

## Глава 1. Основные понятия и определения

Большинство течений жидкостей, газов и плазмы в природе и в технических устройствах оказываются турбулентными. Ламинарный режим течения представляет собой скорее исключение из правил, – наблюдается он довольно редко. Движение воздуха в земной атмосфере, воды в реках и морях, газа и плазмы в атмосферах звезд и в межзвездных туманностях, течения в трубах, каналах, струях, в пограничных слоях около движущихся в жидкости или газе твердых тел, в следах за такими телами, – все эти окружающие нас процессы носят турбулентный характер. Образно говоря, мы существуем в турбулентном мире.

Первые исследования турбулентности обычно связывают с именем великого итальянского художника, инженера и ученого Леонардо да Винчи. Именно его рукопись, относящаяся примерно к 1500 г., представляет собой первое задокументированное наблюдение турбулентности. Кроме серии рисунков турбулентных потоков (Рис. 1.1) в рукописи есть строки, содержащие сам термин “*турбулентность*” (цитируем по [Frisch, 1995]):

*«...doue laturbolenza dellacqua sigenera  
doue la turbolenza dellacqa simantiene plugho  
doue laturbolenza dellacqua siposa...»*

В переводе эти строки означают:

*«...где турбулентность воды возбуждается  
где турбулентность воды сохраняется надолго  
где турбулентность воды затухает...».*

Но Леонардо да Винчи, конечно, не создавал никаких теорий турбулентности, он выступил скорее как внимательный наблюдатель

природных явлений. Введению термина «турбулентность» в круг научной терминологии мы, по-видимому, обязаны британскому физику Уильяму Томсону (лорду Кельвину).



*Рис.1.1. Зарисовки турбулентных потоков Леонардо да Винчи*

Активное изучение турбулентности началось в 19-м веке в связи с анализом режимов течений жидкостей и газов. Позже, в 20-м веке, было обнаружено, что переход от регулярного или ламинарного движения к хаотическому или турбулентному присущ не только гидродинамическим течениям, но и иным средам и полям (акустическим полям в твердых телах и газах, электромагнитным полям в плазме и т.п.). Известно и такое явление как волновая турбулентность [Гурбатов и др., 1983; Zakharov et al., 2004].

Работы по исследованию гидродинамической турбулентности начались с анализа режимов течений в трубах [Hagen, 1839; Poiseuille,

1840]. Но наиболее известная среди специалистов по турбулентности публикация на эту тему принадлежит Осборну Рейнольдсу [Reynolds, 1883]. Подробнее на результатах Рейнольдса мы остановимся в разделе 1.2. Заметим, что интерес к теме перехода течений в трубах от ламинарного режима к турбулентному сохранился до настоящего времени [Eckhardt et al., 2007].

### **1.1. Общефизическое и гидродинамическое определения турбулентности. Турбулентные и ламинарные течения**

Турбулентные процессы любой природы попадают под следующее общефизическое определение [Физическая энциклопедия, 1998]:

**Турбулентность** (от лат. *turbulentus* – беспорядочный) сложное, неупорядоченное во времени и пространстве поведение *диссипативной среды* (или поля), детали которого не могут быть воспроизведены на больших интервалах времени при сколь угодно точном задании начальных и граничных условий. Такая невоиспроизводимость есть следствие собственной сложной динамики среды, определяемой неустойчивостью индивидуальных движений, и не связана с неполнотой описания, флуктуациями или действием внешних шумов.

**Диссипативная среда** – распределенная физическая система, в которой энергия одних движений или полей (обычно упорядоченных) необратимым образом переходит в энергию других движений или полей (обычно хаотических).

В этом учебном пособии речь будет идти преимущественно о гидродинамической турбулентности. Кроме того, мы ограничимся

приближением несжимаемой жидкости (или несжимаемого газа), которое применимо ко многим задачам физики атмосферы и океана.

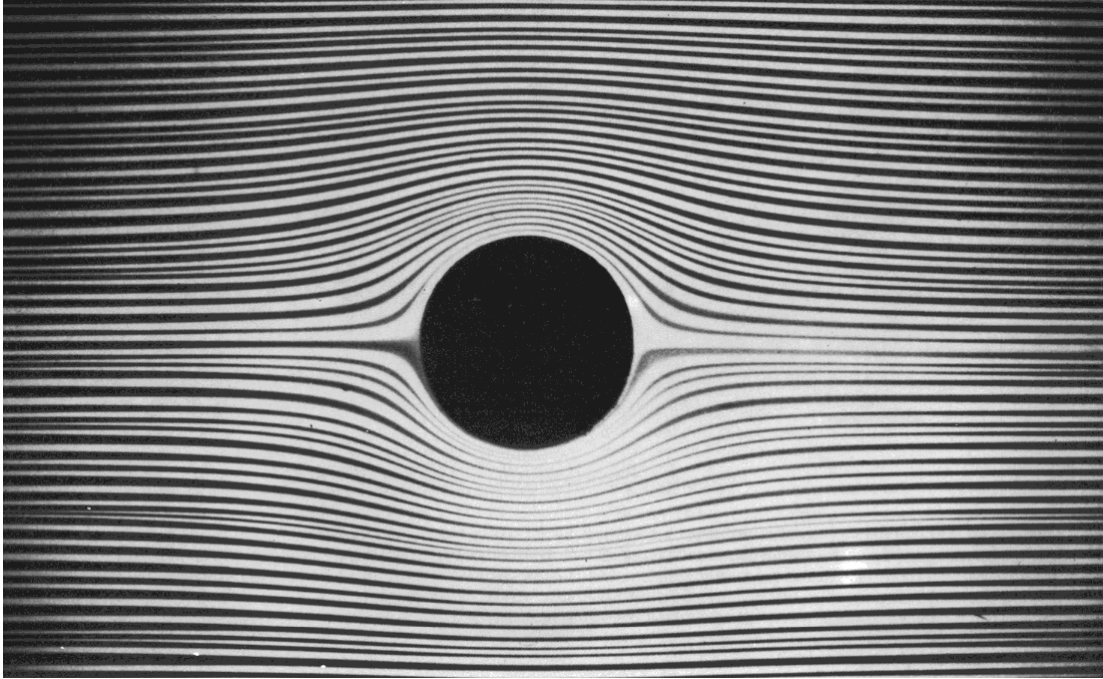
Важность изучения турбулентности для динамики атмосферы и океана обусловлена ее определяющей ролью в процессах обмена импульсом, энергией, теплом и веществом. Турбулентные вихри обеспечивают дополнительный перенос этих характеристик, который существенно превосходит молекулярный перенос. Описание важнейших геофизических процессов, таких как динамика погоды и климата, формирование первичной продуктивности в океане, транспорт примесей в океане и атмосфере, динамика течений во внешнем жидком ядре Земли просто невысказимо без учета турбулентности. Турбулентность потоков необходимо принимать во внимание и во многочисленных инженерно-технических задачах (расчет обтекания авиалайнеров, морских судов и автомобилей, движение жидкостей и газов по трубопроводам и др.).

Выше было дано общезначительное определение турбулентности. Перед тем как определить гидродинамическую турбулентность, напомним, что в жидкостях и газах различают ламинарные и турбулентные течения.

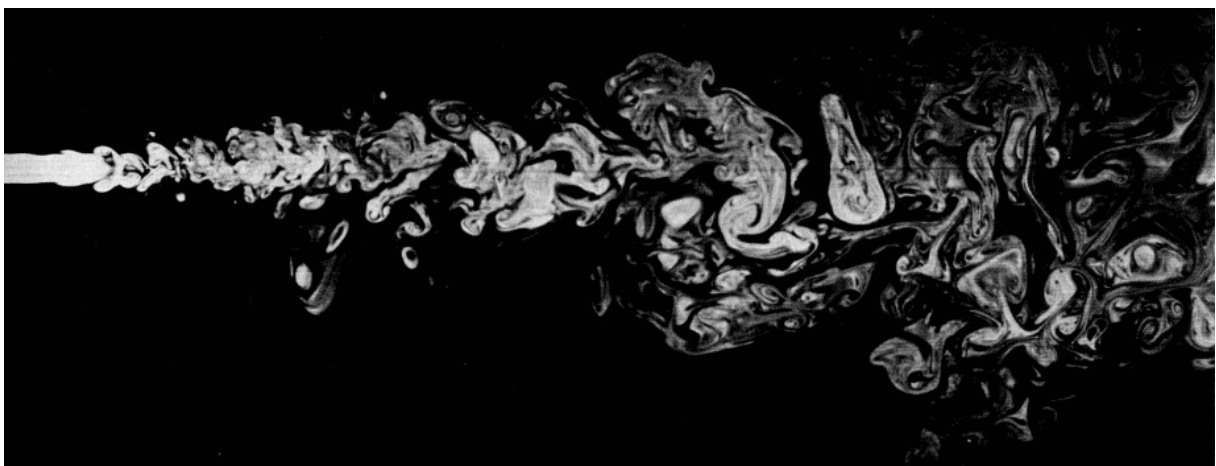
**Ламинарные** – спокойные и плавные течения, меняющиеся лишь в связи с изменениями действующих сил или внешних условий.

**Турбулентные** – течения, в которых скорость, давление, температура и другие гидродинамические величины испытывают хаотические флуктуации, создаваемые наличием в этих течениях многочисленных вихрей различных размеров, причем отсутствует однозначная связь между размерами вихрей и периодом их вращения, а сдвиги по фазе между колебаниями различных характеристик хаотически изменяются с частотой таких колебаний.

Турбулентным потокам свойственно явление чередования ламинарной и турбулентной форм движения, которое именуется *перемежаемостью*.



*Рис. 1.1.1. Ламинарное обтекание круга в лотке Хил-Шоу. Линии тока видны благодаря подкраске воды, текущей со скоростью 1 мм/с между двумя стеклянными пластинками, отстоящими друг от друга на расстояние 1 мм ( $Re \sim 1$ ). Рисунок заимствован из альбома [Ван-Дайк, 1986].*



*Рис. 1.1.2. Турбулентная струя воды (внедрение струи в окружающую жидкость при  $Re=2300$ ). Рисунок заимствован из альбома [Ван-Дайк, 1986].*

На Рис. 1.1.1 и Рис. 1.1.2 представлены примеры ламинарного и турбулентного течений, заимствованные из альбома течений [Ван-Дайк, 1986].

В определении гидродинамической турбулентности следует обратить внимание на три следующих важных момента:

1. Главный признак турбулентности – **хаотичность**. Но не любое хаотичное течение будет турбулентным. Например, в природных условиях (в океане или атмосфере) суперпозиция акустических, поверхностных и внутренних волн может приводить к движениям, которые характеризуются весьма значительной нерегулярностью.
2. Вторым признаком – **наличие вихрей**, т.е. турбулентное течение обязательно является вихревым.
3. **Размер вихря не связан с периодом его вращения**. Иными словами, для вихрей не существует связи типа дисперсионного соотношения  $\omega = \omega(k)$ . Но такая связь присуща волновым процессам. Благодаря дисперсионному соотношению волновые движения можно отличить от турбулентности.

Заметим, что определение гидродинамической турбулентности, конечно, не противоречит общефизическому определению, но дополняет его такими признаками явления, которые позволяют на практике классифицировать то или иное течение как турбулентное.

В качестве любопытной исторической справки приведем еще несколько известных определений турбулентности. Эти определения, несомненно, позволят читателю создать наиболее полный образ рассматриваемого явления.

**Определение Тейлора-Кармана (1937 г):** Турбулентность – это неупорядоченное движение, которое в общем случае возникает в жидкостях, газообразных или капельных, когда они обтекают непроницаемые поверхности или же когда соседние друг с другом потоки одной и той же жидкости следуют рядом или проникают один в другой (цитируем по переводной версии книги [Хинце, 1963]; упрощенный вариант этого определения приведен в статье [Карман, 1939]).

**Определение Хинце (1959 г.):** Турбулентное движение жидкости предполагает наличие неупорядоченного течения, в котором различные величины претерпевают хаотическое изменение по времени и пространственным координатам и при этом могут быть выделены статистически точные их осредненные значения (цитируем по переводной версии книги [Хинце, 1963]).

**Определение Бредшоу (1971 г):** Турбулентность – это трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения. Она является обычным состоянием движущейся жидкости, за исключением течений при малых числах Рейнольдса (цитируем по переводной версии книги [Бредшоу, 1974]).

**Определение Монино-Озмидова (1978 г):** Турбулентностью называется явление, наблюдающееся в очень многих завихренных течениях жидкостей и газов в природе и в технических устройствах и заключающееся в том, что термодинамические и гидродинамические характеристики таких течений (вектор скорости, температура, давление, концентрации примесей, плотность среды, скорость звука, электропроводность, показатель преломления, и т. п.) испытывают хаотические флуктуации,

*создаваемые наличием в этих течениях многочисленных вихрей различных размеров, и вследствие этого изменяются в пространстве и с течением времени весьма нерегулярно, причем у пространственных распределений этих характеристик компонентам Фурье с фиксированными волновыми векторами соответствуют широкие интервалы частот (т.е. однозначные дисперсионные соотношения отсутствуют), а сдвиги по фазе между колебаниями различных характеристик в фиксированных точках пространства хаотически изменяются с частотой таких колебаний* (первоначальная версия определения опубликована в статье [Монин, 1978], мы цитируем более полное определение, содержащееся в монографии [Монин, Озмидов, 1981]).

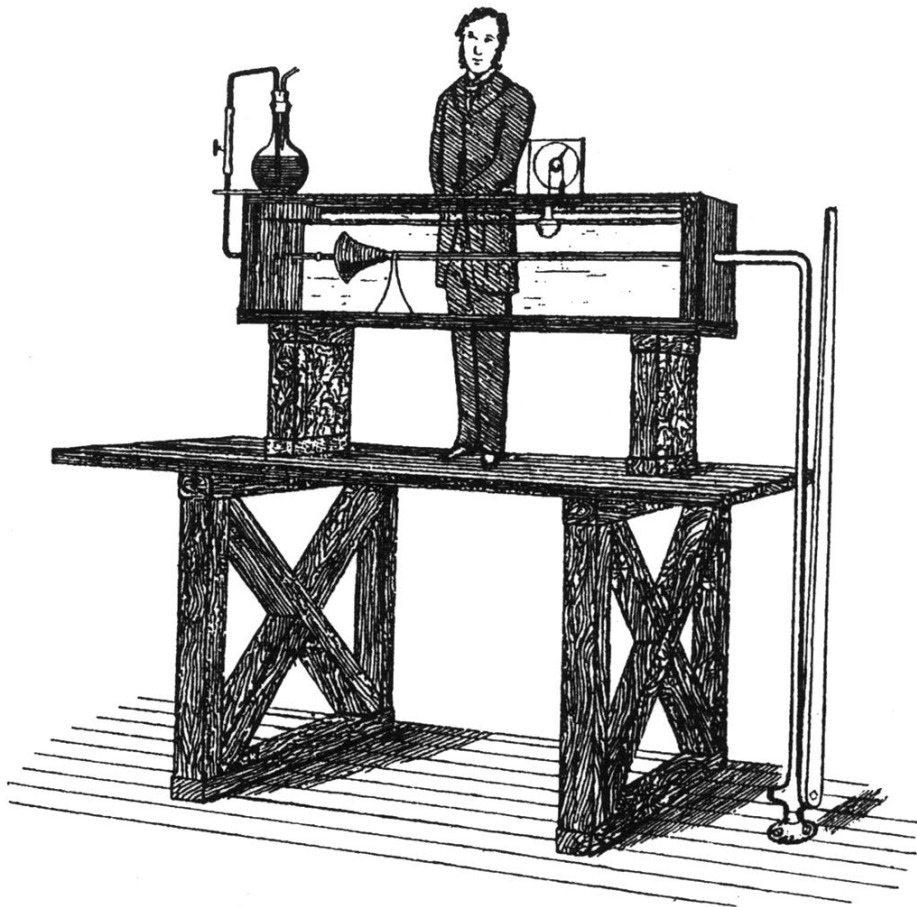
**Определение Чэпмена-Тобака (1985):** *Турбулентность – это любое хаотическое решение трехмерных уравнений Навье-Стокса, чувствительное к начальным условиям и появляющееся как результат последовательного ряда неустойчивостей ламинарного потока, возникающих при постепенном увеличении значения параметра бифуркации* [Chapman, Tobak, 1985].

Внимательный читатель несомненно заметил, что определение Монина-Озмидова наиболее близко соответствует приведенному выше определению гидродинамической турбулентности, а в определении Чэпмена-Тобака входит наиболее важная часть концепции, заключенной в общефизическом определении турбулентности – чувствительность к начальным условиям.

## 1.2. Эксперименты Осборна Рейнольдса



Знаменитое экспериментальное исследование перехода от ламинарного течения в трубе к турбулентному было выполнено Осборном Рейнольдсом во второй половине 19-го века. В то время мгновенная фотография еще не была распространена, поэтому эксперименты документированы не фотографиями, а рисунками. В Манчестерском университете (University of Manchester) до сих пор сохранилась оригинальная экспериментальная установка (Рис. 1.2.1).



*Рис. 1.2.1. Экспериментальная установка Осборна Рейнольдса. Рисунок заимствован из [Rott, 1990]. Оригинальная версия рисунка опубликована в статье [Reynolds, 1883].*

В бассейне с прозрачными стенками, который заполнялся водой, располагалась стеклянная трубка с воронкообразным расширением на конце. В экспериментах Рейнольдс использовал трубки трех различных диаметров: 1, 1/2 и 1/4 дюйма (1 дюйм = 2.54 см). Бассейн размещался на возвышении, достаточно высоком для обеспечения критических скоростей

течения воды в трубе за счет перепада давления. Скорость течения контролировалась измерениями уровня воды в бассейне. Для визуализации режимов течения у входа в воронку в воду вводилась тонкая струйка красителя.

При малых скоростях течения подкрашенная струйка вытягивалась вдоль оси трубки на протяжении всей ее длины (Рис. 1.2.2а). При достаточно больших скоростях в некоторой точке, которая всегда располагалась достаточно далеко от воронкообразного входа, подкрашенная струйка внезапно смешивалась с окружающей водой (Рис. 1.2.2б). Подсветка течения вспышками электрических разрядов позволила Рейнольдсу различить в области смешения отдельные вихри (Рис. 1.2.2в).

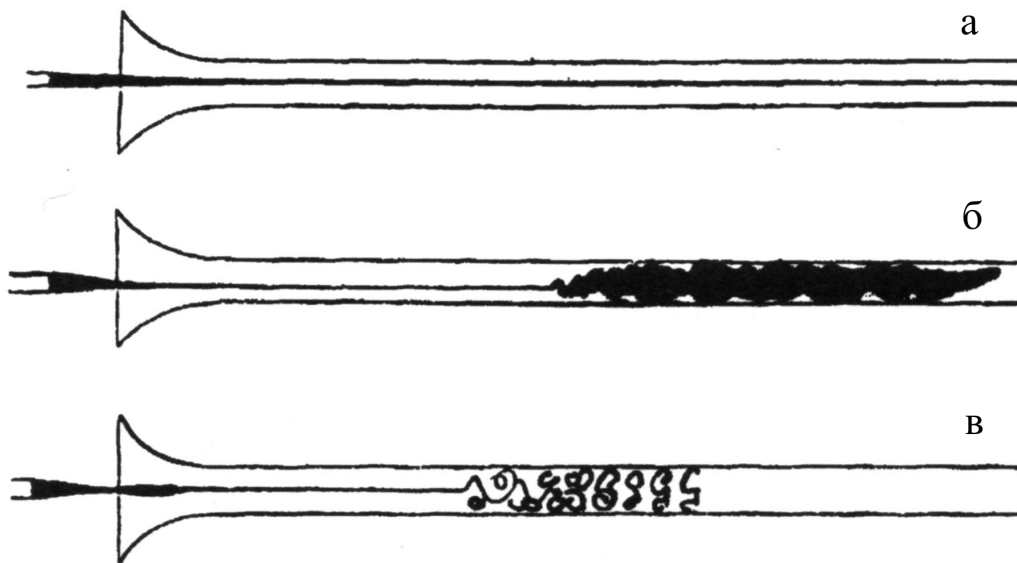
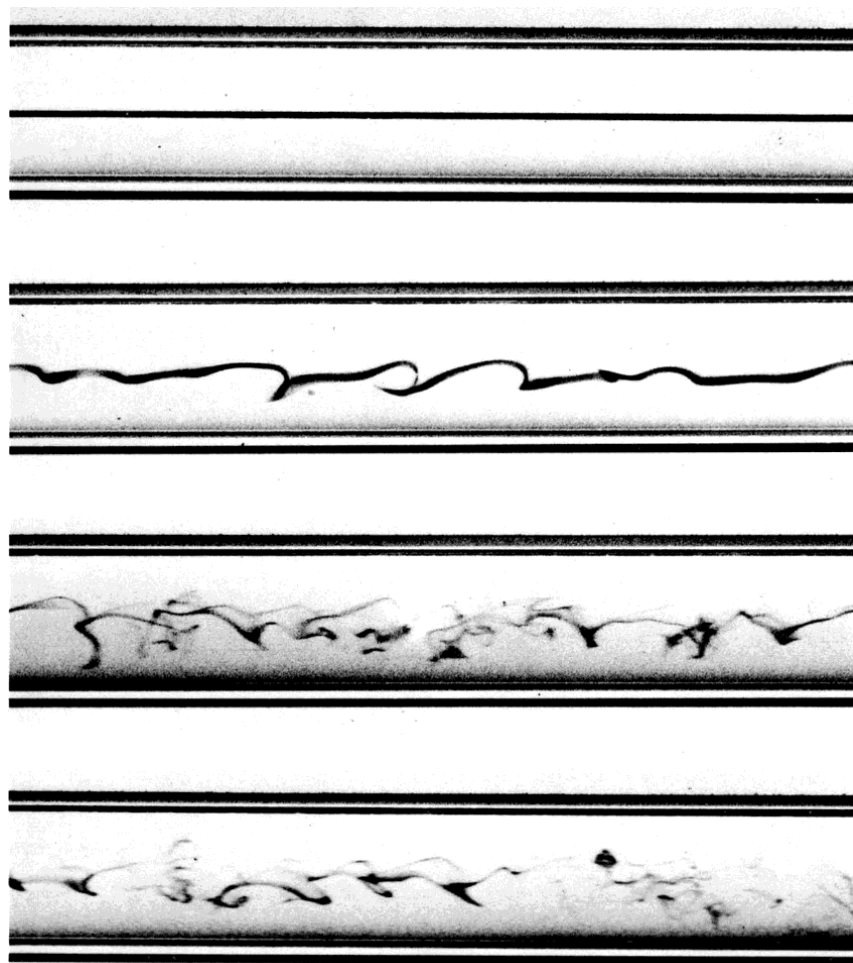


Рис. 1.2.2. Режимы течения в экспериментах Осборна Рейнольдса: а – ламинарное течение, б – турбулентное течение, в – турбулентное течение, подсвеченное вспышкой (электрическим разрядом). Оригинальная версия рисунка опубликована в статье [Reynolds, 1883].

Эксперименты Рейнольдса показали, что переход от ламинарного к турбулентному режиму происходит, когда безразмерная величина, составленная из скорости течения, диаметра трубы и вязкости  $Re = ud/\nu$

(ныне эта величина именуется число Рейнольдса) превысит критическое значение  $Re_c = 1.283 \cdot 10^4$  [Rott, 1990]. Рейнольдс заметил, что с ростом температуры переход к турбулентности наступает при меньших скоростях течения. При увеличении температуры от  $5^\circ\text{C}$  до  $22^\circ\text{C}$  критическая скорость падала в 1.4 раза. Этот эффект был правильно интерпретирован Рейнольдсом как проявление уменьшения вязкости воды с ростом температуры.



*Рис. 1.2.3. Повторение экспериментов Рейнольдса столетие спустя. На верхнем снимке видна струйка подкрашенной воды, которая остается невозмущенной. Ниже (на 2 снимке) показан переход к турбулентности, на снимках 3 и 4 – развитая турбулентность. Рисунок заимствован из альбома [Ван-Дайк, 1986].*

Кроме того, Рейнольдс отмечал, что критическое значение «числа Рейнольдса» не является универсальным, а зависит от уровня фоновых возмущений. По современным данным, для течений в трубах этот параметр

варьируется от  $1 \cdot 10^3$  (при существенных возмущениях у входа в трубу) до  $4.5 \cdot 10^4$  (в тщательно контролируемом потоке, свободном от возмущений) [Thorpe, 2007].

Рейнольдс опубликовал свою работу в журнале *Philos. Trans. R. Soc.* [Reynolds, 1883]. Рецензентами этой статьи выступили такие знаменитые ученые, как Джордж Стокс и Лорд Рэлей. В обзоре [Jackson and Launder, 2007] можно ознакомиться с уникальным историческим документом – фотокопией рецензии Джорджа Стокса.

Эксперименты Рейнольдса были повторены на его установке столетие спустя. Фотографии наблюдаемых режимов течений включены в альбом течений жидкости и газа [Ван-Дайк, 1986] (Рис. 1.2.3). Интересно, что из-за интенсивного уличного движения в современном Манчестере критическое значение числа  $Re_c$  оказалось ниже величины, которую получил сам Осборн Рейнольдс во второй половине 19-го века.

### **1.3. Сдвиговая неустойчивость. Число Рейнольдса**

Переход от ламинарного режима течения к турбулентному происходит в результате потери устойчивости. Для тех, кто знаком с классической механикой, привычным является понятие устойчивости положения равновесия. Хорошей иллюстрацией здесь служит шарик на горке или в лунке (Рис. 1.3.1). В обоих случаях мы имеем дело с ситуацией, когда равнодействующая всех сил, действующих на шарик (сила тяжести и сила реакции опоры), равна нулю. Но в первом случае положение равновесия неустойчиво, т.к. любое, даже ничтожно малое, отклонение от положения равновесия непременно приведет к образованию скатывающей силы, в результате действия которой шарик покинет положение равновесия. Во

втором случае положение равновесия оказывается устойчивым, т.к. при отклонении от положения равновесия возникает сила, стремящаяся вернуть шарик в исходное положение.

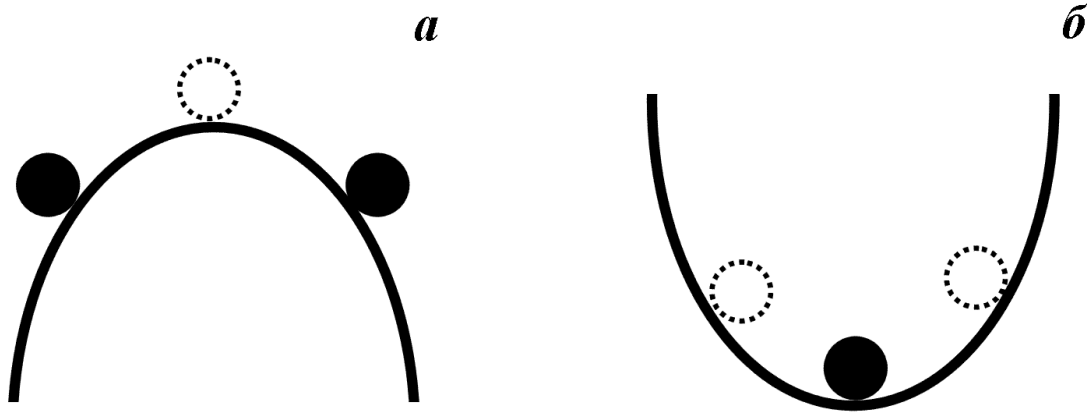


Рис. 1.3.1. Неустойчивое (а) и устойчивое (б) положения равновесия.

В реальности любое положение равновесия постоянно зондируется на устойчивость различными флуктуациями. Поэтому ситуация неустойчивого положения равновесия «шарик на горке» практически неосуществима, в то время как ситуация устойчивого положения равновесия «шарик в лунке» несомненно может быть реализована.

Понятие устойчивости применимо не только к положению равновесия, но и к режиму движения, например, к режиму течения жидкости или газа. В наиболее простых случаях речь идет об устойчивости стационарных течений. Но возможна постановка задачи и об устойчивости нестационарных, например периодических течений.

Наиболее известный в гидродинамике вид неустойчивости – **сдвиговая неустойчивость** (неустойчивость тангенциальных разрывов скорости или неустойчивость Кельвина-Гельмгольца), которая реализуется, когда один слой жидкости “скользит” по другому. Означенная ситуация свойственна многим реальным природным течениям. Неустойчивости в данном случае

подвержено положение границы между слоями жидкости, которые движутся с различными скоростями.

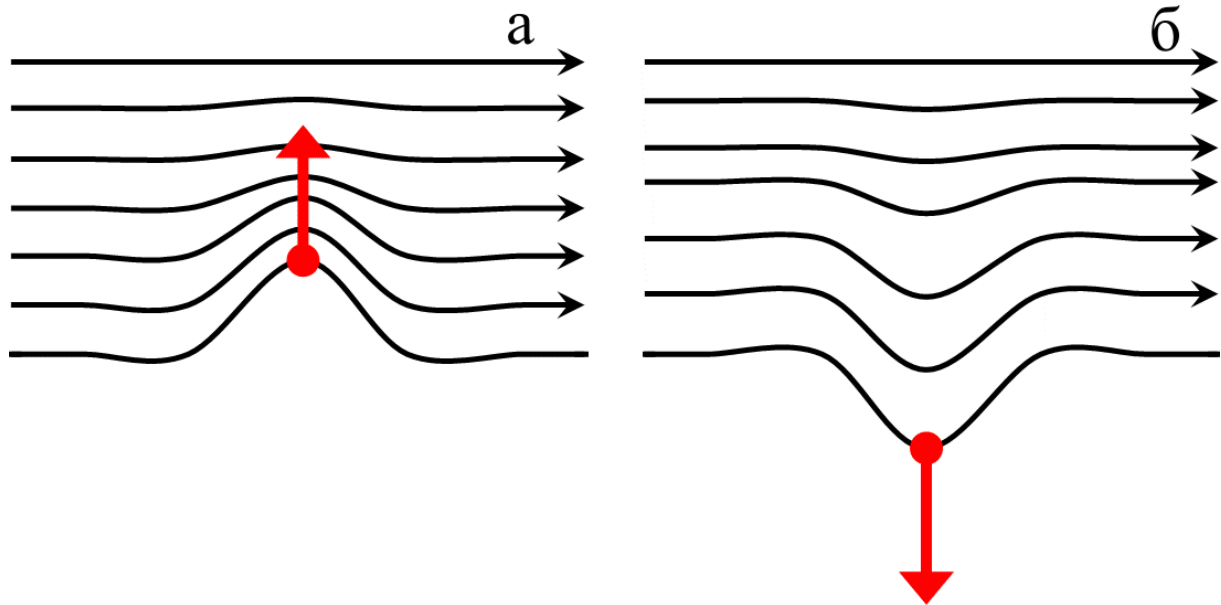


Рис. 1.3.2. Сдвиговая неустойчивость.

Физическую интерпретацию сдвиговой неустойчивости можно дать на основе уравнения Бернулли

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const}, \quad (1.3.1)$$

которое объясняет известный парадокс гидромеханики: “давление в узкой части трубы меньше, чем в широкой”. Свяжем систему отсчета с одним из слоев жидкости. На Рис. 1.3.2 этот слой показан как нижний. В такой системе отсчета нижний слой покоится, а верхний движется с некоторой скоростью. Слои разделены поверхностью (плоскостью), на которой скорость течения терпит разрыв. Предположим, что в результате некоторых флуктуаций поверхность разрыва выгибается в сторону области, где скорость течения больше (Рис. 1.3.2а). Тогда, в соответствии с уравнением Бернулли, давление над выступом (в «узкой части трубы») уменьшится, и, следовательно, реализуется положительная обратная связь – поверхность раздела продолжит выгибаться. Можно еще сказать, что на

выступ со стороны потока будет действовать подъемная сила – как на крыло самолета. Очевидно, что в случае, когда поверхность разрыва случайным образом выгнется в другую сторону (Рис. 1.3.2б), вновь возникнет положительная обратная связь – повышение давления в «широкой части трубы», которое будет способствовать росту исходного возмущения. Иными словами, поверхность раздела между слоями жидкости, текущими с разными скоростями, является неустойчивой по отношению к бесконечно малым флуктуациям.



*Рис. 1.3.3. Сдвиговая неустойчивость. Нижний поток движется влево быстрее, чем верхний. Рисунок заимствован из альбома [Ван-Дайк, 1986].*

Характерную картину проявления сдвиговой неустойчивости можно наблюдать не только в лабораторном эксперименте (Рис. 1.3.3), но и в природе (Рис. 1.3.4).



Рис. 1.3.4. Волны Кельвина-Гельмгольца в облаках. Фотография заимствована с сайта <http://cloudappreciationsociety.org/>.

Обратим внимание на то, что в соответствии с уравнением Бернулли, изменение давления определяется изменением скорости течения. При этом член  $u^2/2$  в уравнении возникает из нелинейного члена уравнения Навье-Стокса  $(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}$ . Этот факт наводит на мысль о том, что «источник неустойчивости» каким-то образом связан с нелинейностью уравнений гидродинамики.

Сдвиговой неустойчивости противостоит молекулярная вязкость, которая обеспечивает *необратимый* поток импульса на молекулярном уровне из областей с большей скоростью в области с меньшей скоростью. Математическое выражение этого процесса заключено в уравнении Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v}. \quad (1.3.2)$$

Если изменение скорости связывать лишь с силами вязкости, то в линейном приближении из уравнения (1.3.2) получаем уравнение типа уравнения диффузии

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu\Delta\vec{v}. \quad (1.3.3)$$

Характер решения уравнения (1.3.3) хорошо известен: любая пространственная неоднородность с течением времени «расплывается» в пространстве. Итак, если на поверхности тангенциального разрыва (или в любой иной области жидкости) возникает некоторое возмущение (пространственная неоднородность поля скорости), то вязкость будет способствовать уничтожению этой неоднородности. Вторые производные, составляющие оператор Лапласа, всегда имеют «нужный знак» для уничтожения пространственной неоднородности. Кстати, сам



тангенциальный разрыв представляет собой «модельную конструкцию», которая в реальности, из-за действия вязкости, не может существовать как стационарное образование.

Если ввести характерные масштабы скорости  $U$  и длины  $L$ , то в уравнении Навье-Стокса (1.3.2) можно перейти к безразмерным переменным (обозначим их значком «\*») в соответствии со следующими формулами:

$$\vec{v}^* = \vec{v}/U, \quad t^* = tU/L, \quad \vec{\nabla}^* = \vec{\nabla}/L, \quad p^* = p/\rho U^2, \quad \Delta^* = \Delta/L^2. \quad (1.3.4)$$

Уравнение Навье-Стокса в безразмерных переменных приобретает вид:

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + (\vec{v}^*, \vec{\nabla}^*) \vec{v}^* = -\vec{\nabla}^* p^* + \frac{1}{\text{Re}} \Delta^* \vec{v}^*. \quad (1.3.5)$$

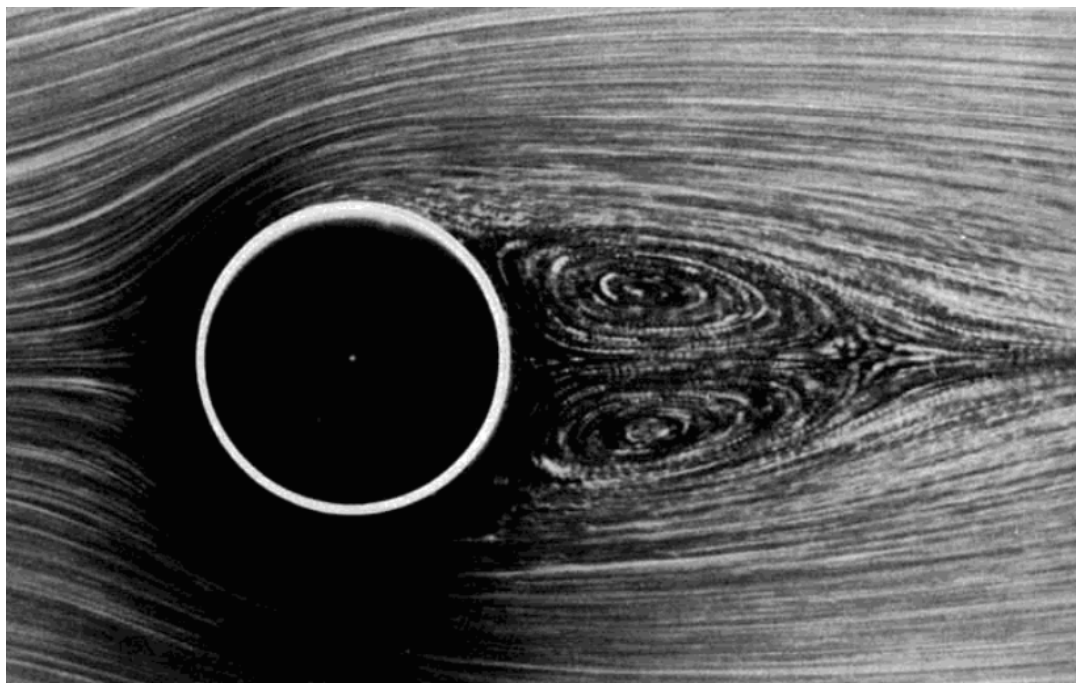
В правой части уравнения (1.3.5) появилась безразмерная величина  $\text{Re}$  – **число Рейнольдса**. Фактически эта величина представляет собой отношение членов уравнения Навье-Стокса, которые «работают» на развитие неустойчивости « $(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}$ » и против нее « $v\Delta\vec{v}$ »:

$$\frac{(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}}{v\Delta\vec{v}} \sim \frac{U^2/L}{vU/L^2} = \frac{UL}{v} \equiv \text{Re}. \quad (1.3.6)$$

Поэтому логично рассматривать **число Рейнольдса** в качестве критерия устойчивости движения. Если число Рейнольдса превышает некоторое критическое значение  $\text{Re} > \text{Re}_c$ , то движение неустойчиво и развивается турбулентность, в противном случае течение остается ламинарным.

Универсального для всех систем значения критического числа  $\text{Re}_c$  не существует по следующим причинам. Во-первых, характерные величины  $L$  и  $U$  не могут быть однозначно определены для систем с различной «геометрией». Во-вторых, значение  $\text{Re}_c$  зависит от уровня фоновых возмущений. Впрочем, для систем с определенной «геометрией» можно однозначно определить критическое значение  $\text{Re}_c$  для бесконечно малых возмущений. Такое значение рассчитывается теоретически

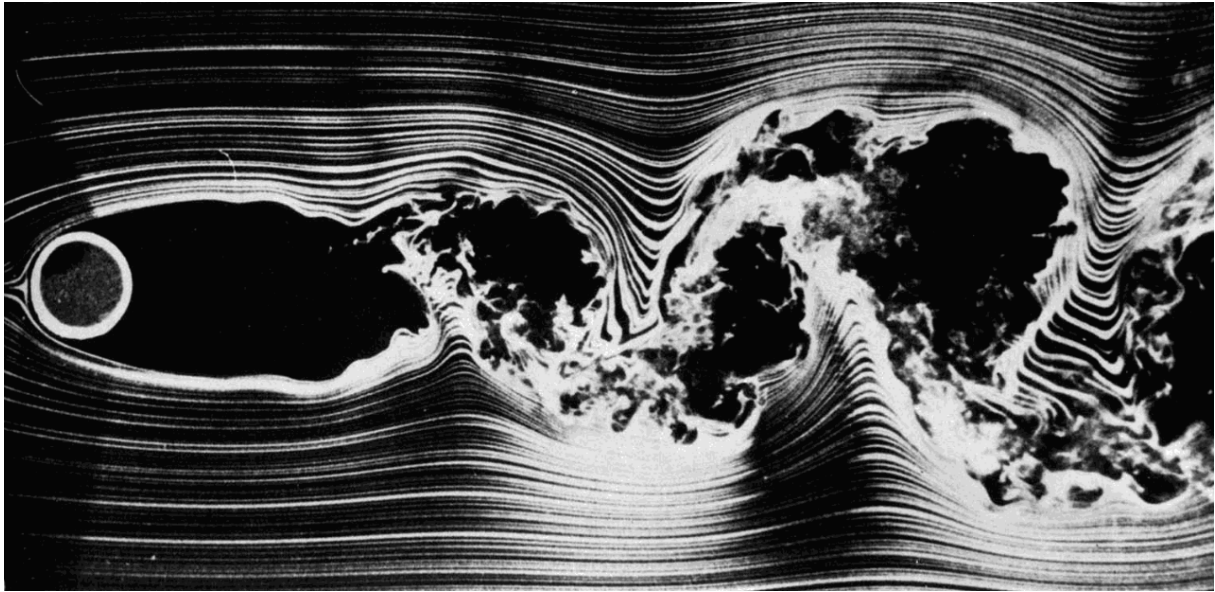
(линейный анализ устойчивости) или находится экспериментально при тщательно контролируемом уровне фоновых возмущений.



*Рис. 1.3.5. Обтекание кругового цилиндра при  $Re=26$ . Рисунок заимствован из альбома [Ван-Дайк, 1986].*



*Рис. 1.3.6. Вихревая дорожка Кармана за круговым цилиндром при  $Re=140$ . Рисунок заимствован из альбома [Ван-Дайк, 1986].*



*Рис. 1.3.7. Обтекание кругового цилиндра при  $Re=10000$ . Рисунок заимствован из альбома [Ван-Дайк, 1986].*

Остановимся подробнее на следующих двух примерах течений с определенной «геометрией»:

1. Течение между двумя параллельными плоскостями (**течение Пуазейля**). В стационарном случае известно точное решение, определяющее зависимость продольной скорости течения от поперечной координаты  $z$ :  $u = u_0 [1 - (z/h)^2]$ , где  $2h$  – расстояние между поверхностями. Экспериментально показано, что такое течение становится неустойчивым по отношению к бесконечно малым двумерным возмущениям при  $Re > Re_c = u_0 h / \nu = 5772$ . Однако по отношению к двумерным возмущениям конечной амплитуды течение неустойчиво и при меньших числах Рейнольдса.
2. При **обтекании бесконечного цилиндра** диаметра  $D$  потоком, имеющим вдали от цилиндра скорость  $U$ , число Рейнольдса можно однозначно определить как  $Re = UD/\nu$ . При  $Re < 1$  обтекание

ламинарное и симметричное – как и сам цилиндр (Рис. 1.1.1). При  $9.6 < Re < 26$  за цилиндром формируются стоячие вихри (Рис. 1.3.5). И, наконец, при  $Re > 30(40)$  течение меняется качественным образом: оно начинает зависеть от времени периодически – образуется знаменитая дорожка Кармана (Рис. 1.3.6). При  $Re > 240$  течение становится турбулентным и *неповторимым*, в том смысле, что при каждом новом эксперименте будет наблюдаться новая реализация поля скорости (Рис. 1.3.7).

#### 1.4. Конвективная неустойчивость. Число Рэлея

Рассмотрим еще один распространенный в природных системах вид неустойчивости. **Конвективной (Рэлея-Бенара) неустойчивостью** называется неустойчивость в газовой или жидкой среде, находящейся в поле силы тяжести  $\vec{g}$  и пронизываемой потоком тепла с компонентой в направлении, противоположном вектору  $\vec{g}$ . Этот тип неустойчивости объясняется появлением силы плавучести при случайных вертикальных перемещениях элемента вещества.

Представим себе ситуацию, когда более плотный (холодный) слой жидкости или газа находится выше менее плотного (теплого) слоя. Кажется, что такая ситуация всегда является неустойчивой. Покажем, что это не совсем так. Если легкая частица нижнего слоя перемещается в верхний более тяжелый слой, то, разумеется, возникнет сила плавучести (разница между силой Архимеда и силой тяжести), поддерживающая это движение. Но такой сценарий верен при условии, что перемещение было достаточно быстрым, и температура между частицей и окружающей средой не успела выровняться. Поэтому основной вопрос относительно

устойчивости может быть сформулирован так: успеет ли отрелаксировать разность температуры между жидким элементом и его окружением, пока этот элемент перемещается?

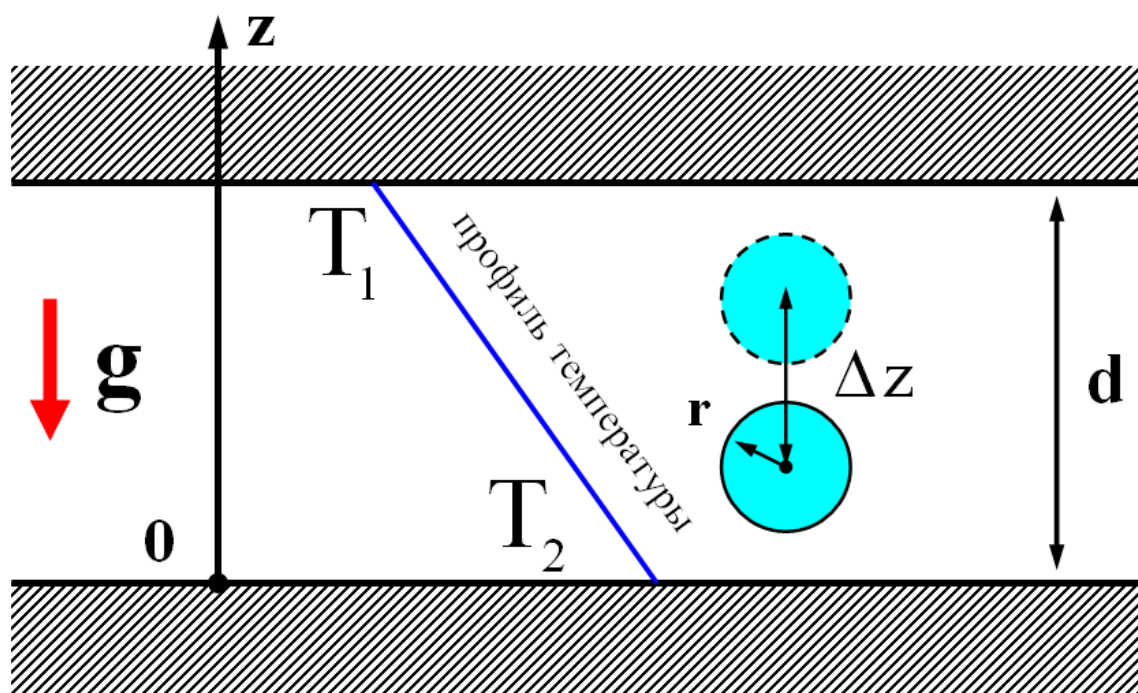


Рис. 1.4.1. К постановке задачи о конвективной неустойчивости.

Пусть  $T_2 - T_1 > 0$  – перепад температур в слое жидкости толщиной  $d$  (см. Рис. 1.4.1). Начало системы отсчета расположим на нижней поверхности, имеющей температуру  $T_2$ , ось  $Oz$  направим противоположно вектору ускорения силы тяжести – вертикально вверх. Если конвективные течения в жидкости отсутствуют, то через жидкость будет идти молекулярный поток тепла, и установится стационарный линейный профиль температур

$$T(z) = T_2 - \frac{T_2 - T_1}{d} z. \quad (1.4.1)$$

В дальнейших рассуждениях будем следовать статье [Гарифуллин, 2000]. Рассмотрим частицу жидкости с характерным размером  $r$  (для определенности можно говорить про круглую частицу радиуса  $r$ ). Пусть эта частица переместилась вверх на расстояние  $\Delta z$ . Абсолютная величина перепада плотностей между сместившейся частицей и ее окружением будет:

$$|\Delta\rho| = \alpha \rho \Delta T = \alpha \rho \frac{T_2 - T_1}{d} \Delta z, \quad (1.4.2)$$

где  $\alpha$  – коэффициент объемного температурного расширения.

Оценим силу плавучести  $F_b$ , действующую на сместившуюся частицу объема  $V$

$$F_b = gV\Delta\rho = g \frac{4\pi r^3}{3} \alpha \rho \frac{T_2 - T_1}{d} \Delta z. \quad (1.4.3)$$

Сила плавучести при движении уравновешивается силой вязкого трения (формула Стокса)

$$F_s = 6\pi\rho\nu r U, \quad (1.4.4)$$

где  $U$  – скорость движения,  $\nu$  – кинематическая вязкость. Приравнивая силы  $F_b$  и  $F_s$ , задаваемые формулами (1.4.3) и (1.4.4), находим скорость

$$U = g\alpha \frac{2r^2}{9} \frac{T_2 - T_1}{\nu d} \Delta z \sim g\alpha r^2 \frac{T_2 - T_1}{\nu d} \Delta z. \quad (1.4.5)$$

Зная скорость, оценим время, необходимое для преодоления частицей расстояния  $\Delta z$

$$\tau_{\Delta z} \sim \frac{\Delta z}{U} = \frac{d \nu}{g \alpha r^2 (T_2 - T_1)}. \quad (1.4.6)$$

Теперь оценим время температурной релаксации частицы радиуса  $r$ . Из простых размерностных соображений получаем

$$\tau_T \sim r^2 / \chi, \quad (1.4.7)$$

где  $\chi$  [ $\text{м}^2/\text{с}$ ] – молекулярный коэффициент теплопроводности.

Ясно, что чем крупнее элемент жидкости, тем он более склонен к движению (больше время релаксации и выше скорость). Поэтому при исследовании условия возникновения движения целесообразно рассматривать частицы с максимально возможными размерами, т.е.  $r \sim d$ .

Итак, движение элемента жидкости будет поддерживаться, если время температурной релаксации существенно превосходит время движения частицы:  $\tau_T \gg \tau_{\Delta z}$ . Используя выражения (1.4.6) и (1.4.7), приходим к следующему условию:

$$\frac{g \alpha (T_2 - T_1) d^3}{\chi \nu} \equiv Ra \gg 1. \quad (1.4.8)$$

Полученная безразмерная комбинация параметров именуется **числом Рэлея** и являет собой критерий конвективной неустойчивости. Получить число Рэлея можно строго – в результате приведения уравнений Буссинеска к безразмерному виду (см. раздел 2.6). Отметим, что в уравнениях Буссинеска возникает не только число Рэлея, но и **число Прандтля**  $Pr = \nu / \chi$ . Таким образом, режим конвекции определяется не одним, а двумя безразмерными параметрами:  $Ra$  и  $Pr$ .

В общем случае критическое значение числа Рэлея зависит от типа границ. Если, например, жидкость заключена между двумя жесткими поверхностями, то  $Ra_c = 1707.76$ .

Из формулы (1.4.8) видно, что устойчивость жидкого слоя сильно зависит от его толщины  $d$ . При подогреве снизу слоя воды толщиной  $d=1\text{ м}$  неустойчивость возникает уже при ничтожно малом перепаде температур  $T_2 - T_1 \sim 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}$ . При  $d=1\text{ см}$  критический перепад температур составляет  $T_2 - T_1 \sim 0.1 \text{ }^\circ\text{C}$ , а слой толщиной  $d=1\text{ мм}$  практически абсолютно устойчив (напомним, что при нормальных условиях вода существует в жидкой фазе в интервале температур  $0 - 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

Следует подчеркнуть, что развитию конвективной неустойчивости препятствует не только молекулярная вязкость, но и молекулярная теплопроводность. При прочих равных условиях развитие конвекции в жидкости с высоким значением молекулярной теплопроводности затруднено.

На Рис. 1.4.2 представлен пример визуализации процесса развития конвективной неустойчивости.

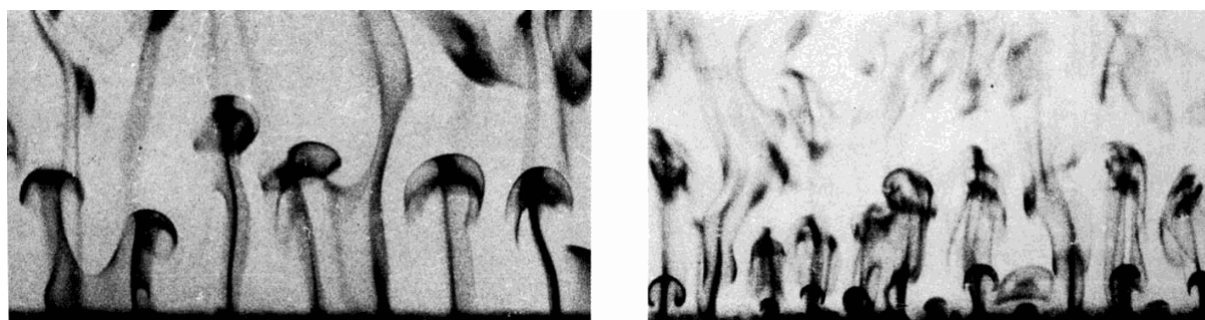


Рис. 1.4.2. Грибообразные термики, всплывающие от нагретой медной поверхности. На правом снимке скорость нагрева выше. Рисунок заимствован из альбома [Ван-Дайк, 1986].

В заключение раздела приведем значения динамической и кинематической вязкости, а также числа Прандтля для некоторых веществ при температуре 20°C.

Таблица 2.1. Динамическая и кинематическая вязкости, число Прандтля для некоторых веществ при температуре 20°C.

Вещество	$\eta$ [г/с·см]	$\nu$ [см <sup>2</sup> /с]	Pr
вода	0.01	0.01	0.733
воздух	$1.8 \cdot 10^{-4}$	0.15	6.75
спирт	0.018	0.022	16.6
глицерин	8.5	6.8	7250
ртуть	0.0156	0.0012	0.044