

## Глава 2. Линейный анализ устойчивости

В заданных стационарных условиях для системы уравнений Навье-Стокса должно существовать точное стационарное решение. Формально это решение существует при любых числах Рейнольдса. Но не всякое решение может реализовываться в природе. Решение должно не только удовлетворять уравнениям движения, но еще и являться устойчивым. В противном случае, когда любое малое возмущение стремится возрасти, течение не может реализоваться как стационарное.

В этой главе мы рассмотрим общий подход к анализу стационарного течения на устойчивость и применения этого подхода к некоторым классическим задачам.

### 2.1. Общий подход к анализу стационарных течений на устойчивость

Математическое исследование устойчивости стационарных течений по отношению к бесконечно малым возмущениям (*линейный анализ устойчивости*) проводится следующим образом. На первом этапе находится стационарное решение системы уравнений Навье-Стокса

$$\begin{cases} (\vec{v}_0 \vec{\nabla}) \vec{v}_0 = -\frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}_0, \\ \operatorname{div} \vec{v}_0 = 0. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Для того чтобы понять, является ли течение устойчивым, в него следует внести малое возмущение и проанализировать поведение этого возмущения. Если со временем возмущение будет нарастать, то течение

неустойчиво. Если возмущение убывает, асимптотически стремясь к нулю, то течение устойчиво.

Итак, на стационарное решение системы (2.1.1)  $\vec{v}_0, p_0$  мы накладываем малые нестационарные возмущения  $\vec{v}', p'$ . Сумма стационарного решения и малых возмущений  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$ ,  $p = p_0 + p'$ , очевидно, должна удовлетворять системе уравнений Навье-Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial(\vec{v}_0 + \vec{v}')}{\partial t} + ((\vec{v}_0 + \vec{v}'), \vec{\nabla})(\vec{v}_0 + \vec{v}') = -\frac{\vec{\nabla}(p_0 + p')}{\rho} + \nu \Delta(\vec{v}_0 + \vec{v}'), \\ \operatorname{div}(\vec{v}_0 + \vec{v}') = 0. \end{cases}$$

С учетом уравнений для стационарного течения (2.1.1) и соотношения

$$((\vec{v}_0 + \vec{v}')\nabla)(\vec{v}_0 + \vec{v}') = (\vec{v}_0\vec{\nabla})\vec{v}_0 + (\vec{v}_0\vec{\nabla})\vec{v}' + (\vec{v}'\vec{\nabla})\vec{v}_0 + (\vec{v}'\vec{\nabla})\vec{v}',$$

в котором мы пренебрегаем квадратичным по  $\vec{v}'$  членом в силу его малости, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial\vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}_0\vec{\nabla})\vec{v}' + (\vec{v}'\vec{\nabla})\vec{v}_0 = -\frac{\vec{\nabla}p'}{\rho} + \nu \Delta\vec{v}', \\ \operatorname{div}\vec{v}' = 0. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Уравнения (2.1.2) *линейны* относительно искомым функций  $\vec{v}', p'$ . С их помощью можно исследовать поведение малых возмущений (будут ли они со временем затухать или увеличиваться). Важно заметить, что линейная теория работает только вблизи порога возникновения неустойчивости. Рост возмущений может привести к тому, что они перестанут удовлетворять линейным уравнениям.

В качестве возмущений, как правило, используются так называемые *нормальные возмущения*, имеющие вид  $\vec{v}'(\vec{r}, t) \sim e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$ . Анализ обычно сводится к выявлению условий, при которых частота  $\omega$  имеет отличную от нуля мнимую часть  $\operatorname{Im}(\omega)$ . Именно в этом случае возмущения получают

возможность экспоненциального роста амплитуды во времени:

$$\vec{v}'(\vec{r}, t) \sim e^{-i\omega t} = e^{-i[\operatorname{Re}(\omega) + i\operatorname{Im}(\omega)]t} = e^{\operatorname{Im}(\omega)t} e^{-i\operatorname{Re}(\omega)t}.$$

Во многих случаях от полной трехмерной задачи переходят к двумерной (плоской), что существенно упрощает анализ. Заметим, что такой переход не влияет на общность выводов, так как, в соответствии с теоремой Сквара [Squire, 1933], именно плоские возмущения являются самыми «опасными». Действительно, трехмерное возмущение представляет собой волну, распространяющуюся под некоторым углом к направлению основного течения. На возмущение влияет только та компонента течения, которая соответствует направлению волнового вектора  $\vec{k}$ . Поэтому задача для трехмерных возмущений эквивалентна двумерной задаче с меньшим числом Рейнольдса.

## 2.2. Задача о тангенциальном разрыве скорости

Применим описанный подход для анализа устойчивости плоского сдвигового течения [Helmholtz, 1868; Kelvin, 1871]. Действием вязкости мы пренебрежем. Предположим, что в области  $z > 0$  жидкость движется со скоростью  $\vec{v}_0(z) = (u_0, 0)$ , а в области  $z < 0$  жидкость покоится. Заметим, что соответствующим выбором системы координат любой тангенциальный разрыв можно представить указанным выше способом.

Пусть по поверхности раздела слабое возмущение («рябь») вида  $\xi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ . В силу того, что мы решаем линейную задачу, амплитуда возмущения значения не имеет. Поэтому для простоты мы полагаем амплитуду равной единице. Ряби соответствуют возмущения поля скорости  $\vec{v}'(x, z, t) = (u', w')$  и возмущения поля давления  $p'(x, z, t)$ . Волновое число

( $k = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны) является действительной величиной. Цель дальнейшего исследования выяснить, при каких условиях циклическая частота  $\omega$  может принимать мнимые значения. Очевидно, что именно мнимые значения частоты ассоциируются с неустойчивостью – возможностью экспоненциального роста амплитуды возмущения во времени:  $\xi \sim e^{\text{Im}(\omega)t}$ .

Поверхность раздела описывается уравнением  $S(x, z, t) \equiv \xi(x, t) - z = 0$ . На этой поверхности действует кинематическое граничное условие  $dS/dt = 0$ , из которого вытекает известная формула

$$w = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (2.2.1)$$

Используя формулу (2.2.1), вычислим вертикальную компоненту скорости поля возмущения

$$w' = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} = -i\omega\xi + u_0 ik\xi = i\xi(ku_0 - \omega). \quad (2.2.2)$$

Далее воспользуемся полученной выше линейной системой уравнений (2.1.2), которую запишем, учитывая постоянство скорости  $\vec{v}_0$  ( $(\vec{v}'\vec{\nabla})\vec{v}_0 = 0$ ) и пренебрегая вязким трением ( $\nu\Delta\vec{v}' = 0$ )

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}_0\vec{\nabla})\vec{v}' = -\frac{\vec{\nabla}p'}{\rho}, & \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial x} = -\frac{\vec{\nabla}p'}{\rho}. \\ \text{div } \vec{v}' = 0. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Применим операцию  $\text{div}$  к первому уравнению системы (2.2.3). Учитывая уравнение неразрывности, получаем

$$\text{div} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = \frac{\partial(\text{div } \vec{v}')}{\partial t} = 0,$$

$$\text{div}(\vec{v}_0\vec{\nabla})\vec{v}' = (\vec{v}_0\vec{\nabla})\text{div } \vec{v}' = 0.$$

В итоге приходим к уравнению Лапласа на поле возмущений давления

$$\Delta p' = 0. \quad (2.2.4)$$

Поле возмущений давления представляет собой отклик на возмущение поверхности, т.е. «рябь». Поэтому решение целесообразно искать в виде

$$p' = f(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.2.5)$$

где  $f(z)$  - некоторая неизвестная функция. Подставляя формулу (2.2.5) в уравнение Лапласа (2.2.4), приходим к простому дифференциальному уравнению для определения функции  $f(z)$

$$p'_{xx} + p'_{zz} = 0 \Rightarrow f_{zz} - k^2 f = 0. \quad (2.2.6)$$

Решение уравнения (2.2.6) хорошо известно

$$f(z) = \text{const } e^{\pm kz}. \quad (2.2.7)$$

Очевидно, что бесконечный рост возмущений давления при удалении от источника (ряби на поверхности) не имеет физического смысла. Поэтому знак в показателе экспоненты в формуле (2.2.7) следует выбирать таким образом, чтобы возмущения давления убывали при удалении от поверхности разрыва. Итак, для давления имеем

$$p'(x, z, t) = \text{const } e^{\pm kz} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (2.2.8)$$

Теперь воспользуемся линеаризованным уравнением для вертикальной компоненты скорости из системы (2.2.3)

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z}. \quad (2.2.9)$$

Имея в виду формулу (2.2.8), получаем

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w'}{\partial x} = \mp \frac{k}{\rho} p' \quad (2.2.10)$$

Уравнение (2.2.10) линейно относительно искомой функции  $w'$ . В его правой части стоит периодическая “вынуждающая сила” вида  $e^{i(kx - \omega t)}$ , следовательно, и решение должно иметь периодический характер  $w' \sim e^{i(kx - \omega t)}$ . В итоге из уравнения (2.2.10) имеем

$$-i\omega w' + u_0 i k w' = \mp \frac{k}{\rho} p'. \quad (2.2.11)$$

Теперь, подставляя в (2.2.11) полученную выше формулу (2.2.2), приходим к окончательному выражению для давления

$$p' = \mp i w' (u_0 k - \omega) \frac{\rho}{k} = \mp i i \xi (k u_0 - \omega)^2 \frac{\rho}{k} = \pm \xi (k u_0 - \omega)^2 \frac{\rho}{k}. \quad (2.2.12)$$

Далее будем полагать, что жидкости, разделяемые плоскостью  $z = 0$ , имеют разную плотность – ход рассуждений позволяет несколько расширить постановку задачи. Здесь необходимо напомнить, что в рассматриваемой задаче поле силы тяжести отсутствует. В противном случае было бы необходимо учитывать влияние стратификации на развитие неустойчивости.

Знак в формуле (2.1.12) выбирается следующим образом: « $-$ » в верхней полуплоскости и « $+$ » – в нижней. Кроме того, следует помнить, что в нижней полуплоскости жидкость покоится  $u_0 = 0$ . Формулы для давления в верхней и нижней полуплоскости имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} p'_1 &= -\xi (k u_0 - \omega)^2 \frac{\rho_1}{k}, \quad z > 0, \\ p'_2 &= +\xi \omega^2 \frac{\rho_2}{k}, \quad z < 0. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

На границе раздела областей при  $z=0$  давление должно быть непрерывным, т.е.  $p'_1 = p'_2$ , откуда вытекает следующая связь

$$\rho_1 (k u_0 - \omega)^2 = -\rho_2 \omega^2. \quad (2.2.14)$$

Решая квадратное уравнение (2.2.14), получаем

$$\omega_{1,2} = k u_0 \frac{\rho_1 \pm i \sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\rho_1 + \rho_2} \quad \text{или} \quad \omega_{1,2} = k u_0 \frac{1 \pm i}{2} \quad (\text{при } \rho_1 = \rho_2). \quad (2.2.15)$$

Итак, оказалось, что частота  $\omega$  является комплексной величиной, причем всегда имеются  $\omega$  с положительной мнимой частью, следовательно, начальное возмущение («рябь»)  $e^{i(kx - \omega t)}$  непременно будет

экспоненциально возрастать. Т.о. доказано, что тангенциальные разрывы неустойчивы по отношению к бесконечно малым возмущениям. Иными словами, на тангенциальном разрыве развивается неустойчивость Кельвина-Гельмгольца с инкрементом

$$\gamma = \text{Im}(\omega) = ku_0 / 2. \quad (2.2.16)$$

Из формулы (2.2.16) следует, что инкремент неустойчивости пропорционален разнице скоростей между слоями и обратнопропорционален длине волны возмущения.

### **2.3. Устойчивость течения Пуазейля. Уравнение Орра-Зоммерфельда**

Рассмотрим классическую задачу об устойчивости стационарного течения вязкой жидкости между двумя параллельными поверхностями, которое вызывается постоянным градиентом давления (течение Пуазейля). Начало системы отсчета расположим посередине между поверхностями. Ось  $Ox$  направим вдоль направления течения, ось  $Oz$  – перпендикулярно поверхностям, ограничивающим течение (Рис. 2.3.1). В этом случае приходим к двумерной постановке задачи (в плоскости  $Oxz$ ).

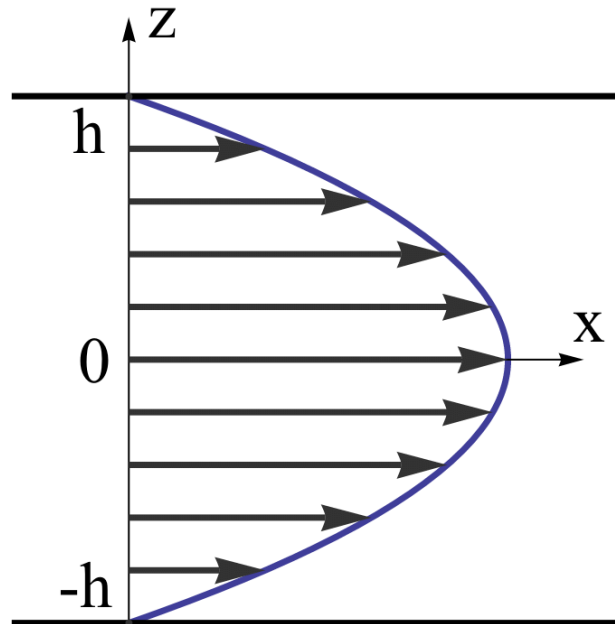


Рис.2.3.1. Течение Пуазейля. Постановка задачи и профиль стационарного течения.

Поле скорости стационарного течения имеет единственную компоненту, которая зависит только от поперечной координаты  $\vec{v}_0 = (u_0(z), 0)$ . Из  $x$ -ой компоненты уравнения Навье-Стокса имеем

$$\underbrace{\frac{\partial u_0}{\partial t}}_{=0} + u_0 \underbrace{\frac{\partial u_0}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{w_0}_{=0} \frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \nu \left( \underbrace{\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \right).$$

В итоге приходим к простому уравнению

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}, \quad (2.3.1)$$

где  $\partial p_0 / \partial x = \text{const}$  – градиент давления вызывающий течение. В результате интегрирования уравнения (2.3.1) с учетом условия прилипания на поверхностях, ограничивающих течение ( $u(z = \pm h) = 0$ ) получаем профиль скорости течения, который описывается квадратичной параболой

$$u_0(z) = \frac{1}{2\rho\nu} \frac{\partial p_0}{\partial x} (z^2 - h^2). \quad (2.3.2)$$



Будем основываться на линейной теории устойчивости. Запишем систему уравнений (2.1.2), полученную в разделе 2.1, в покомпонентном виде (штрихи опускаем).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \quad (2.3.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w, \quad (2.3.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.3.5)$$

Введем функцию тока  $\psi$  так, что  $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ ,  $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ . Уравнения (2.3.3)-

(2.3.5) принимают вид

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} - u_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \Delta \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (2.3.6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + u_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.3.7)$$

а уравнение неразрывности (2.3.5), очевидно, удовлетворяется тождественно. На следующем этапе мы избавляемся от давления. Для этой цели продифференцируем уравнение (2.3.6) по координате  $z$ , а уравнение (2.3.7) – по координате  $x$ .

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^3 \psi}{\partial t \partial z^2} - \frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - u_0 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} - \nu \Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + u_0 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x} + \nu \Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (2.3.9)$$

Вычтем уравнение (2.3.8) из уравнения (2.3.9). При этом мы учтем, что

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \text{ и сократим подобные члены}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \nu \Delta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right). \quad (2.3.10)$$

Уравнение (2.3.10) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \nu \Delta \Delta \psi, \quad (2.3.11)$$

или в безразмерных переменных

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi.$$

Граничные условия, означающие обращение в нуль обеих компонент скорости на границах области, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = \pm h.$$

Первое условие означает, что функция тока должна быть неизменной вдоль границы:  $\psi = \text{const}$ . Но функция тока определена с точностью до константы, поэтому ее можно переопределить таким образом, что вдоль границы  $\psi = 0$ . В итоге граничное условие принимает следующий вид:

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = \pm h. \quad (2.3.12)$$

Уравнение (2.3.11), дополненное граничными условиями (2.3.12), можно исследовать численно, задавая различные начальные возмущения и наблюдая за их эволюцией в зависимости от числа Рейнольдса. При этом остается открытым вопрос о выборе вида возмущений. Как уже отмечалось в разделе 2.1, в теории возмущений обычно используют нормальные возмущения, которые имеют вид

$$\psi(x, z, t) = \varphi(z) e^{i(\omega t - kx)}. \quad (2.3.13)$$

Т.е. мы предполагаем существование некоторого волнового возмущения, причем от вертикальной координаты  $z$  зависит только амплитуда этого возмущения. Частота в общем случае является величиной комплексной,

поэтому характер эволюции возмущения определяется знаком мнимой части частоты. При  $\text{Im } \omega > 0$  возмущения убывают со временем, а при  $\text{Im } \omega < 0$  – экспоненциально возрастают. В этой связи именно знак мнимой части частоты и интересен с точки зрения вопроса об устойчивости течения.

Подставим выражение (2.3.13) в уравнение (2.3.11). При подстановке учтем следующие обозначения ( $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \equiv \varphi_z, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \equiv \varphi_{zz}, \text{ etc.}$ ):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -ik\psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \varphi_z e^{i(\omega t - kx)},$$

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = (\varphi_{zz} - k^2 \varphi) e^{i(\omega t - kx)},$$

$$\Delta \Delta \psi = \Delta (\varphi_{zz} - k^2 \varphi) e^{i(\omega t - kx)} = (\varphi_{zzzz} - 2k^2 \varphi_{zz} + k^4 \varphi) e^{i(\omega t - kx)}.$$

После подстановки получаем:

$$\begin{aligned} i\omega (\varphi_{zz} - k^2 \varphi) e^{i(\omega t - kx)} - iku_0 (\varphi_{zz} - k^2 \varphi) e^{i(\omega t - kx)} + ik\varphi e^{i(\omega t - kx)} \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \\ = \frac{1}{\text{Re}} (\varphi_{zzzz} - 2k^2 \varphi_{zz} + k^4 \varphi) e^{i(\omega t - kx)}. \end{aligned}$$

После элементарных преобразований приходим к **уравнению Орра-Зоммерфельда**

$$\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right) (\varphi_{zz} - k^2 \varphi) - \varphi \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \frac{i}{k \text{Re}} (\varphi_{zzzz} - 2k^2 \varphi_{zz} + k^4 \varphi), \quad (2.3.14)$$

с граничными условиями  $\varphi = \varphi_z = 0, \quad z = \pm 1$ .

Уравнение (2.3.14) было получено независимо Орром [Orr, 1907] и Зоммерфельдом [Sommerfeld, 1908].

## 2.4. Уравнение Рэлея. Теорема Рэлея о точке перегиба

Первые попытки решить уравнение Орра-Зоммерфельда были предприняты в предположении, что правую часть можно отбросить. Соответствующее уравнение носит название **уравнение Рэлея**

$$\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right)(\varphi_{zz} - k^2\varphi) - \varphi \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0. \quad (2.4.1)$$

Строго говоря, решение уравнения Рэлея (2.4.1) только тогда имеет физический смысл, когда это уравнение является асимптотическим пределом уравнения Орра-Зоммерфельда (2.3.12). Но на начальном этапе такие математические тонкости не принимались во внимание. Отбрасывание правой части мотивировалось тем, что она описывает действие вязкости, а вязкость, как тогда полагали, играет исключительно стабилизирующую роль, т.е. препятствует развитию неустойчивости. Рассуждали следующим образом. Вязкость представляет собой эффект малый, а все самые интересные явления в теории гидродинамической неустойчивости имеют место при больших числах Рейнольдса, что эквивалентно малой вязкости. Во всяком случае, пренебрежение правой частью уравнения (2.3.14) представлялось разумным подходом, хотя бы в качестве первого шага. К тому же, пренебрежение членами, которые содержат производные высших порядков, существенно упрощает математический анализ.

Здесь важно отметить, что, отбрасывая правую часть уравнения Орра-Зоммерфельда, которая содержит члены с производными 4-го порядка, мы переходим к приближению идеальной (невязкой) жидкости. При этом мы должны заменить граничное условие прилипания на условие непротекания. Таким образом в граничных условиях для уравнения Рэлея следует требовать обращение в ноль только нормальной компоненты скорости (т.е.  $\varphi = 0$ ,  $z = \pm 1$ ), а продольная компонента скорости может быть произвольной.

Результат решения уравнения Рэлея оказался удивительным: течение Пуазейля было абсолютно устойчивым! Это, разумеется, не соответствовало экспериментальным данным. При этом Рэлею удалось установить, что необходимым условием появления неустойчивости течения является наличие точки перегиба в профиле скорости (**теорема о точке перегиба**). Этот простой и замечательный результат послужил источником очень долго жившего в теории гидродинамической устойчивости парадокса. Рассуждали следующим образом. Течение Пуазейля не имеет точки перегиба и (в невязком приближении) устойчиво. Если построить более полную теорию, учитывающую влияние вязкости на возмущение, этот вывод должен только усилиться, т.к. учтен новый фактор – вязкость, который является диссипативным и подавляет возмущения. С учетом вязкости возмущения будут тем более затухать, если они затухали без учета вязкости. Практика, впрочем, опровергала подобные построения, ибо течение Пуазейля оказывалось неустойчивым, начиная с определенных чисел Рейнольдса.

Неустойчивость параллельных течений была рассмотрена Рэлеем при кажущемся отсутствии сил вязкости. Строго говоря, параллельное течение должно иметь параболическое распределение скоростей. Однако, существуют много почти параллельных течений (течений типа пограничного слоя), имеющих разнообразные распределения скоростей. Следует также отметить, что для невязкой жидкости любое параллельное течение является возможным решением.

Для доказательства теоремы Рэлея о точке перегиба запишем уравнение (2.4.1) в следующем виде (индекс “0” при  $u$  опустим):

$$\varphi_{zz} - k^2 \varphi - \frac{\varphi u_{zz}}{u - \omega/k} = 0. \quad (2.4.2)$$

Если границей движения по оси  $Oz$  является твердая стенка, то на ней выполняется граничное условие  $\varphi = 0$ . Если же ширина потока не ограничена (с одной или обеих сторон), то аналогичное условие должно быть поставлено на бесконечности, где поток однороден.

Будем рассматривать  $k$  как заданную вещественную величину, тогда частота  $\omega$  определяется по собственным значениям граничной задачи для уравнения (2.4.2). В том случае, если частота является комплексной величиной, возможно экспоненциальное нарастание возмущений во времени.

Умножим уравнение (2.4.2) на функцию  $\varphi^*$  (комплексно сопряженную к  $\varphi$ ) и проинтегрируем результат по  $dz$  между границами потока.

$$\int_{z_1}^{z_2} \left[ \varphi_{zz} \varphi^* - k^2 \varphi \varphi^* - \frac{\varphi \varphi^* u_{zz}}{u - \omega/k} \right] dz = 0. \quad (2.4.3)$$

Выполним интегрирование в формуле (2.4.3) по частям, принимая во внимание нижеследующие формулы:

$$\varphi \varphi^* = |\varphi|^2,$$

$$(\varphi_z \varphi^*)|_{z_1}^{z_2} = 0 \quad (\text{в силу граничных условий}),$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \varphi_{zz} \varphi^* dz = (\varphi_z \varphi^*)|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \varphi_z \varphi_z^* dz = - \int_{z_1}^{z_2} \varphi_z \varphi_z^* dz = - \int_{z_1}^{z_2} |\varphi_z|^2 dz.$$

В итоге преобразований получаем

$$\int_{z_1}^{z_2} \left( |\varphi_z|^2 + k^2 |\varphi|^2 \right) dz + \int_{z_1}^{z_2} \frac{|\varphi|^2 u_{zz}}{u - \omega/k} dz = 0. \quad (2.4.4)$$

Первый член в выражении (2.4.4) есть величина вещественная. В силу того, что частоту мы считаем величиной комплексной  $\omega = a + ib$ , второй член также может быть комплексной величиной:

$$\operatorname{Re}["1"] + \operatorname{Re}["2"] + i \operatorname{Im}["2"] = 0. \quad (2.4.5)$$

Из формулы (2.4.5) следует

$$\text{Im}["2"] = 0. \quad (2.4.6)$$

Выделим мнимую часть из второго члена. Для этой цели умножим числитель и знаменатель подынтегрального выражения на величину  $u - \omega^*/k \equiv u - a/k + ib/k$ .

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{|\phi|^2 u_{zz} (u - a/k + ib/k)}{(u - a/k - ib/k)(u - a/k + ib/k)} dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{|\phi|^2 u_{zz} (u - a/k + ib/k)}{[u - a/k]^2 + b^2/k^2} dz.$$

Итак, мнимая часть  $\text{Im}["2"]$  дается следующим выражением:

$$\text{Im}["2"] = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\text{Im}(\omega) |\phi|^2 u_{zz}}{k([u - a/k]^2 + b^2/k^2)} dz.$$

Согласно уравнению (2.4.6) величина  $\text{Im}["2"]$  должна обращаться в ноль. Для этого необходимо, чтобы внутри области интегрирования вторая производная  $u_{zz}$  меняла свой знак, т.е. проходила через ноль. Только в этом случае может существовать отличная от нуля мнимая часть частоты  $\text{Im}(\omega)$ . Теорема о точке перегиба доказана.

## 2.5. Теория Гейзенберга-Линя. Нейтральная кривая

Задача об устойчивости течений оказалась настолько интересной, что ее решением занялся немецкий физик-теоретик, один из создателей квантовой механики, лауреат Нобелевской премии по физике 1932 г. Вернер Карл Гейзенберг

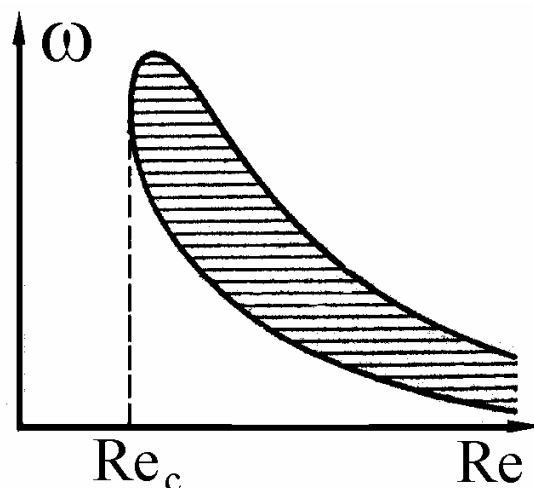


Рис. 2.5.1. Нейтральная кривая для течения Пуазейля на плоскости  $\omega$ - $Re$ . На плоскости  $k$ - $Re$  нейтральная кривая имеет похожий вид. Рисунок заимствован из книги [Ландау, Лифшиц, 1986].

[Heisenberg, 1924]. Отправным пунктом для В.Гейзенберга послужил результат Рэлея, который относится к идеальной жидкости и рассмотрен в разделе 2.4. Гейзенберг использовал метод, который всякий раз применяется в теоретической физике, когда в задаче присутствует малый параметр. В данном случае таким параметром служило обратное число Рейнольдса. Решение искалось в виде степенного ряда по малому параметру. В.Гейзенбергу пришлось преодолеть огромные математические трудности на пути к результату. Достаточно сказать, что когда результат был обнародован, то в течение многих лет не находилось человека, который взялся бы за его проверку.

Основной результат Гейзенберга – существование нейтральной кривой для течения Пуазейля в плоском канале. Каждая точка кривой дает критическое значение числа Рейнольдса для возмущения с данным волновым числом. Внутри петли находится область неустойчивости, за ее пределами – область устойчивости. Кривая имеет минимум с координатами:  $Re \approx 3850$ ,  $k = 2\pi h / \lambda \approx 1.02$  (позднее значения были уточнены). В области больших  $k$  (коротковолновые возмущения) расположена сплошная область устойчивости: коротковолновые возмущения гасятся вязкостью.

Результаты Гейзенберга воистину замечательны:

- он первый теоретически показал, что течение Пуазейля становится неустойчивым при больших числах Рейнольдса,
- определил критическое число Рейнольдса,
- рассчитал длину волны наиболее «опасного» возмущения.
- указал на удивительный факт, что вязкость может провоцировать неустойчивость (напомним, что анализ, выполненный без учета вязкости, свидетельствует об устойчивости течения Пуазейля).



Американский математик и механик китайского происхождения Линь Цзя-Цзяо в 1943-1944 гг. устроил генеральную проверку теории Гейзенберга. Основным результатом Линя: теория Гейзенберга получила подтверждение, в частности, подтвердился вид нейтральной кривой, - она лишь количественно сместилась [Линь, 1958]. Кроме того, результаты Гейзенберга подтвердились и в численном решении задачи [Thomas, 1953].

Нейтральная кривая была подтверждена и экспериментально [Schubauer, Skramstad, 1947], причем в поток с заданным числом Рейнольдса искусственно вносилось волновое возмущение.

По уточненным расчетам [Orszag, 1971]  $Re_{кр} = U_{max} h / 2\nu = 5772$ , где  $h$  – расстояние между плоскостями. Критическому значению числа Рейнольдса отвечает волновое число  $k_{кр} = 2.04/h$ . При  $Re \rightarrow \infty$  обе ветви нейтральной кривой асимптотически приближаются к оси абсцисс по следующим законам:

$$\frac{\omega h}{U_{max}} \approx Re^{-3/11}, \quad \frac{\omega h}{U_{max}} \approx Re^{-3/7}$$

соответственно для верхней и нижней ветвей, при этом на обеих ветвях  $\omega$

и  $k$  связаны соотношениями вида  $\frac{\omega h}{U} \approx (kh)^3$ .

Течение между параллельными поверхностями и течение в трубе кругового сечения можно представить как два предельных случая течения в трубе кольцевого сечения [Ландау, Лифшиц, 1988]. Будем характеризовать кольцевое сечение трубы двумя радиусами: внутренним  $R_1$  и внешним  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). Если внутренний радиус  $R_1$  устремить к нулю, то получим течение в трубе кругового сечения. А если устремить к нулю разницу радиусов  $R_2 - R_1$ , то в пределе получим течение между двумя параллельными поверхностями. Интересно, что течения в этих двух предельных случаях обнаруживают принципиально различные свойства.

Например, в отличие от течения Пуазейля, течение в трубе кругового сечения оказывается устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям.

Напомним, что экспериментальным анализом устойчивости течения в трубе кругового сечения занимался еще Осборн Рейнольдс [Reynolds, 1883]. Но эта классическая задача оказалась настолько сложной, что интерес к ней сохраняется и до настоящего времени. Подробную информацию о современных исследованиях устойчивости течений в трубах можно найти в обзоре [Eckhardt et al., 2007].

## **2.6. Термогравитационная конвекция в несжимаемой жидкости.**

### **Уравнения Буссинеска. Числа Грассгофа, Прандтля и Рэлея**

Описание термогравитационной конвекции основано на системе уравнений Навье-Стокса и уравнении переноса тепла (температуры), записанных в приближении Буссинеска. Означенное приближение предполагает, что давление слабо меняется вдоль жидкости, так что изменением плотности под влиянием изменения давления можно пренебречь. Существенные для рассматриваемой задачи изменения плотности связаны только с вариациями температуры жидкости. Именно они приводят к появлению архимедовых сил (сил плавучести), вызывающих конвекционное движение.

Будем полагать, что температура задается в виде

$$T = T_0 + T', \quad (2.6.1)$$

где  $T_0$  – некоторое постоянное среднее значение, от которого отсчитывается неравномерность температуры ( $T' \ll T_0$ ). Ввиду малости изменения температуры мало и вызываемое им изменение плотности

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad (2.6.2)$$

$$\rho' = \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial T} \right)_p T' = -\rho_0 \alpha T', \quad (2.6.3)$$

где  $\alpha$  – температурный коэффициент расширения жидкости (будем полагать  $\alpha > 0$ ). Давление также представим в виде суммы

$$p = p_0 + p', \quad (2.6.4)$$

где  $p_0$  соответствует механическому равновесию при температуре  $T_0$  и плотности  $\rho_0$ . Согласно гидростатическому уравнению имеем

$$p_0 = \rho_0 \vec{g} \vec{r} + \text{const}. \quad (2.6.5)$$

Зная, что скорость звука определяется как

$$c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \quad (s = \text{const, процесс адиабатический})$$

несложно сделать оценку, ограничивающую область применимости предлагаемой теории. Вариация плотности, связанная с изменением давления при изменении глубины  $\Delta h$ , определяется формулой

$$\Delta \rho^p \sim \frac{1}{c^2} \Delta p = \frac{\rho g}{c^2} \Delta h.$$

Величина  $\Delta \rho^p$  должна быть существенно меньше вариации плотности, вызываемой изменением температуры

$$\Delta \rho^T \sim \rho \alpha \Delta T.$$

В итоге получаем искомое условие

$$\Delta \rho^p \ll \Delta \rho^T \Rightarrow \frac{g}{c^2} \ll \alpha \frac{\Delta T}{\Delta h}. \quad (2.6.6)$$

Напомним, что для воды  $\alpha \approx 2 \cdot 10^{-4}$  град $^{-1}$ ,  $c \approx 1500$  м/с.

Далее приступим к преобразованиям уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g}. \quad (2.6.7)$$

Подставим в правую часть уравнения (2.6.7) выражения (2.6.2) и (2.6.4).

Удерживая члены первого порядка малости, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} &= \frac{\vec{\nabla}(p_0 + p')}{\rho_0 + \rho'} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\vec{\nabla}(p_0 + p')}{1 + \rho'/\rho_0} \approx \frac{1 - \rho'/\rho_0}{\rho_0} \vec{\nabla}(p_0 + p') = \\ &= \frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho_0} + \frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} - \frac{\rho' \vec{\nabla} p_0}{\rho_0^2}. \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Воспользовавшись формулами (2.6.3) и (2.6.5), получаем

$$\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = \frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho_0} + \frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} - \frac{\rho' \vec{\nabla} p_0}{\rho_0^2} = \vec{g} + \frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} + \alpha T' \vec{g}. \quad (2.6.9)$$

В итоге от (2.6.7) приходим к уравнению

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} \frac{p'}{\rho_0} - \alpha T' \vec{g} + \nu \Delta \vec{v}, \quad (2.6.10)$$

в правую часть которого входит величина, описывающая силу плавучести (суперпозицию силы тяжести и силы Архимеда) « $-\alpha T' \vec{g}$ ».

Уравнение (2.6.10) следует дополнить уравнением переноса температуры, в котором мы пренебрегаем источниками тепла, связанными с диссипацией

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) T' = \chi \Delta T'. \quad (2.6.11)$$

Кроме того, система не будет полной без уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0. \quad (2.6.12)$$

Подставляя в (2.6.12) формулу (2.6.2), получаем

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{v} + \text{div } \rho' \vec{v} = 0.$$

Здесь мы делаем очередное *важное допущение*: добавкой плотности  $\rho'$  мы пренебрегаем, она остается лишь в члене, описывающем силу плавучести.

В итоге получаем

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.6.13)$$

Система Буссинеска (2.6.10), (2.6.11) и (2.6.13) включает пять уравнений, определяющих пять неизвестных функций:  $\vec{v}$ ,  $p'/\rho_0$ ,  $T'$ . Система содержит три параметра:  $\nu$ ,  $\chi$ ,  $g\alpha$ . Кроме того, имеются характерная длина  $h$  и характерный перепад температур  $\Delta T$ . Важно отметить, что характерная скорость в данной задаче отсутствует. Из указанных пяти параметров можно составить две независимые безразмерные комбинации (температуре при этом приписывается некоторая особая размерность). В качестве указанных комбинаций обычно выступают **число Прандтля**  $Pr = \nu/\chi$  и **число Рэлея**  $Ra = g\alpha\Delta T h^3/\chi\nu$ . Зачастую пользуются и **числом Грасгофа**, которое показывает отношение архимедовых и вязких сил  $G = g\alpha\Delta T h^3/\nu^2 = Ra/Pr$ .

Число Прандтля есть физический параметр жидкости, характеризующий отношение коэффициентов кинематической вязкости и температуропроводности. Для газов число Прандтля  $\sim 1$  (для воздуха 0.733), для воды 6.75, для ртути 0.044, для глицерина 7250. В жидкостях с малым числом Прандтля теплопередача эффективнее конвекции, при высоких значениях  $Pr$  температура «вморожена» в жидкость и перенос тепла за счет конвекции становится более эффективным, чем молекулярный теплообмен.

Для представления уравнений Буссинеска в безразмерном виде, определим единицы измерения: расстояние – характерный размер  $h$ , температура – характерная разность температур  $\Delta T$ , скорость –  $\nu/h$ , время –  $h^2/\nu$ , давление –  $\rho_0\nu^2/h^2$ . Переходя к соответствующим безразмерным переменным, получаем систему уравнений (штрихи опускаем,  $\vec{e}_z$  – единичный вектор, направленный вертикально вверх)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}p + GTe_z + \Delta\vec{v}, \quad (2.6.14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})T = \frac{1}{Pr}\Delta T, \quad (2.6.15)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.6.16)$$

Описанная система приведения уравнений к безразмерному виду не является единственной. Если за единицу скорости принять величину  $\chi/h$ , оставив все прежние единицы без изменения, то придем к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}p + RaTe_z + \Delta\vec{v}, \quad (2.6.17)$$

$$Pr \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})T = \Delta T, \quad (2.6.18)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.6.19)$$

Очевидно, возможны и другие способы приведения системы уравнений Буссинеска к безразмерному виду. Еще с одним таким способом мы познакомимся в следующем разделе.

## **2.7. Теоретический анализ плоской задачи о конвективной устойчивости (задача Рэля). Критическое число Рэля**

Теоретически задачу о конвективной устойчивости впервые решил Лорд Рэлей [Lord Rayleigh, 1916]. Он рассмотрел горизонтальный слой жидкости толщины  $h$  со свободными, но недеформируемыми границами, на которых поддерживается разность температура  $\Delta T$ . Уравнения Буссинеска записываются в безразмерной форме, причем единицы

измерений выбраны следующим образом: единица длины –  $h$ , температуры  $\Delta T$ , времени –  $h^2/\nu$ , скорости –  $\chi/h$ , давления –  $\rho_0\chi^2/h^2$ .

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{Pr}(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{Pr}\vec{\nabla}p + RaT\vec{e}_z + \Delta \vec{v}, \quad (2.7.1)$$

$$Pr \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})T = \Delta T, \quad (2.7.2)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0. \quad (2.7.3)$$

Следуя Рэлею, будем рассматривать двумерную задачу в плоскости  $Oxz$ . Ось  $Oz$  направлена вертикально вверх, а ось  $Ox$  – горизонтально. В этом случае конвективное движение представляется в виде валов, вытянутых вдоль оси  $Oy$ . Граничные условия выберем в виде:

$$z = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad w = 0, \quad T = 1, \quad (2.7.4)$$

$$z = 1: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad w = 0, \quad T = 0. \quad (2.7.5)$$

Условия (2.7.4) и (2.7.5) физически означают недеформируемые, но свободные границы. Такие условия не совсем реальны (слой жидкости со свободными верхней и нижней границами), но именно они дают самую простую математическую постановку задачи.

Пусть температура описывается функцией вида  $T = \vartheta + (1 - z)$ , где  $\vartheta$  – отклонение температуры от равновесного линейного распределения

$$T_0 = (1 - z). \text{ Введем функцию тока так, что } u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Рассмотрение задачи ведется в рамках линейной теории устойчивости, поэтому из уравнений можно отбросить все члены, квадратичные по скорости и возмущениям профиля температуры.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{Pr} \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta u \quad (2.7.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial p}{\partial z} + \text{Ra} \cdot T + \Delta w \quad (2.7.7)$$

Выражаем компоненты скорости в (2.7.6) и (2.7.7) через функцию тока и перекрестно дифференцируем уравнения по координатам  $x$  и  $z$ .

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} = -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial p}{\partial x} - \Delta \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \left| \frac{\partial}{\partial z} \right.,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} = -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial p}{\partial z} + \text{Ra} \cdot T + \Delta \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} \right..$$

Результатом процедуры являются следующие выражения:

$$-\frac{\partial^3 \psi}{\partial t \partial z^2} = -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} - \Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (2.7.8)$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial t \partial x^2} = -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x} + \text{Ra} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (2.7.9)$$

Вычитая из уравнения (2.7.9) уравнение (2.7.8), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = \Delta \Delta \psi + \text{Ra} \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \quad (2.7.10)$$

Далее воспользуемся уравнением для температуры (4.2).

$$\text{Pr} \frac{\partial(\vartheta + 1 - z)}{\partial t} + u \frac{\partial(\vartheta + 1 - z)}{\partial x} + w \frac{\partial(\vartheta + 1 - z)}{\partial z} = \Delta(\vartheta + 1 - z).$$

В итоге элементарных преобразований получаем

$$\text{Pr} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - w = \Delta \vartheta. \quad (2.7.11)$$

Второй и третий члены в левой части уравнения (2.7.11) содержат квадраты малых величин, следовательно, ими можно пренебречь. В итоге приходим к следующему уравнению:

$$\text{Pr} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \Delta \vartheta + \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.7.12)$$

Граничные условия для системы уравнений (2.7.10) и (2.7.12) вытекают из выражений (2.7.4) и (2.7.5):



$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \vartheta = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \psi = 0, \quad \vartheta = 0. \quad (2.7.13)$$

Будем искать решение системы (2.7.10), (2.7.12) в виде периодических возмущений с экспоненциальной зависимостью амплитуды от времени:

$$\psi = \psi_0 e^{-\lambda t} \sin(\pi n z) \sin(\pi a x), \quad (2.7.14)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-\lambda t} \sin(\pi n z) \cos(\pi a x). \quad (2.7.15)$$

Несложно видеть, что возмущения (2.7.14) и (2.7.15) удовлетворяют граничным условиям (2.7.13). Подставим выражения (2.7.14), (2.7.15) в уравнения (2.7.10), (2.7.12). Воспользовавшись очевидными формулами

$$\Delta \psi = \psi_{xx} + \psi_{zz} = -\pi^2 (a^2 + n^2) \psi,$$

$$\Delta \Delta \psi = -\pi^2 (a^2 + n^2) \Delta \psi = \pi^4 (a^2 + n^2)^2 \psi,$$

получаем:

$$\lambda \pi^2 (a^2 + n^2) \psi_0 = \pi^4 (a^2 + n^2)^2 \psi_0 - \text{Ra} (\pi a) \vartheta_0,$$

$$-\lambda \text{Pr} \vartheta_0 = -\pi^2 (a^2 + n^2) \vartheta_0 + \pi a \psi_0.$$

Группируя члены уравнений при  $\psi_0$  и  $\vartheta_0$ , имеем

$$\psi_0 [\lambda \pi^2 (a^2 + n^2) - \pi^4 (a^2 + n^2)^2] + \vartheta_0 [\text{Ra} (\pi a)] = 0, \quad (2.7.17)$$

$$\psi_0 [\pi a] + \vartheta_0 [\lambda \text{Pr} - \pi^2 (a^2 + n^2)] = 0. \quad (2.7.18)$$

Получилась система однородных линейных уравнений относительно амплитуд  $\psi_0$  и  $\vartheta_0$ . Чтобы система (2.7.17), (2.7.18) имела нетривиальное решение, ее определитель должен равняться нулю.

$$\begin{vmatrix} \lambda \pi^2 (a^2 + n^2) - \pi^4 (a^2 + n^2)^2 & \text{Ra} (\pi a) \\ \pi a & \lambda \text{Pr} - \pi^2 (a^2 + n^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение относительно декремента  $\lambda$ :

$$\text{Pr} \lambda^2 - \pi^2 (a^2 + n^2) (1 + \text{Pr}) \lambda + \pi^4 (a^2 + n^2)^2 - \frac{a^2 \text{Ra}}{(a^2 + n^2)} = 0. \quad (2.7.19)$$

Решаем квадратное уравнение (2.7.19).

$$D = \pi^4 (a^2 + n^2)^2 (1 + \text{Pr})^2 - 4 \text{Pr} \left[ \pi^4 (a^2 + n^2)^2 - \frac{a^2 \text{Ra}}{(a^2 + n^2)} \right].$$

Имеем два корня:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pi^2 (a^2 + n^2) (1 + \text{Pr})}{2 \text{Pr}} \pm \sqrt{\frac{\pi^4 (a^2 + n^2)^2 (1 - \text{Pr})^2}{4 \text{Pr}^2} + \frac{a^2 \text{Ra}}{\text{Pr} (a^2 + n^2)}}. \quad (2.7.20)$$

Вид решения говорит о следующем:

1. При  $\text{Ra} > 0$  (т.е. при нагреве снизу) подкоренное выражение в (2.7.20) всегда положительно. Следовательно, оба корня вещественны и амплитуда возмущений эволюционирует монотонно. При этом один корень всегда положителен, а второй при некотором значении  $\text{Ra}_c$  меняет знак, и амплитуда возмущений начинает экспоненциально нарастать.
2. При  $\text{Ra} < 0$  вещественная часть обеих корней всегда положительна, следовательно, при подогреве сверху все возмущения затухают. Но с ростом величины подогрева возникает ситуация, когда выражение под корнем становится отрицательным, т.е. появляются два комплексно-сопряженных корня, говорящих о реализации затухающих колебательных режимов. Этот переход происходит при значении числа Рэлея

$$\text{Ra}^* = - \frac{\pi^4 (a^2 + n^2)^3 (1 - \text{Pr})^2}{4 a^2 \text{Pr}}. \quad (2.7.21)$$

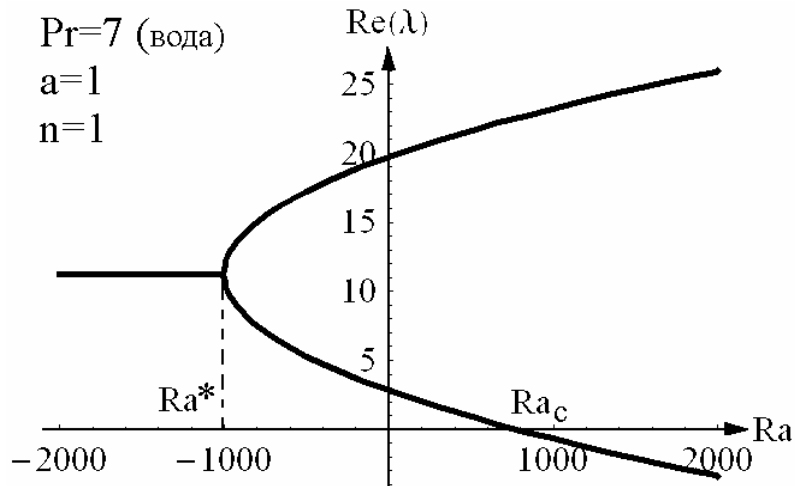


Рис. 2.7.1. Действительная часть декремента как функция числа Рэлея.

Итак, существуют три области значений: затухающие колебательные возмущения, монотонно затухающие возмущения и монотонно нарастающие возмущения.

Определим критическое значение числа Рэлея, при достижении которого начинается нарастание возмущений.

$$\frac{\pi^4 (a^2 + n^2)^2 (1 + \text{Pr})^2}{4 \text{Pr}^2} - \frac{\pi^4 (a^2 + n^2)^2 (1 - \text{Pr})^2}{4 \text{Pr}^2} = \frac{a^2 \text{Ra}_c}{\text{Pr} (a^2 + n^2)},$$

$$\text{Ra}_c = \frac{\pi^4 (a^2 + n^2)^3}{a^2}. \quad (2.7.22)$$

Из полученной формулы следует интересный вывод: критическое число Рэлея не зависит от числа Прандтля.

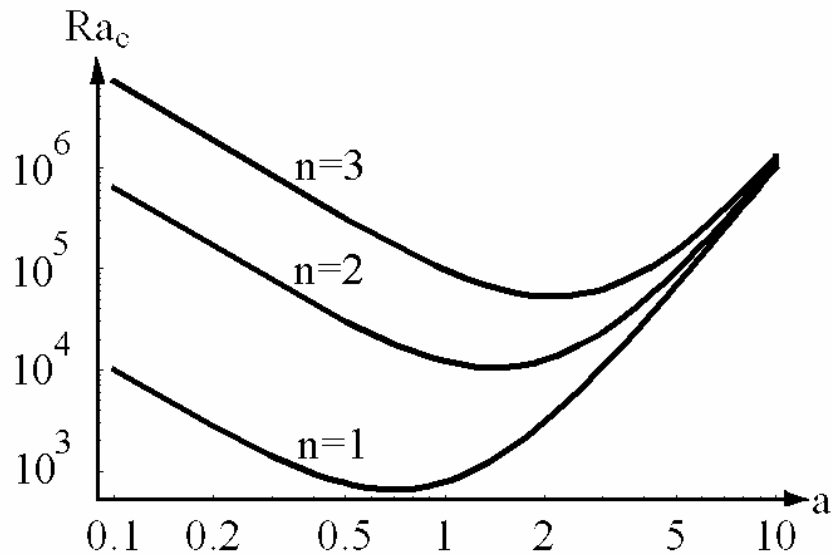


Рис. 2.7.2. Нейтральные кривые для конвекции Рэлея.

Зависимость (2.7.22) (нейтральные кривые) представлена на Рис. 2.7.2. Т.к. требуется найти самые «опасные» возмущения, определим минимальное число Рэлея и соответствующие ему значения  $a$  и  $n$ . С целью найти минимум, дифференцируем зависимость (2.7.22) по параметру  $a$ :

$$\frac{\partial Ra_c}{\partial a} = \pi^4 \frac{3(a^2 + n^2)^2 2aa^2 - (a^2 + n^2)^3 2a}{a^4} = 2\pi^4 (a^2 + n^2)^2 \frac{2a^2 - n^2}{a^3} = 0.$$

В результате находим критические значения

$$a_c = \frac{n}{\sqrt{2}}, \quad Ra_{c \min} = \frac{27\pi^4 n^4}{4} \approx 657.511.$$

Напомним, что значение критического числа Рэлея зависит от граничных условий. Выше мы подробно рассмотрели случай, когда обе границы являются свободными. Если обе границы жесткие, то  $Ra_{кр} \approx 1707$ . Если верхняя граница свободная, а нижняя жесткая, то  $Ra_{кр} \approx 1100$ . Во всех случаях речь идет о недеформируемых границах. Свободной границе соответствует, например, открытая поверхность жидкости, а жесткой – дно бассейна.