствуют ситуации, когда влияние температуры на поле скорости мало и температура ведет себя как пассивная примесь, не влияя на свойства поля скорости. Остановимся подробнее на возможном поведении пассивной примеси в турбулентном потоке с заданными свойствами. Вид спектра пульсаций пассивной примеси можно оценить, исходя из следующих соображений. В пределе малой теплопроводности система (5.32)-(5.34) сохраняет квадрат пульсаций температуры, а величиной, регулирующей процессы переноса энергии пульсаций температуры по спектру, является величина ε_T - скорость диссипации энергии пульсаций температуры. Эта величина связана с пульсациями температуры δT_l на масштабе l соотношением

$$\varepsilon_T \sim \frac{\delta T_l^2}{t_l}.$$

Повторяя колмогоровские рассуждения, предполагаем, что неоднородность температуры вносится в поток на макромасштабе, а температуропроводность (диссипация) становится существенной только на микромасштабе и в инерционном интервале должен существовать постоянный, не зависящий от масштаба поток энергии пульсаций температуры, равный скорости ее диссипации. Следовательно,

$$\varepsilon_T \sim \frac{\delta T_l^2}{t_l} \sim \frac{\delta T_l^2 \delta v_l}{l} = \text{const}. \quad (5.35)$$

Чтобы получить зависимость пульсаций температуры от масштаба, нужно в (5.35) подставить соответствующую зависимость для пульсаций скорости. Так, если спектр кинетической энергии следует закону Колмогорова «-5/3» (5.14) и $\delta v_l \sim \varepsilon^{1/3} l^{1/3}$, то получаем оценку

$$\delta T_l \sim \varepsilon_T^{1/2} \varepsilon^{-1/6} l^{1/3}, \quad (5.36)$$

соответствующую спектру энергии пульсаций температуры вида

$$E_T(k) = C_T \varepsilon_T \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3}. \quad (5.37)$$

Важно отметить, что спектр (5.37) имеет одинаковый вид и для трехмерной турбулентности и для интервала обратного переноса энергии в двумерной турбулентности, причем и в том и в другом случае направление каскада энергии пульсаций температуры прямое, то есть энергия пульсаций переносится в малые масштабы независимо от направления каскада кинетической энергии.

В инерционном интервале переноса энтропии, где спектр кинетической энергии следует закону (5.15), а пульсации скорости оцениваются как $\delta v_l \sim \varepsilon_\omega^{1/3} l$, (5.35) приводит к соотношению

$$\delta T_l \sim \varepsilon_T^{1/2} \varepsilon_\omega^{-1/6}$$

и спектру

$$E_T(k) = C'_T \varepsilon_T \varepsilon_\omega^{-1/3} k^{-1}. \quad (5.38)$$

Проведенные оценки справедливы, вообще говоря, для случая, когда число Прандтля $\sigma \sim 1$, то есть вязкость и температуропроводность имеют один порядок величины.

Посмотрим теперь, как ведет себя пассивная примесь при экстремальных значениях числа Прандтля. Пусть $\sigma \ll 1$, что соответствует рас-

смотрению жидкости с очень хорошей теплопроводностью (для определенности можно представить себе, что мы рассматриваем турбулентность в ртути или другом жидком металле). В такой среде диффузия тепла эффективней каскадных процессов. Если турбулентность существует и есть каскад кинетической энергии с законом (5.14), то поле скорости непрерывно создает и пульсации температуры, но последние рассасываются на тех же масштабах, что и создаются, не успевая вступить в нелинейный каскадный процесс. Источником пульсаций температуры служит крупномасштабное поле δT_0 , а оценку для величины пульсаций температуры на масштабе l получаем, сравнивая величину конвективного и диссипативного слагаемых в уравнении (5.32)

$$\delta v_l \frac{\delta T_0}{L} \sim \frac{\delta T_l}{l^2}.$$

Используя колмогоровскую оценку для пульсаций скорости, получаем $\delta T_l \sim l^{7/3}$, что соответствует спектру

$$E_T(k) \sim k^{-17/3}. \quad (5.39)$$

Интервал масштабов с такими свойствами называют инерционно-диффузионным интервалом. В двумерной турбулентности в инерционном интервале энтропии при спектре скорости «-3» аналогичные оценки дают еще более быстрое спадание спектральной плотности энергии пульсаций

$$E_T(k) \sim k^{-7}. \quad (5.40)$$

Другой предельный случай, это большие числа Прандтля $\sigma \gg 1$: вязкая жидкость с плохой теплопроводностью (такими свойствами обладают многие масла). В этом случае каскад пульсаций скорости быстро затухает под действием вязких сил, но пульсации температуры уносятся в значительно более мелкие масштабы, чем масштаб вязкой диссипации. Существует так называемый вязко-конвективный интервал. Его динамика определяется крупномасштабным полем скорости, так как на этих масштабах пульсации скорости подавлены вязкостью. Тогда

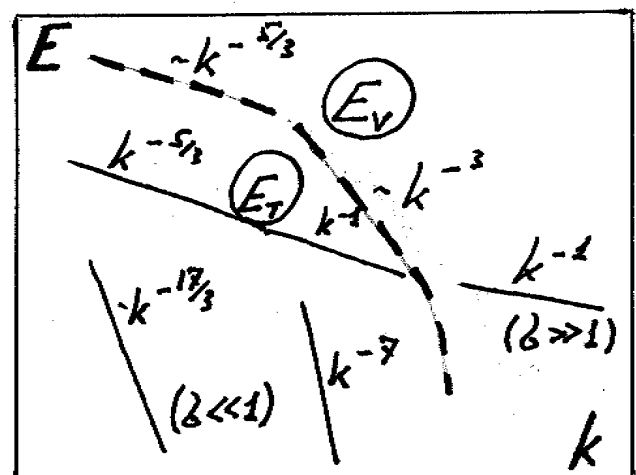


Рис.5.22

$$\varepsilon_T \sim \frac{\delta T_l^2}{t_L} = \text{const}$$

и $\delta T_l \sim l^0$. Получаем спектр, на который впервые указал Бэтчелор,

$$E_T(k) \sim k^{-1}. \quad (5.41)$$

Сводная картина возможных спектральных законов для пульсаций пассивной примеси приведена на рис.5.22.

Обратимся теперь собственно к конвективной турбулентности, то есть турбулентности, в которой основной движущей силой является неоднородность температуры. Число Грассхофа $G \gg 1$, а число Прандтля для простоты будем считать порядка единицы. Пусть движение вызывается неоднородным нагревом на максимальном масштабе L , и возникающее движение столь интенсивно, что движение является турбулентным. В этом случае возможно представить себе два сценария развития турбулентности. Первый (колмогоровский) состоит в том, что турбулентность развивается по обычному изотермическому сценарию и динамика меньших масштабов определяется спектральным потоком энергии, который оказывается на этих масштабах существеннее, чем работа сил Архимеда. На возможность другого сценария впервые указали независимо друг от друга А.Обухов и Р.Болджиано. Этот сценарий (будем называть его обуховским) предполагает существенную роль сил Архимеда в широком интервале масштабов. Так как режим движения заведомо нелинейный, то это возможно в случае, если на каждом масштабе имеет место баланс между нелинейным и архимедовым слагаемыми в уравнении (5.32). Это условие выражается (в размерном виде) соотношением

$$\frac{\delta v_l^2}{l} \sim g\beta\delta T_l. \quad (5.42)$$

Наряду с этим условием остается справедливым условие (5.35), требующее постоянства потока энергии пульсаций температуры по спектру. Оно дает второе соотношение

$$\varepsilon_T \sim \frac{\delta T_l^2 \delta v_l}{l}. \quad (5.43)$$

Решая систему (5.42)-(5.43), получаем

$$\delta v_l \sim \varepsilon_T^{1/5} (g\beta)^{2/5} l^{3/5}, \quad (5.44)$$

$$\delta T_l \sim \varepsilon_T^{2/5} (g\beta)^{-1/5} l^{1/5}. \quad (5.45)$$

Оценки (5.44)-(5.45) соответствуют спектральным законам

$$\dot{A}(k) \sim k^{-11/5}, \quad (5.46)$$

$$E_T(k) \sim k^{-7/5}. \quad (5.47)$$

Важно отметить, что полученные спектральные законы не зависят от размерности пространства, то есть они могут возникнуть как в трех-, так и в двумерном течении. Под двумерным конвективным движением мы подразумеваем при этом течение в вертикальной плоскости, то есть плоскости, в которой лежит вектор ускорения свободного падения. Такие двумерные конвективные течения могут быть реализованы в вертикальной щели с неравномерным нагревом.

Конвективный (обуховский) интервал вида (5.46)-(5.47) не может расти неограниченно даже в пределе бесконечно больших значений числа Грасгофа. Дело в том, что работа, совершаемая силами Архимеда за единицу времени на единицу массы

$$\Pi_A \sim (g\beta)\delta v_l \delta T_l \sim \varepsilon_T^{3/5} (g\beta)^{6/5} l^{4/5}, \quad (5.48)$$

падает с уменьшением масштаба. Это означает, что должен существовать масштаб, на котором обычный колмогоровский механизм станет эффективней конвективного и на смену обуховскому режиму должен прийти колмогоровский. Этот масштаб принято называть масштабом Болджиано и он легко получается, если приравнять (5.48) скорости диссипации энергии

$$L_B \sim (g\beta)^{-3/2} \varepsilon^{5/4} \varepsilon_T^{-3/4}. \quad (5.49)$$

Ожидаемая картина спектральных распределений энергии для трехмерной турбулентной конвекции показана на рис.5.23.

В двумерном случае ситуация на масштабах $l > L_B$ полностью аналогична ситуации в трехмерном течении. Отличия возникают на малых масштабах, так как прямой каскад энергии в двумерном потоке невозможен.

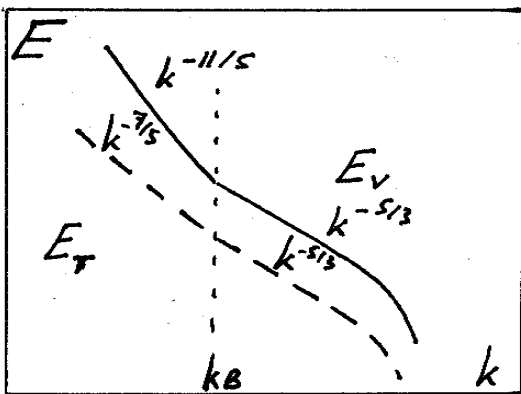


Рис.5.23

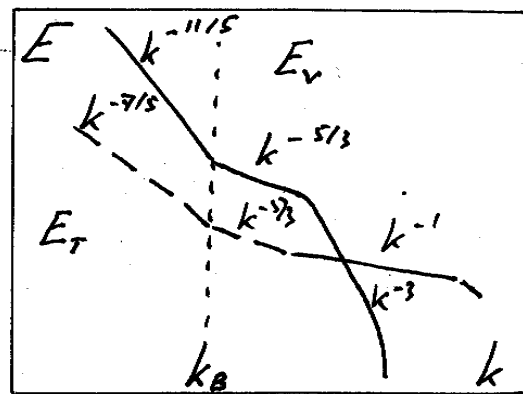


Рис.5.24

Конвективный интервал обеспечивает прямой поток энергии по спектру, а на масштабе Болджиано каскад блокируется. Справа от этого масштаба должен установиться интервал переноса энтропии, а слева начнется формирование интервала обратного каскада энергии. Общая картина спектров в двумерной конвективной турбулентности показана на рис.5.24.

Отметим еще один интервал, который может появиться при турбулентной конвекции в жидкости с большим числом Прандтля. Сильная вязкость подавляет движение на масштабах, на которых еще существуют пульсации температуры. Без учета сил плавучести это приводит к спектру Бэтчелора (5.41). При больших числах Грасгофа возможна ситуация, когда нелинейные члены в уравнении для скорости становятся малы, а динамика пульсаций определяется балансом сил Архимеда и сил вязкости. Это означает, что

$$g\beta\delta T_l \sim \frac{\delta v_l}{l^2}. \quad (5.50)$$

Считая, что пульсации температуры следуют закону Бэтчелора (5.41), получаем из (5.50) спектральный закон для пульсаций скорости

$$E(k) \sim k^{-5}. \quad (5.51)$$

В заключение отметим, что вопрос о спектральных законах в конвективной турбулентности далек от своего окончательного решения. Экспериментальные измерения касаются, в основном, только полей температуры и дают разноречивые результаты. На сегодня нет даже единого мнения относительно того, может ли реализоваться инерционный интервал Обухова. К этому вопросу мы вернемся в последней главе курса.

6. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ И ВЕЙВЛЕТЫ

В этой главе мы рассмотрим модели, основанные на идее применения функционального базиса специального типа, наиболее точно соответствующего структуре турбулентных полей. Идея такого базиса впервые была предложена В.Зиминим в конце семидесятых годов и состояла в использовании семейства самоподобных функций прогрессивно убывающего масштаба¹⁰. Базис был назван иерархическим и на его основе были построены и исследованы многочисленные модели, также названные иерархическими (см. книгу В.Зимина и П.Фрика¹¹). В конце восьмидесятых годов в научной литературе появилось слово «вейвлет», а к началу девяностых вейвлет-анализ превратился в самостоятельную, хорошо развитую область математической физики. Идеи, лежащие в основе теории вейвлетов, совпадают с идеями иерархического представления турбулентных полей и в терминах этой молодой науки иерархические модели - это модели, построенные с помощью вейвлет-представления описываемых полей.

Поскольку цель нашего курса состоит в изложении подходов к моделированию турбулентности, то главу мы начнем с идей, приведших к иерархическим моделям. В то же время, нельзя не остановиться и на формулировке основных положений вейвлет-анализа, который оказывается чрезвычайно полезным при анализе временной и пространственной структуры нелинейных гидродинамических систем. Краткое изложение основных идей непрерывного и дискретного вейвлет-анализа и некоторые примеры его использования составят вторую половину этой главы.

6.1. Иерархический базис для турбулентных полей

Рассматривая численные методы решения уравнений движения жидкости, мы говорили о том, что чаще всего для этих целей используются либо сеточные, либо спектральные методы, либо их комбинация. И те, и другие можно отнести к проекционным методам решения уравнений в частных производных, когда для решения используют проекции всех полей на функциональные базисы.

В сеточных методах функции представлены значениями в точках, плотность которых связана со спектральными свойствами рассматриваемых

¹⁰ Зимин В.Д. Иерархическая модель турбулентности // Известия АН СССР: Физика атмосферы и океана. Т.17. N.12. С.1265-1273.

¹¹ Зимин В.Д., Фрик П.Г. Турбулентная конвекция. М.: Наука, 1988. 178 с.

мых полей (мелкомасштабные вихри не должны проваливаться между точками сетки). Более строго эта связь выражается теоремой Котельникова, согласно которой функция $f(x)$, спектр которой ограничен пространственной частотой $2\pi/h$, может быть представлена суммой функций отсчетов (синусов), центры которых размещены на сетке с шагом h . Очевидно, что сеточное представление эффективно при описании локальных структур - мелкомасштабный вихрь описывается небольшим числом точек, находящихся в соответствующей области пространства. В то же время, для описания даже очень простого по структуре крупномасштабного вихря требуется использование всех базисных функций.

Спектральные методы используют разложение по фурье-гармоникам. В этом случае каждая базисная функция описывает, по сути, систему когерентных вихрей, занимающую все пространство. В таком представлении очень просто описать вихрь, занимающий всю область, или периодическую систему вихрей - и в том, и в другом случае достаточно одной базисной функции. Однако, если требуется описать отдельный вихрь, занимающий малую часть рассматриваемой области, то потребуется весь гармонический ряд.

Выше уже обсуждались и преимущества и недостатки обоих методов с точки зрения решения уравнений гидродинамики. Сеточные методы эффективны при вычислении нелинейных членов, так как позволяют выразить значение в точке через небольшое число соседних точек, но приводят к большим затратам машинного времени при решении уравнения Пуассона, требующего построения итерационного процесса, в который вовлечены все точки области. Спектральные методы, наоборот, делают решение уравнения Пуассона тривиальным, но приводят к очень сложной структуре нелинейных членов.

Проблемы двух функциональных базисов связаны с их локализованностью в физическом и в фурье-пространствах. Сетки строго локализованы в физическом пространстве, но спектр точки (дельта-функции) есть белый шум. Это означает, что функции делокализованы в пространстве Фурье. Обратная ситуация возникает при разложении Фурье. Каждая гармоника представляет строго одну частоту, но соответствующая ей функция занимает все физическое пространство.

В турбулентном потоке сосуществуют вихри самого различного масштаба, но наиболее эффективные взаимодействия происходят между вихрями (структурами), близкими и в физическом, и в фурье-пространстве. Первое очевидно - чтобы вихри взаимодействовали, они должны перекрываться в пространстве. Второе утверждение составляет основу концепции каскадных процессов - взаимодействуют вихри сравнимых размеров (если размеры не сопоставимы, то маленькие вихри просто переносятся большими без обмена энергией). Это заставляет обратиться к поиску специальных функций, более точно соответствующих структуре турбулентного потока.

В теории турбулентности важную роль играет идея масштабного подобия. Это значит, что искомый базис должен быть составлен из подобных функций.

Еще один недостаток использования рядов Фурье состоит в низкой информативности высоких частот. Хорошо понятен смысл рассмотрения вихрей с характерным размером $L, L/2, L/3, \dots$, но отдельное описание масштабов $L/957, L/958, L/959, \dots$ и т.д. мало оправдано. Это соображение наводит на мысль о необходимости использования функций, масштаб которых изменяется прогрессивно - такое соотношение получается при равномерном разбиении пространства масштабов в логарифмическом представлении.

Суммируя сказанное, можно сформулировать требования, которым должен удовлетворять функциональный базис, предназначенный для описания турбулентных потоков:

- 1) функции базиса должны быть локализованы и в физическом, и в фурье-пространствах;
- 2) функции должны быть подобны и описывать иерархию вихрей прогрессивно убывающих масштабов;
- 3) мелкомасштабные вихри должны переноситься в поле вихрей большего масштаба;
- 4) при подстановке в уравнения Навье - Стокса функциональный базис должен приводить к слабосвязанной динамической системе.

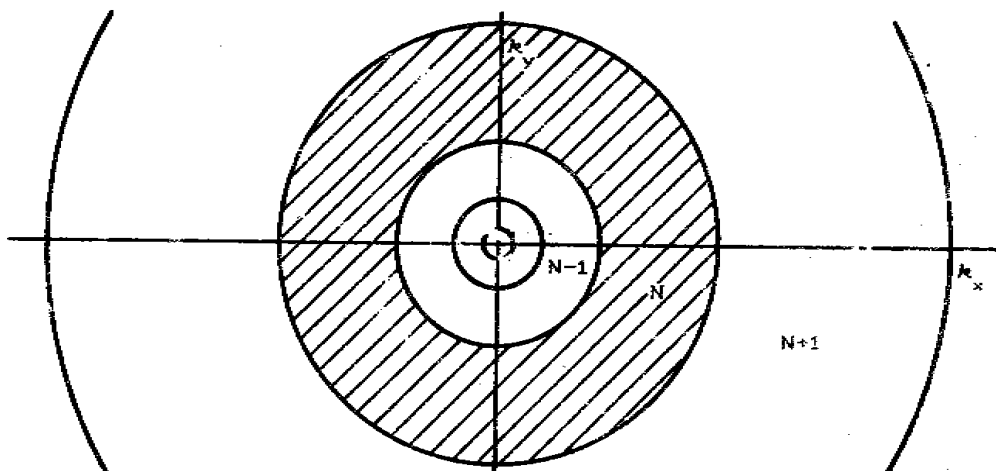


Рис.6.1

Попробуем построить базис, удовлетворяющий этим требованиям. Построения будем проводить для двумерного случая, так как это упрощает иллюстрацию результатов и запись функций.

Итак, имеем двумерное пространство $\vec{r} = (x, y)$ и соответствующее ему пространство волновых векторов $\vec{k} = (k_x, k_y)$. Фурье-плоскость разобьем на кольцевые зоны (рис.6.1) таким образом, что для зоны с номером N

$$k_N < |\vec{k}| < k_{N+1}, \quad k_N = \pi 2^N, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.1)$$

Каждая кольцевая зона включает, таким образом, одну октаву волновых чисел (напомним, что октавой называется интервал, в пределах которого частота изменяется в два раза).

Рассмотрим, например, поле завихренности $\omega(t, x, y)$ и представим его в виде

$$\omega(t, x, y) = \sum_N \omega_N(t, x, y), \quad (6.2)$$

где каждая функция ω_N есть результат фильтрации в фурье-плоскости по соответствующему кольцу (6.1):

$$\omega_N(t, x, y) = \iint \omega(t, x', y') g_N(x - x', y - y') dx' dy'. \quad (6.3)$$

Здесь $g_N(\vec{r})$ есть функция, фурье-образ которой $\hat{g}_N(\vec{k})$ локализован в кольце

$$\hat{g}_N(\vec{k}) = \begin{cases} 1 & \text{в кольце } N, \\ 0 & \text{вне кольца } N. \end{cases} \quad (6.4)$$

В силу определения операции фильтрации (6.3)-(6.4)

$$\int \omega_N \omega_M d\vec{r} \sim \delta_{NM}$$

и, следовательно, энтропия распадается на сумму

$$\Omega = \frac{1}{2} \int \omega^2 d\vec{r} = \sum_N \Omega_N, \quad \Omega_N = \frac{1}{2} \int \omega_N^2 d\vec{r}. \quad (6.5)$$

Такую же операцию фильтрации можно применить и к полю скорости, разбив тем самым и энергию на сумму энергий, принадлежащих различным октавам волновых чисел

$$E = \sum_N E_N = \sum_N \frac{1}{2} \int \vec{v}_N^2 d\vec{r}. \quad (6.6)$$

Таким образом, мы провели первую часть построения - разбили исходное поле по масштабам. На втором этапе нужно провести разбиение полученных полей ω_N на сумму функций, каждая из которых характеризует поле завихренности данного масштаба только в определенной области пространства

$$\omega_N = \sum_n \omega_{Nn}(t) f_N(\vec{r} - \vec{r}_{Nn}), \quad (6.7)$$

где $f_N(\vec{r})$ есть базисные функции масштаба N , \vec{r}_{Nn} - радиус-вектор центра вихря (функции). Функции $f_N(\vec{r})$ должны быть подобны и обеспечивать разреженную матрицу нелинейных взаимодействий X_{NnMmLl} в уравнении

$$d_t \omega_{Nn} = \sum X_{NnMmLl} \omega_{Mm} \omega_{Ll} + \dots, \quad (6.8)$$

получающемся при проектировании уравнений Навье - Стокса на функциональный базис. При этом хотелось бы иметь полный ортонормированный базис функций.

Увы, удовлетворить всем приведенным требованиям не удастся. Задача имеет решение в такой постановке только в одномерном случае. Одномерный базис, конечно, не имеет интереса с точки зрения описания турбулентности, но его построение представляет методический интерес и мы его проведем.

6.1.1. Одномерный иерархический базис

Рассмотрим функцию $f(x)$, для которой существует преобразование Фурье,

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \gamma x} dx. \quad (6.9)$$

Ось волновых чисел γ (напомним, что $k = 2\pi\gamma$) разбиваем на октавы $\gamma_N = 2^N$ (рис.6.2) и вводим функции

$$\hat{f}_N(\gamma) = \begin{cases} \hat{f}(\gamma) & \gamma_N < \gamma < \gamma_{N+1} \\ 0 & \text{вне зоны} \end{cases} \quad (6.10)$$



Рис.6.2

Очевидно, что $\hat{f}(\gamma) = \sum \hat{f}_N(\gamma)$. Полученные функции \hat{f}_N обладают замечательным свойством - они допускают периодическое продолжение на всю ось γ с периодом $2\gamma_N$ (рис.6.3)

$$\widehat{F}_N(\gamma) = \begin{cases} \widehat{f}_N(\gamma - 2(m+1)\gamma_N) \\ \widehat{f}_N(\gamma - 2(m-1)\gamma_N) \end{cases} \quad \text{àñèè} \quad \begin{cases} 2\gamma_N m < \gamma < (2m+1)\gamma_N \\ (2m-1)\gamma_N < \gamma < 2m\gamma_N \end{cases}$$

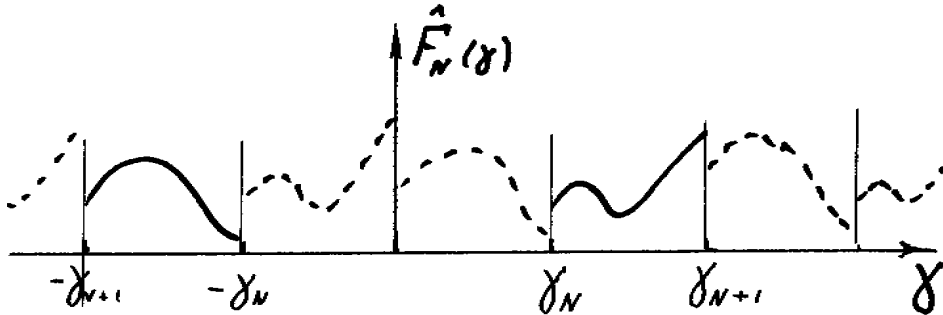


Рис.6.3

Это позволяет разложить функции $\widehat{F}_N(\gamma)$ в ряд Фурье

$$\widehat{F}_N(\gamma) = \sqrt{h_N} \sum_n A_{Nn} e^{-2\pi i h_N n \gamma}, \tag{6.11}$$

Где $h_N = 1/(2\gamma_N)$. Функции $h_N e^{-2\pi i h_N n \gamma}$ образуют полный базис в классе функций \widehat{F}_N , а те же функции, определенные внутри зоны (6.10), - полный базис в классе функций \widehat{f}_N . Чтобы получить вид базисной функции в физическом пространстве, нужно взять обратное преобразование Фурье. Получается функция вида

$$f_{Nn}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_N}} \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2h_N}(x - h_N n)\right]}{\frac{\pi}{2}(x - h_N n)} \cos\left[\frac{3\pi}{2h_N}(x - h_N n)\right]. \tag{6.12}$$

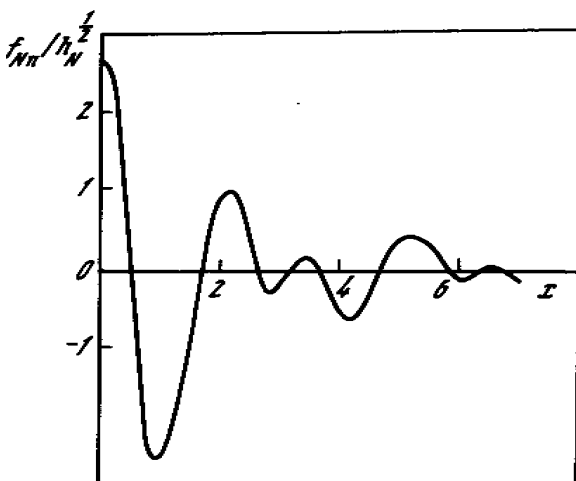


Рис.6.4

Вид функции (6.12) для $n = 0$ показан на рис.6.4. Эти функции известны в математике как функции Литлвуда - Пелли. Функции медленно убывают в физическом пространстве ($f_{Nn}(x) \sim x^{-1}$), что является результатом обрыва функций в пространстве Фурье. Все базисные функции взаимно ортогональны, то есть

$$\int f_{Nn}(x)f_{Mm}(x)dx = \delta_{NM}\delta_{nm},$$

что следует из ортогональности функций в фурье-пространстве и инвариантности скалярного произведения двух функций относительно преобразования Фурье. Коэффициенты в разложении (6.11) определяются формулой

$$A_{Nn} = \int f(x)f_{Nn}(x)dx. \quad (6.13)$$

Базисные функции имеют двойную индексацию. Большой индекс отвечает за масштаб, малый - за положение функции в пространстве. Увеличение индекса N на единицу сжимает функцию вдвое, увеличение индекса n на единицу сдвигает функцию вдоль оси x на величину h_N .

6.1.2. Двумерный базис

Простейший способ получения двумерного базиса состоит в определении двумерной функции как произведения одномерных

$$f_{NmMm}(x, y) = f_{Nn}(x)f_{Mm}(y),$$

однако, такие функции не являются изотропными и не удовлетворяют требованию подобия. Последнее обстоятельство не оставляет надежд на получение простой динамической системы для коэффициентов разложения.

Исходя из локальной изотропии мелкомасштабной турбулентности и стремления получить базис, образованный разномасштабными, но однотипными функциями, построим относительно простой, но «не совсем ортогональный» базис.

Итак, раскладываем поле завихренности в ряд

$$\omega(t, x, y) = \sum_{Nn} A_{Nn}(t)\omega_{Nn}(\vec{r} - \vec{r}_{Nn}), \quad (6.14)$$

где A_{Nn} - зависящая от времени амплитуда, ω_{Nn} - осесимметричная базисная функция, у которой большой индекс отвечает за масштаб, а малый - за положение в пространстве, и \vec{r}_{Nn} - радиус-вектор центра функции.

Используем введенное выше разбиение спектральной плоскости на расширяющиеся кольцевые зоны (6.1) и определим базисную функцию таким образом, что ее фурье-образ равен константе в пределах соответствующего кольца:

$$\widehat{\omega}_{Nn}(\vec{\gamma}) = \begin{cases} \alpha e^{-2\pi i \vec{\gamma} \vec{r}_{Nn}} & \gamma_N < \gamma < \gamma_{N+1} \\ 0 & \text{вне зоны} \end{cases} \quad (6.15)$$

Экспоненциальный множитель задает сдвиг центра вихря в физическом пространстве (см. теорему о сдвиге и другие свойства преобразования Фурье в параграфе 2.4.2 части 1). Коэффициент α может быть выбран из условия нормировки $\int \widehat{\omega}_{Nn}^2 d\vec{\gamma} = 1$, которое дает

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{3\pi}} 2^{-N}. \quad (6.16)$$

Наряду с базисными функциями для завихренности можно записать и функции для функции тока и скорости. В фурье пространстве все три функции связаны простыми соотношениями:

$$\widehat{\Psi}_{Nn}(\vec{\gamma}) = \frac{-1}{4\pi^2 \gamma^2} \widehat{\omega}_{Nn}(\vec{\gamma}),$$

$$\widehat{\vec{v}}_{Nn}(\vec{\gamma}) = 2\pi i (\vec{e} \times \vec{\gamma}) \widehat{\Psi}_{Nn}(\vec{\gamma}),$$

где \vec{e} есть единичный вектор, перпендикулярный рассматриваемой плоскости.

Чтобы получить вид функции в физическом пространстве, нужно взять обратное преобразование Фурье от (6.15). Соответствующие вычисления дают

$$\Psi_{Nn}(\vec{r} - \vec{r}_{Nn}) = \frac{2^{-N}}{\sqrt{3\pi^3}} \int_s^{2s} \frac{J_0(z)}{z} dz, \quad (6.17)$$

$$\vec{v}_{Nn}(\vec{r} - \vec{r}_{Nn}) = \frac{2^{-N} (\vec{s} \times \vec{e})}{\sqrt{3\pi}} \left(\frac{J_0(2s) - J_0(s)}{s} \right), \quad (6.18)$$

$$\omega_{Nn}(\vec{r} - \vec{r}_{Nn}) = \sqrt{\frac{\pi}{3}} 2^{-N} \left(\frac{2J_1(2s) - J_1(s)}{s} \right), \quad (6.19)$$

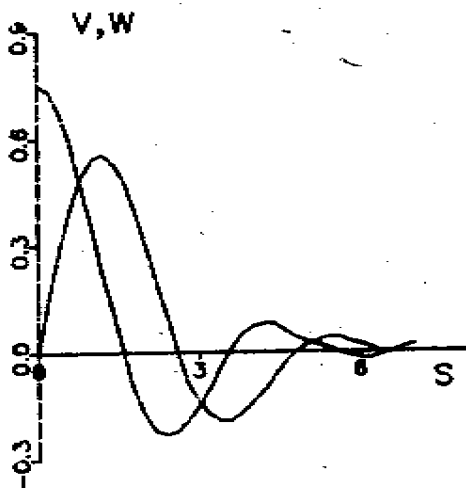


Рис.6.5

где $s = \pi 2^N |\vec{r} - \vec{r}_{Nn}|$, а $J_0(s), J_1(s)$ есть функция Бесселя. Базисные функции для скорости и завихренности показаны на рис.6.5.

Мы оставили без внимания вопрос о количестве базисных функций и об их распределении в пространстве. Плотность функций в физическом пространстве можно оценить исходя из принципа неопреде-

ленности. Если области локализации в \vec{r} и \vec{k} пространствах имеют, соответственно, размеры Δr и Δk , то, требуя

$$\Delta r \Delta k = 2\pi, \quad (6.20)$$

получаем, что плотность функций заданного масштаба ρ_N связана с площадью области локализации функции в пространстве Фурье ΔS_k как

$$\rho_N = \frac{\Delta S_k}{4\pi^2} = \frac{3\pi}{4} 2^{2N}. \quad (6.21)$$

При вычислении (6.21) учли, что ΔS_k есть площадь кольцевой области (6.1). Формула (6.21) отражает тот факт, что число вихрей при переходе от масштаба к масштабу растет в четыре раза (естественно, что в трехмерном случае это отношение будет равно восьми).

Вопрос о распределении функций в пространстве более сложен. Формулируя требования к базису, мы хотели воспроизвести структуру турбулентного потока, в котором мелкие вихри переносятся крупными. Это означает, что радиус-вектор центра функции должен подчиняться уравнению

$$d_t \vec{r}_{Nn} = \sum_{M < N} \sum_m \vec{v}_{Mm} (\vec{r}_{Nn} - \vec{r}_{Mm}). \quad (6.22)$$

Подчеркнем, что суммирование в (6.22) ведется по всем масштабам, большим данного.

Введенный таким образом базис ортогонален по индексу N , так как в Фурье-пространстве функции различного масштаба занимают неперекрывающиеся области. Неортогональность функций по малому индексу, отвечающему за положение вихрей в пространстве, можно оценить путем вычисления интеграла $\int_{\omega_{Nn} \omega_{Mm}} d\vec{r}$ для двух вихрей одного масштаба, расположенных друг от друга на расстоянии $\rho_N^{-1/2}$, равном среднему расстоянию между вихрями данного масштаба. Такая оценка дает для функций (6.19) значение порядка 0,1.

6.1.3. Трехмерный базис

Построение иерархического базиса для трехмерного скалярного поля принципиально не отличается от двумерного случая. В пространстве Фурье функции локализуются в сферических слоях и, после перехода в физическое

пространство, получают функции со сферической симметрией, имеющие вид

$$f_{Nn}(s) = \alpha 2^{3N/2} \frac{\sin 2s - 2s \cos 2s - \sin s + s \cos s}{s^3}, \quad (6.23)$$

где α - нормировочный коэффициент, а s имеет тот же смысл, что и в двумерных функциях.

Для векторных полей ситуация отличается, так как появляется третий индекс, связанный с ориентацией вихря в пространстве. Так, например, функцию для поля скорости можно записать в виде

$$\vec{v}_{Nnv} = \alpha (\vec{e}_v \times \vec{s}) f_{Nn}(s). \quad (6.24)$$

Здесь \vec{e}_v - единичный вектор, направленный вдоль одной из осей координат, а $f_{Nn}(s)$ - скалярная функция с шаровой симметрией.

6.2. Иерархическая модель двумерной турбулентности

Используем функциональный базис, введенный в п.6.1.2 для построения модели двумерной турбулентности. Речь идет именно о модели, а не о прямом численном расчете с помощью этого функционального базиса, так как базис не является строго ортогональным и не решает проблемы граничных условий.

Рассмотрим уравнение для завихренности

$$\partial_t \omega + (\vec{v} \vec{\nabla}) \omega = \nu \Delta \omega \quad (6.25)$$

и спроектируем его на базис (6.14)-(6.19). Получаем уравнение вида

$$\sum_{Mm} d_t A_{Mm} P_{NnMm} = \sum_{Mm} \sum_{Ll} R_{NnMmLl} A_{Mm} A_{Ll} + \nu \sum_{Mm} A_{Mm} K_{NnMm}, \quad (6.26)$$

где

$$P_{NnMm} = \int \omega_{Nn} \omega_{Mm} d\vec{r}, \quad (6.27)$$

$$K_{NnMm} = \int \omega_{Nn} \Delta \omega_{Mm} d\vec{r}, \quad (6.28)$$

$$R_{NnMmLl} = \int \omega_{Nn} (\vec{v}_{Mm} \vec{\nabla}) \omega_{Ll} d\vec{r}. \quad (6.29)$$

Элементы матриц P_{NmMm} , K_{NmMm} и R_{NmMmLl} зависят от времени, так они зависят от взаимного расположения взаимодействующих вихрей, а положения вихрей меняются в соответствии с уравнением (6.22). Энтропия и энергия системы определяются выражениями

$$\Omega = \sum_{Nn} \sum_{Mm} P_{NmMm} A_{Nn} A_{Mm}, \quad (6.30)$$

$$E = \sum_{Nn} \sum_{Mm} P'_{NmMm} A_{Nn} A_{Mm}, \quad (6.31)$$

где

$$P'_{NmMm} = \int \vec{v}_{Nn} \vec{v}_{Mm} d\vec{r}. \quad (6.32)$$

На этом этапе делается первое сильное предположение, состоящее в том, что мы пренебрегаем недиагональностью матриц P , P' и K по малому индексу (по большому индексу матрицы диагональны в силу способа разбиения пространства волновых векторов). Тогда

$$\Omega = \sum_{Nn} A_{Nn}^2, \quad E = E_0 \sum_{Nn} 2^{-2N} A_{Nn}^2, \quad (6.33)$$

а уравнение (6.26) принимает вид

$$d_t A_{Nn} = \sum_{Mm} \sum_{Ll} R_{NmMmLl} A_{Mm} A_{Ll} - \nu K_0 2^{2N} A_{Nn}. \quad (6.34)$$

Следует подчеркнуть, что диагональность матрицы P не влечет за собой диагональности матрицы K (этим замечательным свойством обладает представление функций в ряд Фурье) и последнее является самостоятельным предположением.

Ясно, что степень простоты (или сложности) получаемой модели зависит от структуры матрицы нелинейных взаимодействий R_{NmMmLl} . Перед тем, как приступить к следующим конкретным шагам по упрощению модельных уравнений, проанализируем общую структуру этой матрицы. Для этого запишем вид ее элементов в пространстве Фурье

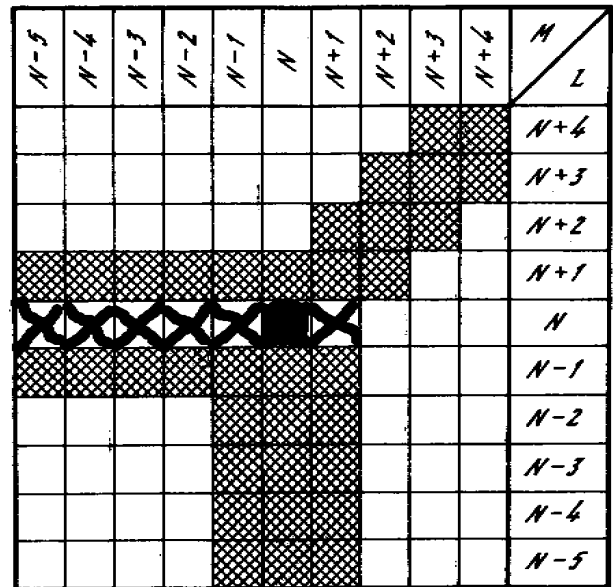


Рис.6.6

$$R_{NmMmL} = \int \omega_{Nn}(\bar{v}_{Mm} \bar{V}) \omega_L d\bar{r} = 2\pi i \iint \hat{\omega}_{Nn}(\bar{\gamma}) [\bar{\gamma} \hat{v}_{Mm}(\bar{\gamma} - \bar{\gamma}')] \hat{\phi}_L(\bar{\gamma}') d\bar{\gamma} d\bar{\gamma}'. \quad (6.35)$$

Интегрирование в (6.35) ведется по пересечению областей

$$2^N < |\bar{\gamma}| < 2^{N+1}, \quad 2^M < |\bar{\gamma} - \bar{\gamma}'| < 2^{M+1}, \quad 2^L < |\bar{\gamma}'| < 2^{L+1}, \quad (6.36)$$

что и определяет характер заполнения матрицы. Все три условия (6.36) выполняются только в случае, если два из трех индексов N , M и L отличаются не больше, чем на единицу. Это означает, что все ненулевые элементы матрицы сосредоточены вблизи диагоналей $N = M$, $N = L$ и $L = M$, причем третий индекс может сильно отличаться от двух, близких по значению, но быть меньше последних (можно построить треугольник из двух длинных отрезков и одного короткого, но нельзя построить из одного длинного и двух коротких). Структуру матрицы иллюстрирует рис.6.6, на котором помечены все ненулевые элементы матрицы. Черным цветом выделен элемент T_{NNN} , а крестиками - диагональ T_{NMN} .

Дальнейшее построение модели требует новых предположений и гипотез, которые могут быть сделаны различными способами. Не останавливаясь на альтернативных способах, мы кратко опишем модель, рассмотренную в работе¹², и приведем некоторые результаты.

Модель называется иерархической потому, что базисные функции образуют иерархическую структуру, условно изображенную на рис.6.7. Совокупность вихрей одного масштаба будем называть ярусом. Каждый вихрь данного яруса несет на себе четыре вихря следующего и так далее. При этом предполагается, что меньший вихрь переносится большим без

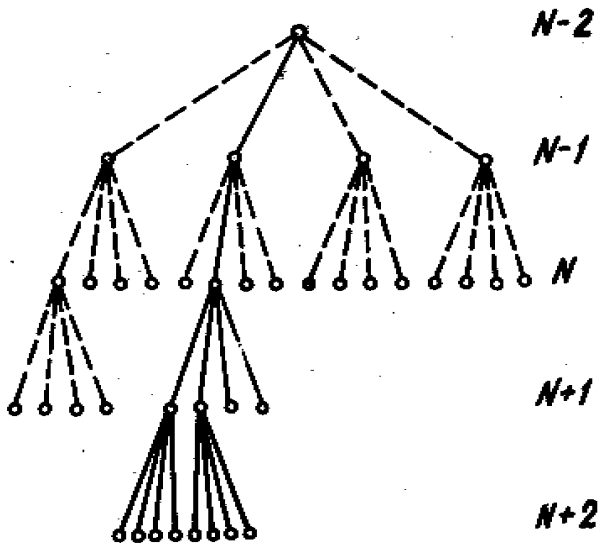


Рис.6.7

деформации, то есть меньший совершает строго осесимметричное относительно большего движение, которое описывается уравнениями для центра вихря (6.22). Это предположение означает, что расстояние между центрами пары вихрей, связанных вертикальной связью на схеме рис.6.7, остается постоянным.

Следующий шаг касается вида матрицы нелинейных взаимодействий (6.29). Обязательным условием является соблюдение законов сохранения -

¹² Aurell E., Frick P., Shaidurov V. Hierarchical tree-model of two-dimensional turbulence // Physica D, 1994. Vol.72. P.95-109.

уравнения при отсутствии диссипативного члена должны сохранять энергию и энстрофию, определенные выражениями (6.33). Для того, чтобы обеспечить сохранение квадратичных величин, нужно чтобы они сохранялись в единичном взаимодействии трех вихрей. Перепишем уравнение (6.34) в виде

$$d_t A_{Nn} = \sum_{L>M} \sum_{ml} T_{NmMl} A_{Mm} A_{Ll} - \nu K_0 2^{2N} A_{Nn}, \quad (6.37)$$

где матрица T включает все взаимодействия между данной тройкой вихрей (матрицу R сложили вдоль диагонали $L=M$) $T_{NmMl} = R_{NmMl} + R_{NmLl}$ и заметим, что элементы матрицы T зависят только от относительного положения трех вихрей и отношения их масштабов (номеров ярусов)

$$T_{NmMl}(\vec{r}_{Nn}, \vec{r}_{Mm}, \vec{r}_{Ll}) = T_{NML}(\vec{r}_{mn}, \vec{r}_{ln}) = 2^N T_{0,M-N,L-N}(2^N \vec{r}_{mn}, 2^N \vec{r}_{ln}), \quad (6.38)$$

где $\vec{r}_{mn} = \vec{r}_{Mm} - \vec{r}_{Nn}$ и $\vec{r}_{ln} = \vec{r}_{Ll} - \vec{r}_{Nn}$.

С учетом (6.38) запишем условия сохранения энергии и энстрофии, используя только большие индексы матрицы:

$$T_{N,N-j,N+1} + 2^j T_{N,N+j,N+j+1} + 2^{-1} T_{N,N-j-1,N-1} = 0, \quad (6.39)$$

$$T_{N,N-j,N+1} + 2^{-j} T_{N,N+j,N+j+1} + 2 T_{N,N-j-1,N-1} = 0. \quad (6.40)$$

Отметим, что наличие двух законов сохранения исключает наличие ненулевых диагональных членов и оставляет в матрице только элементы трех типов, вошедшие в соотношения (6.39)-(6.40). Решая систему (6.39)-(6.40), выражаем все элементы через один, который для упрощения обозначений переобозначим как T_j (индекс j характеризует степень удаленности взаимодействующих вихрей: $j=1$ означает, что взаимодействуют вихри из трех последующих ярусов; $j=2$ соответствует взаимодействию двух вихрей из соседних ярусов с третьим, который отстоит от них через один ярус, и т.д.),

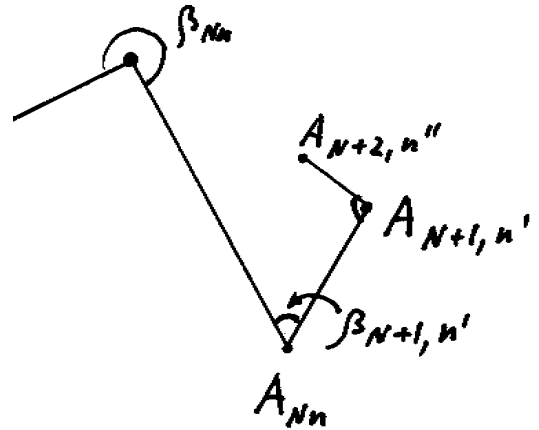


Рис.6.8

$$T_{N,N-j,N+1} = 2^N T_{0,-j,1} = 2^N T_j,$$

$$T_{N,N-j-1,N-1} = 2^N T'_j = \frac{2^N (1 - 2^{-2j})}{(2^{-2j-1} - 2)} T_j,$$

$$T_{N,N+j,N+j+1} = 2^N T_j'' = \frac{3 \cdot 2^N}{(2^{-j} - 2^{2+j})} T_j. \quad (6.41)$$

Таким образом, для любой тройки взаимодействующих вихрей осталась одна величина T_j , требующая вычисления при их заданном взаимном положении. Заметим, что положение вихрей полностью определяется значением углов β между векторами, соединяющими центры большего вихря с меньшим и т.д. (рис.6.8). Величина T_j вычисляется непосредственно по формуле (6.35) с учетом вида функций (6.18)-(6.19) и табулируется для всевозможных значений углов. Суммируя сказанное, запишем систему уравнений для двух переменных, характеризующих каждый вихрь n яруса (масштаба) N : амплитуды A_{Nn} и угла β_{Nn}

$$d_t A_{Nn} = 2^N \sum_{j=1}^J \left\{ A_{N-j-1}^- A_{N-1}^- T_j'(\beta_{N-1}, \beta_{N-2}, \dots) + A_{N-j}^- \sum_{i=1}^4 A_{N+1,i}^+ T_j(\beta_N, \beta_{N-1}, \dots) + \sum_{i=1}^{2^j} \sum_{k=1}^{2^{j+1}} A_{N+j,i}^+ A_{N+j+1,k}^+ T_j''(\beta_{N+1}, \beta_{N+2}, \dots) \right\} - \nu K_0 2^{2N} A_{Nn} + f_{Nn} \quad (6.42)$$

$$d_t \beta_{Nn} = A_{Nn}. \quad (6.43)$$

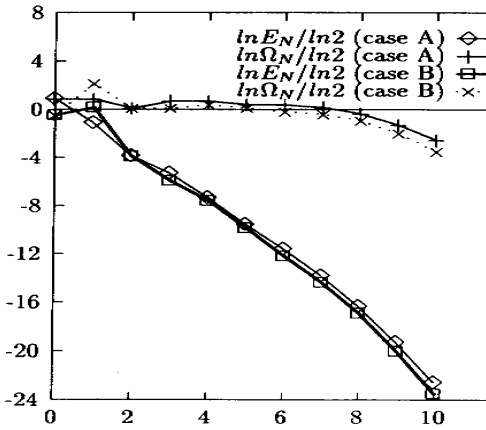


Рис.6.9

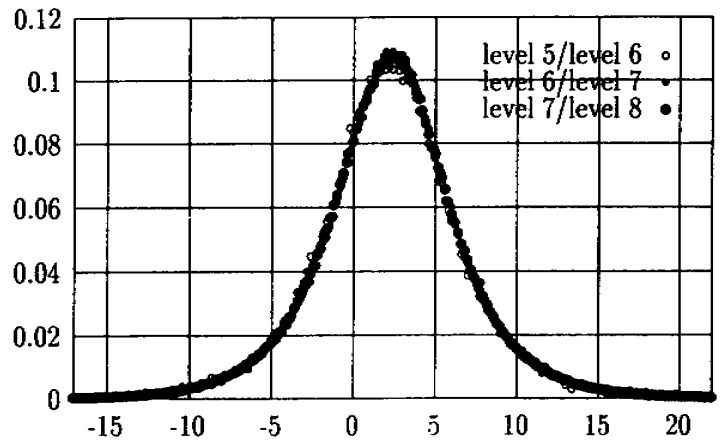


Рис.6.10

В уравнении (6.42) использованы обозначения A_{N-k}^- для индикации вихря, находящегося в иерархическом дереве на k ярусов выше данного, и $A_{N+k,i}^+$ для i -го вихря, находящегося в дереве на k ярусов ниже данного (таких вихрей всего 2^{2k} штук).

Система (6.42)-(6.43) хороша тем, что в ней каждая переменная (каждый вихрь) связана лишь с небольшим числом соседей по иерархическому дереву, изображенному на рис. 6.7. Такого типа системы удобны для применения систем массивованного параллельного программирования. В цитируемой работе эта система решалась на параллельном компьютере типа

СМ-200 фирмы Thinking Machines Corporation, имеющем 8192 процессора. Компьютер относится к параллельным системам типа SIMD (Single Instruction Multi Data), допускающим одновременное выполнение всеми процессорами только одной и той же операции. Такие вычислительные системы эффективны только при решении задач, в которых требуется одновременное выполнение большого числа одинаковых действий с различными данными. Рассматриваемая иерархическая модель как раз и относится к таким задачам.

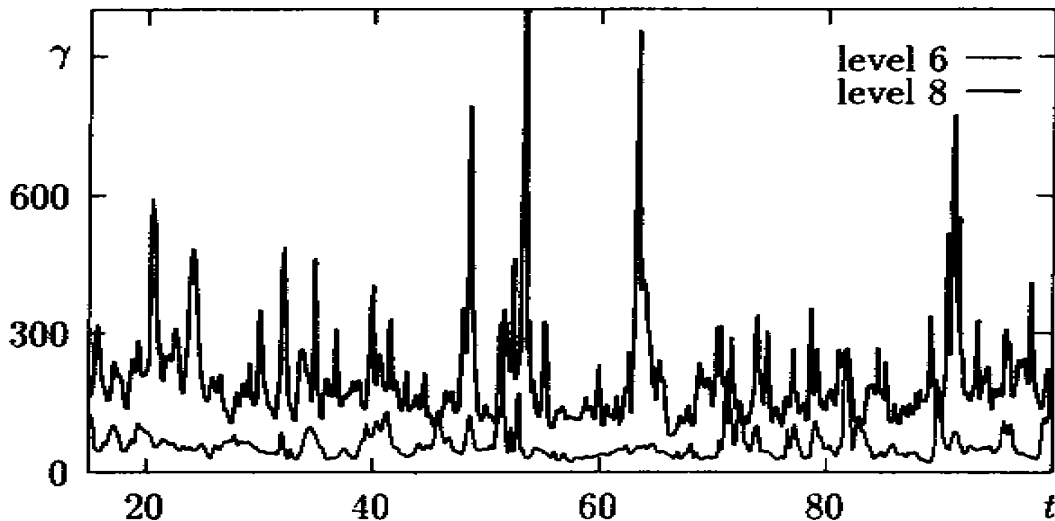


Рис.6.11

Решалась система для 12 ярусов (N от 0 до 11), включающая всего 5592405 вихрей. Моделировался инерционный интервал переноса энтропии - подкачка осуществлялась в первом и втором ярусе, а отвод энергии - в нулевом.

В стационарном режиме измерялись интегральные и локальные характеристики полей завихренности и скорости. На рис.6.9 показаны осредненные по времени распределения энергии и энтропии по ярусам. Наклон графика энергии в инерционном интервале соответствует спектральному закону $E(k) \sim k^{-3.3 \pm 0.05}$. Преимущество иерархической модели состоит в том, что она позволяет непосредственно пронаблюдать локальные вариации наклона спектрального закона для плотности энергии. Действительно, локальный наклон спектра может быть определен по отношению энергии пары вертикальных соседей в иерархическом дереве. Рис.6.10 показывает гистограмму таких локальных наклонов (точнее, на графике показан логарифм отношения энергий последовательной пары вихрей в дереве). Разными значками обозначены данные, относящиеся к различным ярусам. Локальные значения наклона спектра лежат в широком интервале значений, непосредственно подтверждая концепцию мультифрактальной структуры турбулентного потока.

В пределах инерционного интервала точки, относящиеся к различным ярусам, ложатся на гистограммах на одну кривую линию, однако, бо-

лее тщательное исследование свойств распределения вероятности показывает систематическое изменение ее структуры по мере уменьшения масштабов. В качестве меры отличия распределения вероятности от нормального часто используют коэффициент эксцесса, определяемый в нашем случае для каждого яруса, как

$$\gamma_N = \frac{\langle (A_{Nn}^2)^4 \rangle}{(\langle (A_{Nn}^2)^2 \rangle)^2} - 3. \quad (6.44)$$

На рис.6.11 показано изменение во времени коэффициентов эксцесса, вычисляемых для шестого и восьмого ярусов (оба внутри инерционного интервала). Глядя на рисунок, можно сделать два важных вывода. Во-первых, графики свидетельствуют о сильной временной перемежаемости - в отдельные моменты времени эксцесс растет до значений, равных нескольким сотням. Во-вторых, можно видеть, что коэффициент эксцесса восьмого яруса систематически превышает коэффициент шестого яруса. Этот факт подтверждает и рис.6.12, на котором показаны средние по времени значения логарифма коэффициентов (6.44) для всех ярусов (точки 1). Виден монотонный рост эксцесса с ростом номера яруса. Это означает, что чем меньше масштаб, тем большие выбросы возникают в функциях распределения вероятности (на гистограммах эти выбросы практически не

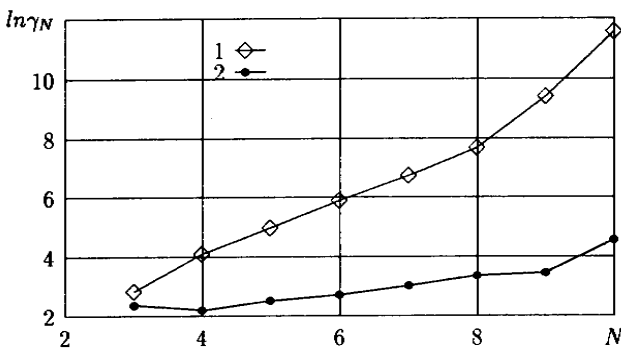


Рис.6.12

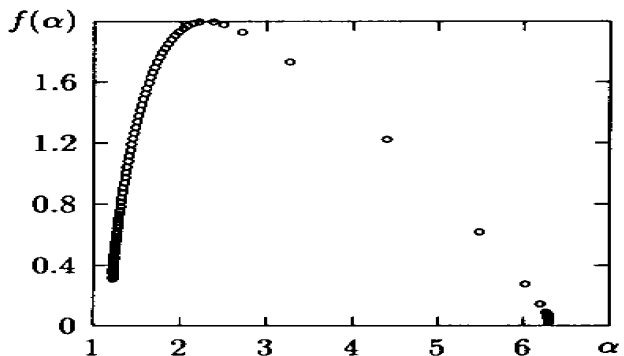


Рис.6.13

видны, так как сливаются с осью абсцисс). На этом же рисунке для сравнения приведены коэффициенты эксцесса, полученные в каскадной модели двумерной турбулентности. Об этих моделях речь пойдет в последней главе и там мы вернемся к обсуждению этого графика.

Последний рис.6.13 показывает результаты непосредственного вычисления фрактального спектра $f(\alpha)$ по алгоритму, описанному в параграфе 4.5.3. График подтверждает выводы, сформулированные при обсуждении мультифрактальных моделей, а именно тот факт, что, являясь по сути моделью с бесконечным числом параметров, такая модель описывает любой спектр. Вид функции $f(\alpha)$ всегда одинаков. Интерес в ней представляют лишь несколько точек, например вершина, абсцисса которой соответствует среднему наклону спектра.

Сравнение результатов, получаемых при решении иерархических уравнений, с результатами прямого численного моделирования двумерной турбулентности показывает, что модель не воспроизводит характерных для двумерной турбулентности когерентных вихрей и связанного с ними крутого участка спектра. Причиной тому служит отсутствие в модели взаимодействий между вихрями-соседями (нет горизонтальных связей в иерархическом дереве рис.6.7.). Модель теряет, таким образом, черты турбулентности, связанные с процессами самоорганизации в физическом пространстве. В то же время она наглядно иллюстрирует тот факт, что неоднородность каскадного процесса (перемежаемость) возникает и благодаря самим нелинейным взаимодействиям обмена энергии в иерархической структуре.

6.3. Вейвлеты

В самых разных областях науки возникают задачи, связанные с анализом пространственных полей со сложной, многомасштабной структурой либо временных сигналов с меняющимся со временем спектральным составом. Эти задачи заставляли исследователей делать попытки построения специальных функциональных разложений, близких по своей идеологии описанному выше иерархическому базису. Центральной идеей всех этих подходов было использование базиса, каждая функция которого характеризует как определенную пространственную (временную) частоту, так и место ее локализации в физическом пространстве (во времени).

Слово «вейвлет» (английское слово «wavelet» означает маленькую волну или рябь) было введено А.Гроссманном и Ж.Морле в 1984 году в работе¹³, выполненной в связи с проблемой анализа сейсмических сигналов, в которых требуется выделить и время (положение) всплеска в сигнале и его спектральный состав (масштаб). В этой статье были сформулированы основные определения и доказаны основополагающие теоремы. Работа вызвала огромный интерес и уже к началу 90-х годов вейвлет-анализ превратился в развитую область математической физики, нашедшей широкое применение в задачах анализа временных сигналов, распознавания образов и синтеза изображений, шифровки и дешифровки информации и многих других.

Как уже отмечалось, вейвлеты используются как при анализе временных сигналов, так и при ис-

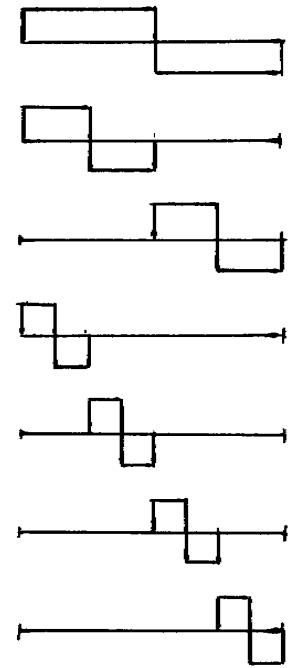


Рис.6.14

¹³ Grossmann A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J.Math.Analysis, 1984. Vol.15. N.4. P.723-736.

следовании структуры пространственных полей. Временные ряды представляют собой одномерный сигнал и все основные идеи проще продемонстрировать на задачах анализа временных последовательностей. По этой причине мы забудем на некоторое время о пространственных полях и переключимся на сигналы вида $f(t)$.

Первая попытка построить функциональный базис, состоящий из функций, каждая из которых характеризует пульсации определенной продолжительности в определенный момент времени, принадлежит А. Хаару (1909г.). Первые семь функций Хаара, построенные на единичном отрезке, показаны на рис.6.14. Каждая функция представляет собой пару следующих друг за другом прямоугольных импульсов с разными знаками и одинаковой длительностью. Среднее значение любой функции равно нулю, а совокупность функций образует полный ортонормированный базис. Каждая функция строго локализована в физическом пространстве (во времени), но характеризуется медленно спадающим спектром частот (как $1/\nu$).

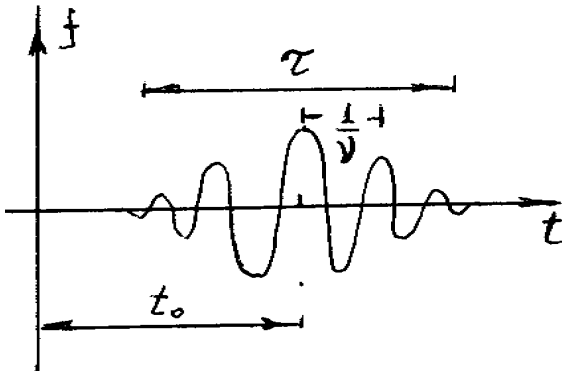


Рис..6.15

Следующим шагом стали функции Литлвуда - Пелли (1937г.). Именно это семейство функций получается при построении одномерного иерархического базиса. Функции строятся путем вырезания полосы частот в пространстве Фурье. Это дает строгую локализацию в пространстве частот, но медленное затухание функции в физическом пространстве (во времени): функции описывают осцилляции, амплитуда которых падает как $1/t$.

Важным этапом в развитии идеи локального анализа спектральных (частотных) свойств стало преобразование Габора (1946г.), называемое также фурье-преобразованием в окнах. Функции Габора представляют собой гармонический сигнал, модулированный функцией Гаусса. Они хорошо локализованы и во времени и в частотах, но каждая функция Габора характеризуется тремя параметрами: положением центра окна t_0 , шириной окна τ и частотой осцилляций ν (рис.6.15). При этом функции различного масштаба не являются подобными (имеют различное число осцилляций).

Вейвлеты объединили в себе два важных свойства - подобие и выраженную локализованность в физическом и фурье-пространствах. Сформулируем требования, которым должно удовлетворять семейство функций, чтобы быть вейвлетами.

1) Допустимость. Функция $\psi(t)$, которую будем называть анализирующим вейвлетом (употребляют также термин материнский вейвлет), должна иметь нулевое среднее значение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (6.45)$$

Это условие может быть сформулировано и более строго. Говорят, что $\psi(t)$ есть вейвлет порядка M , если для всех $m \leq M$ выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0, \quad (6.46)$$

требующее равенства нулю M первых моментов вейвлета.

2) Подобие. Все функции семейства получаются из анализирующего вейвлета путем масштабного преобразования и сдвига,

$$\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (6.47)$$

Таким образом, вейвлеты образуют двухпараметрическое семейство функций, в котором параметр a отвечает за масштаб (растяжение) функции, а параметр b - за ее положение (сдвиг).

3) Обратимость. Вейвлет-преобразование должно быть обратимо, то есть должно существовать обратное преобразование, однозначно восстанавливающее исходную функцию по ее вейвлет-представлению.

4) Регулярность. Функция $\psi(t)$ должна быть хорошо локализована и в физическом пространстве и в пространстве Фурье.

Согласно последнему требованию и функции Хаара и функции Литлвуда - Пелли не попадают под определение вейвлетов. По сути, они являются собой два предельных случая (в одном случае резкие границы в физическом пространстве приводят к бесконечным в принципе хвостам в пространстве частот и, наоборот, обрыв в пространстве частот дает длинные хвосты в физическом пространстве в другом).

В отличие от преобразования Фурье, вейвлет-преобразование допускает широкий выбор анализирующей функции. Согласно первому требованию, вейвлет всегда является знакопеременной функцией, включающей обычно небольшое количество осцилляций. Выбор конкретного вида вейв-

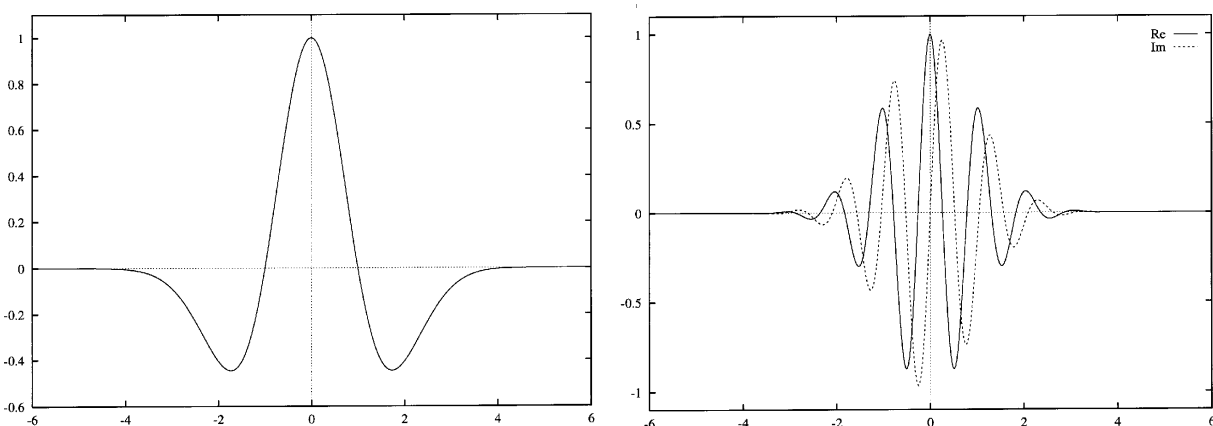


Рис.6.16

лета зависит от целей проводимого анализа.

Приведем несколько примеров широко используемых вейвлетов. Простым вещественным вейвлетом, широко используемым в задачах, требующих хорошего пространственного разрешения и не требовательных к спектральному разрешению, является вейвлет, получивший название «мексиканская шляпа» (рис.6.16,а),

$$\psi(t) = (1-t^2)e^{-t^2/2}. \quad (6.48)$$

В задачах, требующих лучшего спектрального разрешения, часто используется вейвлет Морле - комплексная функция вида

$$\psi(t) = e^{-t^2/2} e^{i\omega_0 t}. \quad (6.49)$$

На рис.6.16,б сплошной линией показана его вещественная часть, а пунктирной - мнимая. Сама функция (6.49) совпадает с видом функций, используемых в преобразовании Габора, но семейство вейвлетов отличается от функций Габора тем, что один раз выбрав частоту ω_0 для анализирующего вейвлета и задав тем самым число осцилляций, мы в дальнейшем сжимаем или растягиваем функцию как целое, не нарушая подобия отдельных функций семейства.

6.4. Непрерывное вейвлет-преобразование

Непрерывное вейвлет-преобразование одномерной функции $f(t)$ есть

$$w(a,b) = a^\kappa \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (6.50)$$

где $\psi(t)$ - вещественная или комплексная функция, удовлетворяющая требованиям 1-4 раздела 6.4. Если $\widehat{\psi}(\omega) = \int \psi(t) e^{-i\omega t} dt$ есть фурье-образ анализирующего вейвлета и выполнено условие

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (6.51)$$

то для преобразования (6.50) существует формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) w(a,b) \frac{dad b}{a^{3+\kappa}}. \quad (6.52)$$

Условие (6.51) эквивалентно условию (6.45), так как интеграл (6.51) расходится при наличии в спектре вейвлета нулевых частот, что равносильно отличному от нуля среднему значению. В определении (6.50) присутствует параметр κ - показатель степени масштабного множителя. Конкретный выбор этого параметра зависит от целей анализа. Широко используется нормировка $\kappa = -1$, при которой равные значения вейвлет-коэффициентов $w(a,b)$ соответствуют равным амплитудам пульсаций сигнала, независимо от масштаба пульсаций.

Вейвлет-образ $w(a,b)$ функции $f(t)$ можно выразить и через ее фурье-образ $\hat{f}(\omega)$. Действительно,

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{C_\Psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \hat{\Psi}(a\omega) w(a,b) e^{-i\omega b} \frac{dadb}{a^{2+\kappa}}, \quad (6.53)$$

а

$$w(a,b) = \frac{a^{\kappa+1}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \hat{\Psi}^*(a\omega) \hat{f}(\omega) e^{i\omega b} d\omega. \quad (6.54)$$

Пользуясь соотношениями (6.53)-(6.54) и теоремой Парсеваля (2.26) несложно получить аналог этой теоремы для вейвлет-преобразования

$$\int_{-\infty}^\infty f_1(t) f_2^*(t) dt = \frac{1}{C_\Psi^2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty w_1(a,b) w_2^*(a,b) \frac{dadb}{a^{3+2\kappa}}, \quad (6.55)$$

из которого, в частности, следует

$$\int_{-\infty}^\infty |f(t)|^2 dt = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{C_\Psi^2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |w(a,b)|^2 \frac{dadb}{a^{3+2\kappa}}. \quad (6.56)$$

Напомним, что в фурье-анализе спектральной плотностью энергии является величина $E(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$ (называемая также спектром энергии) и введем величину

$$M(a) = \int_{-\infty}^\infty |w(a,b)|^2 db, \quad (6.57)$$

которая характеризует интенсивность всех пульсаций заданного масштаба. Если в определении вейвлет-преобразования положить $\kappa = -1/2$, то формулу (6.56) можно переписать в виде

$$E = \int_0^{\infty} E(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} M(a) \frac{da}{a^2}. \quad (6.58)$$

В этом случае $M(a)$ описывает распределение энергии пульсаций по мас-

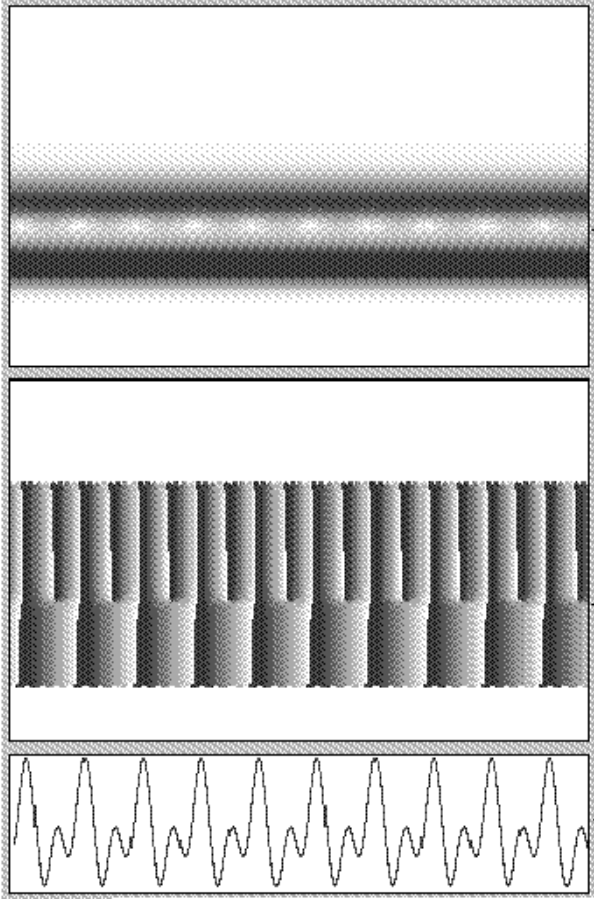


Рис.6.17

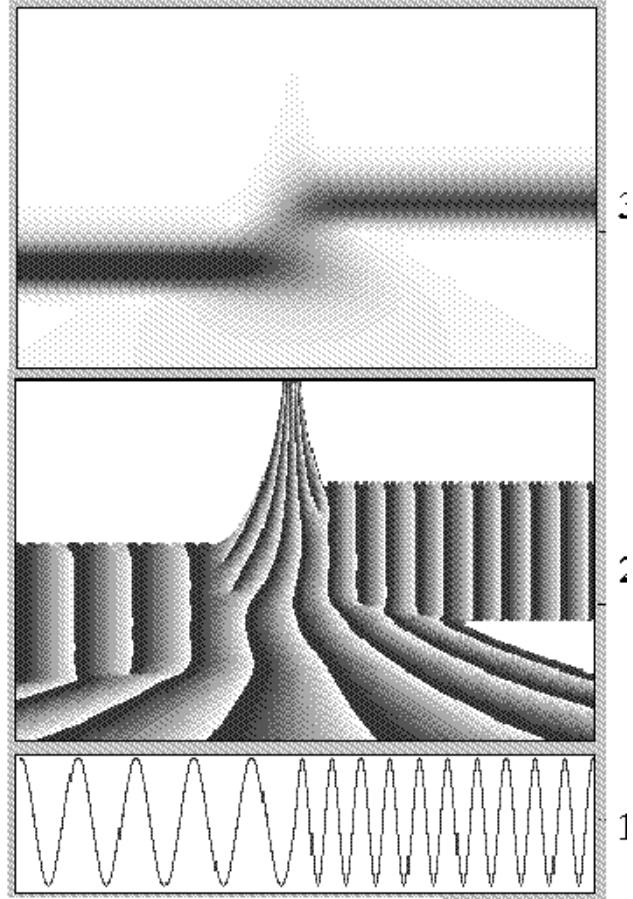


Рис.6.18

штабам и называется интегральным вейвлет-спектром. Из сказанного следует, что нормировка $\kappa = -1/2$ должна использоваться, если результаты вейвлет-анализа предполагается сопоставлять с фурье-представлением сигнала. Действительно, если фурье-спектр следует степенному закону $E(\omega) \sim \omega^\alpha$, то при этой нормировке интегральный вейвлет-спектр будет иметь тот же степенной закон $M(a) \sim a^{-\alpha} \sim \omega^\alpha$ (это следует из формулы (6.58) с учетом того, что $\omega \sim 1/a$, а $d\omega \sim -da/a^2$).

Вейвлет-преобразование отображает пространство функций одной переменной (время) в пространство функций двух переменных (время и частота, или время и масштаб) и является избыточным. Избыточность непрерывного вейвлет-преобразования выражается в коррелированности вейвлет-коэффициентов, которая тем больше, чем больше рассматриваемый масштаб a . Иначе говоря, чем больше масштаб, тем меньше независимых точек в вейвлет-разложении. Этот недостаток устраняется в дискретном вейвлет-представлении (пример тому - рассмотренный выше ие-

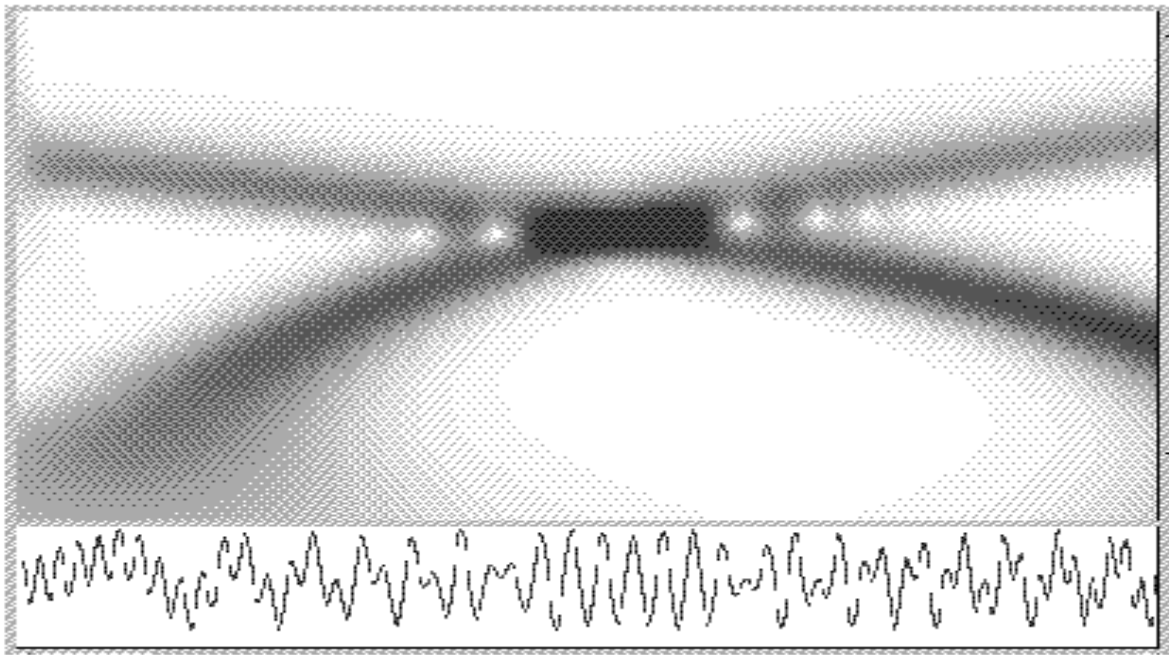


Рис.6.19

рархический базис, в котором число функций геометрически уменьшается с ростом пространственного масштаба).

Преимущество вейвлет-преобразования перед преобразованием Фурье состоит в том, что оно позволяет проследить за изменением спектральных свойств сигнала со временем, указать, какие частоты (масштабы) доминируют в сигнале в каждый конкретный момент времени. На рис.6.17 и 6.18 показаны два примера вейвлет-разложения простых временных сигналов с помощью вейвлета Морле (6.49). В верхней части каждого рисунка показан модуль вейвлет-разложения на плоскости (a,b) , а в нижней - фаза. На рис.6.17 сигнал представляет собой суперпозицию двух гармоник, а в сигнале на рис.6.18 эти же две частоты появляются последовательно друг за другом. Фурье-преобразования этих двух сигналов практически не отличаются друг от друга, так как спектр Фурье теряет всякую информацию о том, когда какая гармоника присутствовала в сигнале. Вейвлет-анализ позволяет восстановить полную эволюцию спектрального состава сигнала во времени. Общее представление о спектрально-временной структуре сигнала можно получить по распределению модуля вейвлет-преобразования. Ширина полосы, получаемой при разложении гармонического сигнала, характеризует спектральное разрешение используемого анализирующего вейвлета. Распределение фазы вейвлет-преобразование менее информативно, особенно для сложных сигналов. В то же самое время, именно фаза дает наиболее точную информацию об особенностях (сингулярностях) в сигнале. Так на рис.6.18 можно видеть, что именно по распределению фазы можно с большой точностью идентифицировать момент смены частоты.

На рис.6.19 показан результат вейвлет-разложения сигнала, представляющего собой суперпозицию двух гармонических составляющих с непрерывно меняющимися частотами (снова использован вейвлет Морле). Сам сигнал показан в нижней части рисунка, модуль вейвлет-разложения - в верхней части. Вейвлет-представление позволяет получить точный вид эволюции частоты каждого из двух сигналов.

На рис.6.20 дан пример использования действительного вейвлета типа (6.48). В качестве сигнала использован тот же временной ряд, что и в примере на рис.6.18 (удвоение частоты гармонических колебаний). В этом

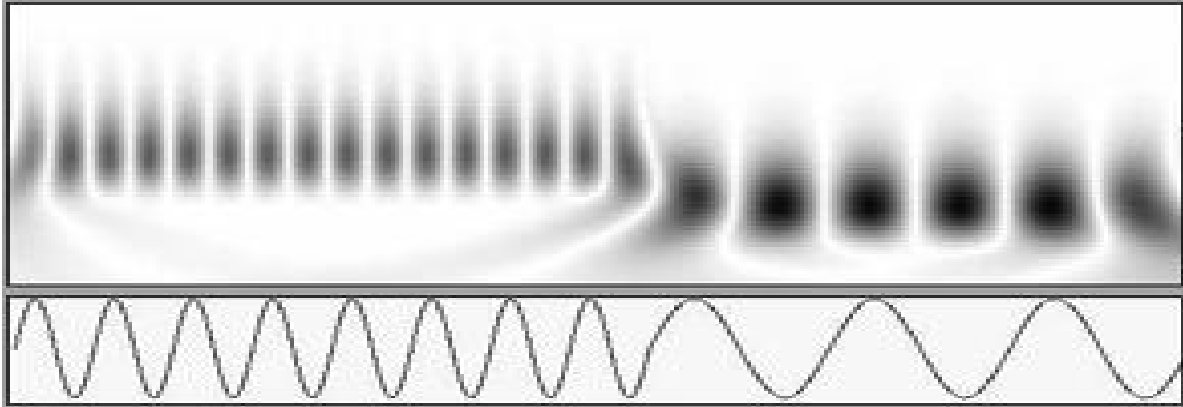


Рис.6.20

случае результатом преобразования является действительная величина, модуль которой показан на рисунке. Белые полосы на вейвлет-плоскости, неизбежно появляющиеся при работе с вещественными функциями, соответствуют смене знака вейвлет-коэффициентов и содержат, по сути, информацию, которую в комплексном представлении несет фаза.

В заключение отметим важное свойство вейвлет-представления функций, состоящее в том, что на этапе разложения сигнала по вейвлетам (анализа) и этапе восстановления исходного сигнала по его вейвлет-образу (синтеза) можно использовать различные семейства вейвлетов. Пусть для анализа используется вейвлет $\psi(t)$, а для синтеза - вейвлет $\varphi(t)$. Тогда прямое преобразование по-прежнему описывается выражением (6.50), а формула восстановления сигнала (6.52) примет вид

$$f(t) = \frac{1}{C_{\varphi\psi}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) w(a,b) \frac{dadb}{a^{3+\kappa}}. \quad (6.59)$$

Восстановление (6.59) возможно, если выполнено условие

$$C_{\varphi\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega) \widehat{\varphi}^*(\omega)|}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

Это условие мягче, чем условие (6.51), так как теперь один из двух вейвлетов может и не удовлетворять требованию (6.51) (но, при условии, что его «недостатки» компенсирует вейвлет, используемый на втором этапе). Пре-

имущество восстановления по формуле (6.59) состоит в том, что она позволяет использовать на одном из этапов преобразования сингулярную функцию (например, δ -функцию), которая сама по себе не попадает под определение вейвлета.

6.5. Дискретное вейвлет-преобразование

Наряду с непрерывным вейвлет-преобразованием можно рассмотреть разложение по конечному набору вейвлет-функций, заданных на некоторой сетке и получаемых определенным масштабным преобразованием. Если ограничиться логарифмическим масштабированием и равномерной для заданного масштаба пространственной сеткой, то одномерную базисную функцию можно записать в виде

$$\Psi_{Mm} = \Psi\left(\frac{x - mba^M}{a^M}\right),$$

для которого доказана возможность получения полного ортогонального функционального базиса. Последнее возможно не при любом выборе значений величин a и b . Наиболее естественным представляется принятое и в иерархических моделях разбиение спектрального пространства на октавы, что соответствует случаю $a = 2$.

Для одномерной функции $f(x)$ соответствующее разложение в ряд выглядит как

$$f(x) = \sum_{M=\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{Mm} \Psi_M(x - m \cdot 2^M), \quad (6.60)$$

где

$$\Psi_M(x) = 2^{-\frac{M}{2}} \Psi\left(\frac{x}{2^M}\right).$$

Здесь и далее в данном параграфе принята нормировка $\kappa = -1/2$ и для удобства записи эта нормировка включена в определение вейвлета.

Задача о выборе функции $\psi(x)$, обеспечивающей ортогональность разложения (6.60), т.е. соблюдение условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_M(x - m \cdot 2^M) \Psi_N(x - n \cdot 2^N) dx = \delta_{NM} \delta_{mm} \quad (6.61)$$

далеко не тривиальна и была решена лишь недавно (И.Мейер, 1986; И.Добеши, 1988). Условиям (6.59)-(6.61) соответствуют, правда, и давно

известные функции Хаара, не удовлетворительные, как отмечалось выше, с точки зрения локализации в фурье-пространстве. Примером гладких функций, образующих ортонормированный базис, является вейвлет, обозначаемый по фамилиям авторов аббревиатурой LMB (Lemarie, Meyer, Battle). Графики функции LMB и ее фурье-образа приведены на рис.6.21. Функция LMB убывает экспоненциально в физическом пространстве и по k^{-4} закону - в пространстве Фурье.

Дискретное преобразование вводится для функции $f(x)$, заданной на равномерной сетке $x_i = i\Delta x$, где Δx - шаг сетки. Обозначая $f_i = f(x_i)$ и считая $\Delta x = 1$, запишем вместо (6.60)

$$f_i = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{Mm} \psi_M(i - m \cdot 2^M), \quad (6.62)$$

где коэффициенты w_{Mm} определяются как

$$w_{Mm} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i \psi_M(i - m \cdot 2^M),$$

а условие сохранения энергии принимает вид

$$\sum_{M=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{Mm}^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i^2.$$

Функция $\psi_M(i)$, являющаяся дискретным аналогом функции $\psi(x)$, должна вместо (6.61) удовлетворять условию

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_M(i - m \cdot 2^M) \psi_N(i - n \cdot 2^N) = \delta_{NM} \delta_{mn}. \quad (6.63)$$

Переход от функции $\psi_M(x)$ к ее дискретной версии $\psi_M(i)$ требует дополнительных пояснений, связанных с тем, что выборка f_i производится не с по-

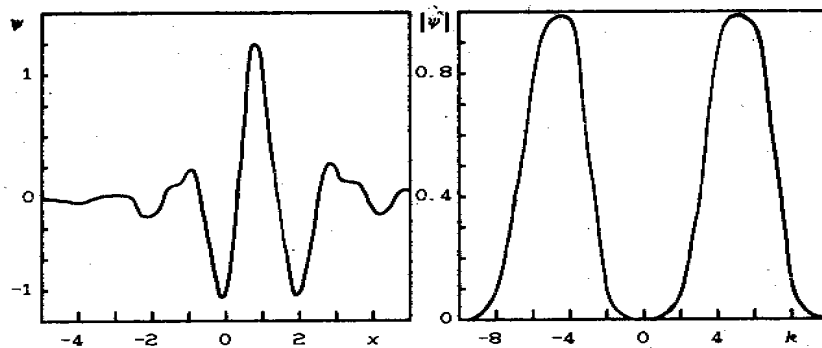


Рис.6.21

мощью δ -функций, а с помощью некоторой сглаживающей функции $\phi(x)$.

Более подробно процедуру построения дискретного вейвлет-преобразования рассмотрим на примере алгоритма Малла с переменным разрешением (multiresolution wavelet algorithm), который последовательно вычисляет коэффициенты разложения, переходя от меньших масштабов к большим.

Пусть исходная функция $f(x)$ принадлежит пространству интегрируемых в квадрате функций $L^2(R)$. Обозначим подпространство функций, аппроксимирующих $L^2(R)$ с разрешением $a_M = 2^M$ как V_M . При этом $V_{M+1} \subset V_M$.

Построение начинается с разрешения $a_0 = 1$ ($M = 0$). Отметим, что в отличие от иерархических моделей здесь увеличению индекса M соответствует переход к большим масштабам (более грубому разрешению). Обозначаем за f^M соответствующую аппроксимацию функции f . На практике функция f^0 с точностью до заданной погрешности совпадает с f и служит исходной для начала вычислений.

Предполагаем наличие базисных функций $\phi^0(x-i)$, которые только путем сдвига вдоль оси создают полный ортонормированный базис в пространстве V_0

$$f^0(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i^0 \phi^0(x-i), \quad (6.64)$$

где s_i^0 - коэффициенты разложения

$$s_i^0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^0(x) \phi^0(x-i) dx. \quad (6.65)$$

$\phi(x)$ - быстро убывающая функция, что позволяет интерпретировать коэффициенты s_i^0 как дискретную выборку функции f^0 с разрешением на сетке с шагом $a = 1$. Условие ортогональности есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^0(x-i) \phi^0(x-j) dx = \delta_{ij}. \quad (6.66)$$

При переходе к более грубому разрешению $a_M = 2^M$ используется пространство V_M , описываемое базисом ϕ_M , функции которого получаются растяжением исходной функции ϕ_0

$$\phi^M(x) = 2^{-\frac{M}{2}} \phi^0(2^{-M} x). \quad (6.67)$$

Дискретная выборка функции $f^0(x)$ с разрешением $a_M = 2^M$ есть набор коэффициентов s_i^M

$$s_i^M = \int_{-\infty}^{\infty} f^0(x) \phi^M(x - 2^M i) dx. \quad (6.68)$$

Поскольку $V_{M+1} \subset V_M$, то базисные функции масштаба $M+1$ можно выразить через базис масштаба M :

$$\phi^{M+1}(x-2^{M+1}i) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi^{M+1}(x'-2^{M+1}i) \phi^M(x'-2^M j) dx' \right] \phi^M(x-2^M j) \quad (6.69)$$

или

$$\phi^{M+1}(x-2^{M+1}i) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{j-2i} \phi^M(x-2^M j), \quad (6.70)$$

где

$$h_k = 2^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^0\left(\frac{x'}{2}\right) \phi^0(x'-k) dx'. \quad (6.71)$$

Из (6.69)-(6.70) следует, что коэффициенты s^{M+1} можно определить, используя только коэффициенты s^M :

$$s_i^{M+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{j-2i} s_j^M. \quad (6.72)$$

Переход от s^M к s^{M+1} соответствует очередному огрублению исходных данных путем их выборки из последовательности s^M с весовой функцией h . С увеличением числа точек количество операций растет только геометрически и (6.71)-(6.72) может служить основой быстрого вейвлет-преобразования (БПВ, по аналогии с быстрым преобразованием Фурье - БПФ).

Очевидно, что функции ϕ^{M+1} не могут быть ортогональными функциям ϕ^M , так как образуемое ими пространство V_{M+1} содержится в пространстве V_M . Основная идея алгоритма БПВ состоит в построении вейвлет-базиса путем использования разности информации, содержащейся в различных масштабах. Соответствующее пространство обозначается как O_{M+1} . O_{M+1} ортогонально V_{M+1} ($O_{M+1} \perp V_{M+1}$), а O_{M+1} и V_{M+1} составляют V_M ($O_{M+1} \oplus V_{M+1} = V_M$). Вейвлет $\psi^{M+1}(x-2^{M+1}i)$ определяется как базисная функция для пространства O_{M+1} . При этом остается справедливым соотношение типа (6.67):

$$\psi^M(x) = 2^{-\frac{M}{2}} \psi^0(2^{-M}x), \quad (6.73)$$

предполагающее, что совокупность функций ψ^{M+1} образует ортонормальный базис в O_{M+1} . Тогда совокупность всех ψ^M ($M = 0, 1, 2, \dots$) образует полный ортогональный базис для V_0 .

Коэффициенты вейвлет-разложения есть

$$w_i^M = \int_{-\infty}^{\infty} f^0(x) \psi^M(x-2^M m) dx, \quad (6.74)$$

а так как функции ψ^{M+1} относятся к пространству O_{M+1} , а $O_{M+1} \subset V_M$, то

$$\psi^{M+1}(x - 2^{M+1}i) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{M+1}(x' - 2^{M+1}i) \phi^M(x' - 2^M j) dx' \right] \phi^M(x - 2^M j), \quad (6.75)$$

что приводит к формуле

$$w_i^{M+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_{j-2i} s_j^M, \quad (6.76)$$

где

$$g_k = 2^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^0\left(\frac{x'}{2}\right) \phi^0(x' - k) dx'. \quad (6.77)$$

Видно, что для определения коэффициентов вейвлет-представления данного масштаба требуются не исходные данные, а только результаты, полученные для предыдущего масштаба.

При восстановлении функции f процесс идет от крупных масштабов к мелким и на каждом шаге

$$s_i^M = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [h_{i-2j} s_j^{M+1} + g_{i-2j} w_j^{M+1}]. \quad (6.78)$$

Следует указать также связь между коэффициентами g_k , h_k и дискретной формой вейвлет-функции $\psi^M(k)$. Так как

$$w_i^{M+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_{j-2i} s_j^M = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{j-2i} h_{k-2j} s_k^{M-1} = \dots$$

то, в конечном итоге,

$$w_i^{M+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi^M(j - 2^M i) s_j^0, \quad (6.79)$$

где

$$\psi^M(j - 2^M i) = \sum_{j^{(M-1)}} h_{j^{(M-1)} - 2^{M-1}i} \sum_{j^{(M-2)}} \dots \sum_{j^{(1)}} h_{j^{(2)} - 2^{j^{(1)}}} g_{j^{(1)} - 2i}.$$

Остановимся теперь на вопросе о выборе конкретных функций ψ и ϕ .

Выше для них были сформулированы следующие требования:

1) все вейвлет-функции ортонормальны

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_M(x - m \cdot 2^M) \psi_N(x - n \cdot 2^N) dx = \delta_{NM} \delta_{nm}, \quad (6.80)$$

2) сглаживающие функции $\phi^M(x - 2^M i)$ ортонормальны для заданного значения M

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^M(x-2^M i) \phi^M(x-2^M j) dx = \delta_{ij}, \quad (6.81)$$

3) вейвлет-функции ортогональны сглаживающим функциям того же масштаба

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^M(x-2^M i) \psi^M(x-2^M j) dx = \delta_{ij}. \quad (6.82)$$

Приведем примеры ортогональных вейвлетов и соответствующих им дискретных фильтров h_i, g_i .

а) Простейшей ортогональной системой является, как уже отмечалось, система функций Хаара. Для нее

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq x < 0.5 \\ -1 & \text{if } 0.5 \leq x < 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

а сглаживающая функция ϕ

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Дискретные фильтры для БПВ получаются из (6.71) и (6.77) и, соответственно, равны

$$h_0 = h_1 = g_0 = 2^{-1/2}, \quad g_1 = -g_0. \quad (6.83)$$

б) Другой предельный случай - одномерные иерархические функции (они же функции Литлвуда-Пелли) для которых доказывается полнота и ортогональность. Их же называют иногда полосовыми фильтрами и, в последнее время, фурьелетами. Так как они вырезают определенную полосу в пространстве Фурье, то удобнее и действия проводить в пространстве частот, а вместо h и g пользоваться их фурье-образами \hat{h} и \hat{g} .

$$\hat{h}(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j e^{-ijk}, \quad \hat{g}(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j e^{-ijk}.$$

Для них

$$\hat{h}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } -\frac{\pi}{2} \leq k < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\hat{g}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{ijk} & \text{if } \frac{\pi}{2} \leq |k| < \pi \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (6.84)$$

Не трудно получить и соответствующие дискретные фильтры в физическом пространстве

$$\begin{aligned}
 h_j &= \frac{\sqrt{2}}{\pi j} \sin\left(\frac{\pi j}{2}\right), \\
 g_j &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi(-1)^j} \sin\left(\frac{\pi(j-1)}{4}\right) \cos\left(\frac{3\pi(j-1)}{4}\right).
 \end{aligned} \tag{6.85}$$

Существенная нелокальность базисных функций в физическом пространстве делает более практичной реализацию быстрого алгоритма для фурье-образа исходного сигнала.

в) Вейвлет LMB. В фурье пространстве

$$\begin{aligned}
 \hat{\psi}(k) &= e^{\frac{ik}{2}} k^{-n} \left[\Gamma_{2n}\left(\frac{k}{2+\pi}\right) \Gamma_{2n}^{-1}(k) \Gamma_{2n}^{-1}\left(\frac{k}{2}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 \hat{\phi}(k) &= k^{-n} [\Gamma_{2n}(k)]^{\frac{1}{2}} \\
 \hat{h}(k) &= [2^{1-2n} \Gamma_{2n}(k) \Gamma_{2n}^{-1}(2k)]^{\frac{1}{2}} \\
 \hat{g}(k) &= e^{-ik} \hat{h}(k+\pi)^*
 \end{aligned} \tag{6.86}$$

где $\Gamma_n(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (k+2\pi m)^{-n}$.

г) В качестве последнего примера приведем семейство вейвлетов Добеши. Функции Добеши замечательны тем, что определены на конечном интервале, за пределами которого они тождественно равны нулю и, в то же время, функции n раз дифференцируемы. Плата за это - несимметричность функций. Ниже приводятся таблицы значений для 4 и 8 точечных фильтров, соответствующих функциям Добеши первого и третьего порядка (функции Добеши нулевого порядка совпадают с функциями Хаара).

Четырехточечный фильтр Добеши:

$$\begin{aligned}
 h_0 &= (1 + \sqrt{3})(4 \cdot \sqrt{2}) & h_1 &= \frac{(3 + \sqrt{3})}{(4 \cdot \sqrt{2})} \\
 h_2 &= (3 - \sqrt{3})(4 \cdot \sqrt{2}) & h_3 &= \frac{(1 - \sqrt{3})}{(4 \cdot \sqrt{2})} \\
 g_0 &= h_3, \quad g_1 = -h_2, \quad g_2 = h_1, \quad g_3 = -h_0
 \end{aligned} \tag{6.87}$$

Восьмиточечный фильтр Добеши:

$$\begin{aligned}
 h_{-2} &= 0.230377813309 & g_{-2} &= h_5 \\
 h_{-1} &= 0.714846570553 & g_{-1} &= -h_4 \\
 h_0 &= 0.630880767930 & g_0 &= h_3 \\
 h_1 &= -0.27983769417 & g_1 &= -h_2 \\
 h_2 &= -0.187034811719 & g_2 &= h_1 \\
 h_3 &= 0.30841381836 & g_3 &= -h_0 \\
 h_4 &= -0.010597401785 & g_4 &= h_{-1} \\
 h_5 &= -0.010597401785 & g_5 &= -h_{-2}
 \end{aligned}
 \tag{6.88}$$

6.6. Вейвлет-анализ временных колебаний гидродинамических систем

Во второй главе мы подробно рассматривали характер колебаний, возникающих в системах гидродинамического типа в надкритических режимах, то есть при относительно небольшом превышении характеристическим параметром (например, числом Рейля) критического значения. При этом по мере стохастизации течения спектры становятся сплошными, а признаком развитой турбулентности служит развитый инерционный интервал. Однако, это не означает, что в развитых турбулентных течениях отсутствуют выделенные крупномасштабные пульсации. Экспериментальные исследования турбулентной конвекции в замкнутых объемах показывают, что течения на масштабах, сравнимых с размерами самой полости, характеризуются целыми сериями выделенных частот, причем периоды колебаний могут в тысячи раз превышать время оборота жидкости в полости. Эти результаты подтверждаются и наблюдениями за природными системами. Так Солнце, являющее собой крупнейшую из доступных прямому наблюдению конвективных ячеек

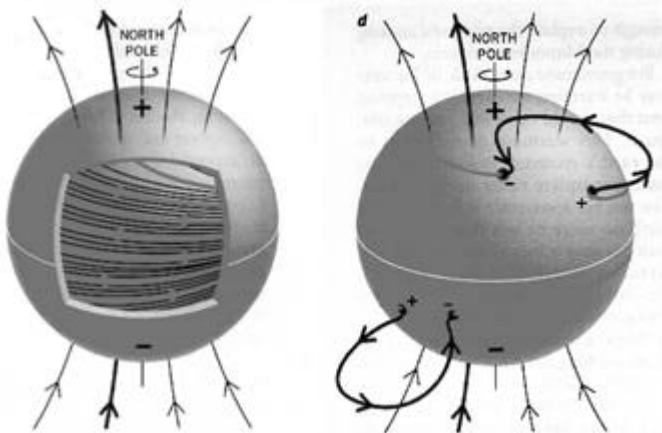


Рис.6.22

(именно конвекция является основным источником движения на Солнце и характеризуется она гигантским значением числа Рейля), демонстрирует целый набор циклов с периодами от нескольких дней до тысяч лет.

В качестве примера приложения вейвлет-анализа к исследованию временной изменчивости сложных гидродинамических систем мы рассмотрим результа-

ты анализа солнечной активности по двум характеристикам: вариациям числа групп солнечных пятен и вариациям солнечного диаметра.

О том, что на Солнце есть пятна, знает каждый школьник. О том, что число этих пятен колеблется и достигает максимума примерно каждые 11 лет, знают почти все. Менее известен факт, что число пятен связано с интенсивностью магнитного поля Солнца. Эту связь поясняет рис.6.22. Магнитное поле Солнца имеет полоидальную компоненту (силовые линии выходят на поверхность вблизи одного полюса и заходят вблизи другого) и более мощную азимутальную - ее силовые линии образуют замкнутые кольца внутри конвективной оболочки Солнца. Когда напряженность магнитного поля растет, то вследствие неустойчивости на этих магнитных линиях возникают гигантские петли, выходящие за пределы конвективной оболочки. В местах выхода магнитное поле направлено вертикально и подавляет конвективное течение, приносящее горячую плазму из недр Солнца. В результате температура оказывается ниже, чем на остальной поверхности, так что эта область видна как темное пятно. Чем сильнее магнитное поле, тем больше петель и тем больше пятен видно на поверхности Солнца.

Связь пятен с магнитными полями стала понятна не так давно, но само существование пятен на Солнце в свое время так взволновало человечество, что астрономы начали вести систематический подсчет этих пятен практически с того момента, как Галилей построил первый телескоп (конечно, иногда солнечные пятна наблюдали невооруженным глазом и раньше). Долговременная запись среднемесячных чисел солнечных пятен начинается с наблюдений Галилея в феврале 1610 года, а с октября 1611 года наблюдения становятся довольно регулярными. Имеющийся на сегодня ряд данных не имеет в астрономии аналогов по регулярности и продолжительности наблюдений.

График изменения числа солнечных пятен уже столетия привлекает внимание ученых, так как доказано, что многие процессы на Земле связаны

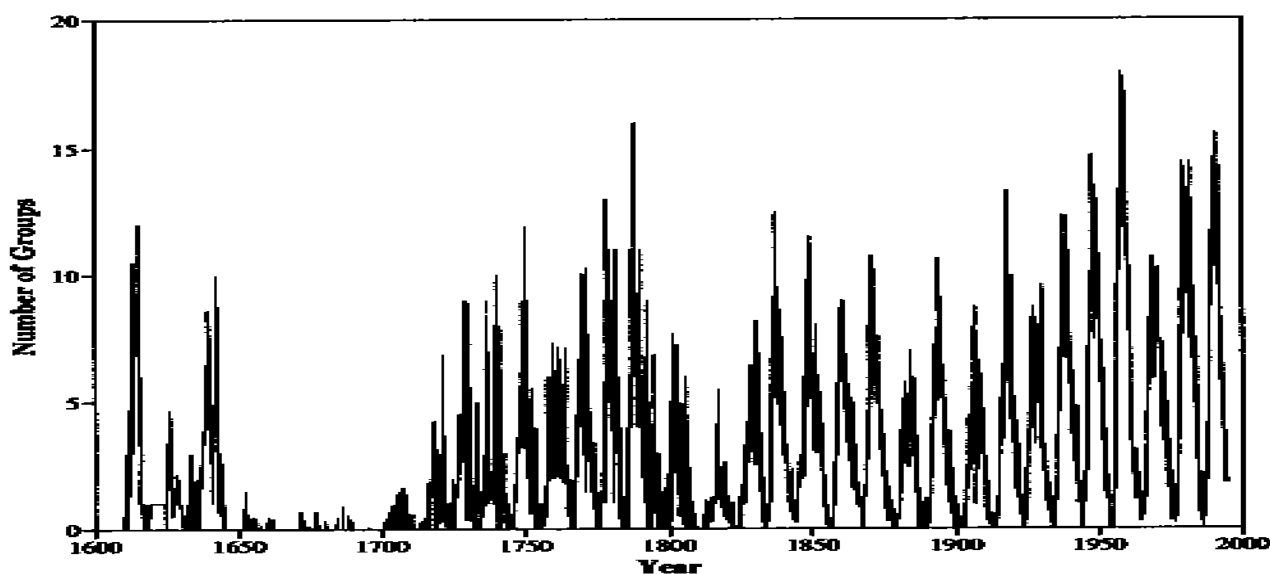


Рис.6.23

с уровнем солнечной активности. Первое, что бросается в глаза при взгляде на график (рис.6.23) солнечной активности - это череда пиков, каждый из которых охватывает приблизительно 11 лет. Это и есть знаменитый одиннадцатилетний солнечный цикл, характеризующий работу солнечного динамо - магнитогиродинамического генератора поля. Можно, однако, заметить, что амплитуда циклов непрерывно изменяется, а временами в работе динамо возникают сбои. Самый заметный сбой имел место в конце 17 - начале 18 веков, когда в течение почти 50 лет пятен на Солнце практически не было. Этот период называют минимумом Маундера. Другое заметное ослабление солнечной активности имело место в начале XIX века и называется минимумом Дальтона.

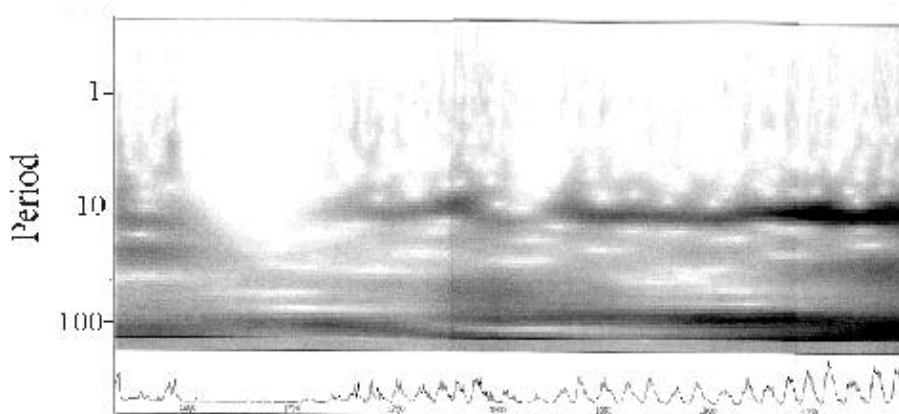


Рис.6.24

Что нового могут дать вейвлеты в изучении записи числа солнечных пятен, если учесть, что сотни людей уже анализировали этот сигнал самыми разными методами? Для ответа на этот вопрос обратимся к результатам работ ¹⁴ и ¹⁵.

Вейвлет-представление проектирует одномерный сигнал (который был функцией только времени) на плоскость время - частота и позволяет увидеть изменение во времени спектральных свойств сигнала. На рис.6.24 показан модуль вейвлет-преобразования данных с рис.6.23, полученного с помощью вейвлета Морле. На вейвлет-плоскости одиннадцатилетнему циклу соответствует темная горизонтальная полоса. При этом напомним, что идеально ровная горизонтальная полоса соответствовала бы устойчивому периодическому колебанию. Мы видим, что кроме основного, одиннадцатилетнего колебания, в исследуемой записи присутствует еще одна - приблизительно 100-летняя периодичность. Особенно хорошо эти периодичности видны на интегральном вейвлет-спектре (кривая *b* на рис.6.25). На этом же рисунке для сравнения показан и спектр Фурье того же сигнала (кривая *a*), в котором одиннадцатилетний цикл выделяется на фоне сплош-

¹⁴ Frick P., Galyagin D., et al. Wavelet analysis of solar activity recorded by sunspot groups // Astronomy and Astrophysics, 1997. Vol.328. P.670-681.

¹⁵ Nemes-Ribes E., Frick P. Et al. Wavelet analysis of Maunder minimum as recorded in Solar diameter data // Comptes Rendues Acad.Sciences Paris, Serie IIb, 1995. V.321. P.525-532.

ного частотокола пиков. По поводу значимости этих пиков велись споры долгие десятилетия. Сравнивая два спектра на рисунке, еще раз вспомним, что вейвлет-спектр является сглаженной версией спектра Фурье и что вейвлет-спектр не дает кратных гармоник при негармоническом характере колебаний.

Вейвлет-анализ позволяет проследить как меняется длительность номинального 11-летнего цикла со временем, показывая, что 100-летний цикл фиксирует периодические попытки механизма генерации солнечного магнитного поля дать сбой и свернуть с обычных 11-летних колебаний в новый эпизод типа минимума Маундера. Удастся получить и неизвестную ранее количественную закономерность в формировании сбоя в работе солнечного динамо. На рис.6.26 приведен график изменения длины солнечного цикла со временем. Этот график получен путем оцифровки максимума в темной полосе, соответствующей на вейвлет-плоскости 11-летнему циклу. На этом рисунке вертикальными линиями отмечены известные наблюдателям периоды снижения солнечной активности. Неожиданный результат состоит в том, что все эти периоды совпадают со спадающими участками на графике $T(t)$. Причем, чем выше было значение T перед началом очередного минимума, тем глубже был сам минимум. Это обстоятельство, совместно с имеющимся на сегодня значением периода солнечного цикла позволяет сделать вывод, что хотя очередной сбой в солнечной активности и можно ожидать в начале следующего столетия, нового минимума Маундера случиться не должно.

На примере анализа солнечной активности покажем эффективность вейвлет-анализа в фильтрации сигналов и совместной обработке сигналов. В эпоху знаменитого минимума Маундера постоянно измерялась еще одна характеристика Солнца - солнечный диаметр. Вариации видимого солнеч-

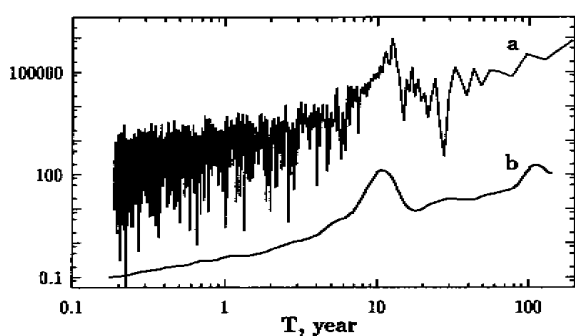


Рис.6.25

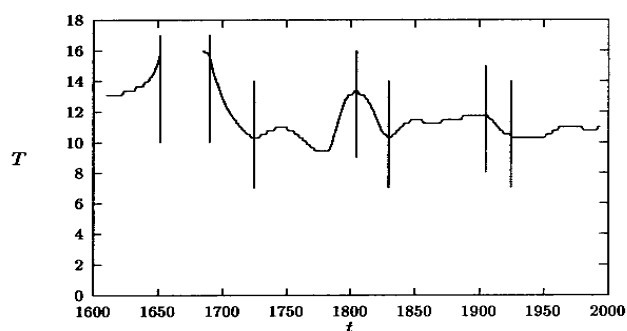


Рис.6.26

ного диаметра непрерывно регистрировались в парижской обсерватории с 1683 по 1718 годы (отдельные серии измерений проводились различными астрономами и ранее). Интерес к систематическим измерениям вариаций солнечного диаметра вновь появился только в наше время и измерения были возобновлены, начиная с 1978г.

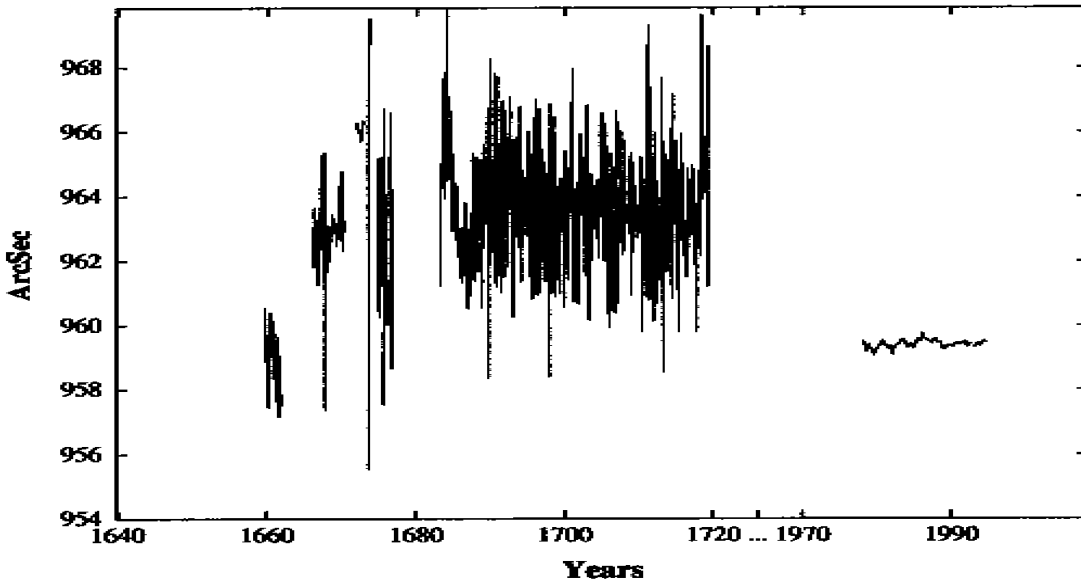


Рис.6.27

Все результаты измерений собраны на рис.6.27. Бросается в глаза существенное отличие современных данных от тех, что были выполнены четыре столетия назад. Напрашивается простое объяснение этому факту, состоящее в том, что качество измерений в то далекое время было существенно ниже, и это обусловило высокий уровень пульсаций сигнала (систематическое отличие в уровне сигнала объясняется тем, что видимый диаметр Солнца - величина субъективная и зависит от способа его определения).

Вейвлеты дают возможность изучить степень коррелированности двух сигналов отдельно на каждом временном масштабе. В сложной системе, каковой является Солнце, вполне возможно представить ситуацию, когда какие-либо два сигнала скоррелированы на одних масштабах и практически независимы на других. Определим корреляционную функцию двух сигналов в виде

$$C(a) = \frac{\int w_1(a,b)w_2^*(a,b)db}{\left(\int w_1^2(a,b)db \int w_2^2(a,b)db\right)^{1/2}}, \quad (6.89)$$

где w_1 и w_2 - вейвлет-образы рассматриваемых сигналов. На рис.6.28 показана корреляционная функция (6.89), вычисленная для вариаций числа групп пятен и вариаций диаметра по перекрываю-

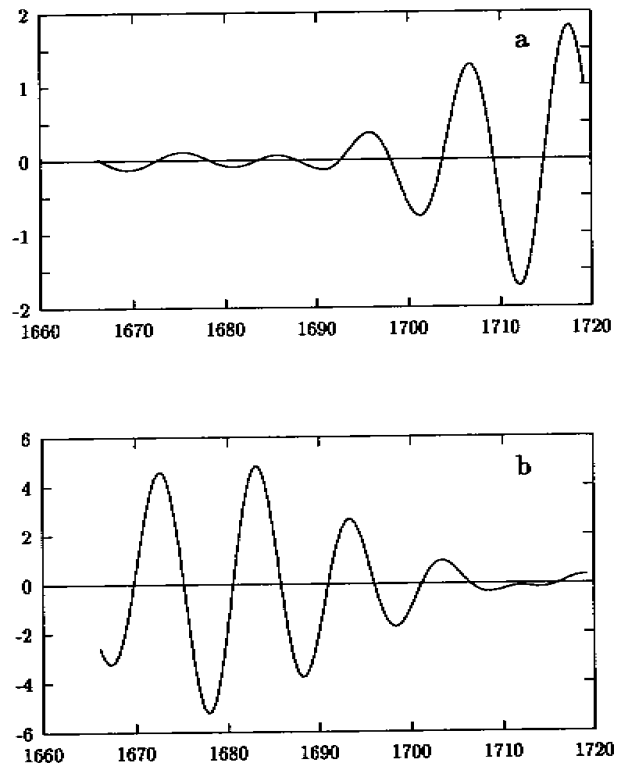


Рис.6.29

щимся интервалам наблюдений. Видно, что на временах порядка 2 лет имеется узкий положительный пик, а на временных масштабах порядка 10 лет и более сигналы становятся строго антикоррелированы (больше пятен - меньше диаметр).

Наибольший интерес представляет частота основного (11-летнего) солнечного цикла. Выделяя из вейвлет-представления соответствующий временной масштаб, построим зависимости от времени вейвлет-коэффициентов $w(a, b)$ для $a = 11$ лет. Графики отфильтрованных 11-летних вариаций диаметра и числа групп пятен для интервала времени 1666-1718 показаны на рис.6.29. Бесспорной научной удачей можно считать тот факт, что

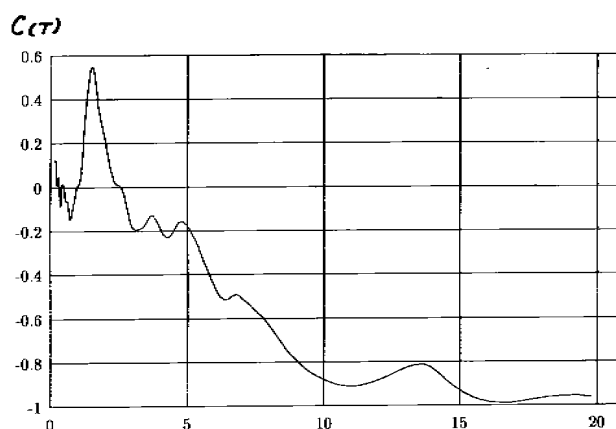


Рис.6.28

наблюдения за изменениями солнечного диаметра начались во время минимума Маундера и продолжались во время выхода из минимума. Результаты вейвлет-фильтрации данных наблюдений, представленные на рисунке дали совершенно неожиданный результат, состоящий в том, что 11-летние вариации солнечного диаметра имели наибольшую амплитуду как раз во время глубокого минимума солнечной активности. По мере выхода из минимума вариации числа пятен начинают нарастать, а вариации диаметра спадать. Этот результат дает возможность объяснить разительное отличие современных данных от данных XVIII века: в сравнении с 1718 годом, когда были прекращены измерения диаметра, среднее количество групп пятен возросло примерно на порядок, а в свете полученной закономерности это должно привести к существенному снижению интенсивности вариаций диаметра - что и подтверждают современные наблюдения.

Полученный результат заставляет пересмотреть сложившийся взгляд на природу солнечного цикла. 11-летний цикл объясняют, исходя из точки зрения, что он является свойством динамо-процессов. Следуя этой точке зрения, нужно признать, что во время остановки динамо должен исчезнуть и этот цикл. Приведенный результат заставляет думать, что природа 11-летнего цикла не связана собственно с динамо-процессом. Механизм его зарождения не ясен, но представляется, что он действует независимо от динамо, модулируя активность последнего. Когда динамо не работает, энергия этого процесса выливается в гидродинамическую моду, приводя к 11-летним вариациям диаметра звезды.

Список рекомендуемой литературы

1. Зимин В.Д., Фрик П.Г. Турбулентная конвекция. М.: Наука, 1988. 178 с.
2. Фрик П.Г. Вейвлет-анализ и иерархические модели турбулентности // ИМСС УрО РАН. Пермь, 1992. 40с.
3. Астафьева Н. М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук, 1996. Т.166. N.11.
4. Holschneider M. Wavelets: An Analysis Tool. Oxford University Press, 1995.

7. КАСКАДНЫЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

7.1. Каскадные модели

Во второй главе мы видели, насколько полезными оказались маломодовые динамические системы для понимания путей перехода от детерминированных движений к хаосу. В этой главе мы познакомимся с простейшими моделями развитой турбулентности, по сути, также представляющими собой динамические системы, но относительно высокой размерности (несколько десятков обыкновенных дифференциальных уравнений).

Отметим, что при построении простых динамических моделей течений (типа модели Лоренца для конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости) все моды описывают структуры близкого масштаба. Основным признаком развитой турбулентности является наличие широкого диапазона возбужденных масштабов и соответствующего ему большого числа степеней свободы. Спрашивается, можно ли построить маломодовую модель развитой турбулентности, которая не ограничивается рассмотрением крупномасштабного потока (как полуэмпирические модели), а описывает каскадные процессы переноса энергии по спектру от интегрального масштаба до диссипативного.

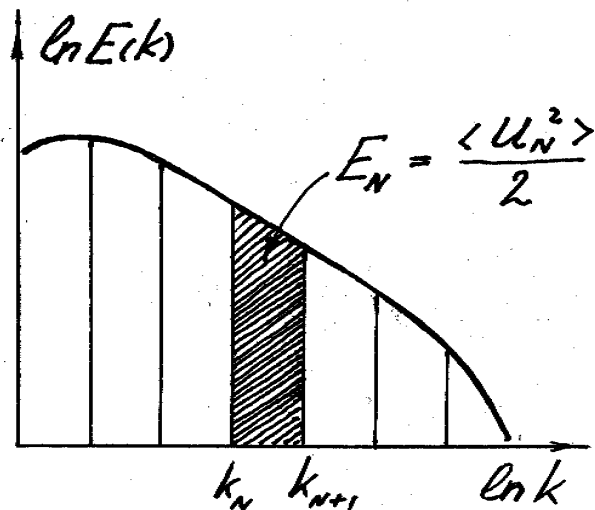


Рис.7.1

Идея моделей этого типа, получивших название «каскадных моделей» (в последнее время стало употребляться и пришедшее с запада название «оболочечные модели» - перевод английского термина «shell models»), состоит в рассмотрении цепочки переменных, каждая из которых описывает пульсации поля скорости определенного масштаба.

Для реализации этой цели ось волновых чисел разбивается на прогрессивно расширяющиеся зоны

$$k_n < \bar{k} < k_{n+1}, \quad k_n = q^n k_0 \quad (7.1)$$

(этот шаг повторяет идеологию построения иерархических моделей). Далее, для каждой зоны вводится одна (действительная или комплексная) переменная U_n , квадрат которой равен энергии всех пульсаций, заключен-

ных в соответствующей области волнового пространства (рис.7.1). Величину U_n называют иногда коллективной переменной для всех пульсаций, лежащих в выделенном диапазоне волновых чисел.

Для переменных U_n требуется написать уравнения, которые будут моделировать «базовые свойства» уравнений движения жидкости (как правило, речь идет об уравнениях Навье - Стокса для несжимаемой жидкости). Под «базовыми» свойствами понимается, как минимум, выполнение законов сохранения и квадратичная нелинейность уравнений. Общий вид каскадных уравнений можно записать в виде

$$d_t U_n = \sum T_{nml} U_m U_l - K_n U_n + f_n . \quad (7.2)$$

Конкретные модели отличаются, в основном, видом матрицы нелинейных взаимодействий T_{nml} . Параметр q , определяющий ширину отдельной зоны, как правило, выбирают равным двум, что соответствует разбиению пространства волновых векторов на октавы. Диссипативное слагаемое записывается в виде $K_n U_n = k_n^2 U_n$, повторяющем вид диссипативного члена уравнения Навье - Стокса в пространстве Фурье, а переменная f_n описывает действие внешних сил в заданной октаве волновых чисел.

7.2. Модель Новикова - Деснянского

Каскадные модели являются спектральными моделями турбулентности, так как описывают процессы переноса энергии по спектру. Покажем, как получить простую каскадную модель с помощью фурье-представления уравнений Навье - Стокса. Для этого запишем уравнение движения для компонент поля скорости

$$\partial_t v_j = -(v_k \partial_k) v_j - \rho^{-1} \partial_j P + \nu \partial_{kk}^2 v_j , \quad (7.3)$$

а скорость представим в виде ряда Фурье

$$v_j(r) = \sum_{\vec{k}} \hat{v}_j(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} . \quad (7.4)$$

Подставим (7.4) в (7.3)

$$\partial_t \sum_{\vec{p}} \hat{v}_j(\vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{r}} = - \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{q}} \hat{v}_k(\vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{r}} (i q_k) \hat{v}_j(\vec{q}) e^{i\vec{q}\vec{r}} - \rho^{-1} \sum_{\vec{p}} (i p_j) \hat{P}(\vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{r}} - \nu \sum_{\vec{p}} p^2 \hat{v}_j(\vec{p})$$

(здесь \vec{p} и \vec{q} - волновые векторы) и, после умножения уравнения на $e^{-i\vec{k}\vec{r}}$, интегрируем его по $d\vec{r}$. В результате получаем

$$\partial_t \hat{v}_j(\vec{k}) = -i \sum_{\vec{q}} \hat{v}_k(\vec{k} - \vec{q}) q_k \hat{v}_j(\vec{q}) - i \rho^{-1} k_j \hat{P}(\vec{k}) - \nu k^2 \hat{v}_j(\vec{k}).$$

Пользуясь уравнением неразрывности, которое в пространстве Фурье имеет вид

$$k_i v_i = 0, \quad (7.5)$$

исключим из уравнения давление. Для этого умножим уравнение на k_j и после простых преобразований получим

$$\rho^{-1} \hat{P}(\vec{k}) = - \sum_{\vec{q}} \frac{q_k k_l}{k^2} \hat{v}_k(\vec{k} - \vec{q}) \hat{v}_l(\vec{q}).$$

После подстановки получаем

$$\partial_t \hat{v}_j(\vec{k}) = -i \sum_{\vec{q}} \left(\delta_{ij} - \frac{k_l k_j}{k^2} \right) \hat{v}_k(\vec{k} - \vec{q}) q_k \hat{v}_l(\vec{q}) - \nu k^2 \hat{v}_j(\vec{k}). \quad (7.6)$$

Структура нелинейного слагаемого в (7.6) такова, что во взаимодействиях всегда участвуют три моды Фурье $\hat{v}(\vec{k})$, $\hat{v}(\vec{q})$ и $\hat{v}(\vec{k} - \vec{q})$ - это значит, что взаимодействуют три волны, волновые векторы которых образуют треугольник.

Рассмотрим выборку волновых чисел, таких, что $|\vec{k}_n| = k_0 2^n$ и выберем из суммы (7.6) только слагаемые, описывающие взаимодействия соответствующих мод. Набор возможных комбинаций на таком наборе векторов ограничен, так как из них можно построить только равнобедренные треугольники, в которых основание меньше или равно боковым сторонам (возможен, конечно, и равносторонний треугольник, но он соответствует взаимодействиям внутри данной октавы волновых чисел, которые в рамках данных моделей не рассматриваются), и предельный случай, когда две боковые стороны вдвое меньше основания, и треугольник вырождается в прямую. Это значит, что если мы примем за каскадные переменные соответствующие гармоники Фурье ($U_n = \hat{v}(k_n)$), то в матрице T_{nm} уравнения (7.2) останутся только диагональные члены T_{nm} и T_{mm} ($m = n-1, n+1, n+2, \dots$).

В простейшем случае можно ограничиться рассмотрением лишь локальных взаимодействий, то есть взаимодействиями ближайших соседей в цепочке. Тогда одна из возможных форм модельных уравнений есть

$$\dot{U}_n = k_n(U_{n-1}^2 - bU_nU_{n+1}) - \nu k^2 U_n. \quad (7.7)$$

Цепочка уравнений (7.7) и представляет собой каскадную модель Новикова - Деснянского¹⁶ - первую каскадную модель турбулентности. Уравнения содержат одну константу b , которая выбирается, исходя из закона сохранения. Кинетическая энергия всей системы есть

$$E = \sum E_n = \frac{1}{2} \sum U_n^2. \quad (7.8)$$

Если потребовать, чтобы при отсутствии диссипативного слагаемого система уравнений (7.7) сохраняла энергию, то из этого условия легко находится значение константы: $b = 2$. Аналогом энтропии в каскадной модели является величина

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum k_n^2 U_n^2. \quad (7.9)$$

Требование сохранения энтропии (7.9) приводит к значению константы $b = 8$.

Важно отметить, что модель (7.7) может одновременно удовлетворять только одному закону сохранения. Уравнения (7.7) имеют стационарные решения, соответствующие наличию инерционного интервала. Эти решения могут реализоваться при малой вязкости (большом числе Рейнольдса) и должны иметь степенной вид

$$U_n = U_0 k_n^\alpha. \quad (7.10)$$

Нетрудно увидеть, что для $k_n = k_0 2^n$ стационарное решение вида (7.10) возникает при

$$\alpha = -\frac{\log_2 b}{3}. \quad (7.11)$$

При $b = 2$ (сохраняемой величиной является энергия) это дает решение $U_n = U_0 2^{\frac{n}{3}}$, а при $b = 8$ (сохраняется энтропия) решение есть $U_n = U_0 2^{-n}$. Первое решение соответствует колмогоровскому спектру для инерционного интервала переноса энергии $E(k) \sim k^{-5/3}$, а второе - спектру Крейчнана $E(k) \sim k^{-3}$ для инерционного интервала переноса энтропии, реализующемуся в двумерной турбулентности. Отметим, что если спектр энергии подчиняется степенному закону $E(k) \sim k^\lambda$, то энергия октавы n

$$E_n = \int_{k_n}^{k_{n+1}} E(k) dk \sim k_n^{\lambda+1}, \quad (7.12)$$

¹⁶ Деснянский В.Н., Новиков Е.А. Моделирование каскадных процессов в турбулентных течениях // Прикладная математика и механика, 1974. Т.38. N.3. С.507-513.

и из сравнения (7.12) с (7.10) следует, что

$$\alpha = \frac{\lambda + 1}{2}. \quad (7.13)$$

Простейшее обобщение модели (7.7) состоит в добавлении дополнительной пары членов

$$\dot{U}_n = k_n [U_{n-1}^2 - 2U_n U_{n+1} + \tilde{N}(U_{n-1} U_n - 2U_{n+1}^2)] - \nu k^2 U_n. \quad (7.14)$$

В уравнениях появляется еще один параметр C , который, однако, не позволяет поставить второе условие сохранения, так как две нелинейных пары слагаемых подобны.

7.3. Модель GOY

К моделям вида (7.2) можно прийти различными путями. Более формализованный путь основан на введенном А.М.Обуховым понятии системы гидродинамического типа (СГТ).

Системой гидродинамического типа называется динамическая система, удовлетворяющая четырем условиям:

- 1) в бездиссипативном пределе система сохраняет фазовый объем;
- 2) система имеет не менее одного квадратичного интеграла движения;
- 3) уравнения содержат квадратичную нелинейность;
- 4) при рассмотрении длинных цепочек уравнений, последние ограничиваются локальными взаимодействиями, то есть взаимодействуют только ближайшие соседи.

Простейшая СГТ представляет собой триплет. Собирая цепочку из отдельных триплетов, можно прийти к системам вида (7.2).

Удается построить системы гидродинамического типа, обладающие несколькими интегралами движения. СГТ с двумя интегралами движения была построена в работе¹⁷, а на ее основе позже была построена каскадная модель двумерной турбулентности вида¹⁸

$$\dot{U}_n = k_n (aU_{n-2}U_{n-1} + bU_{n-1}U_{n+1} + cU_{n+1}U_{n+2}) - \nu k_n^2 U_n. \quad (7.15)$$

¹⁷ Гледзер Е.Б. Система динамического типа, допускающая два квадратичных интеграла движения // Доклады Академии Наук СССР, 1973. Т.209. N.5.

¹⁸ Гледзер Е.Б., Макаров А.Л. О построении каскадной модели двумерной турбулентности // Известия АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1979. Т.9. N.7. С.899-906.

В модели типа (7.15) в каждом взаимодействии участвуют три соседних члена цепочки переменных U_n . Это означает, что матрица T_{nm} не содержит диагональных элементов - это не случайно, так как диагональные члены не могут одновременно обеспечить сохранение двух квадратичных величин.

Условие сохранения энергии дает уравнение

$$\begin{aligned}
 d_t \sum_n E_n = \sum_n U_n \dot{U}_n = & \dots\dots\dots + \\
 & + k_{n-1} (a \underline{U_{n-3} U_{n-2} U_{n-1}} + b \underline{U_{n-2} U_{n-1} U_n} + c \underline{U_{n-1} U_n U_{n+1}}) + \\
 & + k_n (a \underline{U_{n-2} U_{n-1} U_n} + b \underline{U_{n-1} U_n U_{n+1}} + c \underline{U_n U_{n+1} U_{n+2}}) + \\
 & + k_{n+1} (a \underline{U_{n-1} U_n U_{n+1}} + b \underline{U_n U_{n+1} U_{n+2}} + c \underline{U_{n+1} U_{n+2} U_{n+3}}) + \\
 & + \dots\dots\dots = 0,
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

которое выполняется, если равна нулю сумма коэффициентов при одинаковых комбинациях переменных (в уравнении соответствующая тройка членов выделена подчеркиванием). Тогда условие сохранения энергии есть

$$k_{n-1}c + k_n b + k_{n+1}a = 0, \tag{7.17}$$

а условие сохранения энтропии аналогичным образом дает

$$k_{n-1}^3 c + k_n^3 b + k_{n+1}^3 a = 0. \tag{7.18}$$

Один из коэффициентов остается неопределенным. Полагая, например, $c = 1$, получаем

$$a = \frac{1}{16}, \quad b = -\frac{5}{8}. \tag{7.19}$$

Уравнение (7.15) имеет два стационарных решения вида (7.10). Подставляя (7.10) в (7.15) и обозначая $2^{3\alpha} = x$, получаем квадратное уравнение, корни которого ($x_1 = 1/2$, $x_2 = 1/8$) дают $\alpha_1 = -1/3$, $\alpha_2 = -1$. Эти решения соответствуют двум спектральным законам, предсказываемым для двумерной турбулентности соображениями размерности.

Упомянем и третий путь получения каскадных моделей, который основан на редукции иерархической модели. Идея этого подхода состоит во введении одной амплитудной характеристики для всех функций выделенного яруса (масштаба) и вычисления элементов матрицы нелинейных взаимодействий на основе оценки среднего результата взаимодействия трех вихрей соответствующих масштабов при их различном взаимном положении. Преимущество такого подхода состоит в том, что не требуется искусственно ограничиваться рассмотрением только локальных взаимодействий.

Каскадная модель такого типа была впервые построена в работе¹⁹ для двумерной турбулентности (двумерная турбулентность привлекательна наличием второго положительно определенного интеграла движения, который позволяет избежать неопределенности при выводе уравнений). Уравнения модели имеют вид

$$\dot{U}_n = \sum_{j=1}^J (T_{n,n-j-1,n-1} U_{n-j-1} U_{n-1} + \dot{D}_{n,n-j,n+1} U_{n-j} U_{n+1} + T_{n,n+j,n+j+1} U_{n+j} U_{n+j+1}) - \nu k_n^2 U_n \quad (7.20)$$

и при $J=1$ совпадают с уравнениями (7.15). Наличие двух законов сохранения позволяет переписать (7.20) в виде

$$\dot{U}_n = k_n \sum_{j=1}^J T_j \left(\frac{2^{2j}-1}{2^{2j+3}-2} U_{n-j-1} U_{n-1} + U_{n-j} U_{n+1} + \frac{3 \cdot 2^j}{4-2^{-2j}} U_{n+j} U_{n+j+1} \right) - \nu k_n^2 U_n, \quad (7.21)$$

содержащем только величины $T_j = T_{0,-j,1}$.

Первые же попытки численных решений каскадных уравнений показали, что стационарные решения не устойчивы. В качестве примера, на рис.7.2 показаны результаты численного решения системы уравнений (7.21) с заданными начальными условиями и нулевой вязкостью. На графике показаны значения переменных U_n (на картинке стоит обозначение A_N) для различных моментов времени. В начальный момент распределение энергии имеет максимум на промежуточных масштабах (кривая а). Кривая б соответствует моменту времени, когда в мелкомасштабной части спектра заканчивается установление распределения $U_n \sim 2^{-n}$, отвечающего спектру $E(k) \sim k^{-3}$. Кривая в фиксирует начало развития неустойчивости, начинающейся на малых масштабах. Последняя кривая показывает, что к моменту, когда на больших масштабах устанавливается распределение вида $U_n \sim 2^{-n/3}$ ($E(k) \sim k^{-5/3}$), неустойчивость достигает границы двух интервалов.

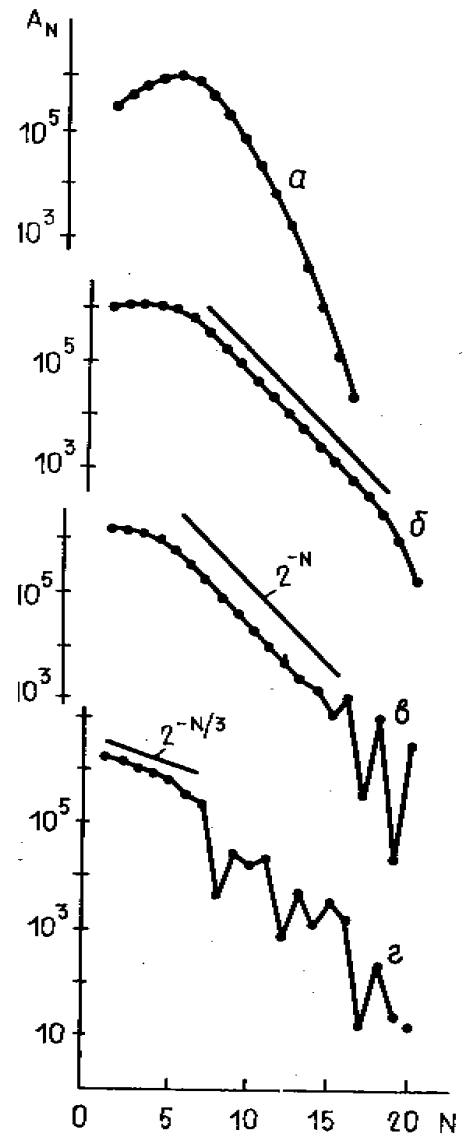


Рис.7.2

¹⁹ Фрик П.Г. Иерархическая модель двумерной турбулентности // Магнитная гидродинамика. 1983. N.1. С.60-66.

На рис.7.3 приведен результат вычислений с учетом вязкости. Показаны два момента времени: черные точки фиксируют распределение амплитуд на момент установления степенного закона в мелкомасштабной части спектра, а светлые - на момент формирования степенного закона в крупномасштабной части спектра и начала развития неустойчивости решения. Видно, что введение вязкости стабилизирует правый край инерционного интервала и возмущения начинают развиваться, хотя и медленнее, на его левом краю.

Численные решения каскадных уравнений на больших интервалах времени показывают, что каскадные переменные совершают стохастические колебания, а степенные законы реализуются в среднем.

Именно уравнения вида (7.15) получили наибольшее распространение в моделировании каскадных процессов развитой турбулентности. Интерес к ним был вызван работой²⁰, в которой впервые в рамках таких моделей исследовалось поведение структурных функций высших порядков. В цитируемой работе рассматривались комплексные переменные U_n , а уравнения (7.15) были записаны в виде

$$\dot{U}_n = ik_n \left(U_{n+1}^* U_{n+2}^* - \frac{\varepsilon}{2} U_{n-1}^* U_{n+1}^* + \frac{(\varepsilon - 1)}{4} U_{n-2}^* U_{n-1}^* \right) - \nu k_n^2 U_n. \quad (7.22)$$

В таком виде система содержит свободный параметр ε , причем независимо от его значения система обеспечивает сохранение энергии. Интере-

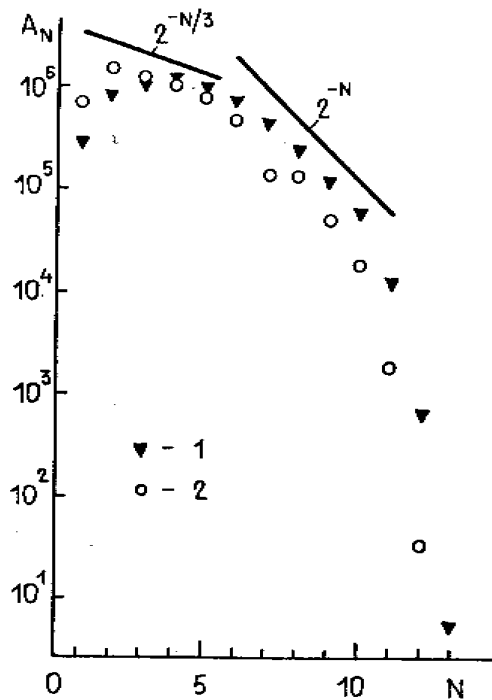


Рис.7.3

²⁰ Yamada M., Okhitani K. // J. Physical Society of Japon, 1987. V.56. P.4210.

суюсь обычной трехмерной турбулентностью, авторы выбрали для этого параметра значение $\varepsilon = 1/2$. При $\varepsilon = 5/4$ уравнения (7.22) совпадают с моделью Гледзера (7.15). Эта модель известна под именем GOY (Gledzer-Ohkitani-Yamada) и является на сегодня наиболее исследуемой каскадной моделью турбулентности.

Свойства этой модели обсудим более подробно. Рассмотрим квадратичную величину

$$W = \sum_n z^n |U_n|^2$$

и запишем условие ее сохранения

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \sum_n z^n (U_n^* \dot{U}_n + \dot{U}_n^* U_n) = \\ &= \dots + i \left(k_{n-1} z^{n-1} - \frac{\varepsilon}{2} k_n z^n + \frac{\varepsilon-1}{4} k_{n+1} z^{n+1} \right) U_{n-1}^* U_n^* U_{n+1} + \dots = 0. \end{aligned}$$

При выбранном разбиении ($k_n = 2^n$) условие выполняется, если справедливо уравнение

$$1 - \varepsilon z + (\varepsilon - 1) z^2 = 0,$$

имеющее два корня

$$\begin{aligned} z_1 &= 1, \\ z_2 &= \frac{1}{\varepsilon - 1}. \end{aligned}$$

Первый корень не зависит от параметра ε и соответствует сохранению энергии ($W_1 = E = \sum |U_n|^2$). Второй корень соответствует квадратичной величине $W_2 = \sum (\varepsilon - 1)^{-n} |U_n|^2$, которая имеет различный смысл при $\varepsilon > 1$ и $\varepsilon < 1$. В первом случае квадратичная величина является положительно определенной и может быть переписана в виде

$$W_2 = \Omega = \sum k_n^\lambda |U_n|^2, \quad (7.23)$$

где

$$\lambda = -\log_2 |\varepsilon - 1|. \quad (7.24)$$

Величина (7.23) может рассматриваться как обобщенная энтрофия (она совпадает с обычной энтрофией при $\varepsilon = 5/4$). Во втором случае, когда $\varepsilon < 1$, сохраняется величина

$$W_2 = H = \sum (-1)^n k_n^\lambda |U_n|^2 \quad (7.25)$$

с показателем степени, также определяемым по формуле (7.24). Важно отметить, что сохраняется в этом случае знакопеременная величина. Ее называют обобщенной спиральностью, так как сохраняемыми знакопеременными квадратичными формами в гидродинамике являются именно спиральности (помимо упоминавшейся в главе 4 гидродинамической спираль-

ности, в магнитной гидродинамике важную роль играют магнитная спиральность и перекрестная спиральность). При $\varepsilon = 1/2$ размерность этой величины совпадает с размерностью гидродинамической спиральности. Любопытно отметить, что сам факт наличия этого интеграла в системе уравнений (7.22) был обнаружен значительно позже работы Охитани и Ямады, в которой именно это значение параметра было выбрано, по-видимому, случайно. Ниже мы увидим, что только при этом значении параметра ε и достигается то замечательное совпадение статистических свойств модели и реальной турбулентности, которое привлекло широкий интерес к каскадным моделям.

Система (7.22) имеет два стационарных решения вида $U_n = U_0 k_n^\alpha$, зависящих от параметра ε . Подставляя (7.10) в (7.22) и обозначая $2^{3\alpha} = x$, легко получаем искомые решения

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{1}{3}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{3} \log_2 \left| \frac{\varepsilon - 1}{2} \right|.\end{aligned}\tag{7.26}$$

Первое решение соответствует колмогоровскому спектру $k^{-5/3}$ и присутствует в системе при любом значении параметра. Численные исследования системы уравнений (7.22) показали, что при $\varepsilon < \varepsilon_1 = 0.384$ колмогоровское решение является устойчивым фокусом системы. При $\varepsilon = \varepsilon_1$ имеет место бифуркация Хопфа, а при $\varepsilon = \varepsilon_2 = 0.395$ происходит новая бифуркация, после которой в системе возникает хаос.

Еще раз отметим, что точка $\varepsilon = 1$ является особой точкой на оси значений параметра. В этой точке меняется тип интеграла движения, а при приближении к ней интегралом движения становится величина (7.23) или (7.25) с показателем $\lambda \rightarrow \infty$. Это значит, что ни о каком каскаде в системе не может быть и речи. Заметим также, что в точке $\varepsilon = 2$ оба решения (7.26) совпадают, а единственным интегралом движения является энергия ((7.23) совпадает с энергией).

7.4. Скейлинг и перемежаемость в каскадных моделях развитой турбулентности

В параграфе 4.6.3 была описана модель развитой турбулентности ШЛД (Ше - Левек - Дюбрюль), претендующая на то, что имеющиеся в ней параметры позволяют описать широкий класс турбулентных течений (напомним, что предшествовавшая ей модель Ше - Левека была строго ориентирована на описание чисто гидродинамической трехмерной турбулентности). Первое тестирование модели ШЛД на универсальность было выполнено с помощью каскадной модели (7.22) в работе²¹. Каскадная модель типа GOY дает прекрасную возможность для такого теста, так как позволяет получить целый класс систем с различными законами сохранения.

Во всех моделях развитой турбулентности (и/или перемежаемости) рассматриваются структурные функции поля скорости. В каскадной модели структурной функцией порядка q является величина

$$S_q = \langle U_n^q \rangle, \quad (7.27)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени. Напомним, что для структурных функций предполагается наличие степенных законов вида $S_q \sim l^{\zeta_q}$, а использовавшаяся в модели ШЛД расширенная автомодельность устанавливает связь между любой парой структурных функций в виде

$$S_q \sim S_p^{\zeta_q/\zeta_p}. \quad (7.28)$$

Мы видели, что расширенная автомодельность позволяет повысить точность определения скейлинговых показателей ζ_q . Рис.7.4 показывает, что расширенная автомодельность проявляет себя в полной мере и в каскадных моделях. Для случая $\varepsilon = 5/4$ на рис.7.4,а показана зависимость ве-

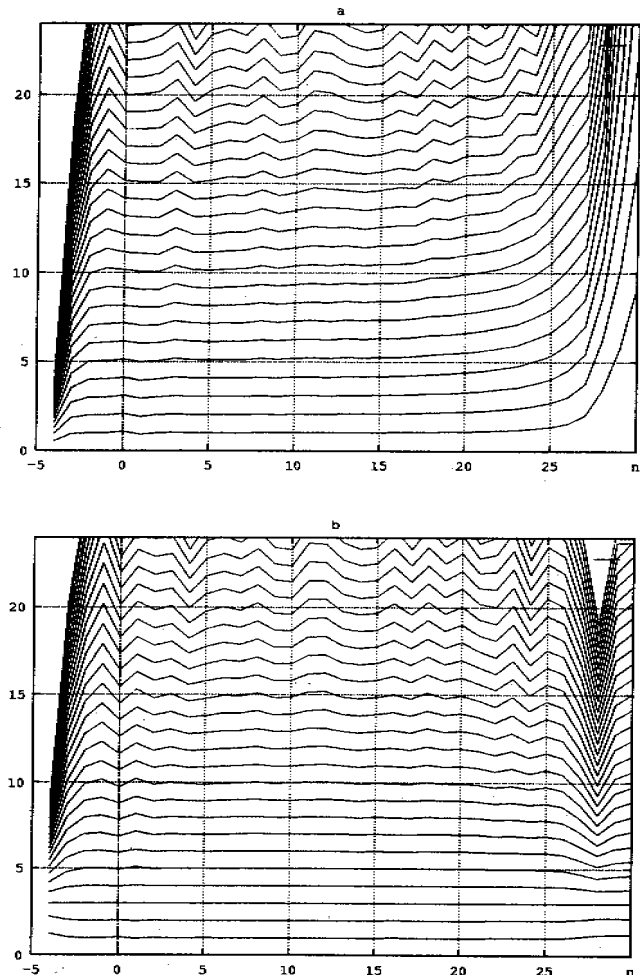


Рис.7.4

²¹ Frick P.G., Babiano A., Dubrulle B. Scaling properties of a class of shell models // Physical Review E, 1995. Vol.51. P.5582-5593.

личин ζ_q от номера яруса n (то есть от масштаба) для широкого интервала q (вплоть до 25). Заметим, что ни эксперимент, ни прямое численное

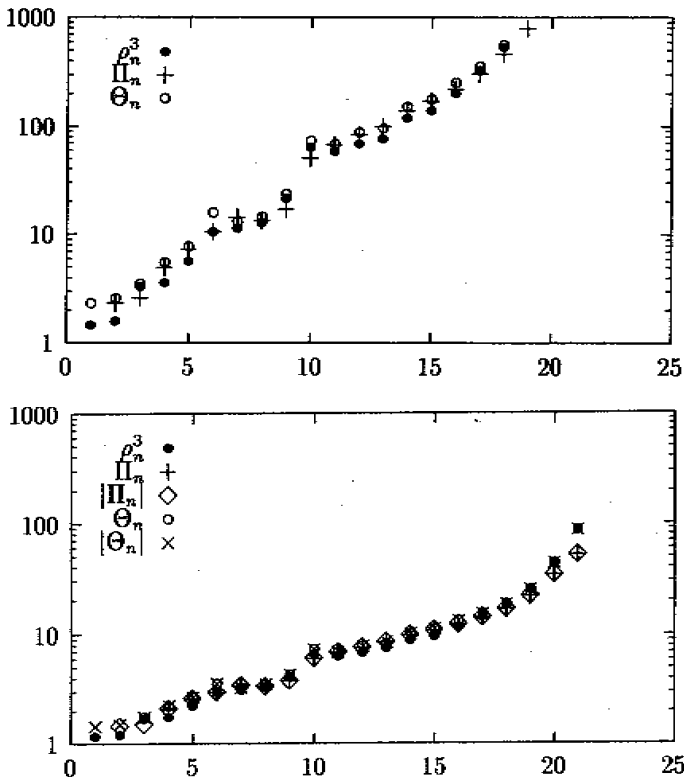


Рис.7.5

моделирование не могут обеспечить ни такого диапазона масштабов, ни такого высокого порядка q . Можно видеть, что даже для низких порядков значение скейлинговых показателей монотонно возрастает, начиная с самого начала инерционного интервала. На рис.7.4,б показаны относительные показатели $\tilde{\zeta}_q = \zeta_q / \zeta_3$. Ясно видно, что в этом случае появляется широкий интервал масштабов, в котором показатели сохраняют постоянное значение (горизонтальные линии на графиках).

Центральной величиной во всех моделях развитой турбулентности, начиная с теории Колмогорова, является скорость диссипации энергии, которая определяет поток энергии, пронизывающий весь инерционный интервал и, как следствие, определяет динамику последнего. В главе 5 мы уже останавливались на вопросе о том, что реальной величиной, определяющей динамику инерционного интервала, является не скорость диссипации, а сам поток энергии, который к тому же не всегда постоянен вдоль инерционного интервала. В каскадной модели поток энергии, проходящей через масштаб n (точнее, энергия, передаваемая от всех ярусов с $m < n$ ярусам с $m \geq n$), есть

определяет поток энергии, пронизывающий весь инерционный интервал и, как следствие, определяет динамику последнего. В главе 5 мы уже останавливались на вопросе о том, что реальной величиной, определяющей динамику инерционного интервала, является не скорость диссипации, а сам поток энергии, который к тому же не всегда постоянен вдоль инерционного интервала. В каскадной модели поток энергии, проходящей через масштаб n (точнее, энергия, передаваемая от всех ярусов с $m < n$ ярусам с $m \geq n$), есть

$$\Pi_n = \sum_{m \geq n} E_m = \left\langle \text{Im} \left\{ k_n \left(\frac{\varepsilon - 1}{4} U_{n-2} U_{n-1} U_n - \frac{1}{2} U_{n-1} U_n U_{n+1} \right) \right\} \right\rangle. \quad (7.29)$$

Если комплексные переменные записать в виде $U_n = \rho_n e^{i\phi_n}$, то выражение (7.29) можно привести к виду

$$\Pi_n = k_n \left(\frac{\varepsilon - 1}{4} \Theta_{n-1} - \frac{1}{2} \Theta_n \right), \quad (7.30)$$

где $\Theta_n = \langle \rho_{n-1} \rho_n \rho_{n+1} \sin(\phi_{n-1} + \phi_n + \phi_{n+1}) \rangle$.

Теперь сформулируем основные гипотезы модели ШЛБ в терминах каскадных переменных. Первая гипотеза - гипотеза подобия (4.90), декларирующая наличие одинаковых статистических свойств, принимает форму

$$\frac{\rho_n^3}{\langle \rho_n^3 \rangle} \stackrel{stat}{=} \frac{|\Pi_n|}{\langle |\Pi_n| \rangle} \stackrel{stat}{=} \frac{|\Theta_n|}{\langle |\Theta_n| \rangle}. \quad (7.31)$$

В качестве безразмерной характеристики потока энергии по спектру (4.89) в данном случае выступает величина

$$\pi_n = \frac{|\Pi_n|}{\Pi^{(\infty)}}, \quad (7.32)$$

где

$$\Pi_n^{(\infty)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\langle |\Pi_n|^{p+1} \rangle}{\langle |\Pi_n|^p \rangle}. \quad (7.33)$$

Вторая гипотеза - гипотеза об иерархии моментов безразмерного потока энергии (4.91) сохраняет свой вид

$$\frac{\langle \pi_n^{p+1} \rangle}{\langle \pi_n^p \rangle} = A_p \left(\frac{\langle \pi_n^p \rangle}{\langle \pi_n^{p-1} \rangle} \right)^\beta, \quad (7.34)$$

а третья (гипотеза о перемежаемости) - записывается как

$$\langle \pi_n \rangle \sim \langle \rho_n^3 \rangle^\Delta. \quad (7.35)$$

Напомним, что результатом применения трех гипотез является формула для скейлинговых экспонент

$$\zeta_q = \frac{q}{3}(1-\Delta) + \Delta \frac{1-\beta^{q/3}}{1-\beta}. \quad (7.36)$$

Проверка первой гипотезы требует сопоставления функций распределения плотности вероятности для всех трех величин. В первом приближении можно ограничиться сравнением низших моментов, или коэффициентов асимметрии и эксцесса. Зависимость асимметрии и эксцесса всех величин от масштаба (номера яруса) приведена на рис.7.5 для случая $\varepsilon = 0.5$.

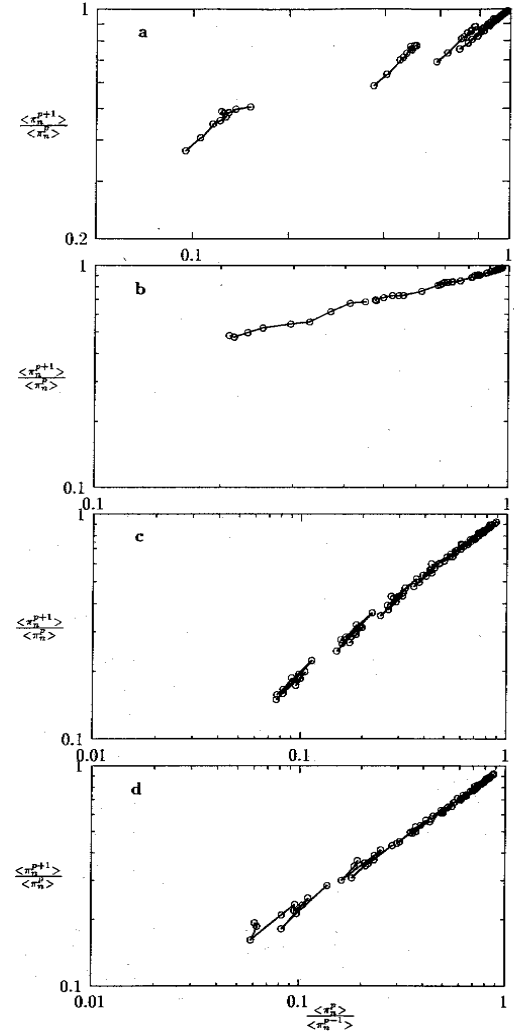


Рис.7.6

Точки, принадлежащие различным величинам, хорошо совпадают. Следует отметить, что модель демонстрирует существенный рост неравномерности распределения вероятности с ростом волнового числа - коэффициент эксцесса возрастает в 1000 раз.

Рис.7.6 показывает результаты проверки второй гипотезы. В двойном

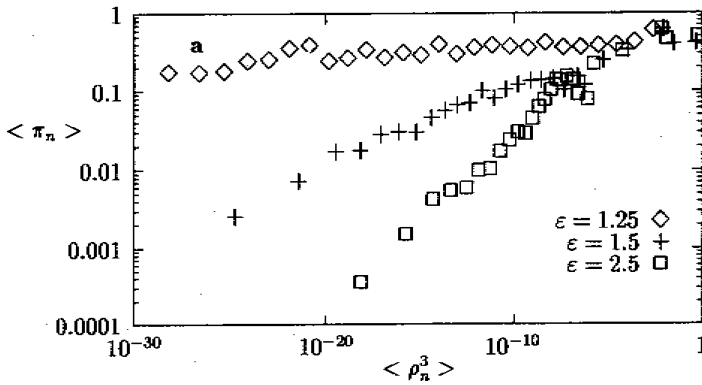


Рис.7.7

ного порядка, образуют отрезки с разными углами наклона. Такая ситуация сохраняется для $\epsilon < 0.45$. При больших значениях параметра (показаны случаи: b) $\epsilon = 0,7$; c) $\epsilon = 1,25$; d) $\epsilon = 3,0$ соотношение (7.34) хорошо выполняется - все точки ложатся на общую прямую, наклон которой позволяет одно-

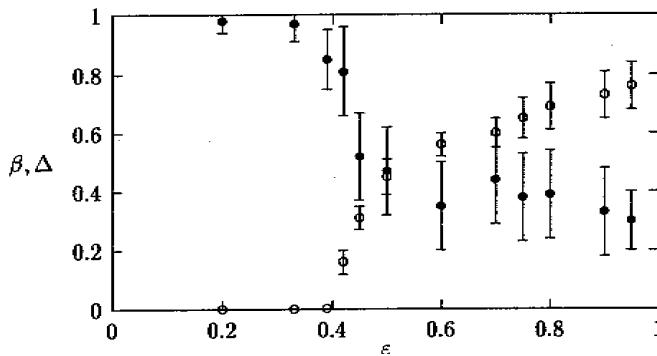
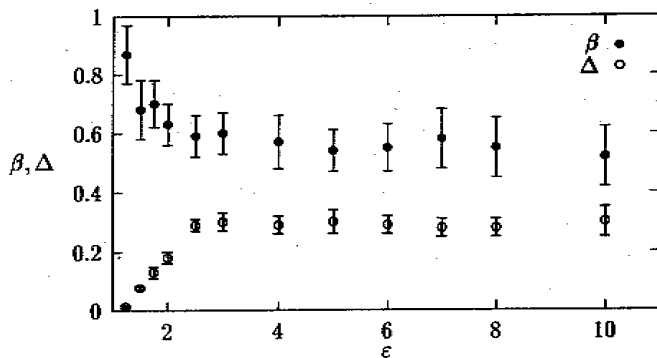


Рис.7.8

логарифмическом масштабе показана зависимость величин $\langle \pi_n^{p+1} \rangle / \langle \pi_n^p \rangle$ от соответствующих значений $\langle \pi_n^p \rangle / \langle \pi_n^{p-1} \rangle$.

Верхний график соответствует случаю $\epsilon = 0.42$ (параметр значительно превосходит значение, при котором наступает стохастизация решений) и показывает, что в этом случае, гипотеза не выполняется - группы точек, относящиеся к моментам различ-

ного порядка, образуют отрезки с разными углами наклона. Такая ситуация сохраняется для $\epsilon < 0.45$. При больших значениях параметра (показаны случаи: b) $\epsilon = 0,7$; c) $\epsilon = 1,25$; d) $\epsilon = 3,0$ соотношение (7.34) хорошо выполняется - все точки ложатся на общую прямую, наклон которой позволяет одно-

значно определить соответствующее значение параметра β .

Рис.7.7 касается проверки третьей гипотезы. Он дает зависимость безразмерного потока энергии от структурной функции третьего порядка для трех различных значений параметра ϵ . Во всех случаях можно выделить прямой участок, соответствующий степенному закону (7.35), и определить значение коэффициента Δ . Верхняя группа точек соответствует случаю $\epsilon = 5/4$ (при этом моделируется инерционный интервал переноса энтропии в двумерной турбулентности). Точки лежат почти горизонтально ($\Delta = 0.013$), что говорит об очень низком уровне перемежаемости. Этот

результат хорошо согласуется с результатами, полученными при обработке данных прямого численного моделирования интервала переноса энтропии в двумерной турбулентности (параграф 5.4).

Результаты определения параметров Δ и β суммирует рис.7.8, на котором приведена зависимость этих величин от параметра модели ε (напомним, что этот параметр связан с законами сохранения). На рисунке разделены результаты для $\varepsilon < 1$ и $\varepsilon > 1$, так как свойства системы в этих двух областях отличаются принципиально, о чем свидетельствует и рис.7.8.

Последний рис.7.9 показывает результаты непосредственного вычисления функции распределения вероятности для потока энергии $P(\pi_n)$ при двух значениях ε : а) $\varepsilon = 0.42$, б) $\varepsilon = 3.0$. На обоих графиках пунктиром проведена линия, соответствующая лог-пуассоновскому распределению. В первом случае полученная функция распределения далека от этой кривой (что согласуется с рис.7.6,а), в то время как на втором - совпадение достаточно хорошее. Видно, что функция распределения несимметрична (напомним, что логнормальное распределение в таком представлении должно было бы дать симметричную параболу).

В заключение отметим, что полученные значения параметров β и Δ при подстановке в формулу (7.36) дали значения ζ_q , совпадающие с точностью не ниже 10% со значениями, полученными непосредственно по расчетам наклона графиков структурных функций. Подтверждение формулы (7.36) является интегральной проверкой работоспособности модели турбулентности ШЛД.

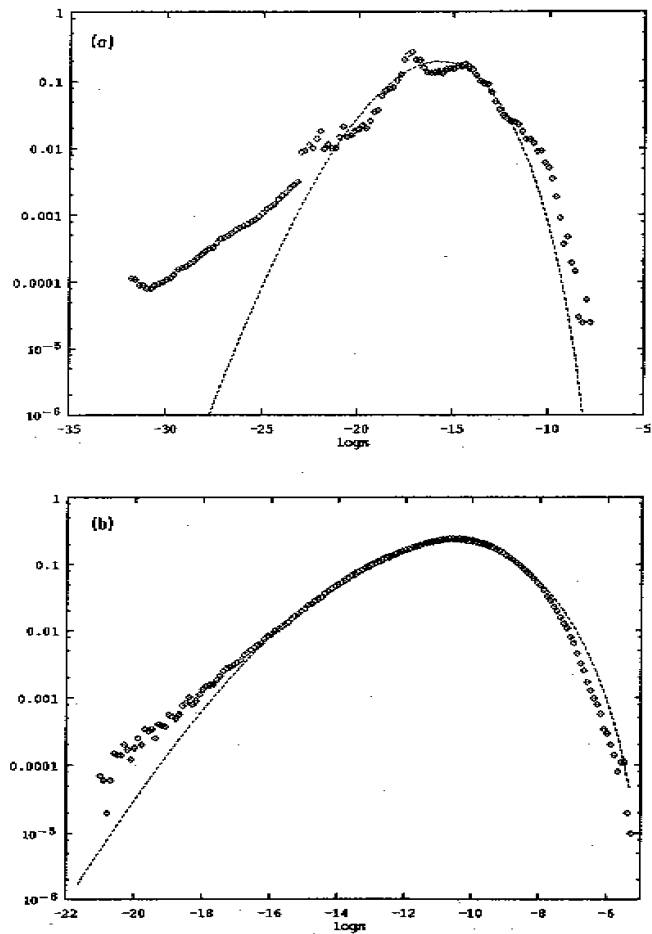


Рис.7.9

7.5 Модель конвективной турбулентности

Рассмотрим турбулентные течения, описываемые в рамках приближения Буссинеска для термогравитационной конвекции несжимаемой жидкости. Уравнения движения запишем в безразмерной форме

$$\partial_t \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -\nabla P + Gr^{-1/2} \Delta \bar{u} + \bar{e} T, \quad (7.36)$$

$$\partial_t T + \bar{u} \cdot \nabla T = \sigma^{-1} Gr^{-1/2} \Delta T, \quad (7.37)$$

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0, \quad (7.38)$$

где \bar{u} - скорость, P - давление, T - температура, \bar{e} - единичный вектор вдоль вертикальной оси, $Gr = g\beta L^3 T^* \nu^{-2}$ - число Грасгофа, $\sigma = \nu/\chi$ - число Прандтля, ν - кинематическая вязкость, χ - температуропроводность. В качестве единицы длины выбран макромасштаб L , единицы температуры - характерная для этого масштаба разность температуры T^* , единицы скорости - $V = (g\beta L T^*)^{1/2}$ и единицы времени - $t = L/V$. При выбранной единице скорости число Грасгофа просто связано с числом Рейнольдса $Gr = V^2 L^2 \nu^{-2} = Re^2$.

Мы построим каскадную модель, позволяющую рассмотреть специфику каскадных процессов вблизи масштаба Болджиано в двумерной турбулентности (смотри параграф 5.5), а также каскадных процессов при очень низких и очень высоких значениях числа Прандтля. Эти задачи выбраны потому, что являются примером случая, когда рассмотрение нелокальных взаимодействий становится принципиальным и модель типа GOY может привести к неправильным результатам.

Каскадная модель для двумерной турбулентной конвекции, включающая нелокальные взаимодействия, была построена в работе²² и имела вид

$$d_t U_n = \sum_{m,l} T_{n,m,l} U_m U_l - Re^{-1} k_n^2 U_n + F_n \Theta_n, \quad (7.39)$$

$$d_t \Theta_n = \sum_{m,l} H_{n,m,l} U_m \Theta_l - k_n^2 (\sigma Re)^{-1} \Theta_n, \quad (7.40)$$

где $F_n = F_0 2^n$, $T_{n,m,l} = 2^N T_{0,m-n,l-n}$, $H_{n,m,l} = 2^N H_{0,m-n,l-n}$, а значения элементов для центральных частей матриц $T_{0,m,l}$ и $H_{0,m,l}$ приведены в таблицах. Структура матриц следует из разбиения пространства волновых векторов на октавы и из требования сохранения кинетической энергии $E_v = \sum_n |U_n|^2$, энтропии $\Omega = \sum_n |2^n U_n|^2$ и энергии пульсаций температуры $E_T = \sum_n |2^n \Theta_n|^2$.

²² Фрик П.Г. Моделирование каскадных процессов в двумерной турбулентной конвекции // Журнал прикладной механики и технической физики. 1986. N.2. С.71-79.

$T_{0,m,l}$

$l \setminus m$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
4								0.155
3							0.242	
2						0.431		
1	-0.0088	-0.0257	-0.0796	-0.269				
0								
1	0.0032	0.0096	0.0269					
2								

 $H_{0,m,l}$

$l \setminus m$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
4								-0.0537
3							-0.0941	-1.493
2						-0.125	-0.720	-0.153
1	-0.0058	-0.0145	-0.0374	-0.0996	-0.221	-0.365	-0.145	
0								
-1	0.0018	0.00468	0.0125	0.0277	0.0457	0.0181		
-2				0.00196	0.0113	0.00239		
-3				0.00018	0.00291	0.00030		
-4				0.00001	0.00073	0.00004		

Эта модель была модифицирована в работе ²³. Во-первых, в рассмотрение были введены комплексные переменные, использование которых существенно снижает время интегрирования, необходимое для получения устойчивых статистических характеристик. Во-вторых, в матрице $H_{n,m,l}$ были оставлены только члены, описывающие генерацию неоднородностей температуры крупномасштабным полем скорости (строки $l = \pm 1$, $m < 0$), и диагонали $m=n$ и $l=m$, которые очевидно доминируют над соответствующими боковыми столбцами. Тогда, с учетом связей между элементами матрицы, следующих из законов сохранения, можно записать

$$d_t U_n = i2^n \sum_{j=1}^J T_{0,-j,-1} \left\{ \frac{3 \cdot 2^j}{4 - 2^{-2j}} U_{n+j}^* U_{n+j+1}^* - U_{n-j}^* U_{n+1}^* + \frac{2^{2j} - 1}{2^{2j+3} - 2} U_{n-j-1}^* U_{n-1}^* \right\} - k_n^2 Re^{-1} U_n + F_n \Theta_n, \quad (7.41)$$

$$d_t \Theta_n = i2^n \sum_{j=1}^J \left\{ H_{0,-j,-1} (U_{n-j}^* \Theta_{n-1}^* - 8U_{n-j+1}^* \Theta_{n+1}^*) + H_{0,0,-j} (U_n^* \Theta_{n-j}^* - 2^{3j} U_{n+j}^* \Theta_{n+1}^*) \right\} - k_n^2 (\sigma Re)^{-1} \Theta_n. \quad (7.42)$$

Параметр J фиксирует наиболее далекие взаимодействия (при $J = 1$ система возвращается к стандартному виду каскадных уравнений, описывающих только локальные взаимодействия).

²³ Ложкин С.А., Фрик П.Г. Моделирование каскадных процессов в турбулентной конвекции при экстремальных значениях числа Прандтля // Математическое моделирование систем и процессов, Перм. гос. техн. ун-т, Пермь, 1996. N.4, С.53-60.

Перечислим некоторые результаты, полученные с помощью этой модели.

Умеренные числа Прандтля ($\sigma \sim 1$). Рассмотрим эволюцию спектров двумерной турбулентной конвекции при очень больших числах Грассгофа, когда большой интервал значений волновых чисел позволяет проследить за формированием спектров по обе стороны от масштаба Болджиано. Система уравнений (7.41)-(7.42) для случая, когда число Прандтля равно единице, а число Грассгофа $Gr = 10^{14}$ (что соответствует $Re = 10^7$), интегрировалась методом Рунге - Кутты четвертого порядка с постоянным шагом по времени для $0 \leq n \leq 30$. Равномерный нагрев на макромасштабе моделировался путем поддержания стационарного значения модуля переменной $|\Theta_0| = 1$.

В отличие от трехмерного случая, в двумерной гидродинамической турбулентности существование инерционного интервала с прямым каскадом энергии невозможно. Это обстоятельство препятствует установлению стационарного распределения энергии по спектру. Процесс передачи энергии к мелкомасштабному движению блокируется на масштабе Болджиано L_B , вправо от которого формируется инерционный интервал переноса энтропии. Влево от L_B развивается интервал обратного переноса энергии к крупным масштабам со спектральным законом "-5/3", причем граница этого интервала продвигается влево по мере накопления системой энергии.

Стационарной ситуации удастся добиться путем введения дополнительной диссипации кинетической энергии на больших масштабах (в уравнение для U_n дописывается член вида $-\gamma U_n$, так называемое линейное трение, обычно используемое и при прямых численных экспериментах с двумерной турбулентностью). На рис.7.10 показаны осредненные по времени значения энергии пульсаций скорости и температуры в отдельных октавах E_{V_n} и E_{T_n} . Проведены линии, соответствующие степенным законам для спектров $E_V(k)$ и $E_T(k)$. Этот рисунок нужно сравнить с рис.5.24, где качественно были изображены ожидаемые спектральные распределения для двумерной турбулентной конвекции. При рассматривании рисунков следует помнить, что показатель степени для величины $E_n(k_n)$ на единицу меньше, чем для самого спектра $E(k)$, что связано с принятым делением оси волновых векторов на октавы. Границы различных интервалов более четко выражены в спектре пульсаций скорости. В спектре пульсаций температуры переходы размыты и степенные участки не столь ярко выражены.

Малые числа Прандтля ($\sigma \ll 1$) приводят к возникновению инерционно-диффузионного интервала в спектре пульсаций температуры. Он возникает в масштабах, на которых сохраняется обычный инерционный интервал в поле скорости, но существенна тепловая диффузия. Из сопостав-

ления соответствующих членов уравнения (7.37) $\delta v_i \delta T_0 L^{-1} \sim \delta T_i l^{-2}$ и спектра Крейчнана для пульсаций скорости в инерционном интервале переноса энтропии $E(k) \sim k^{-3}$ получается

$$E_T(k) \sim k^{-7}. \quad (7.43)$$

При столь быстром затухании энергии пульсаций трудно рассчитывать на формирование протяженного интервала. Это подтверждают и результаты численного счета для случая $\sigma = 10^{-8}$, приведенные на рис.7.11, где не удается выделить интервала с постоянным степенным законом.

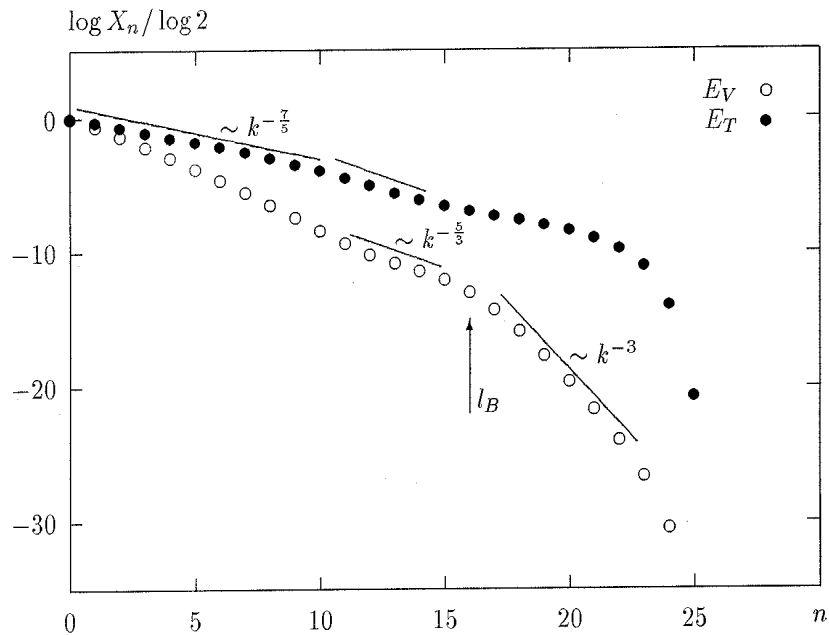


Рис.7.10

На рисунке даны результаты счета с различными значениями параметра J . В конвективном интервале отличие невелико, так как здесь доминируют локальные взаимодействия полей скорости и температуры. Различия хорошо видны в мелкомасштабной части спектра, где формируется инерционный интервал переноса энтропии. Известно, что каскадные модели испытывают проблемы с описанием каскада энтропии, выражающиеся в том, что поток энтропии в них слаб в сравнении с пульсациями энтропии в отдельном масштабе и падает с ростом n , а спектры энергии не следуют единому степенному закону. Увеличение J усиливает поток энтропии и приводит к появлению протяженного интервала, в котором спектр кинетической энергии следует степенному закону с наклоном $E(k) \sim k^{-10/3}$. Интересно отметить, что именно такой наклон спектра был получен при исследовании двумерной турбулентности с помощью иерархической модели, в которой число переменных растет как 2^{2n} по мере роста волнового

числа $k_n = 2^n$, что позволяет в отличие от каскадных моделей учитывать и пространственную неоднородность турбулентного течения.

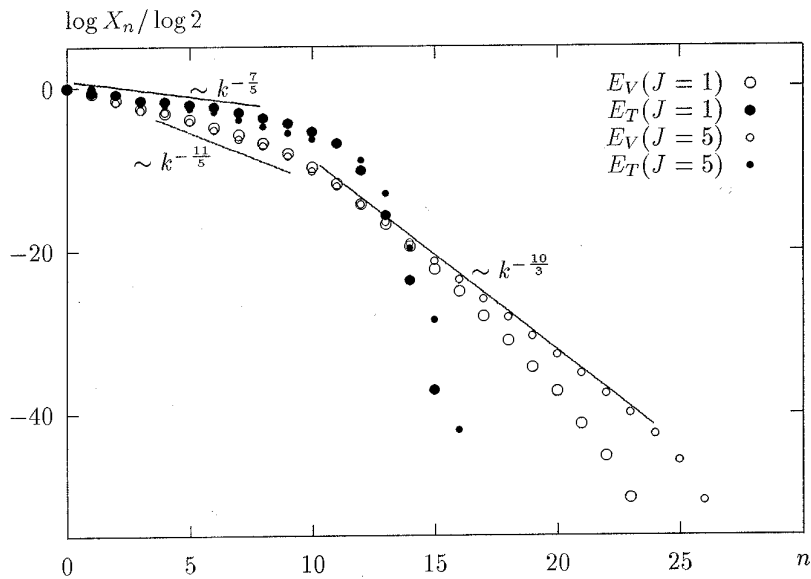


Рис.7.11

Большие числа Прандтля ($\sigma \gg 1$) способствуют формированию вязко-конвективного интервала, в котором соответствующие масштабы поля скорости подавлены вязкостью, но остается спектральный поток пульсаций температуры, поддерживаемый лишь крупномасштабным полем скорости. Поскольку диффузия тепла происходит на существенно меньших масштабах, то поток энергии пульсаций температуры по спектру остается постоянным, но характерное время переноса определяется крупномасштабными пульсациями скорости и может считаться для этого интервала постоянным. Эти рассуждения приводят к спектру Бэтчелора (5.41),

$$E_T(k) \sim k^{-1}. \quad (7.44)$$

Между конвективным (обуховским) и вязко-конвективным интервалами можно ожидать появления интервала (5.51), в котором вязкий член становится весомее нелинейного, но остается существенной сила плавучести. Тогда баланс архимедовых и вязких сил вместе с (7.44) приводит к спектру

$$E_V(k) \sim k^{-5}. \quad (7.45)$$

Результаты вычислений для случая $\sigma = 10^6, \text{Re} = 10$ представлены на рис.7.12 и показывают, что интервал, в котором устанавливаются законы (7.44-7.45), может быть достаточно протяженным. Можно видеть, что уве-

личение J приводит к растяжению интервала (7.44), но практически не влияет на распределение энергии пульсаций скорости.

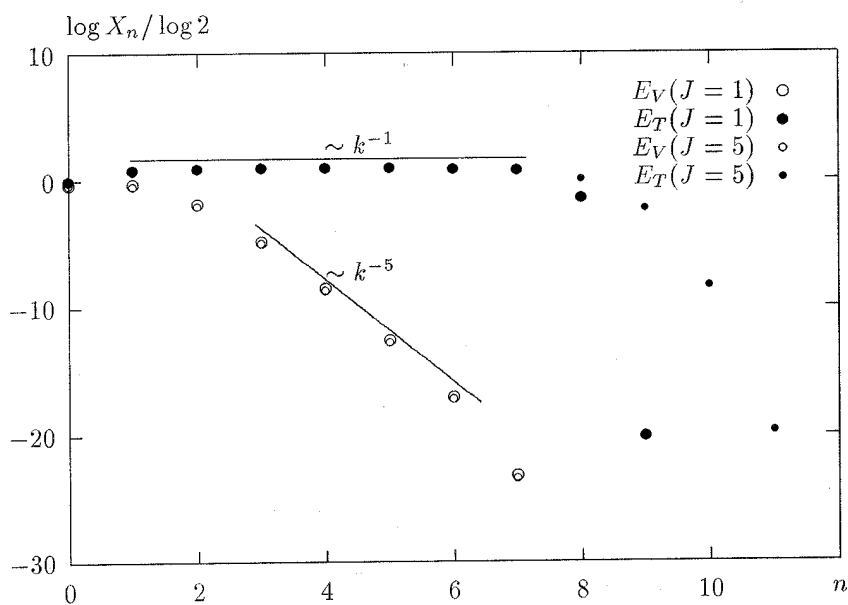


Рис.7.12

7.6. Каскадные процессы в МГД-турбулентности

В качестве последнего примера рассмотрим модель развитой турбулентности проводящей жидкости. Специфика движений жидкости с электрической проводимостью состоит в том, что жидкость не только подвержена действию дополнительного силового поля (в магнитном поле возникает сила Лоренца), но и сама оказывает воздействие на магнитное поле. При этом важно, что воздействие не сводится к запутыванию силовых линий и размельчению структуры поля (как это происходит при перемешивании пассивной примеси или тепла), а может, в определенных условиях, и генерировать магнитные поля. Хорошо проводящие жидкости - это жидкие металлы, но в сферу действия магнитной гидродинамики (МГД) попадают и многие другие среды - электролиты, плазма (особый интерес представляют солнечная и звездная плазма), межзвездная среда.

Силовой характеристикой магнитного поля является вектор магнитной индукции \vec{B} . Уравнения движения включают уравнение Навье - Стокса, дополненное силой Лоренца, уравнение для вектора индукции, уравнение неразрывности и условие соленоидальности магнитного поля. Систему уравнений можно записать в безразмерном виде

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = (\vec{B} \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{\nabla} \left(P + \frac{B^2}{2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v}, \quad (7.46)$$

$$\partial_t \vec{B} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{B} = (\vec{B} \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\text{Rm}} \Delta \vec{B}, \quad (7.47)$$

$$\vec{\nabla} \vec{v} = 0, \quad (7.48)$$

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0. \quad (7.49)$$

Здесь $\text{Re} = UL/\nu$ - обычное гидродинамическое число Рейнольдса, а $\text{Rm} = UL/\nu_m = \text{Re} \cdot \text{Pr}_m$ - магнитное число Рейнольдса, определенное через магнитную вязкость $\nu_m = 1/\mu\sigma$ (μ - магнитная проницаемость среды, σ - электрическая проводимость). Отношение кинематической вязкости к магнитной вязкости называется магнитным числом Прандтля $\text{Pr}_m = \nu/\nu_m$.

Основные особенности МГД-течений связаны с тем, что проводящая жидкость увлекает силовые линии магнитного поля. В пределе идеальной проводимости наступает эффект вмороженности - силовые линии поля оказываются связанными с жидкими частицами.

Наиболее интригующим свойством МГД-потокотков является их способность генерировать магнитные поля. Впервые идею МГД-динамо, а именно идею о том, что источником магнитного поля Солнца являются течения в его недрах, высказал Лармор еще в 1919 году. Однако, попытки построить теорию динамо или хотя бы дать примеры течений, способных генерировать магнитные поля, долгое время оставались неудачными. Первые точные результаты были негативными и вылились в так называемые

теоремы запрета (или антидинамо теоремы). Первую теорему доказал Каулинг (1934г.), показав, что никакое осесимметричное течение не может генерировать магнитное поле. Вторую теорему запрета доказал Зельдович в 1956г. Суть теоремы в том, что магнитные поля не могут генерироваться двумерными потоками (это не исключает возможности временного усиления магнитного поля, но запрещает его устойчивый рост и стационарное поддержание). Таким образом, было доказано, что механизм динамо может быть реализован только в существенно трехмерном потоке, причем важнейшую роль в этом процессе играет спиральность.

В контексте изложения свойств и возможностей каскадных моделей МГД-турбулентность интересна как пример сложного турбулентного течения, характеризуемого особым набором интегралов движения. Уравнения (7.46)-(7.49) в бездиссипативном пределе сохраняют три квадратичные величины. В случае трехмерного движения это общая энергия E , перекрестная спиральность H_C и магнитная спиральность H_B :

$$E = \int (\bar{v}^2 + \bar{B}^2) d\bar{r}, \quad (7.50)$$

$$H_C = \int (\bar{v} \cdot \bar{B}) d\bar{r}, \quad (7.51)$$

$$H_B = \int (\bar{A} \cdot \bar{B}) d\bar{r}, \quad (7.52)$$

где \bar{A} есть векторный потенциал магнитного поля ($\bar{B} = \text{rot } \bar{A}$). В случае двумерного течения последний интеграл заменяется квадратом векторного потенциала

$$a = \int (\bar{A}^2) d\bar{r}. \quad (7.53)$$

Наличие у каскадных моделей типа (7.22) знакопеременных интегралов позволяет рассчитывать на построение модели, удовлетворяющей всем известным в МГД законам сохранения. Такая модель была предложена в работе²⁴ в форме

$$\begin{aligned} (d_t - \nu k_n^2) U_n = ik_n \{ (U_{n+1}^* U_{n+2}^* - B_{n+1}^* B_{n+2}^*) - \\ - \frac{\varepsilon}{2} (U_{n-1}^* U_{n+1}^* - B_{n-1}^* B_{n+1}^*) + \frac{(1-\varepsilon)}{4} (U_{n-2}^* U_{n-1}^* - B_{n-2}^* B_{n-1}^*) \} + f_n, \end{aligned} \quad (7.54)$$

$$\begin{aligned} (d_t - Rm^{-1} k_n^2) B_n = ik_n \{ (1 - \varepsilon - \varepsilon_m) (U_{n+1}^* B_{n+2}^* - B_{n+1}^* U_{n+2}^*) + \\ + \frac{\varepsilon_m}{2} (U_{n-1}^* B_{n+1}^* - B_{n-1}^* U_{n+1}^*) + \frac{(1-\varepsilon_m)}{4} (U_{n-2}^* B_{n-1}^* - B_{n-2}^* U_{n-1}^*) \} + g_n. \end{aligned} \quad (7.55)$$

²⁴ Frick P.G., Sokoloff D.D. Cascade and dynamo action in a shell model of turbulence // Physical Review E, 1998, Vol.57.N.4. P.4155-4164.

При $B_n \equiv 0$ система (7.54)-(7.55) совпадает с моделью GOY (7.22). В общем случае модель содержит дополнительный параметр ε_m . Отметим, что энергия и перекрестная спиральность, выражаемые в модели в виде

$$E = \sum_n (|U_n|^2 + |B_n|^2), \quad (7.56)$$

$$H_c = \sum_n (U_n B_n^* + U_n^* B_n), \quad (7.57)$$

сохраняются системой при любом значении параметра ε_m . Требование сохранения величины

$$H_B = \sum_n (-1)^n k_n^{-1} |B_n|^2, \quad (7.58)$$

служащей аналогом магнитной спиральности (7.53), приводит к однозначному определению обоих параметров: $\varepsilon = 1/2$, $\varepsilon_m = 1/3$. Отметим, что параметр ε совпадает при этом со значением, получаемым в модели трехмерной турбулентности из требования сохранения гидродинамической спиральности. Это означает, что в приближении слабых магнитных полей система (7.54)-(7.55) вновь сохраняет гидродинамическую спиральность.

Для моделирования двумерной МГД-турбулентности нужно потребовать сохранения величины

$$a = \sum_n k_n^{-2} |B_n|^2 \quad (7.59)$$

(квадрата векторного потенциала), что приводит к следующим значениям параметров: $\varepsilon = 5/4$, $\varepsilon_m = -1/3$.

Мы приведем только некоторые результаты, касающиеся моделирования поведения свободно вырождающейся МГД-турбулентности, хотя каскадная модель, о которой идет речь, дала новые результаты и при исследовании поведения стационарно возбуждаемой МГД-турбулентности. Свободное вырождение подразумевает равенство нулю сил f_n и g_n в уравнениях (7.54)-(7.55) и решение задачи с заданными начальными условиями. В качестве начальных условий рассматривается распределение энергии по спектру, соответствующее спектральным законам вида $E_v \sim E_B \sim k^{-2}$ (для всех $n \geq 0$), уровень магнитной энергии существенно ниже соответствующего уровня кинетической энергии ($E_v \approx 1$, $E_B \approx 0,0001$). Число Рейнольдса $Re = 10^7$, магнитное число Прандтля $Pr_m = 10^{-3}$.

На рис.7.13 показан характер эволюции кинетической (пунктирная линия) и магнитной (тонкая сплошная линия) энергии в трехмерной МГД-турбулентности (уравнения решаются для случая: $\varepsilon = 1/2$, $\varepsilon_m = 1/3$). Видно, что за короткое время (безразмерное время, определенное по характерному времени оборота макроскопического вихря L/U , порядка единицы) магнитная энергия достигает уровня порядка 1/10 от уровня кинетической

энергии. Затем наступает относительно долгий промежуточный этап (порядка двадцати безразмерных единиц времени), в течение которого магнитная энергия остается на том же уровне. После этого происходит новый рост магнитного поля и его энергия становится сравнимой с кинетической энергией, оставаясь все же меньше ее. Одновременно происходит медленное снижение общего уровня энергии, обусловленное вязкими и омическими потерями.

На том же рис.7.13 толстой сплошной линией показана эволюция магнитной энергии в так называемом кинематическом приближении. Кинематическое приближение предполагает рассмотрение уравнения индукции магнитного поля для заданного распределения поля скорости, то есть пренебрежение обратным действием магнитного поля на поле скорости. В нашем случае это приближение соответствует отбрасыванию членов с переменными V_{\perp} из уравнения (7.54). Соответствующая кривая эволюции магнитной энергии дает неограниченный рост (система уравнений не удовлетворяет более законам сохранения), хотя нарастание энергии и не происходит монотонным образом, а включает и отдельные интервалы, в течение которых энергия поля падает.

Такое поведение соответствует качественным представлениям о поведении магнитного поля в турбулентной проводящей среде. В то же время, известные попытки прямого численного моделирования МГД-турбулентности, вопреки ожиданиям, дают рост магнитного поля только до уровня, в несколько раз меньшего уровня кинетической энергии потока. Приведенный результат решения каскадных уравнений дает возможную интерпретацию этого факта. Дело в том, что самые продолжительные численные решения полных уравнений не выходят за временной интервал

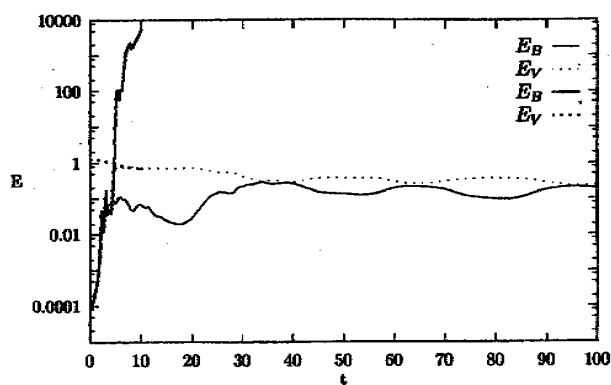


Рис.7.13

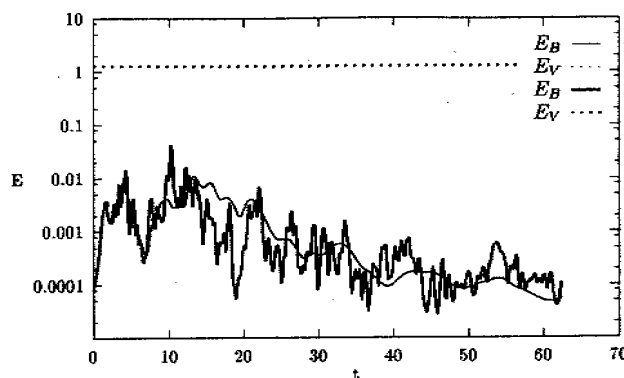


Рис.7.14

($t \approx 10$). В свете полученных результатов это означает, что система не успевает выйти за рамки промежуточного этапа эволюции.

На рис.7.14 показаны результаты моделирования поведения вырождающейся двумерной турбулентности. Пунктир по-прежнему показывает уровень кинетической энергии, которая в двумерном потоке убывает край-

не медленно. Тонкая сплошная линия описывает поведение магнитной энергии в полной нелинейной системе, а толстая линия - в кинематической постановке. Замечательно, что в этом случае и решения полной нелинейной системы, и решения в кинематической постановке дают затухание энергии магнитного поля со временем (выполняется теорема запрета Зельдовича, исключая возможность устойчивого динамо в двумерном потоке). Характерное время затухания в обоих случаях одинаково, хотя эволюция в нелинейном случае имеет значительно более гладкий характер.

В то же время характер свободной эволюции двумерной МГД-турбулентности существенно отличается и от характера эволюции двумерной гидродинамической турбулентности. Напомним, что в двумерной турбулентности энтрофия, а вместе с ней и скорость диссипации энергии, со временем могут только убывать. Присутствие магнитного поля нарушает закон сохранения энтрофии. В процессе свободного вырождения энтрофия возрастает, а это приводит к росту скорости диссипации энергии. Принципиальное отличие в поведении скорости диссипации энергии в вырождающейся двумерной гидродинамической и магнитогидродинамической турбулентности иллюстрирует рис.7.15 (сравните с рис.5.2, где показана эволюция скорости диссипации энергии в двумерной турбулентности).

Помимо эволюции интегральных характеристик, каскадные модели позволяют проследить и за изменением спектральных распределений энергии. На рис.7.16 показаны распределения кинетической (светлые точки) и магнитной (темные точки) энергии двумерной МГД-турбулентности по

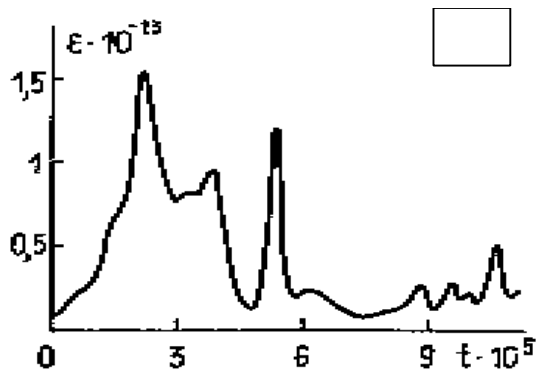


Рис.7.15

спектру (точнее, по октавам), полученные осреднением по различным интервалам времени. Следует отметить, что, несмотря на значительное превышение общего уровня кинетической энергии над магнитной, существует диапазон масштабов, в котором магнитная энергия имеет тот же порядок, что и кинетическая. Это относительно мелкие масштабы, непосредственно прилегающие к диссипативному интервалу ($5 \leq n \leq 8$).

Эволюция спектров энергии в трехмерной МГД-турбулентности показана на рис.7.17. В этом случае существует протяженный интервал масштабов, в котором магнитная и кинетическая энергии близки по величине. Магнитная энергия затухает на более крупных масштабах, чем кинетическая - это естественный результат, так как магнитное число Прандтля мало (10^{-3}). Спектр кинетической энергии с хорошей точностью следует закону « $-5/3$ » (на рисунке этому закону соответствует прямая линия). Спектр магнитной энергии более крут (что-то порядка « -2 »).

В заключение отметим, что принципиальные отличия в поведении двумерных и трехмерных МГД-потоків принято объяснять топологическими аргументами и тот факт, что простые каскадные модели, которые теряют всякую информацию о пространственной структуре течений, воспроизводят эти различия, свидетельствует, с одной стороны, о чрезвычайно важной роли законов сохранения (только через них и сохраняется в модели память о размерности пространства) и, с другой стороны, о том, что возможности динамических систем в моделировании сложных нелинейных систем далеко не исчерпаны.

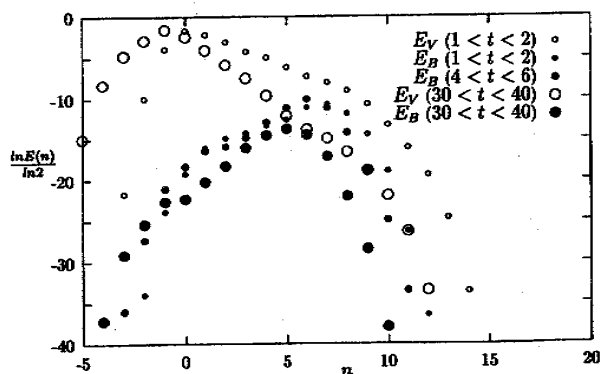


Рис.7.16

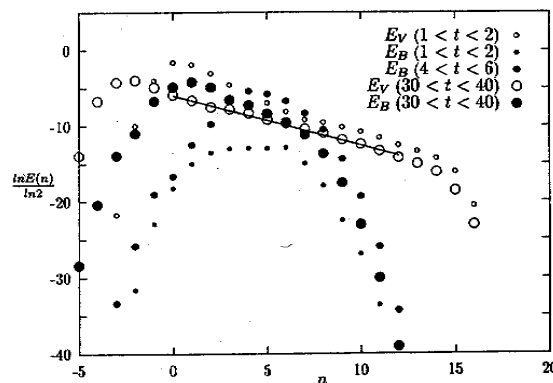


Рис.7.17

Список рекомендуемой литературы

1. Гледзер Е.Б., Должанский Ф., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 366 с.
2. Зимин В.Д., Фрик П.Г. Турбулентная конвекция. М.: Наука, 1988. 178 с.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Турбулентность, составившая предмет настоящего курса, столь сложна и подходы к ее изучению столь разнообразны, что она не оставляет шансов на систематическое и, главное, полное изложение в рамках годового курса. Автор ставил перед собой более скромную цель, состоящую в том, чтобы оставить у слушателей цельное представление об этом разделе гидродинамики и дать представление о том широком наборе методов и моделей, которые применяются в этой области. Удалось ли достичь эту цель - судить читателю. Любые критические замечания и советы будут восприняты автором с благодарностью.

Фрик Петр Готлобович

**ТУРБУЛЕНТНОСТЬ:
МОДЕЛИ И ПОДХОДЫ**

Курс лекций

Часть II

Редактор И.Н.Жеганина
Корректор В.А.Козьмина

Лицензия ЛР-020370 от 29.01.97

Подписано к печати 15.03.99.	Печать офсетная.	Набор компьютерный.
Формат 60 x 90/16. Усл.печ.л.		Тираж 100 экз.
Заказ 88		

Редакционно-издательский отдел и ротап rint
Пермского государственного технического университета
Адрес: 614600, Пермь, Комсомольский пр., 29а