DYNAMIC SYSTEMS

V. S. ANISHCHENKO

The mathematical definition of a dynamic system is formulated. For the dynamic systems described by ordinary differential equations, four types of solution are illustrated: equilibrium state, stable periodic, quasiperiodic, and chaotic solutions. The definition of a strange attractor is introduced, the fundamental properties of periodic and chaotic solutions are discussed.

Дано математическое определение понятия динамической системы. На примере динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, иллюстрируются четыре типа решений: состояние равновесия, устойчивое периодическое решение, квазипериодическое и хаотическое решения. Вводится понятие странного аттрактора, обсуждаются основные свойства регулярных и хаотических решений.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В. С. АНИЩЕНКО

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных научных проблем естествознания является решение задачи предсказания поведения изучаемого объекта во времени и пространстве на основе определенных знаний о его начальном состоянии. Эта задача сводится к нахождению некоторого закона, который позволяет по имеющейся информации об объекте в начальный момент времени t_0 в точке пространства $\mathbf{x}_0$ определить его будущее в любой момент времени $t > t_0$. В зависимости от степени сложности самого объекта этот закон может быть детерминированным или вероятностным, может описывать эволюцию объекта только во времени, только в пространстве, а может описывать пространственно-временную эволюцию.

Предметом нашего анализа будут не объекты вообще, а динамические системы в математическом понимании этого термина [1].

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Под *динамической системой* понимают любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон, который описывает изменение (эволюцию) начального состояния с течением времени. Этот закон позволяет по начальному состоянию прогнозировать будущее состояние динамической системы, его называют законом эволюции. Динамические системы – это механические, физические, химические и биологические объекты, вычислительные процессы и процессы преобразования информации, совершаемые в соответствии с конкретными алгоритмами. Описания динамических систем для задания закона эволюции также разнообразны: с помощью дифференциальных уравнений, дискретных отображений, теории графов, теории марковских цепей и т.д. Выбор одного из способов описания задает конкретный вид *математической модели* соответствующей динамической системы [2].

Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены параметры (координаты) системы, определяющие однозначно ее состояние, и указан закон эволюции. В зависимости от степени приближения одной и той же системе могут быть поставлены в соответствие различные математические модели.

Исследование реальных систем сводится к изучению математических моделей, совершенствование и развитие которых определяются анализом экспериментальных и теоретических результатов при их сопоставлении. В связи с этим под динамической системой мы будем понимать именно ее математическую модель. Исследуя одну и ту же динамическую систему (к примеру, движение маятника), в зависимости от степени учета различных факторов мы получим различные математические модели. В качестве примера рассмотрим модель нелинейного консервативного осциллятора:

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \qquad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{1}$$

Как известно, функция $\sin x$ аналитическая, и ее разложение в ряд Тейлора выглядит так:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} \right). \tag{2}$$

При малых $x \ll 1$ $\sin x \simeq x$. С увеличением x требуется учет второго, третьего и т.д. членов ряда, чтобы с заданной точностью аппроксимировать $\sin x$. Поэтому в случае $x \ll 1$ мы получаем самую простую модель математического маятника:

$$\ddot{x} + x = 0. \tag{3}$$

Следующим приближением будет модель нелинейного маятника:

$$\ddot{x} + x - \frac{x^3}{6} = 0 \tag{4}$$

и т.д. Для каждого конкретного значения n будем получать новую динамическую систему, в заданном приближении описывающую процесс колебаний физического маятника.

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений. Применительно к таким системам сохранились представления и терминология, первоначально возникшие в механике. В рассматриваемом случае для определения динамической системы необходимо указать объект, допускающий описание состояния заданием величин $x_1, x_2, \ldots, x_N$ в некоторый момент времени $t = t_0$. Величины x_i могут принимать произвольные значения, причем двум различным наборам величин x_i и x_i' отвечают два разных состояния. Закон эволюции динамической системы во времени записывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 2]

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_N), \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{5}$$

Если рассматривать величины $x_1, x_2, \ldots, x_N$ как координаты точки x в N-мерном пространстве, то получается наглядное геометрическое представление состояния динамической системы в виде этой точки, которую называют *изображающей*, а чаще *фазовой точкой*, а пространство состояний – *фазовым пространством* динамической системы. Изменению состояния системы во времени отвечает движение фазовой точки вдоль некоторой линии, называемой *фазовой траекторией*. В фазовом пространстве системы уравнениями (5) определяется векторное поле скоростей, сопоставляющее каждой точке x выходящий из нее вектор скорости $F(x)$, компоненты которого даются правыми частями уравнений (5):

$$[f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N), \ldots, f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)]. \tag{6}$$

Динамическая система (5) может быть записана в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{7}$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ – вектор-функция размерности N.

Необходимо уточнить взаимосвязь понятий числа степеней свободы и размерности фазового пространства динамической системы. Под *числом степеней свободы* понимается наименьшее число независимых координат, необходимых для однозначного определения состояния системы. Под координатами первоначально понимались именно пространственные переменные, характеризующие взаимное расположение тел и объектов. В то же время для однозначного решения соответствующих уравнений движения необходимо помимо координат задать соответствующие начальные значения импульсов или скоростей. В связи с этим система с n степенями свободы характеризуется фазовым пространством в два раза большей размерности ($N = 2n$).

КЛАССИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Если динамическая система задана уравнением (7), то постулируется, что каждому $x(t_0)$ в фазовом пространстве ставится в соответствие состояние $x(t)$, $t > t_0$, куда за время $t - t_0$ переместится фазовая точка, движущаяся в соответствии с уравнением (7). В операторной форме (7) можно записать в виде [2]

$$x(t) = \mathbf{T}_t x(t_0), \tag{8}$$

где $\mathbf{T}_t$ – закон (оператор) эволюции. Если этот оператор применить к начальному состоянию $x(t_0)$, то мы получим $x(t)$, то есть состояние в момент времени $t > t_0$. Так как $x(t_0)$ и $x(t)$ принадлежат одному и тому же фазовому пространству динамической системы, то математики говорят в данной ситуации: оператор $\mathbf{T}_t$ отображает фазовое пространство системы на себя. В соответствии с этим можно называть оператор $\mathbf{T}_t$ оператором отображения или просто отображением.

Динамические системы можно классифицировать в зависимости от вида оператора отображения и структуры фазового пространства. Если оператор предусматривает исключительно линейные преобразования начального состояния, то он называется линейным. Линейный оператор обладает свойством суперпозиции: $\mathbf{T}[x(t) + y(t)] = \mathbf{T}x(t) + \mathbf{T}y(t)$. Если оператор нелинейный, то и соответствующая динамическая система называется *нелинейной.* Различают непрерывные и дискретные операторы и соответственно *системы с непрерывным и дискретным временем.* Системы, для которых отображение $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ с помощью оператора $\mathbf{T}$ может быть определено для любых $t > t_0$ (непрерывно во времени), называют также *потоками* по аналогии со стационарным течением жидкости. Если оператор отображения определен на дискретном множестве значений времени, то соответствующие динамические системы называют *каскадами* или системами с дискретным временем.

Способы задания оператора отображения $\mathbf{T}$ также могут различаться. Оператор $\mathbf{T}$ можно задать в виде дифференциального или интегрального преобразования, в виде матрицы или таблицы, в виде графика или функции и т.д.

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ СВОЙСТВА

Важную группу динамических систем представляют системы, в которых возможны колебания. Колебательные системы с точки зрения их математических моделей разделяют на определенные классы. Различают линейные и нелинейные колебательные системы, сосредоточенные и распределенные, консервативные и диссипативные, автономные и неавтономные. Особый класс представляют так называемые автоколебательные системы. Основные свойства указанных систем подробно обсуждаются в работах по теории колебаний.

Колебательная система называется *линейной* или *нелинейной* в зависимости от того, линейна или нелинейна описывающая ее система дифференциальных уравнений. Линейные системы являются частным случаем нелинейных. Однако в силу принципиальной важности линейных систем при исследовании вопросов устойчивости колебаний, а также возможности использования принципа суперпозиции решений такая классификация оправданна.

Динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, называют *сосредоточенными* или *точечными* системами. Они описываются с помощью конечномерного фазового пространства и характеризуются конечным числом степеней свободы. Одна и та же система в различных условиях может рассматриваться либо как сосредоточенная, либо как распределенная. Математические модели *распределенных* систем – это дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения или обыкновенные уравнения с запаздывающим аргументом. Число степеней свободы распределенной системы бесконечно, и требуется бесконечное число данных для определения ее состояния.

По энергетическому признаку динамические системы делятся на консервативные и неконсервативные. *Консервативные* системы характеризуются неизменным во времени запасом энергии. В механике их называют *гамильтоновыми.* Для консервативных систем с n степенями свободы определяется *гамильтониан* системы $\mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, где q_i – обобщенные координаты, p_i – обобщенные импульсы системы, $i = 1, 2, ..., n$. Гамильтониан полностью характеризует динамическую природу системы и с физической точки зрения в большинстве случаев представляет собой ее полную энергию. Эволюция во времени консервативных систем описывается уравнениями механики Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_i}. \tag{9}$$

Динамические системы с изменяющимся во времени запасом энергии называются *неконсервативными.* Системы, в которых энергия уменьшается во времени из-за трения или рассеяния, называются *диссипативными.* В соответствии с этим системы, энергия которых во времени нарастает, называются системами с отрицательным трением или отрицательной диссипацией. Такие системы можно рассматривать как диссипативные при смене направления отсчета времени на противоположное.

Динамические системы называются *автономными*, если они не подвержены действию внешних сил, переменных во времени. Уравнения автономных систем явной зависимости от времени не содержат. Большинство реальных колебательных систем в физике, радиофизике, биологии, химии и других областях знаний неконсервативны. Среди них выделяется особый класс *автоколебательных* систем, которые принципиально неконсервативны и нелинейны. Автоколебательной называют динамическую систему, преобразующую энергию источника в энергию незатухающих колебаний, причем основные характеристики колебаний (амплитуда, частота, форма колебаний и т.д.) определяются параметрами системы и в определенных пределах не зависят от выбора исходного начального состояния.

ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ ТИПИЧНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Геометрическое представление колебаний. Метод анализа колебательных процессов с помощью исследования фазовых траекторий динамической системы был введен в теорию колебаний Л.И. Мандельштамом и А.А. Андроновым и с тех пор стал привычным при исследовании различных колебательных явлений. Обсудим несколько простых, но типичных примеров представления динамических процессов в виде траекторий изображающей точки в фазовом пространстве.

Консервативный осциллятор. Рассмотрим линейный осциллятор без потерь, уравнения которого можно сформулировать на примере колебательного LC-контура (рис. 1, *а*), предположив амплитуду колебаний достаточно малой. Выбрав в качестве переменной заряд q на конденсаторе, с помощью уравнений Кирхгофа получим

$$\ddot{q} + (LC)^{-1}q = 0. \qquad (10)$$

Домножив (10) на $L\dot{q}$, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = 0, \qquad (11)$$

то есть для любого момента времени выполняются равенства

$$E = E_L + E_C = \text{const}, \qquad E_L = \frac{L\dot{q}^2}{2}, \quad E_C = \frac{q^2}{2C}, \qquad (12)$$

отражающие постоянство во времени полной энергии осциллятора (суммы магнитной E_L и электрической E_C энергий). В более удобных координатах уравнения консервативного осциллятора можно записать следующим образом, введя замену времени $\tau = t/\sqrt{LC}$ и обозначая для общности q через x:

$$\ddot{x} + x = 0, \qquad \dot{x}^2 + x^2 = a^2, \qquad a = \text{const}. \qquad (13)$$

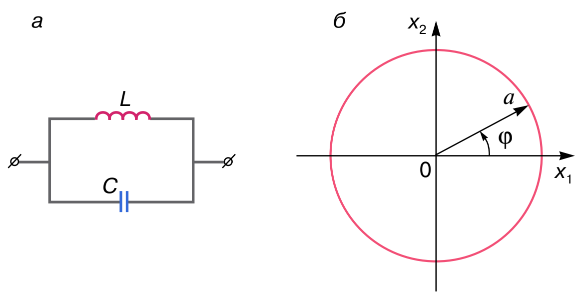

Рис. 1. *а* – колебательный контур, моделируемый уравнениями (16); *б* – фазовый портрет колебаний при заданном уровне энергии

Для фазовых координат $x_1 = x$ и $x_2 = \dot{x}$ эти уравнения преобразуются к виду

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -x_1, \qquad x_1^2 + x_2^2 = a^2. \qquad (14)$$

Фазовый портрет системы представляет собой окружность радиуса a с центром в начале координат. Точка в фазовом пространстве, в которой вектор фазовой скорости обращается в нуль, называется особой, и в данном случае нуль координат есть *особая точка* типа *центр*.

Наличие интеграла движения у рассматриваемой системы, отражающее факт сохранения энергии (12), дает возможность описать ее с помощью уравнения 1-го порядка. Действительно, определив новую переменную φ соотношениями

$$x_1 = a\sin\varphi, \qquad x_2 = a\cos\varphi, \qquad (15)$$

получим уравнения

$$\dot{\varphi} = 1, \qquad \dot{a} = 0, \qquad (16)$$

которые и представляют закон движения фазовой точки. Во времени эволюционирует одна переменная φ, и фазовое пространство консервативного осциллятора, таким образом, одномерно. Гармоническим колебаниям осциллятора отвечает равномерное движение изображающей точки по окружности радиуса a, как это показано на рис. 1, *б*.

Если консервативная система нелинейна, то ее фазовый портрет усложняется. Проиллюстрируем это на примере уравнения

$$\ddot{x} + \sin x = 0. \qquad (17)$$

В фазовых переменных $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ это уравнение сводится к следующим:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -\sin x_1. \qquad (18)$$

Состояния равновесия нелинейного маятника на фазовой плоскости расположены вдоль оси x_1 ($x_2 = 0$) в точках $x_1 = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \ldots$ Соответствующий фазовый портрет системы представлен на рис. 2. Видно, что особые точки $x_1 = 0, \pm2\pi, \pm4\pi, \ldots$ типа *центр*, а $x_1 = 0, \pm\pi, \pm3\pi, \ldots$ – неустойчивые точки типа *седло*.

Вблизи центров фазовый портрет соответствует линейному осциллятору: траектории представляют собой замкнутые кривые, близкие к окружностям,

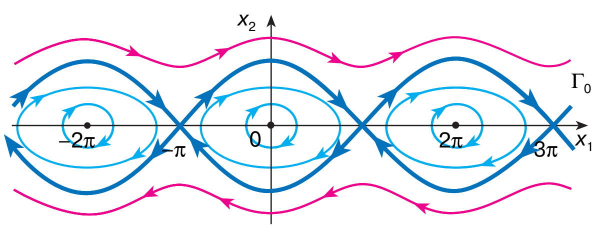

Рис. 2. Фазовый портрет осциллятора (20)

что отвечает по амплитуде колебаниям, близким к гармоническим. Через неустойчивые точки проходят особые интегральные кривые Γ_0, называемые *сепаратрисами.* Они разделяют фазовое пространство на области с различным поведением. С увеличением энергии маятника его колебания от квазигармонических вблизи точек типа центр эволюционируют к нелинейным периодическим колебаниям вблизи сепаратрис. Дальнейшее увеличение энергии приведет к вращательному движению (движение вне сепаратрис). Малейшие отклонения энергии в ту или иную сторону от энергии движения по сепаратрисе приводят к качественно различным типам движения: колебательному или вращательному.

Линейный осциллятор с затуханием. Диссипация энергии, обусловленная наличием потерь, оказывает принципиальное влияние на характер движения системы. Наиболее простые закономерности проявляются в системах с полной диссипацией энергии, когда силы трения действуют по всем степеням свободы, а поступление энергии извне отсутствует. Рассмотрим процессы в линейном диссипативном осцилляторе, когда сила трения пропорциональна скорости изменения координаты. Примером такой системы служит колебательный контур, содержащий активное сопротивление R. Уравнение контура

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0 \qquad (19)$$

заменой переменных сводится к безразмерной форме

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = 0, \quad 2\delta = R\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}. \qquad (20)$$

При $\delta = 0$ имеем консервативный линейный осциллятор, рассмотренный выше. Введение малого трения качественно меняет фазовый портрет системы. Для $0 < \delta < 1$ решением уравнения (20) является

$$x = A\exp(-\delta\tau)\cos(\omega\tau + \psi), \qquad \omega = (1 - \delta^2)^{1/2}, \quad (21)$$

где A и ψ – произвольные постоянные, определяемые начальными условиями. На фазовой плоскости для любых начальных данных имеют место скручивающиеся спирали, по которым фазовые точки асимптотически приближаются к началу координат, характеризуя затухающий колебательный процесс. Нуль координат является особой точкой системы, которая в случае $\delta < 1$ есть *устойчивый фокус* (рис. 3, *а*). Если коэффициент трения $\delta > 1$, процесс в системе апериодический:

$$x = A_1\exp(\lambda_1\tau) + A_2\exp(\lambda_2\tau),$$
$$\lambda_{1,2} = [-\delta \pm (\delta^2 - 1)^{1/2}]/2 \qquad (22)$$

и фазовые траектории выглядят как семейство характерных кривых, по которым, как и в предыдущем случае, изображающие точки стремятся к нулю

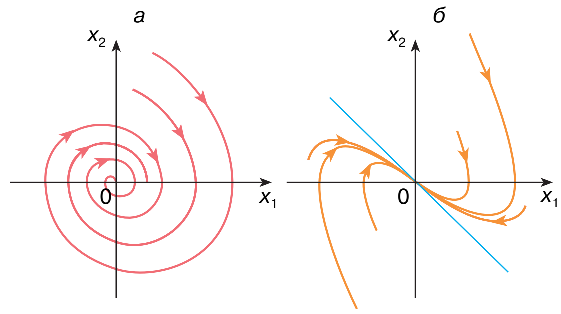

Рис. 3. Фазовый портрет диссипативного осциллятора (23) с параметром $\delta < 1$ (*а*) и $\delta > 1$ (*б*)

координат (рис. 3, *б*). Особая точка в указанных условиях является *устойчивым узлом.*

Итак, при любых значениях физических параметров системы, когда $\delta > 0$, диссипативный маятник характеризуется единственным глобально устойчивым состоянием равновесия в нуле фазовых координат. Независимо от выбора начальных условий наблюдается затухающее колебательное или апериодическое движение. При $t \longrightarrow \infty$ любая (!) изображающая точка стремится к началу координат в устойчивый фокус либо узел.

Описанное свойство является общим для динамических систем с полной диссипацией энергии. Положения равновесия типа устойчивого фокуса или узла являются здесь *глобально притягивающими* в том смысле, что фазовые траектории из любой точки фазового пространства асимптотически к ним стремятся. Стационарные незатухающие колебания в линейных диссипативных системах оказываются невозможными. С физической точки зрения это понятно – нет условий поддержания колебаний. Энергия, расходуемая на преодоление сил трения, не восполняется.

АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Возможность существования периодического асимптотически устойчивого движения, изображаемого изолированной замкнутой траекторией в фазовом пространстве, к которой со временем притягиваются траектории из некоторой окрестности независимо от начальных условий, обеспечивается только в нелинейных диссипативных системах. Этот тип динамических систем настолько важен при изучении колебательных процессов, что для его выделения А.А. Андронов предложил специальный термин – *автоколебательные системы.* Математическим образом автоколебаний служит *предельный цикл Пуанкаре* – замкнутая изолированная траектория в фазовом пространстве, отвечающая периодическому движению.

В качестве примера динамической системы с предельным циклом Пуанкаре рассмотрим классический нелинейный осциллятор Ван дер Поля, уравнение колебаний которого

$$\ddot{x} - a(1 - bx^2)\dot{x} + x = 0. \tag{23}$$

Параметр a, характеризующий подкачку энергии в систему от внешнего источника, является существенным параметром осциллятора и называется *параметром возбуждения.* Из сравнения уравнений (23) и (20) следует, что осциллятор Ван дер Поля описывает более сложный колебательный контур, характер диссипации в котором зависит от переменной x. В фазовых координатах уравнение колебаний осциллятора (23) представляется как

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a(1 - bx_1^2)x_2 - x_1, \end{aligned} \tag{24}$$

причем

$$a(1 - bx_1^2) \not\equiv 0. \tag{25}$$

Аналитически уравнения (24) не решаются, и исследования проводятся с использованием численных методов. В практически важном случае ($a > 0$, $b > 0$) уравнения (24) имеют единственное устойчивое решение в виде *предельного цикла* Γ, изображенного на рис. 4, *а*.

Положение равновесия в начале координат, в котором вблизи нуля можно пренебречь нелинейностью, является неустойчивым фокусом. Траектории из окрестности состояния равновесия асимптотически стремятся к предельному циклу. Как показывает анализ, предельный цикл является устойчивой изолированной структурой, притягивающей к себе траектории из любой точки на фазовой плоскости.

Таким образом, в динамических системах с нелинейной зависимостью диссипации энергии от переменной, совершающей колебания, впервые появляется принципиально новый тип устойчивого предельного множества фазовых траекторий — предельный цикл. На предельном цикле за время периода колебаний доли рассеиваемой и вносимой энергии строго компенсируются.

Наконец, рассмотрим еще один случай типичной структуры в фазовом пространстве динамической системы, возникающей, например, при периодическом возмущении системы с устойчивым предельным циклом. Добавим в уравнение (23) источник гармонического действия сравнительно малой амплитуды B и частоты p, которую считаем рационально не связанной с частотой периодических колебаний автономного осциллятора:

$$\ddot{x} - a(1 - bx^2)\dot{x} + x = B\sin(p\tau + \varphi_0). \tag{26}$$

Периодическая модуляция предельного цикла автономной системы приводит к тому, что фазовая траектория с заданной частотой p вращается вокруг предельного цикла и лежит на двумерной поверхности, представляющей собой поверхность тора. Аналогично случаю предельного цикла эта поверхность будет устойчивым предельным множеством, к которому стягиваются со временем все траектории из некоторой окрестности тора (как изнутри него, так и снаружи!). Нетрудно представить себе, что минимальная размерность фазового пространства, в которое можно вложить двумерный тор, равна трем.

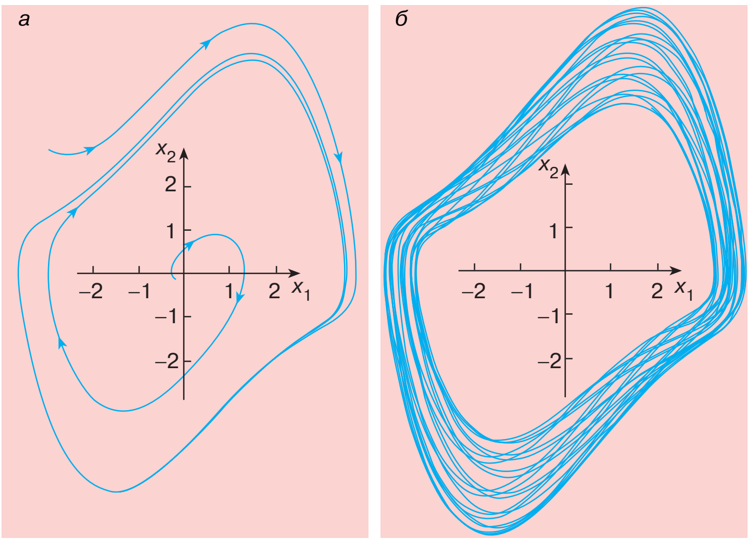

Рис. 4. Предельный цикл системы (26); расчет для значений параметров $a = 1$, $b = 0{,}3$ (*а*). Проекция двумерного тора на плоскость переменных x_1, x_2; численное интегрирование уравнений (24) для значений параметров $a = 1$, $b = 0{,}3$, $B = 1{,}0$, $\varphi_0 = 0$ (*б*)

На рис. 4, *б* показана проекция на плоскость переменных x_1, x_2 фазовой траектории на двумерном торе, полученная численным интегрированием системы (24).

РЕГУЛЯРНЫЕ И СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотренные примеры иллюстрируют типичные предельные множества траекторий на фазовой плоскости: состояния равновесия, периодические движения и особые траектории типа сепаратрисных контуров. Указанные предельные множества полностью исчерпывают возможные ситуации на фазовой плоскости. Им отвечают три различных типа решений уравнений.

Движения диссипативных систем целесообразно разделить на два класса: класс переходных, нестационарных движений, отвечающих релаксации от начального к предельному множеству состояний, и класс установившихся стационарных движений, фазовые траектории которых целиком принадлежат предельным множествам. Важными с физической точки зрения являются притягивающие предельные множества – *аттракторы.* С течением времени произвольное начальное состояние из некоторой области притяжения G, включающей в себя аттрактор G_0, релаксирует к G_0. Движение, которому отвечает фазовая траектория в области притяжения, есть переходной процесс. Установившееся движение характеризуется принадлежностью фазовых траекторий предельному множеству, то есть аттрактору G_0.

К чему может привести повышение размерности системы, например до $N = 3$, то есть выход с плоскости в трехмерное фазовое пространство? Совсем недавно, до начала 60-х годов, с увеличением размерности фазового пространства диссипативных систем связывали возможность появления (в дополнение к указанным выше) лишь квазипериодических аттракторов, соответствующих движениям на p-мерных торах.

Важным результатом исследований последних лет явилось обнаружение принципиально новых типов движений в динамических системах. Таким движениям в фазовом пространстве размерности $N \geq 3$ соответствуют сложным образом устроенные притягивающие множества, траектории изображающих точек которых не принадлежат ни к одному из описанных выше типов аттракторов. Фазовые траектории представляются здесь в виде бесконечной, нигде не пересекающейся линии. При $t \longrightarrow \infty$ траектория не покидает замкнутой области и не притягивается к известным типам аттракторов [2–6]. Именно с существованием таких траекторий связывают возможность хаотического поведения детерминированных динамических систем с размерностью фазового пространства $N \geq 3$.

Впервые подобные свойства динамической системы в 1963 году обнаружил Э. Лоренц при численном исследовании динамики трехмерной модели тепловой конвекции. Спустя восемь лет в теоретической работе Д. Рюэля и Ф. Такенса притягивающая область в фазовом пространстве динамической системы, характеризуемая режимом установившихся непериодических колебаний, была названа *странным аттрактором.* Этот термин был сразу воспринят исследователями и утвердился для обозначения математического образа режима нерегулярных колебаний детерминированных динамических систем [2–6].

Аттракторы в виде состояний равновесия, предельных циклов или l-мерных торов называют *простыми* или *регулярными*, подчеркивая тем самым, что движения на них отвечают сложившимся представлениям об устойчивом по Ляпунову детерминированном поведении динамической системы. Со *странным* аттрактором связывается реализация нерегулярного (в смысле отсутствия периодичности) колебательного режима, который во многом сходен с нашими представлениями о стационарных случайных процессах.

Термин *случайный* имеет вполне определенный смысл. Случайное движение непредсказуемо либо предсказуемо с определенной вероятностью. Другими словами, траектории случайного движения нельзя многократно и однозначно воспроизвести ни в численном, ни в физическом эксперименте. Примером служит классическое движение броуновской частицы. В случае странного аттрактора имеется строгая предсказуемость в смысле детерминированности закона эволюции. Решение уравнений (как и для регулярных аттракторов) подчиняется теореме единственности и однозначно воспроизводится при фиксированных начальных условиях. Поэтому для обозначения сложных “шумоподобных” автоколебаний, математическим образом которых служит странный аттрактор, используются термины типа *динамическая стохастичность*, *детерминированный хаос* и подобные. Важно отличать эти процессы от стохастических в классическом смысле, которые при описании требуют учета флуктуаций в исходных динамических уравнениях либо непосредственно подчиняются уравнениям для плотности распределения вероятностей статистической теории [2, 5].

Примером системы с хаотическим аттрактором являются уравнения генератора с инерционной нелинейностью (генератора Анищенко–Астахова). Эта система является обобщением уравнений Ван дер Поля на случай трехмерного пространства [2]:

$$\dot{x} = mx + y - xz,$$
$$\dot{y} = -x, \qquad (27)$$
$$\dot{z} = -gz + gI(x)x^2,$$

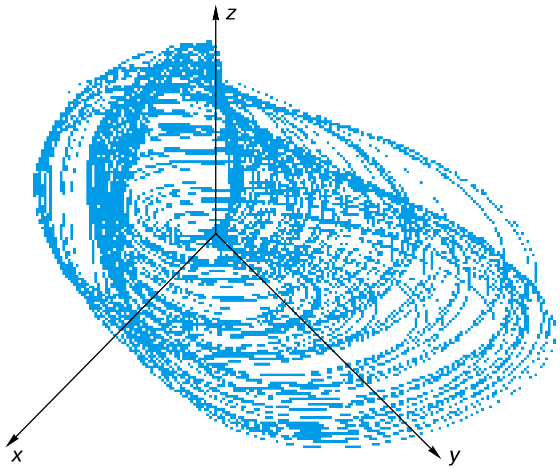

Рис. 5. Странный аттрактор в модели генератора Анищенко–Астахова (27)

$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Результаты численного решения уравнения (27) для значений параметров $m = 1{,}5$, $g = 0{,}2$ приведены на рис. 5, который также иллюстрирует хаотический аттрактор.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье дано общее определение динамической системы и приведены примеры динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Такие динамические системы могут иметь четыре типа решений: состояние равновесия, периодическое движение, квазипериодическое движение и хаотическое. Этим типам решений соответствуют аттракторы системы в виде устойчивого равновесия, предельного цикла, квазипериодического аттрактора (p-мерного тора) и хаотического (или странного) аттрактора. Важным является то, что простейшие типы квазипериодических и хаотических аттракторов могут реализовываться в динамических системах с размерностью фазового пространства не менее трех.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аносов Д.В.* Динамическая система // Математическая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1979.

2. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.

3. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.

4. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.

5. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.

6. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. М.: Наука, 1990.

* * *

Вадим Семенович Анищенко, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой радиофизики Саратовского государственного университета, заслуженный деятель науки Российской Федерации, член-корреспондент Международной академии информатизации. Область научных интересов: динамика нелинейных систем, теория колебаний и статистическая радиофизика. Автор более 200 научных работ, шесть из которых научные монографии.