

Глава 3. Элементы теории динамических систем

Хаос и турбулентность долгое время ассоциировались с системами, имеющими огромное число степеней свободы. Развитая турбулентность считалась лишенной какого-либо порядка. Лишь с конца 60-х годов прошлого столетия наметился прогресс в понимании структуры хаоса и природы турбулентности.

Во-первых, была установлена возможность хаотического поведения нелинейных динамических систем с малым числом степеней свободы. Особенно активно исследования хаотического поведения таких систем началось после работы Лоренца [Lorenz, 1963]. В частности, в статье Д. Рюэля и Ф. Таккенса [Ruelle and Takens, 1971] впервые было сформулировано понятие странного аттрактора и указана его роль в формировании нерегулярного поведения системы.

Во-вторых, было понято, что даже в самом развитом турбулентном потоке существуют элементы порядка, а число реально возбужденных степеней свободы значительно меньше ожидаемого. В 70-80-х годах появляются работы, посвященные когерентным структурам в турбулентных потоках, и делаются попытки описания турбулентности на языке фракталов.

Обычно рассматривают маломерные динамические системы, описывающие хаотическое поведение во времени небольшого числа заданных в пространстве мод. Реальным прообразом таких динамических систем могут служить течения при малых надкритичностях (вблизи порога неустойчивости). Напомним, что истинная развитая турбулентность хаотична не только во времени, но и в пространстве. Однако, теория маломерных динамических систем чрезвычайно полезна для понимания

путей развития турбулентности (сценариев перехода к хаосу) и для отработки методов описания хаотических систем.

Важно отметить, что нелинейность является *необходимым, но не достаточным условием* возникновения хаотического поведения. Возникновение хаоса связано с особым свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить решения в ограниченной области фазового пространства, а не с наличием источников шума или бесконечного числа степеней свободы. Нерегулярное поведение нелинейных систем, эволюция которых однозначно описывается динамическими уравнениями при заданных начальных условиях, называют **детерминированным хаосом**.

В настоящей главе будут введены основные понятия теории динамических систем, выведена знаменитая система уравнений Лоренца и проведен краткий анализ реализующихся в ней режимов. Также будут рассмотрены хаотические режимы, которым свойственно существование странного аттрактора – объекта имеющего фрактальную размерность. Определенное внимание будет уделено и диссипативным структурам.

3.1. Базовые понятия

Динамической системой называется математический объект, соответствующий реальным системам (физическим, химическим, биологическим и др.), эволюция которых однозначно определяется начальным состоянием. Динамические системы с конечным числом переменных (пространственно распределенные системы мы пока не рассматриваем) описываются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(\vec{x}, \vec{\lambda}), \quad (3.1.1)$$

где $\vec{\lambda}$ – вектор управляющих параметров, а функции $F_i(\vec{x}, \vec{\lambda})$ не зависят явно ни от пространственной координаты, ни от времени. Пространство координат x_i называется **фазовым пространством**. Изменению состояния системы во времени отвечает движение точки в фазовом пространстве вдоль некоторой линии, называемой **фазовой траекторией**.

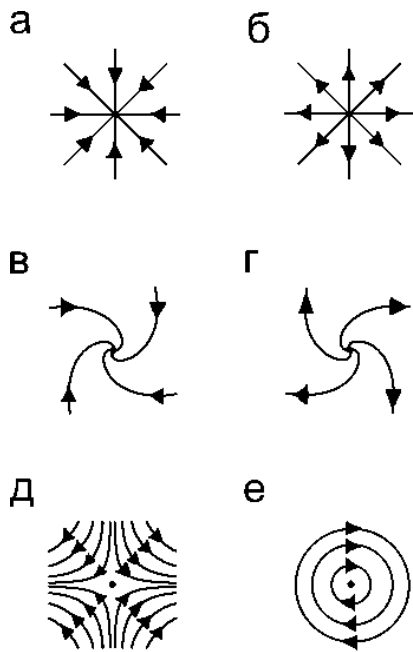


Рис. 3.1.1. Поведение фазовых траекторий вблизи особых точек.

На Рис. 3.1.1. на примере двумерного фазового пространства показаны варианты поведения фазовых траекторий вблизи особых точек. В зависимости от того, как ведут себя траектории, особые точки подразделяются на (а) устойчивые и (б) неустойчивые **узлы**, (в) устойчивые и (г) неустойчивые **фокусы**, (д) **седловые точки** (устойчивые по одному и неустойчивые по другому направлению) и (е) **центры** (траектории представляют собой замкнутые линии).

Объекты фазового пространства, которые, будучи ограничены, отображаются сами на себя в ходе эволюции системы, называются **инвариантными множествами**. Кроме неподвижных точек к

Первый и простейший тип траектории в фазовом пространстве определяется условием $dx_i/dt = 0$. Эта траектория является вырожденной, т.е. она представляет собой точку, которая именуется **неподвижной**. Неподвижная точка является особой точкой, т.к. в ней не определена касательная к траектории. Все иные точки фазового пространства, где $\sum F_i^2 \neq 0$ называются **регулярными точками**.

На Рис. 3.1.1. на примере двумерного фазового пространства показаны варианты

инвариантным множествам относятся замкнутые кривые, называемые **предельными циклами**. Как и неподвижные точки, предельные циклы подразделяются на устойчивые и неустойчивые. Пример хода фазовых траекторий вблизи предельных циклов показан на Рис. 3.1.2. Асимптотически устойчивый предельный цикл представляет собой **периодический аттрактор** (от англ. attract – притягивать). Если предельный цикл неустойчив, то траектории «выталкиваются» с него и идут либо к другому циклу, либо к неподвижной точке. Совокупность фазовых траекторий образует **фазовый портрет** динамической системы.

В соответствии с **теоремой единственности** решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (теоремой Коши), система (3.1.1) имеет единственное решение при условии, что в начальный момент времени система не находится в неподвижной точке. Из теоремы Коши вытекает важное **следствие**, согласно которому фазовые траектории в регулярных точках не пересекаются. Невозможность самопересечения траекторий и существование инвариантных множеств в значительной мере определяют структуру фазового портрета.

В одномерном фазовом пространстве разнообразие движений невелико. Ведь следствие из теоремы Коши не позволяет системе двинуться по уже пройденному пути вспять. Поэтому возможны лишь процессы релаксационного типа, когда траектория стремится к устойчивой неподвижной точке, исходя либо из некоторой регулярной точки, либо из неустойчивой неподвижной точки. При отсутствии неподвижных точек, в принципе, возможно и бесконечное движение вдоль оси. Но для любой реально существующей системы, фазовая траектория не может удаляться на

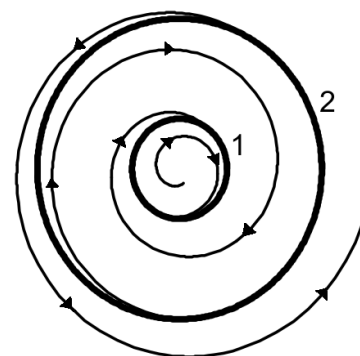


Рис. 3.1.2. Устойчивый (1) и неустойчивый (2) предельные циклы.

бесконечность, поскольку это означало бы, что система может поглотить или произвести бесконечное количество вещества или энергии.

Двумерному фазовому пространству свойственно большее разнообразие траекторий и, следовательно, двумерная динамическая система может вести себя более сложно. Для многомерных систем ($N \geq 3$) траектории имеют еще большую свободу избегать друг друга, проскальзывая в зазорах. Благодаря этой “свободе” становятся возможными новые типы динамического поведения, в том числе хаотический или турбулентный.

В качестве не очень оригинального, но полезного примера рассмотрим фазовый портрет математического маятника. Пусть l – длина подвеса, α – угол отклонения от вертикали. Полная энергия маятника дается следующей формулой:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgl(1 - \cos \alpha) = ml^2 \left(\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{g}{l}(1 - \cos \alpha) \right). \quad (3.1.2)$$

В отсутствие трения маятник сохраняет энергию, т.е. $dE/dt = 0$. Дифференцируя выражение (3.1.2) по времени, приходим к известному уравнению колебаний

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0. \quad (3.1.3)$$

Состояние маятника в любой момент времени полностью задается двумя величинами: отклонением α и угловой скоростью $\dot{\alpha}$. Если мы введем систему координат, осями которой служат α и $\dot{\alpha}$, то точка на плоскости будет полностью характеризовать состояние системы, а эволюция системы во времени будет представляться линиями – траекториями (Рис. 3.1.3).

Уравнение второго порядка (3.1.3) заменим системой двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\dot{\alpha}) = -\frac{g}{l} \sin \alpha, \\ \frac{d}{dt}(\alpha) = \dot{\alpha}. \end{cases}$$

Легко находятся неподвижные точки $\dot{\alpha} = 0, \alpha = \pm n\pi, n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Если энергия колебаний превышает величину $2mgl$, т.е. $\dot{\alpha} > 2\sqrt{g/l}$, то колебания переходят во вращение. Линии, разделяющие область колебаний и область вращения (сепаратрисы), описываются уравнением

$$\frac{l\dot{\alpha}^2}{4g} + (1 - \cos \alpha)/2 = 1.$$

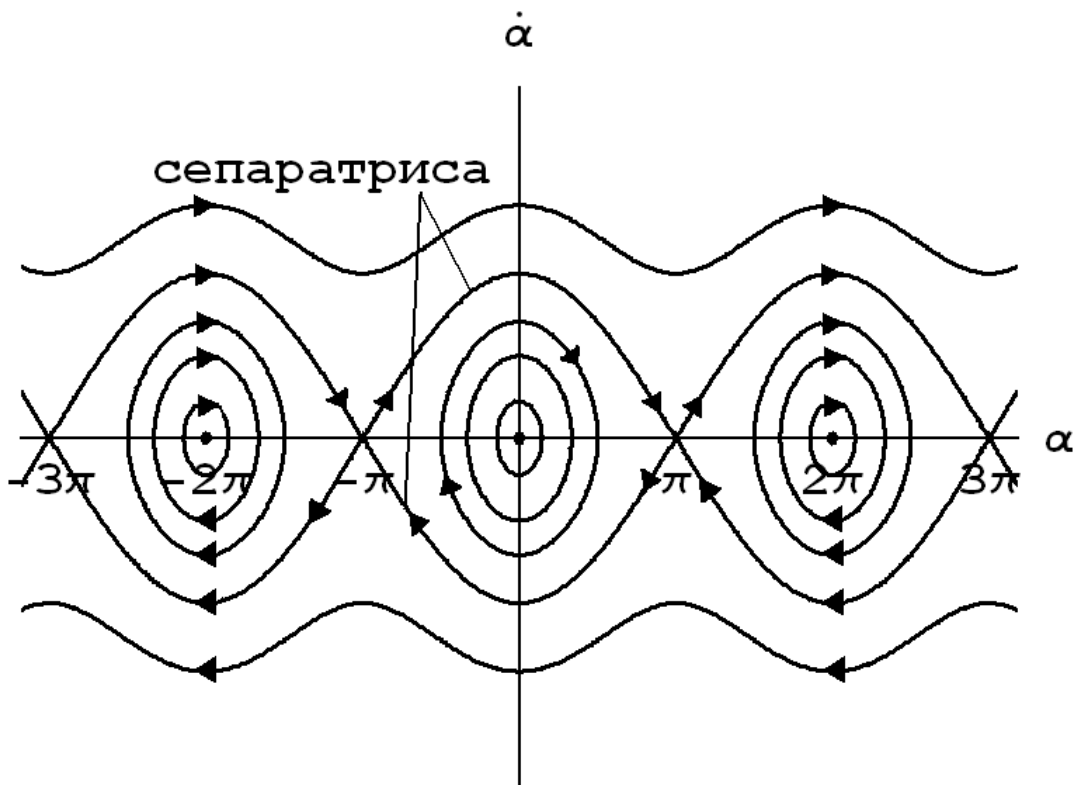


Рис. 3.1.3. Фазовый портрет математического маятника.

Маятник без трения относится к консервативным системам. Напомним, динамическая система называется **консервативной**, когда в отсутствии внешнего влияния остаются неизменными ее полная энергия, количество движения, момент количества движения (и др.

характеристики). Процессы в консервативных системах обратимы во времени.

Из консервативности системы следует очень важное свойство – сохранение объемов (в двумерном случае площадей) в фазовом пространстве (**теорема Лиувилля**). Элемент объема можно рассматривать как множество начальных условий. В процессе эволюции это множество преобразуется в другой элемент фазового пространства, объем которого остается постоянным. При этом каждая точка объема следует своей траекторией.

Маятник с трением, жидкие среды с молекулярной теплопроводностью и диффузией служат простейшими примерами **диссипативных систем**. Несложно догадаться, что в случае затухающих колебаний маятника фазовые траектории будут стремиться к простейшему аттрактору – неподвижной точке, представляющей собой фокус или узел, в зависимости от величины трения. Заметим, что в диссипативных системах процессы необратимы во времени.

Рассмотрим пример диссипативной системы, в которую обеспечен приток энергии. Пусть это будет маятник с трением и с накачкой (как, например, в механических часах). В результате некоторого переходного процесса в такой системе установятся периодические колебания. Иными словами на больших временах система выходит на аттрактор – предельный цикл, представляющий собой замкнутую линию.

Важнейшим свойством диссипативных систем является сжатие объемов (в двумерном случае площадей) в фазовом пространстве. Изменения фазового объема могут происходить как равномерно по всем измерениям, так и неравномерно, т.е. когда по одному измерению идет уменьшение, а по другому растягивание, впрочем, на больших временах объем всегда стремится к нулю. В двух рассмотренных выше примерах

(маятник с трением) все траектории стремятся к аттрактору (точке или замкнутой кривой), имеющему нулевую площадь (объем). Существование аттрактора (следствие сжатия объемов в фазовом пространстве) – важнейшее свойство диссипативных систем.

3.2. Бифуркации

Бифуркацией (от лат. bifurcus – раздвоенный) называется ветвление и сливание положений равновесия решений при изменении управляющих параметров динамической системы. Основы теории бифуркаций были заложены А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым в начале 20 в., затем теория была развита А. А. Андроном и его учениками [Арнольд и др., 1986].

Математически бифуркация – это смена топологической структуры разбиения фазового пространства динамической системы на траектории при малом изменении ее параметров. Это определение опирается на понятие топологической эквивалентности динамических систем. Две системы **топологически эквивалентны**, т.е. имеют одинаковую структуру разбиения фазового пространства на траектории, если движения одной из них могут быть сведены к движениям другой непрерывной заменой координат и времени (пример: движение маятника при разных коэффициентах трения).

Что происходит с фазовым портретом динамической системы при изменении управляющих параметров? Всегда ли малые вариации управляющих параметров приводят к незначительным изменениям фазового портрета? Для ответа на эти вопросы рассмотрим простую одномерную динамическую систему, описываемую уравнением

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \lambda x, \quad (3.2.1)$$

где λ – внешний управляющий параметр. Неподвижные точки определяются как решения следующего алгебраического уравнения:

$$-x_0^3 + \lambda x_0 = 0. \quad (3.2.2)$$

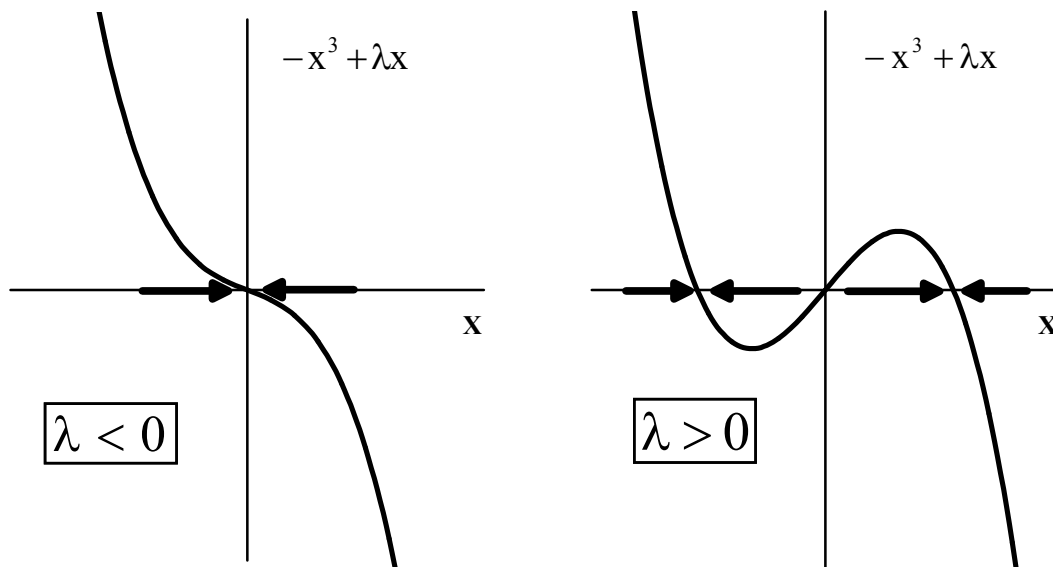


Рис.3.2.1. Устойчивость неподвижных точек.

Неподвижная точка $x_0^1 = 0$ существует при любых значениях λ , а неподвижные точки $x_0^{2,3} = \pm\sqrt{\lambda}$ – только при $\lambda > 0$. Исследуем неподвижные точки на устойчивость. Из Рис. 3.2.1 видно, что при $\lambda < 0$ и при любых начальных условиях решение уравнения (3.2.1) на больших временах стремится к неподвижной точке x_0^1 (глобальная асимптотическая устойчивость). При $\lambda > 0$ неподвижная точка $x_0^1 = 0$ тоже существует, но она уже не является устойчивой. Теперь решение уравнения (3.2.1) на больших временах стремится к одной из неподвижных точек x_0^2 или x_0^3 . Причем выбор между этими двумя положениями устойчивого равновесия

определяется начальными условиями (неподвижные точки x_0^2 и x_0^3 являются асимптотически локально устойчивыми).

Ветвление положений равновесия уравнения (3.2.1) показано на Рис. 3.2.2. Бифуркация такого типа называется **вилкой**.

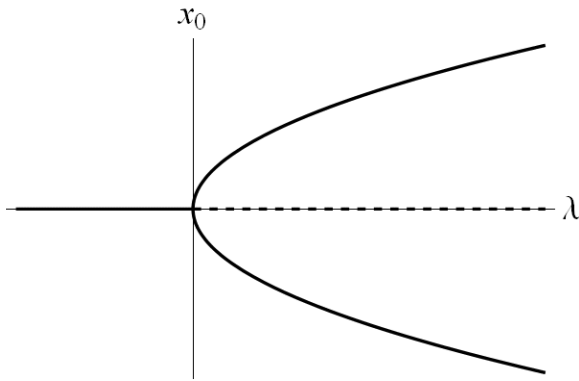


Рис. 3.2.2. Бифуркация «вилка».

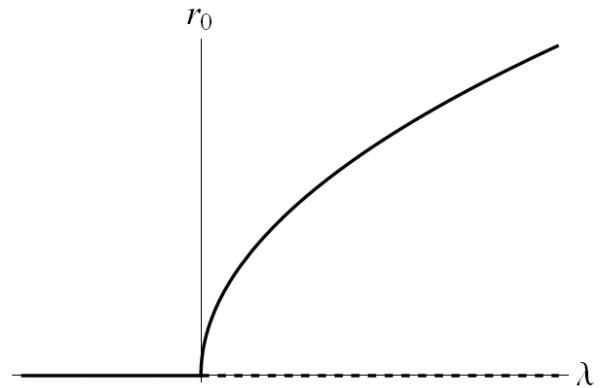


Рис. 3.2.3. Бифуркация Хопфа.

Рассмотрим теперь простую двумерную динамическую систему с двумя управляющими параметрами λ и ω

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -r^3 + \lambda r, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Первое из уравнений системы (3.2.3) совпадает с (3.2.1) при дополнительном условии, что радиус r должен быть положительным. Свойства решений системы (3.2.3) и уравнения (3.2.1), очевидно, имеют много общего. При $\lambda < 0$ существует лишь тривиальное решение $r_0^1 = 0$, которое является устойчивым

(Рис. 3.2.3). В фазовом пространстве с координатами $x_1 = r \cos \varphi$ и $x_2 = r \sin \varphi$ траектории будут стремиться к неподвижной точке $x_1 = x_2 = 0$

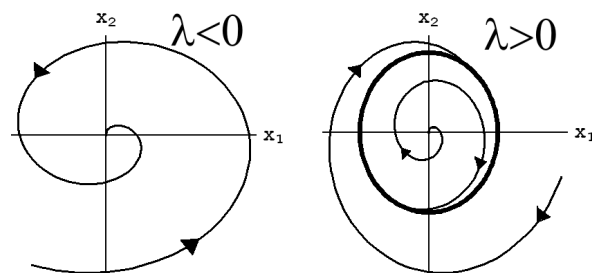


Рис. 3.2.4. Рождение предельного цикла при бифуркации Хопфа.

(Рис. 3.2.4). При $\omega \neq 0$ эта точка должна быть фокусом, в силу того, что угловая переменная меняется по закону $\varphi = \varphi_0 + \omega t$.

При $\lambda > 0$ тривиальное решение $r_0^1 = 0$ также существует, но теперь оно неустойчиво. Однако появляется второе нетривиальное решение $r_0^2 = \sqrt{\lambda}$, которое является устойчивым (Рис. 3.2.3). В фазовом пространстве $\{x_1, x_2\}$ такой случай будет представлен траекториями, удаляющимися по спирали от неподвижной точки и стремящимися к предельному циклу (Рис. 3.2.4). В случае, когда исходная точка лежит в области $r > r_0^2$, траектории будут представлять собой спирали, сходящиеся к предельному циклу извне.

В системе (3.2.3) при $\lambda = 0$ происходит бифуркация нового типа: из неподвижной устойчивой точки рождается устойчивый предельный цикл. Такая бифуркация называется **бифуркацией Хопфа**.

Обе рассмотренные бифуркации примечательны тем, что потеря устойчивости происходит мягко: по мере увеличения надкритичности (параметра λ) вновь возникшие устойчивые решения плавно удаляются от решения, которое стало неустойчивым. Если, например, говорить про бифуркацию Хопфа, то амплитуда колебаний в возникающем предельном цикле плавно увеличивается от нуля пропорционально $\sqrt{\lambda}$.

Но возможен и другой сценарий развития событий, когда переход оказывается жестким. Рассмотрим динамическую систему, которая описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -r^5 + r^3 + \lambda r, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega, \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

где $r \geq 0$.

Неподвижные точки определяются из уравнения

$$-r^5 + r^3 + \lambda r = 0. \quad (3.2.5)$$

Уравнение (3.2.5) имеет тривиальное решение $r_0^1 = 0$, которое является устойчивым при $\lambda < 0$ и неустойчивым при $\lambda > 0$. В этом легко убедиться, если проанализировать знак производной dr/dt при малых значениях величины r :

$$\frac{dr}{dt} = -r^5 + r^3 + \lambda r \approx \lambda r.$$

Но уравнение (3.2.5) имеет еще и две ветви нетривиального решения:

$$r_0^2 = \sqrt{1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}} / \sqrt{2}. \quad (3.2.6)$$

Нижняя ветвь решения, существующая в диапазоне $-0.25 < \lambda < 0$, является неустойчивой. Верхняя ветвь, существующая в диапазоне $\lambda > -0.25$, устойчива. Тривиальное и нетривиальное решения (3.2.6) показаны на Рис. 3.2.5.

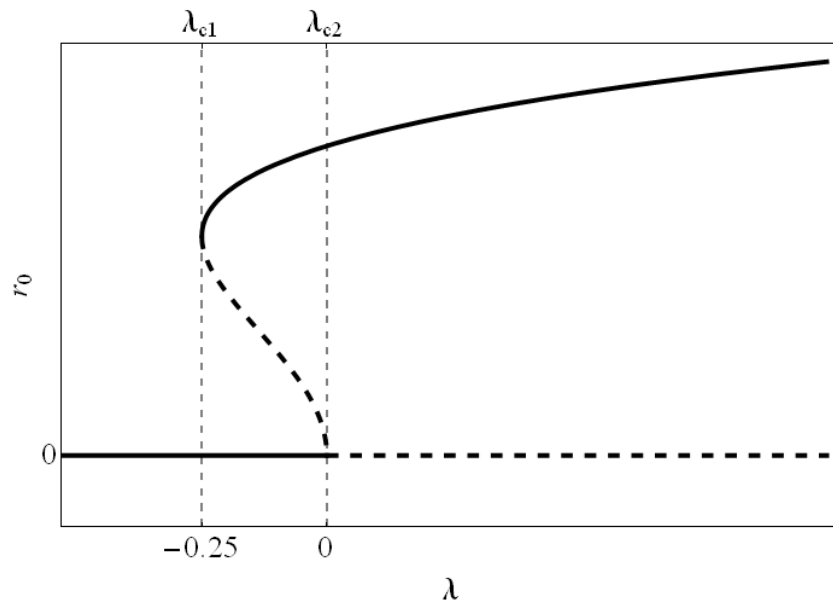


Рис. 3.2.5. Бифуркация жесткого рождения предельного цикла. Устойчивые ветви показаны сплошной линией, неустойчивые – пунктиром.

Любопытной особенностью рассматриваемой системы является наличие диапазона $\lambda_{c1} < \lambda < \lambda_{c2}$, в котором сосуществуют два устойчивых

решения. В этом диапазоне выбор решения системой оказывается зависящим от ее предыстории. Такое явление хорошо известно в физике, называется оно гистерезис.

При значениях параметра $\lambda < \lambda_{c1} = -0.25$, в системе существует единственное устойчивое стационарное состояние. Если параметр λ плавно увеличивать, то как только его значение превысит критическую величину λ_{c2} , стационарное состояние потеряет устойчивость, и возникает предельный цикл, причем амплитуда колебаний сразу скачком возрастет до конечной величины (жесткое возбуждение). При дальнейшем увеличении параметра λ амплитуда колебаний будет плавно нарастать. Но если двигаться в обратном направлении, уменьшая параметр λ , то предельный цикл будет существовать вплоть до значений $\lambda = \lambda_{c1}$, когда колебания жестко сорвутся, и цикл превратится в неподвижную точку.

Рассмотренные выше три примера, разумеется, не исчерпывают собой все возможные варианты бифуркаций.

В заключение раздела обратим внимание на следующий важную особенность. Во всех рассмотренных примерах мы имели дело с простыми уравнениями, плавно зависящими от параметра λ . Но, несмотря на эту простоту, в окрестности точки бифуркации возникает особенность, которая не позволяет разложить решение в ряд по степеням параметра λ . Иными словами, решение зависит от управляющего параметра λ *не аналитически*. Этот факт отражает *качественное* изменение поведения системы в точке бифуркации.

3.3. Странный аттрактор. Фрактальная размерность

В предыдущем разделе речь шла о дискретных системах, которые описываются конечным числом переменных. В случае пространственно распределенных систем поступают следующим образом. Поля (скорости, давления и др.) представляют в виде рядов Фурье. В результате возникают новые переменные – амплитуды гармоник. Если такие гармоники, расположить в порядке убывания масштабов, то, очевидно, ряд будет конечен, так как масштабы вихрей всегда ограничены снизу действием вязкости. Поэтому и фазовое пространство остается конечномерным.

Кроме того, ограниченность амплитуд пульсаций скорости обеспечивает ограниченность объема пространства состояний, в котором располагаются траектории, соответствующие режиму течения вязкой жидкости. Траектории могут стремиться к предельному циклу (периодическое движение) или просто вести себя сложно и запутано. Сложное и запутанное движение можно представить себе, если предположить, что все траектории неустойчивы. Неустойчивость означает, что две сколь угодно близкие точки фазового пространства с течением времени способны разойтись на большое расстояние – такое движение и ассоциируется с турбулентностью.

Притягивающее множество неустойчивых траекторий в фазовом пространстве диссипативной системы называется стохастическим или **странным аттрактором**. На первый взгляд неустойчивость всех траекторий, принадлежащих странному аттрактору, и требование о том, что бы все соседние траектории к нему стремились – несовместимы. Но это кажущееся противоречие. Дело в том, что траектории могут быть неустойчивыми по одним направлениям и устойчивыми, т.е. притягивающимися, по другим.

Странный аттрактор обладает следующими свойствами. Во-первых, он притягивает фазовые траектории из области притяжения (в противном

случае этот объект не был бы аттрактором). Во-вторых, странный аттрактор является чувствительным к начальным условиям (близкие траектории расходятся). В-третьих, странный аттрактор имеет дробную (фрактальную) размерность.

Второе свойство странного аттрактора (чувствительность к начальным условиям) создает принципиальные сложности на пути решения прогностических задач. Так, например, невозможным оказывается точное предсказание погоды на длительный срок: для прогноза на 1-2 месяца вперед требуется знать начальные условия с невероятно большой относительной точностью $\sim 10^{-5}$.

Третье свойство заслуживает особого комментария. Для определенности будем говорить о трехмерном фазовом пространстве. Действительно, в силу диссипативности системы, объем аттрактора должен быть равен нулю. Для того чтобы объем множества точек был равен нулю, топологическая размерность этого множества должна быть меньше размерности фазового пространства $D < 3$. Но в двумерном пространстве странный аттрактор не существует, следовательно, его размерность $D > 2$. В итоге приходим к тому, что странный аттрактор имеет дробную топологическую размерность $2 < D < 3$. Объекты, имеющие дробную топологическую размерность именуется **фракталами**.

Фрактальная размерность (Хаусдорфа-Безиковича) определяется следующим образом. Пусть $N(\varepsilon)$ - наименьшее число кубов с ребром ε (сфер с диаметром ε), которое покрывает все точки множества. Тогда размерность Хаусдорфа-Безиковича есть

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right). \quad (3.3.1)$$

Покажем, что данное определение дает целочисленные значения размерности для обычных хорошо известных множеств. Так, для множества, состоящего из конечного числа изолированных точек N , минимальное число сфер, с помощью которых можно покрыть это множество, при достаточно малом размере сфер совпадает, очевидно, с количеством точек и не зависит от радиуса этих сфер. Следовательно, согласно формуле (3.3.1), фрактальная размерность этого множества $D = 0$, что совпадает с топологической размерностью точки.

Для отрезка прямой линии длиной L минимальное число отрезков размера ε , с помощью которых можно целиком покрыть данный отрезок, $N(\varepsilon) = L/\varepsilon$. В этом случае, согласно формуле (3.3.1), фрактальная размерность $D = 1$, что совпадает с топологической размерностью отрезка прямой. Аналогичный результат очевидно будет получен, если рассматривать не прямую линию, а отрезок некоторой кривой.

Продолжая рассуждения, несложно показать, что размерность участка некоторой поверхности имеет размерность $D = 2$, а объекты, представляющие собой области трехмерного пространства ограниченные поверхностями (куб, призма, эллипсоид и т.д.), имеют топологическую размерность $D = 3$.

Рассмотрим два простых примера: (1) прямоугольник с длинами сторон a и b , (2) прямоугольный параллелепипед с длинами сторон a , b и c . В первом случае минимальное число квадратиков с размером ребра ε , с помощью которых можно целиком покрыть данный прямоугольник, составляет $N(\varepsilon) = ab/\varepsilon^2$. Применяя формулу (3.3.1), получаем $D = 2$. Во втором случае то минимальное число кубиков с длиной ребра ε , которое требуется для его покрытия параллелепипеда, составит $N(\varepsilon) = abc/\varepsilon^3$. Формула (3.3.1) дает топологическую размерность параллелепипеда $D = 3$.

Простейшим и классическим примером объекта, имеющего нецелую размерность, является **Канторово множество**. По забавной исторической случайности оно впервые было описано в Г. Кантором в 1883 г., т.е. именно в тот год, когда О.Рейнольдс опубликовал результаты своих знаменитых экспериментов.

Строится Канторово множество следующим образом (Рис. 3.3.1). На первом шаге имеем множество состоящее из единичного отрезка вещественной прямой. На втором шаге удалим среднюю треть этого отрезка. Теперь множество состоит из двух отрезков. На третьем шаге удалим среднюю треть из каждого из двух оставшихся отрезков. Осталось четыре отрезка. Повторяя эту процедуру вновь и вновь, в пределе получим множество, которое называется Канторовым множеством.



Рис. 3.3.1. Построение Канторова множества. Рисунок заимствован с сайта <http://ru.wikipedia.org/>.

Определим размерность Канторова множества. Пусть индекс m – номер шага. Тогда число необходимых кубов при $m=1$ есть $N=1$, при $m=2$ – $N=2$ и т. д. На шаге m число кубов составит $N=2^m$. Размер ребра куба $\varepsilon = (1/3)^m$. Применяя формулу (3.3.1), получаем

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 2^m}{\ln 3^m} \right) = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.631.$$

Оказалось, что Канторово множество обладает нецелой топологической размерностью. Образно говоря, топологический «статус» этого множества множества лежит где-то между точкой и отрезком прямой.

В качестве следующего примера фрактального множества рассмотрим ковер Серпинского (квадрат Серпинского). Этот объект был

предложен польским математиком Вацлавом Серпинским и он представляет собой один из двумерных аналогов множества Кантора.

Построение квадрата Серпинского во многом аналогично построению множества Кантора. Обычный единичный квадрат делится прямыми, параллельными его сторонам, на 9 равных квадратов, после чего центральный квадрат удаляется. Получается множество, состоящее из 8 квадратов. Проводя аналогичную процедуру (деление на 9 равных частей и удаление центральной части) с каждым из оставшихся 8 квадратов, получим множество состоящее из 64 квадратов. Повторяя этот процесс до бесконечности, приходим к множеству, которое называется ковер Серпинского (Рис. 3.3.2).

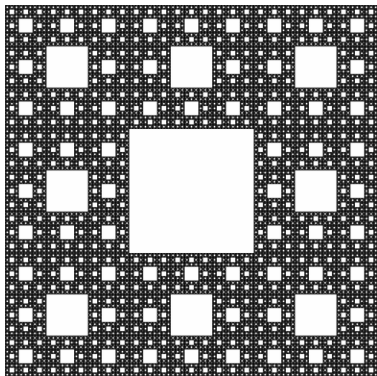


Рис. 3.3.2. Ковер (квадрат) Серпинского. Рисунок заимствован с сайта <http://ru.wikipedia.org/>.

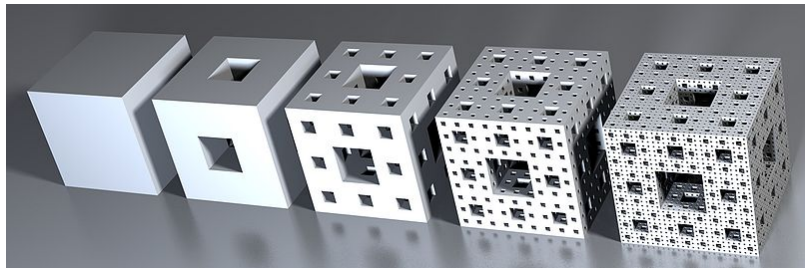


Рис. 3.3.3. Построение губки Менгера. Рисунок заимствован с сайта <http://ru.wikipedia.org/>.

Для определения топологической размерности ковра Серпинского действуем по уже отработанной выше схеме. Минимальное число кубов (квадратов), необходимых для покрытия объекта на шаге m составляет $N = 8^m$, а размер ребра куба – $\varepsilon = (1/3)^m$. Применяя формулу (3.3.1), получаем

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 8^m}{\ln 3^m} \right) = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.893.$$

Вновь топологическая размерность объекта оказалась нецелой. На этот раз можно утверждать, что топологический «статус» ковра Серпинского находится между линией и поверхностью.

Трёхмерный аналог ковра Серпинского – губка Менгера (Рис. 3.3.3). Принцип построения этого объекта таков. Куб с единичным ребром делится плоскостями, параллельными его граням, на 27 равных кубов. Из куба удаляются центральный куб и все прилежащие к нему по двумерным граням кубы этого подразделения. Получается множество, включающее все себя 20 оставшихся кубов. Повторяя процедуру с каждым из оставшихся 20 кубов, получим множество, состоящее из 400 кубов. Бесконечно продолжая этот процесс, получим губку Менгера.

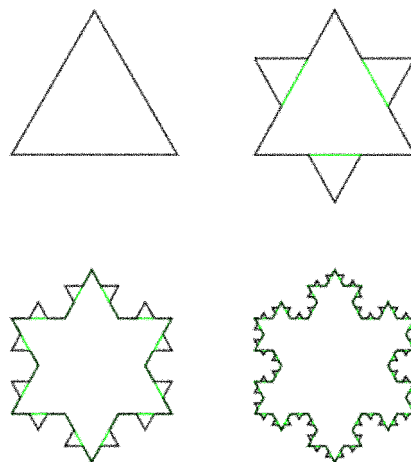
Фрактальная размерность губки Менгера ($N = 20^m$, $\varepsilon = (1/3)^m$) составляет

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 20^m}{\ln 3^m} \right) = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2.727.$$

Т.е. на этот раз мы получили объект с топологической размерностью $2 < D < 3$.

а

б



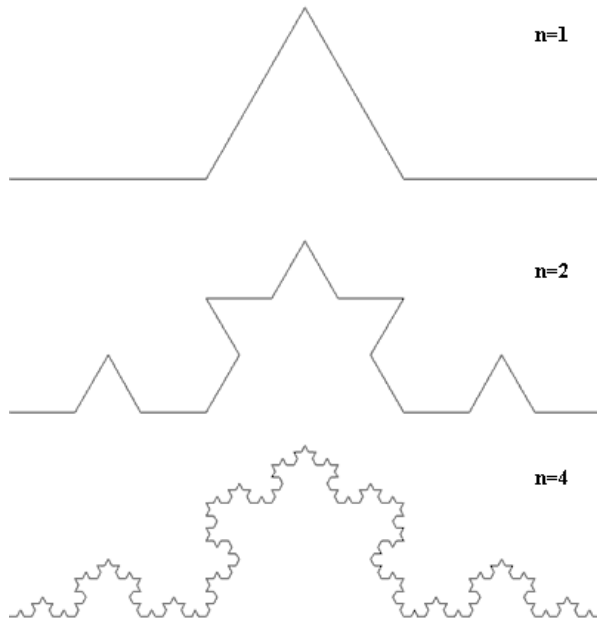


Рис. 3.3.4. Кривая (а) и снежинка (б) Коха. Рисунок заимствован с сайта <http://ru.wikipedia.org/>

Еще один широко известный пример фрактального объекта кривая Коха (описана в 1904 году шведским математиком Хельге фон Кохом). Опишем процесс ее построения (Рис. 3.3.4а). Берем единичный отрезок, разделяем его на три равные части и заменяем средний интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырех звеньев длины $1/3$. На следующем шаге повторяем операцию для каждого из четырёх получившихся звеньев. Бесконечно повторяя эту процедуру, в пределе получаем кривую Коха. Если соединить три одинаковые кривые Коха, так как это показано на Рис. 3.3.4б, то получится объект, именуемый снежинкой Коха.

Определение топологической размерности кривой (или снежинки) Коха дает следующую величину (число кубов $N = 4^m$, длина ребра куба $\varepsilon = (1/3)^m$):

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 4^m}{\ln 3^m} \right) = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.262.$$

В завершение этого раздела хотелось бы заметить, что фракталы не являются отвлеченными от жизни искусственными математическими построениями, они широко распространены в природе. Изложенные выше классические примеры фракталов, конечно, являются искусственными построениями, но они необходимы для начального знакомства с такими объектами. Наиболее известным природным фракталом является, например, береговая линия [Мандельброт, 2002]. Как мы убедились выше дробной топологической размерностью обладает странный аттрактор. Кроме того, область, в которой происходит диссипация энергии турбулентного потока, также имеет фрактальную размерность.

3.4. Маломодовая модель конвекции Лоренца

Изложим процесс получения конечномерных проекций уравнений движения жидкости, в результате которого будет получена система обыкновенных дифференциальных уравнений (система Лоренца), описывающая конвективные движения [Lorenz, 1963]. Принимая во внимание общепринятый вид системы Лоренца, будем следовать этим обозначениям [Фрик, 2003].

Как и в задаче Рэлея, описанной в разделе 2.7, будем рассматривать плоские движения жидкости (конвективные валы), возникающие в слое жидкости толщины h , ограниченном двумя горизонтальными плоскостями. Нижняя плоскость имеет температуру T_1 , верхняя – T_2 . Начало системы координат расположим на нижней плоскости. Ось Oz направим

вертикально вверх, а ось $0x$ – горизонтально. Уравнения Буссинеска запишем в покомпонентном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \quad (3.4.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w + g\alpha T, \quad (3.4.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \Delta T, \quad (3.4.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.4.4)$$

Ведем функцию тока ψ , так что $u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$, $w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, и, сохраняя в

уравнениях нелинейные члены, получим:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \Delta \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (3.4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta \frac{\partial \psi}{\partial x} + g\alpha T, \quad (3.4.6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \Delta T. \quad (3.4.7)$$

После обычной процедуры дифференцирования уравнения (3.4.5) по z и уравнения (3.4.6) по x имеем

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} = \\ & = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} - \nu \Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z \partial x^2} = \\ & = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x} + \nu \Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + g\alpha \frac{\partial T}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Сокращая в выражениях (3.4.8) и (3.4.9) подобные члены, имеющие разные

знаки $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}$ и $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x}$, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z \partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} = \\ = \nu \Delta \Delta \psi + g \alpha \frac{\partial T}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Далее, группируя члены при $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = \\ = \nu \Delta \Delta \psi + g \alpha \frac{\partial T}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Учитывая линейную зависимость равновесной температуры от вертикальной координаты, представим температуру в следующем виде:

$$T = \vartheta + T_1 - \frac{z}{h} (T_1 - T_2), \quad (3.4.12)$$

где ϑ – отклонение температуры от равновесного значения. С учетом формулы (3.4.12) уравнения (3.4.7) и (3.4.11) принимают вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{(T_1 - T_2)}{h} = \chi \Delta \vartheta, \quad (3.4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = \\ = \nu \Delta \Delta \psi + g \alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Для упрощения записи используем скобки Пуассона

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (3.4.15)$$

С учетом (3.4.15) уравнения (3.4.13) и (3.4.14) выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \{\psi, \vartheta\} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{(T_1 - T_2)}{h} = \chi \Delta \vartheta, \quad (3.4.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \{\psi, \Delta \psi\} = \nu \Delta \Delta \psi + g \alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \quad (3.4.17)$$

Полученную систему уравнений необходимо дополнить граничными условиями (см. граничные условия в задаче Рэлея (2.7.13))

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \psi = 0, \quad \vartheta = 0 \quad \text{при } z = 0, h. \quad (3.4.18)$$

Решение задачи (3.4.16)-(3.4.18) ищем в виде разложения в двойные ряды Фурье с амплитудами гармоник, зависящими от времени

$$\psi(x, z, t) = \sum_{m,n} \psi_{mn}(t) \sin\left(\frac{\pi m x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{h}\right), \quad (3.4.19)$$

$$\vartheta(x, z, t) = \sum_{m,n} \vartheta_{mn}(t) \cos\left(\frac{\pi m x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{h}\right). \quad (3.4.20)$$

Несложно видеть, что решение в форме (3.4.19), (3.4.20) автоматически удовлетворяет граничным условиям задачи. Если выражения (3.4.19) и (3.4.20) подставить в систему уравнений, и затем приравнять коэффициенты при одинаковых функциях x и z , то получится система обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $\psi_{mn}(t)$ и $\vartheta_{mn}(t)$. Такая система, вообще говоря, содержит бесконечное число уравнений. Но существуют физические причины, ограничивающие число членов в рядах (3.4.19) и (3.4.20). Дело в том, что члены ряда с большими индексами m и n описывают возмущения малых пространственных масштабов. Но в силу действия молекулярных механизмов (вязкость и теплопроводность), выглаживающих пространственные неоднородности, масштабы возмущений всегда ограничены снизу, следовательно, в рассматриваемых рядах всегда можно ограничиться конечным числом членов.

Особенностью модели Лоренца является использование предельно малого числа членов в разложениях (3.4.19) и (3.4.20). Однако, это минимальное число членов сохраняет нелинейность системы. Следуя Лоренцу, обозначим амплитуды соответствующих мод как X , Y и Z . При приведении уравнений к безразмерному виду используются следующие (не совсем обычные) единицы измерений: длина – h , время – $\tau = h^2 / [\pi^2 \chi (1 + a^2)]$, функция тока – h^2 / τ , температура – $(T_1 - T_2)$. Параметр a определен в разделе 2.7 (формулы (2.7.14) и (2.7.15)), параметр $b = 4 / (1 + a^2)$. Кроме того, вводится нормированное число Рэлея

$$r = \frac{Ra}{Ra_{кр}} = \frac{g \alpha \Delta T h^3 a^2}{\chi \nu \pi^4 (a^2 + 1)^3}.$$

Заметим, что размерность функции тока ψ действительно $[m^2 / c]$, т.к. частная производная по пространству дает величину с размерностью скорости.

Напомним, что (см. раздел 2.7)

$$Ra = \frac{g \alpha \Delta T h^3}{\chi \nu}, \quad Ra_{кр} = \frac{\pi^4 (a^2 + n^2)^3}{a^2} \Big|_{n=1} = \frac{\pi^4 (a^2 + 1)^3}{a^2}.$$

Следует отметить еще одно не совсем стандартное обозначение: число Прандтля в системе уравнений Лоренца традиционно обозначается как σ ($\sigma \equiv Pr$).

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \{\psi, \vartheta\} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{b}{4\pi^2} \Delta \vartheta, \quad (3.4.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \{\psi, \Delta \psi\} = \frac{b\sigma}{4\pi^2} \Delta \Delta \psi + \frac{4\sigma r}{b a^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \quad (3.4.22)$$

Лоренц выбрал один член разложения для функции $\psi(x, z, t)$ и два члена для функции $\vartheta(x, z, t)$:

$$\psi(x, z, t) = X(t) \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 a} \sin(\pi a x) \sin(\pi z), \quad (3.4.23)$$

$$\vartheta(x, z, t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi r} Y(t) \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - \frac{1}{\pi r} Z(t) \sin(2\pi z). \quad (3.4.24)$$

Целесообразность именно такого выбора обусловлена результатами численных исследований конечномерных систем уравнений, выполненных в работе [Saltzman, 1962].

Легко убедиться, что при подстановке выражения (3.4.23) в уравнение (3.4.22) скобки Пуассона дают нулевой вклад.

$$\begin{aligned} \{\psi, \Delta\psi\} &= -\frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right) = \\ &= -\psi^2 \pi^2 a (-\pi^2 a^2 - \pi^2) + \psi^2 \pi^2 a (-\pi^2 a^2 - \pi^2) = 0. \end{aligned}$$

Простые дальнейшие преобразования (3.4.22) имеют своим результатом следующее уравнение (производные по времени обозначены точками):

$$\begin{aligned} -\dot{X}(\pi^2 a^2 + \pi^2) \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 a} \sin(\pi a x) \sin(\pi z) &= \frac{b\sigma}{4\pi^2} (\pi^2 a^2 + \pi^2)^2 X \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 a} \sin(\pi a x) \sin(\pi z) - \\ - \frac{4\sigma r \sqrt{2}}{b a^2 \pi r} \pi a Y \sin(\pi a x) \sin(\pi z). \end{aligned}$$

Сокращая подобные члены, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно амплитуд гармоник.

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y. \quad (3.4.25)$$

Уравнение (5.25) – первое из уравнений системы Лоренца.

Далее воспользуемся уравнением (3.4.21), подстановка в него выражений (3.4.23) и (3.4.24) дает

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{2}}{\pi r} \dot{Y} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - \frac{1}{\pi r} \dot{Z} \sin(2\pi z) + \\
& + XY \frac{2}{\pi r} \sin(\pi a x) \cos(\pi z) \sin(\pi a x) \sin(\pi z) + \\
& + X \frac{\sqrt{2}}{\pi r} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) \left[\sqrt{2} Y \cos(\pi a x) \cos(\pi z) - 2 Z \cos(2\pi z) \right] = \\
& = X \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - \frac{\sqrt{2}}{\pi r} Y \cos(\pi a x) \sin(\pi z) + \frac{b}{\pi r} Z(t) \sin(2\pi z).
\end{aligned}$$

Группируем члены при XY.

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{2}}{\pi r} \dot{Y} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - \frac{1}{\pi r} \dot{Z} \sin(2\pi z) + \\
& + \frac{XY}{\pi r} \sin(2\pi z) - XZ \frac{2\sqrt{2}}{\pi r} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) = \\
& = X \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - \frac{\sqrt{2}}{\pi r} Y \cos(\pi a x) \sin(\pi z) + \frac{b}{\pi r} Z \sin(2\pi z).
\end{aligned}$$

Выполняем промежуточные упрощения.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{2} \dot{Y} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - \dot{Z} \sin(2\pi z) + \\
& + XY \sin(2\pi z) - XZ 2\sqrt{2} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) = \\
& = Xr \sqrt{2} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - \sqrt{2} Y \cos(\pi a x) \sin(\pi z) + bZ \sin(2\pi z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dot{Y} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - \dot{Z} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2\pi z) + \\
& + XY \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2\pi z) - XZ 2 \cos(\pi a x) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) = \\
& = Xr \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - Y \cos(\pi a x) \sin(\pi z) + \frac{1}{\sqrt{2}} bZ \sin(2\pi z).
\end{aligned}$$

Группируем члены при одинаковых комплексах тригонометрических функций.

$$\begin{aligned}
& \cos(\pi a x) \sin(\pi z) [\dot{Y} - Xr + Y] - 2 XZ \cos(\pi a x) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) = \\
& = \sin(2\pi z) \frac{1}{\sqrt{2}} [\dot{Z} - XY + bZ].
\end{aligned} \tag{3.4.26}$$

Уравнение (3.4.26) разделяется на два дифференциальных уравнения путем умножения на $\sin(\pi z)$ и $\sin(2\pi z)$ с последующим интегрированием по координате z в пределах от 0 до 1.

В первом случае, при умножении на $\sin(\pi z)$ имеем:

$$\int_0^1 \sin^2(\pi z) dz = \frac{1}{2} \neq 0 \text{ (при первом члене в левой части);}$$

$$\int_0^1 \sin^2(\pi z) \cos(2\pi z) dz = -\frac{1}{4} \neq 0 \text{ (при втором члене в левой части);}$$

$$\int_0^1 \sin(\pi z) \sin(2\pi z) dz = 0.$$

В итоге процедуры получаем второе дифференциальное уравнение системы Лоренца

$$\dot{Y} = Xr - Y - XZ. \quad (3.4.27)$$

Во втором случае, при умножении уравнения (3.4.26) на $\sin(2\pi z)$ и интегрировании его по dz в пределах от 0 до 1, имеем

$$\int_0^1 \sin(\pi z) \sin(2\pi z) dz = 0 \text{ (при первом члене в левой части);}$$

$$\int_0^1 \sin(\pi z) \cos(2\pi z) \sin(2\pi z) dz = 0 \text{ (при втором члене в левой части);}$$

$$\int_0^1 \sin^2(2\pi z) dz = \frac{1}{2} \neq 0 \text{ (при правой части).}$$

Итогом данной процедуры является третье уравнение системы Лоренца

$$\dot{Z} = XY - bZ. \quad (3.4.28)$$

Заметим, что полученная система уравнений (3.4.25), (3.4.27) и (3.4.28) описывает реальные конвективные движения, но при небольших надкритичностях, т.е. относительное число Рэлея r не должно

существенно превосходить единицу. Краткий анализ режимов, описываемых системой Лоренца, будет проведен в следующем разделе.

3.5. Режимы системы Лоренца

Классическим примером динамической системы, содержащей странный аттрактор, является система Лоренца, полученная из уравнений Буссинеска в разделе 3.4.

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ, \\ \dot{Z} &= XY - bZ.\end{aligned}\tag{3.5.1}$$

Эта система подвергалась всестороннему изучению многими авторами, начиная с самого Лоренца, который проинтегрировал уравнения численно, используя фиксированные значения управляющих параметров $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и изменяя единственный управляющий параметр r .

Анализ динамической системы традиционно начинается с нахождения неподвижных точек. Полагая в уравнениях (3.5.1) производные по времени равными нулю, получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}-\sigma X + \sigma Y &= 0, \\ rX - Y - XZ &= 0, \\ XY - bZ &= 0.\end{aligned}\tag{3.5.2}$$

Система (3.5.2) обладает следующими решениями:

- 1 (тривиальным) $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$;
- 2 (нетривиальным) $X_0 = Y_0 = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $Z_0 = r-1$.

Исследуем решения на устойчивость. Для этого предположим

$$\begin{aligned}
 X &= X_0 + x e^{\lambda \cdot t}, \\
 Y &= Y_0 + y e^{\lambda \cdot t}, \\
 Z &= Z_0 + z e^{\lambda \cdot t},
 \end{aligned}
 \tag{3.5.3}$$

где x, y, z – малые величины.

Сначала займемся тривиальным решением. Учитывая, что $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$, подставим формулы (3.5.3) в уравнения Лоренца.

$$\begin{aligned}
 x\lambda e^{\lambda \cdot t} &= -\sigma x e^{\lambda \cdot t} + \sigma y e^{\lambda \cdot t}, \\
 y\lambda e^{\lambda \cdot t} &= r x e^{\lambda \cdot t} - y e^{\lambda \cdot t} - x e^{\lambda \cdot t} z e^{\lambda \cdot t}, \\
 z\lambda e^{\lambda \cdot t} &= x e^{\lambda \cdot t} y e^{\lambda \cdot t} - b z e^{\lambda \cdot t}.
 \end{aligned}
 \tag{3.5.4}$$

Пренебрегая в уравнениях (3.5.4) малыми (квадратичными) членами и сокращая общий множитель $e^{\lambda \cdot t}$, получаем следующую алгебраическую систему уравнений на амплитуды x, y, z :

$$\begin{aligned}
 x\lambda &= -\sigma x + \sigma y, \\
 y\lambda &= r x - y, \\
 z\lambda &= -b z.
 \end{aligned}
 \tag{3.5.5}$$

Однородная система линейных уравнений (3.5.5) имеет нетривиальное решение если ее определитель равен 0:

$$\begin{vmatrix}
 \lambda + \sigma & -\sigma & 0 \\
 -r & 1 + \lambda & 0 \\
 0 & 0 & \lambda + b
 \end{vmatrix} = 0.
 \tag{3.5.6}$$

Раскрывая определитель в (3.5.6), приходим к квадратному уравнению

$$\lambda^2 + \lambda(1 + \sigma) + \sigma(1 - r) = 0.
 \tag{3.5.7}$$

Уравнение (3.5.7) имеет следующее решение:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(1 + \sigma) \pm \sqrt{(1 + \sigma)^2 - 4\sigma(1 - r)}}{2}.
 \tag{3.5.8}$$

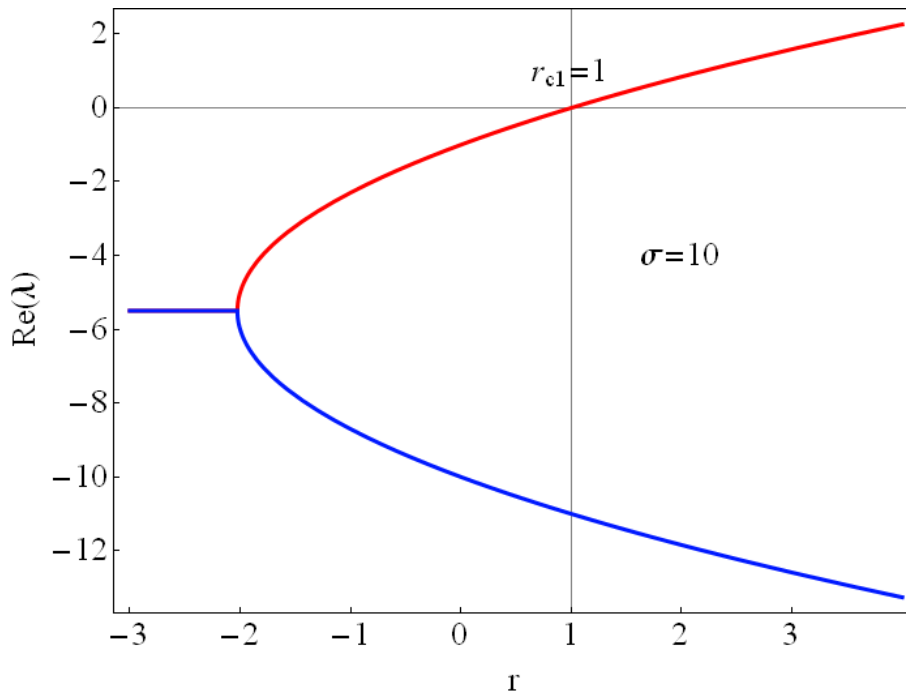


Рис. 3.5.1. Действительная часть показателя λ , ответственного за устойчивость тривиального решения, как функция параметра r . Расчет выполнен при $\sigma=10$.

Вид решения представлен на Рис. 3.5.1. Видно, что величина $\text{Re}(\lambda)$ меняет свой знак при критическом значении параметра $r_{cl} = 1$. Заметим, что критическое значение не зависит от значения параметра σ . При $r_{cl} < 1$ действительная часть показателя λ всегда отрицательна, а, следовательно, тривиальное решение устойчиво. При $r_{cl} > 1$ величина может иметь положительные значения, поэтому тривиальное решение оказывается неустойчивым.

Далее проведем аналогичный анализ для нетривиального решения. Подставляя формулы (3.5.3) в уравнения Лоренца (3.5.1), получаем

$$\begin{aligned} x\lambda e^{\lambda t} &= -\sigma(X_0 + x e^{\lambda t}) + \sigma(Y_0 + y e^{\lambda t}), \\ y\lambda e^{\lambda t} &= r(X_0 + x e^{\lambda t}) - (Y_0 + y e^{\lambda t}) - (X_0 + x e^{\lambda t})(Z_0 + z e^{\lambda t}), \\ z\lambda e^{\lambda t} &= (X_0 + x e^{\lambda t})(Y_0 + y e^{\lambda t}) - b(Z_0 + z e^{\lambda t}). \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Пренебрегая в уравнениях (3.5.9) членами квадратичной малости, и выполнив элементарные преобразования, приходим к системе трех однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
x\lambda &= -\sigma x + \sigma y, \\
y\lambda &= r x - y - X_0 z - Z_0 x, \\
z\lambda &= X_0 y + Y_0 x - bz.
\end{aligned}
\tag{3.5.10}$$

Для существования нетривиального решения определитель системы (3.5.10) должен обращаться в ноль

$$\begin{vmatrix}
\lambda + \sigma & -\sigma & 0 \\
Z_0 - r & 1 + \lambda & X_0 \\
-Y_0 & -X_0 & \lambda + b
\end{vmatrix} = 0.
\tag{3.5.11}$$

С учетом формул, описывающих нетривиальное решение $X_0 = Y_0 = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $Z_0 = r - 1$, получаем

$$\begin{vmatrix}
\lambda + \sigma & -\sigma & 0 \\
-1 & 1 + \lambda & \pm\sqrt{b(r-1)} \\
\mp\sqrt{b(r-1)} & \mp\sqrt{b(r-1)} & \lambda + b
\end{vmatrix} = 0.
\tag{3.5.12}$$

Раскрывая определитель (3.5.12), приходим к кубическому уравнению

$$\lambda^3 + (1 + b + \sigma)\lambda^2 + b(r + \sigma)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0.
\tag{3.5.13}$$

Решения уравнения (3.5.13) очень громоздкие, поэтому выписывать их не будем. Интересующее нас поведение действительной части показателя λ представлено на Рис. 3.5.2.

Сначала отметим, что нетривиальное решение существует только при $r > r_{c1} = 1$. В результате бифуркации типа вилка при $r = r_{c1}$ от тривиального решения ответвляется пара нетривиальных решений. При этом тривиальное решение, как было показано выше, теряет свою устойчивость. Из Рис. 3.5.2 видно, что в диапазоне $r_{c1} < r < r_{c2}$ величина $\text{Re}(\lambda) < 0$, следовательно, пара нетривиальных решений должна быть устойчива в этом диапазоне по отношению к бесконечно малым возмущениям. При $r = r_{c2} \approx 24.74$ нетривиальное решение теряет устойчивость. Заметим, что

величина r_{c2} зависит от значений σ и b . Указанное приближенное значение вычислено при $b = 8/3$, $\sigma = 10$.

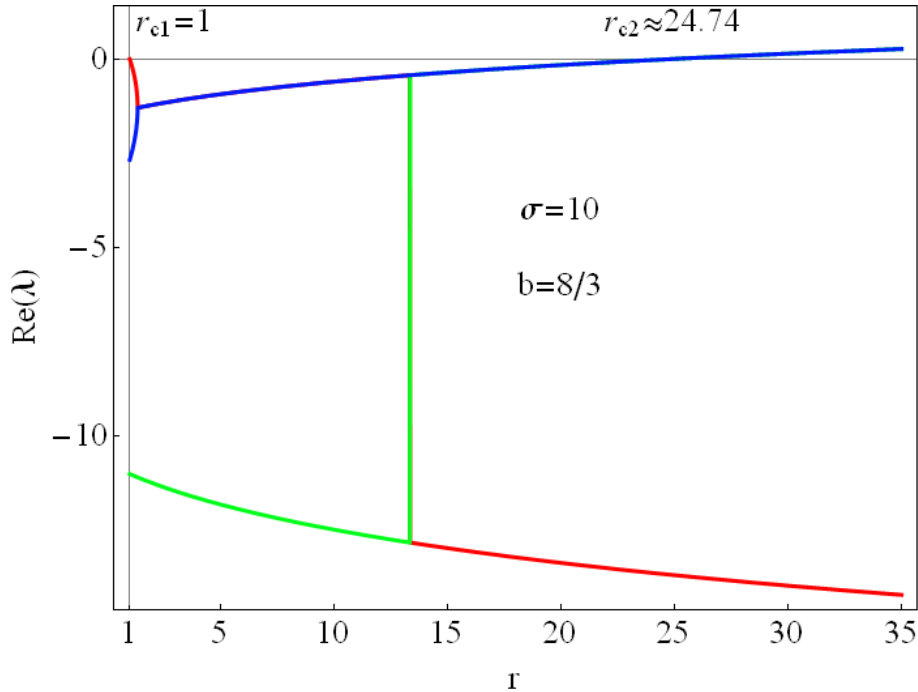


Рис. 3.5.2. Действительная часть показателя λ , ответственного за устойчивость нетривиального решения, как функция параметра r . Расчет выполнен при $b=8/3$, $\sigma=10$.

Важно отметить, что изложенный выше краткий аналитический анализ устойчивости неподвижных точек, в силу того что он основан на предположении о бесконечно малых возмущениях, не способен выявить все режимы, наблюдаемые в системе Лоренца. Поэтому дальнейший обзор режимов в системе Лоренца будет опираться как на аналитические методы, так и на результаты численных экспериментов. Для определенности будем полагать $b = 8/3$, $\sigma = 10$.

В диапазоне $0 < r < 1$ существует единственная неподвижная точка. Она является одновременно локальным и глобальным аттрактором. Иными словами, любое начальное состояние на больших временах будет приближаться к началу координат (стационарному состоянию). Очевидно, что никакой конвекции в этом случае не возникает.

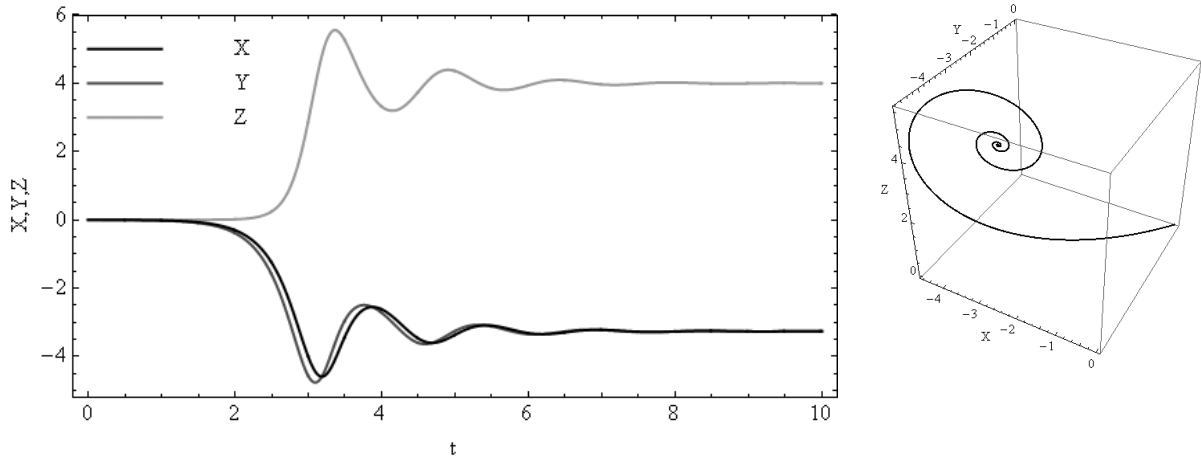


Рис. 3.5.3. Динамика системы Лоренца: временные развертки (слева) и фазовая траектория (справа). Расчет выполнен при $r=5$, $b=8/3$, $\sigma=10$.

При $r=1$ происходит нормальная бифуркация вилки. Начало координат теряет устойчивость, и от него ответвляются две неподвижные устойчивые точки, соответствующие стационарной конвекции с различным направлением вращения конвективных валов. Заметим, что выбор направления вращения зависит от начального состояния системы. В случае $r < 1.345$ неподвижные точки являются устойчивыми узлами, а при $r > 1.345$ – устойчивыми фокусами.

Диапазону $13.93 < r < 24.74$ свойственен так называемый метастабильный хаос. Малые возмущения стационарного состояния монотонно затухают. При больших возмущениях, перед тем как затухнуть, система описывает в фазовом пространстве множество хаотических петель.

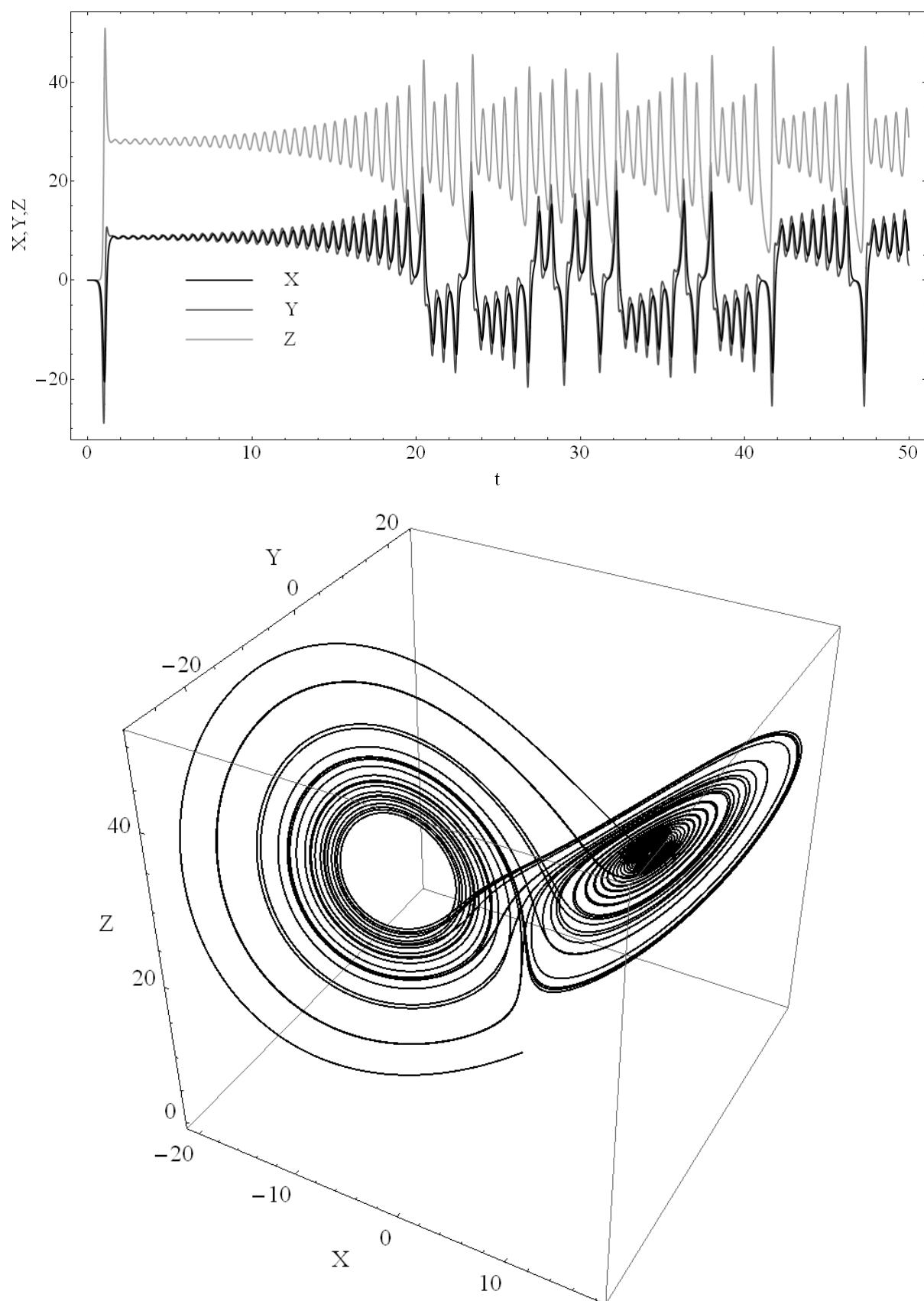


Рис. 3.5.4. Динамика системы Лоренца: временные развертки (вверху) и фазовая траектория (внизу). Расчет выполнен при $r=29$, $b=8/3$, $\sigma=10$.

«Чистый» странный аттрактор существует в достаточно узком диапазоне $24.74 < r < 30.1$. Интересно, что при уменьшении числа Рэля странный аттрактор продолжает существовать вплоть до значений $r = 24.06$, а вовсе не до $r = 24.74$, т.е. наблюдается гистерезис. При дальнейшем росте параметра r происходит чередование областей с периодическим и хаотическим движением. Пример расчета фазовой траектории в системе Лоренца при $r = 29$ представлен на Рис. 3.5.4.

3.6. Теорема о линейной устойчивости. Диссипативные структуры

В Главе 2 мы уже рассматривали общий подход, применяемый для исследования *стационарных* течений на устойчивость – линейный анализ устойчивости. Обратимся теперь к обобщению этого подхода.

Рассмотрим динамическую систему

$$\frac{\partial X}{\partial t} = F(X, \lambda), \quad (3.6.1)$$

где F – оператор, действующий в пространстве, в котором определен вектор X . Вследствие обратных связей, существующих в системе, оператор F обычно является нелинейным. Представим, что система (3.6.1) имеет некоторое решение X_s (стандартное состояние), которое постоянно “зондируется” внешними возмущениями или внутренними флуктуациями на предмет устойчивости. Случай, когда X_s не зависит от времени и координат, является самым тривиальным. Вообще говоря, стандартное состояние может представлять собой зависящее от времени и координат решение, которое обладает некой симметрией, допускаемой внешними условиями. В любом случае стандартное состояние удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial X_s}{\partial t} = F(X_s, \lambda). \quad (3.6.2)$$

Роль возмущений можно учесть, предполагая, что

$$X = X^s + x, \quad (3.6.3)$$

где x – возмущение стандартного состояния. Подставим представление (3.6.3) в систему (3.6.1)

$$\frac{\partial X_s}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} = F(X_s + x, \lambda).$$

Далее, используя уравнение (3.6.2), получаем

$$\frac{\partial x}{\partial t} = F(X_s + x, \lambda) - F(X_s, \lambda). \quad (3.6.4)$$

Правую часть уравнения (3.6.4) целесообразно разложить в ряд вблизи стандартного состояния по степеням x . Будем считать, что такое разложение возможно. Формально разложение можно представить в виде

$$F(X_s + x, \lambda) - F(X_s, \lambda) = \left(\frac{\delta F}{\delta X} \right)_{X_s} x + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2 F}{\delta X^2} \right)_{X_s} xx + \dots, \quad (3.6.5)$$

где объекты вида $(\delta F / \delta X)_{X_s}$ представляют собой обобщения производных, и именуются *производные Фреше*.

Система (3.6.4) с учетом разложения (3.6.5), как правило, столь же сложна, как и исходная задача (3.6.1). Но теперь, благодаря разложению в ряд, мы можем вычленивать из задачи (3.6.4) линейную и нелинейную части.

Итак, мы имеем нелинейную задачу

$$\frac{\partial x}{\partial t} = L(\lambda)x + h(x, \lambda), \quad (3.6.6)$$

где

$$L(\lambda) = (\delta F / \delta X)_{X_s}, \quad h(x, \lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2 F}{\delta X^2} \right)_{X_s} xx + \dots$$

и соответствующую ей вспомогательную линейную задачу

$$\frac{\partial x}{\partial t} = L(\lambda)x. \quad (3.6.7)$$

Обе задачи однородны, т.к. им удовлетворяет тривиальное решение $x = 0$.

Теорема о линейной устойчивости утверждает следующее:

1. Если тривиальное решение $x = 0$ линеаризованной задачи (3.6.7) асимптотически устойчиво, то $x = 0$ – есть асимптотически устойчивое решение нелинейной задачи (3.6.6).
2. Если тривиальное решение $x = 0$ линеаризованной задачи (3.6.7) неустойчиво, то, следовательно, $x = 0$ представляет собой неустойчивое решение нелинейной задачи (3.6.6).

Важно отметить, что именно благодаря этой теореме, анализ устойчивости динамических систем сводится к решению относительно простых и удобных для анализа линейных задач.

Основываясь на анализе линеаризованных систем, мы, разумеется, упускаем многие важные особенности динамического поведения при больших отклонениях системы от стандартного состояния, но линейный анализ дает возможность “наметить контуры будущего” и, в частности, понять, причину образования *диссипативных структур*.

Диссипативные структуры – устойчивые пространственно неоднородные структуры, возникающие в результате развития неустойчивостей в однородной неравновесной диссипативной среде (термин предложен И. Пригожиным).

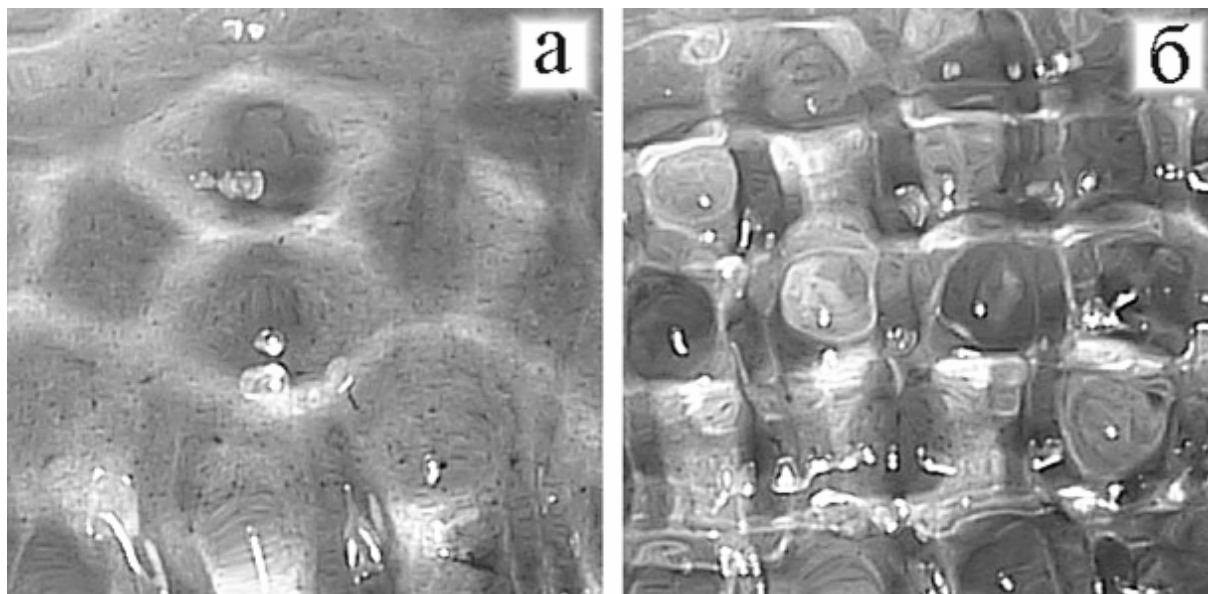


Рис. 3.6.1. Пример диссипативных структур. Стоячие волны (рябь Фарадея) с гексагональной (а) и ортогональной (б) симметриями, возникающие на свободной поверхности колеблющейся жидкости. Фото автора.

Множество примеров диссипативных структур известно именно в гидродинамике. К диссипативным структурам относятся ячейки Бенара (фото 141, 142 [Ван-Дайк, 1986]), рябь Фарадея (Рис.3.6.1), вихри Тейлора (фото 127, 128 [Ван-Дайк, 1986]), дорожка Кармана (Рис. 1.3.6.), волны Кельвина-Гельмгольца (Рис. 1.3.4). Но существуют и иные примеры, например из химической кинетики, о которых пойдет речь в следующем разделе.

3.7. Задача Тьюринга

Далее мы отвлечемся от гидродинамических задач и обратимся к базовой модели структурообразования и морфогенеза, основанной на системе двух уравнений диффузии, дополненных членами, которые описывают реакции между «морфогенами». Эта система была исследована в работе [Turing, 1952]. Тьюринг показал, что в такой реакционно-диффузионной системе может существовать неоднородное (периодическое

в пространстве и стационарное во времени) распределение концентраций. Заметим, что с точки зрения равновесной термодинамики периодическое в пространстве и стационарное во времени распределение концентраций невозможно. Действительно, молекулярная диффузия непременно должна привести к однородному в пространстве распределению концентрации. Т.е. распределение будет либо нестационарным либо неоднородным. Однако в системе, в которой возможны реакции между «морфогенами», может существовать и периодическое в пространстве и при этом стационарное распределение.

Рассмотрим систему уравнений, описывающую пространственно распределенную динамическую систему с единственной пространственной координатой x . Физический прототип системы – химические реакции в протяженной одномерной кювете. Концентрации реагентов обозначим u_1 и u_2 . Потоки вещества на границах отсутствуют. В системе есть молекулярная диффузия, определяемая постоянными коэффициентами D_1, D_2 .

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = f_1(u_1, u_2) + D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad (3.7.1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = f_2(u_1, u_2) + D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad (3.7.2)$$

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial x} \right|_{0, H} = 0. \quad (3.7.3)$$

Очевидно, что в системе (3.7.1)-(3.7.3) существует однородное стационарное решение u_i^0 , определяемое из решения системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} f_1(u_1^0, u_2^0) = 0, \\ f_2(u_1^0, u_2^0) = 0. \end{cases} \quad (3.7.4)$$

Устойчиво ли решение u_i^0 к малым возмущениям u_i' ? Для ответа на этот вопрос внесем в систему возмущение

$$u_i = u_i^0 + u_i'.$$

Разложим функции f_i в ряд вблизи однородного стационарного решения.

При разложении будем удерживать только линейные по u_i' члены.

$$f_i = f_i^0 + L_{ik} u_k' + \dots, \quad (3.7.5)$$

$$\text{где } L_{ik} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right|_{u_k^0}.$$

Подставим разложения (3.7.5) в уравнения (3.7.1) и (3.7.2). Для краткости запишем результат в матричном виде.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} \quad (3.7.6)$$

Решение линеаризованной системы (3.7.6) будем искать в виде ряда Фурье, предполагая экспоненциальную зависимость амплитуд гармоник от времени

$$u_i'(x, t) = \sum_n A_i^n e^{\lambda t} \cos(k_n x). \quad (3.7.7)$$

Применение граничных условий (3.7.3) дает дискретный набор волновых чисел:

$$\left. \frac{\partial u_i'}{\partial x} \right|_{0, H} = 0 \Rightarrow \sin(k_n H) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{\pi}{H} n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.7.8)$$

Далее индекс "n" у волнового числа опустим. Подстановка ряда (3.7.7) в систему (3.7.6) приводит к однородной алгебраической системе уравнений относительно амплитуд гармоник

$$\begin{pmatrix} L_{11} - D_1 k^2 - \lambda & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} - D_2 k^2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^n \\ A_2^n \end{pmatrix} = 0. \quad (3.7.9)$$

Условием наличия нетривиального решения системы (3.7.9) является равенство нулю определителя

$$\det \begin{pmatrix} L_{11} - D_1 k^2 - \lambda & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} - D_2 k^2 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем биквадратное уравнение, устанавливающее связь между показателем экспоненты λ и волновым числом k (точнее квадратом волнового числа)

$$(L_{11} - D_1 k^2 - \lambda)(L_{22} - D_2 k^2 - \lambda) = L_{12} L_{21}. \quad (3.7.10)$$

Решение уравнения (3.7.10) дается следующей формулой

$$\lambda_{1,2} = \frac{L_{11} + L_{22} - k^2(D_1 + D_2)}{2} \pm \frac{\sqrt{[L_{11} + L_{22} - k^2(D_1 + D_2)]^2 - 4[(L_{11} - D_1 k^2)(L_{22} - D_2 k^2) - L_{12} L_{21}]}}{2}. \quad (3.7.11)$$

Характерный вид зависимости действительной части параметра λ от квадрата волнового числа представлен на Рис. 3.7.1. Очевидно, что амплитуда гармоник ряда (3.7.7), для которых выполняется условие

$\text{Re}(\lambda) > 0$, должна экспоненциально

возрастать. При этом любые малые

возмущения, возникшие в диапазоне

волновых чисел, для которых

$\text{Re}(\lambda) < 0$, будут затухать. Варьируя

многочисленные параметры системы,

можно создать ситуацию, когда

только верхняя часть кривой окажется

в области $\text{Re}(\lambda) > 0$, т.е.

положительные значения показателя

экспоненты будут свойственны лишь

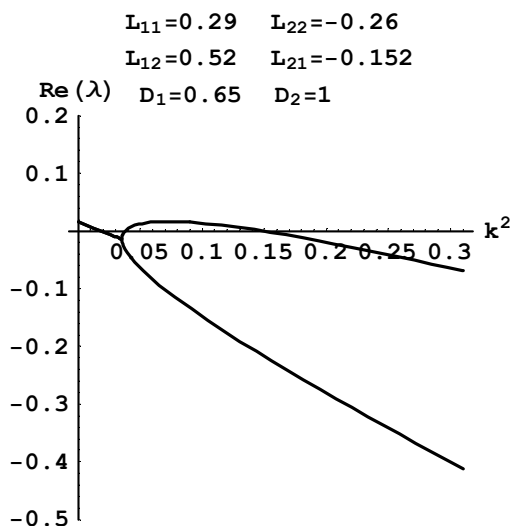


Рис. 3.7.1. Действительная часть показателя экспоненты λ как функция квадрата волнового числа. Расчет выполнен по формуле (3.7.11).

некоторому узкому диапазону значений волновых чисел. Но набор значений волновых чисел является дискретным, поэтому в диапазоне $\text{Re}(\lambda) > 0$ может оказаться только одна или небольшое число гармоник. Экспоненциально нарастая (не до бесконечности!) эти гармоники и образуют наблюдаемые диссипативные структуры с определенным пространственным масштабом.

Подчеркнем, что образование структур в рассматриваемом случае связано с существованием реакций между компонентами, которые описываются функциями f_i (или матрицей L_{ik}). При отсутствии реакций ($L_{ik} = 0$), мы бы имели дело с обыкновенной диффузией. Из решения (3.7.11) видно, что в этом случае показатель экспоненты λ всегда отрицателен ($\lambda = -k^2 D_1$ или $\lambda = -k^2 D_2$), и его абсолютная величина пропорциональна квадрату волнового числа. Это означает, что любые возмущения должны затухать со временем, причем затухание происходит тем быстрее, чем меньше пространственный масштаб возмущений.

Образование диссипативных структур в системе, описываемой уравнениями (3.7.1)-(3.7.3), возможно не всегда, а только при выполнении следующих условий:

1. одна из переменных должна быть автокаталитической, а другая демпфирующей, т.е. $L_{11} > 0$, $L_{22} < 0$;
2. $L_{12} > 0$, $L_{21} < 0$ или $L_{12} < 0$, $L_{21} > 0$;
3. $D_1 < D_2$.

Дополнительную информацию о задаче Тьюринга, в том числе и об экспериментальном подтверждении теоретических результатов, можно найти, например, в статье [Белинцев, 1983].

В заключение отметим, что вид нейтральных кривых для течения Пуазейля (Рис. 2.5.1.) и конвекции Рэлея (Рис. 2.7.2.) таков, что при небольших надкритичностях ($Re - Re_c \ll Re_c$ или $Ra - Ra_c \ll Ra_c$) экспоненциальному росту подлежат гармоники из узкого диапазона волновых чисел. Следовательно, и в этих случаях образуются структуры с определенным пространственным масштабом (волны Кельвина-Гельмгольца, ячейки Бенара). При значительных надкритичностях возможность экспоненциального роста получают гармоники из достаточно широкого диапазона волновых чисел, увеличивается число степеней свободы системы, и происходит переход к хаотическому (турбулентному) режиму.

3.8. Уравнение Ландау

Определим пределы роста возмущений при слабых надкритичностях ($Re - Re_c \ll Re_c$). Излагаемые здесь представления имеют достаточно общий характер, и число Рейнольдса выбрано в качестве величины, характеризующей устойчивость системы, только для определенности. В качестве такой величины могло бы служить, например, число Рэлея.

Как это принято в теории устойчивости, будем рассматривать возмущения, пропорциональные $e^{-i\omega t}$, где частота $\omega = \alpha + i\beta$ в общем случае является комплексным числом. При $Re < Re_c$ комплексные частоты малых возмущений стационарного течения, очевидно, имеют отрицательную мнимую часть $\beta < 0$, что соответствует экспоненциальному затуханию всех возмущений. При $Re = Re_c$ мнимая часть частоты β обращается в ноль. При $Re > Re_c$ мнимая часть частоты оказывается

положительной величиной $\beta > 0$, т.е. происходит экспоненциальный рост амплитуды возмущений. Величина β может быть разложена в ряд по степеням малой величины $(\text{Re} - \text{Re}_c)$. Удерживая первый член разложения, получаем

$$\beta \approx \text{const} \cdot (\text{Re} - \text{Re}_c). \quad (3.8.1)$$

Заметим еще, что при $\text{Re} - \text{Re}_c \ll \text{Re}_c$ мнимая часть частоты существенно меньше действительной: $|\beta| \ll |\alpha|$.

Возмущение поля скорости представимо в следующем виде:

$$\vec{v} = A(t) \vec{f}(x, y, z),$$

где $\vec{f}(x, y, z)$ – некоторая комплексная функция координат, $A(t)$ – зависящая от времени комплексная амплитуда, которая выражается формулой

$$A(t) = e^{-i\alpha t} e^{\beta t}. \quad (3.8.2)$$

На самом деле выражение (3.8.2) применимо лишь в короткий промежуток времени после срыва стационарного режима течения. Экспоненциальный множитель $e^{\beta t}$ быстро растет, и, в итоге, линейность нарушается. Однако амплитуда не может расти неограниченно, она должна стремиться к некоторому конечному пределу. При слабой надкритичности, такой предел все еще остается достаточно малым.

Для определения этого предела рассмотрим квадрат амплитуды $|A|^2 = A A^*$, где A^* – комплексно сопряженная величина. Заметим следующую элементарную формулу

$$|A|^2 = A A^* = e^{-i\alpha t} e^{\beta t} e^{+i\alpha t} e^{\beta t} = e^{2\beta t}. \quad (3.8.3)$$

Для малых времен, когда имеет силу выражение (3.8.2), с учетом формулы (3.8.3) получаем

$$\frac{d}{dt}|A|^2 = 2\beta|A|^2. \quad (3.8.4)$$

На правую часть выражения (3.8.4) можно посмотреть как на один из членов разложения некоторой неизвестной функции в ряд по степеням A и A^* . При увеличении модуля амплитуды, очевидно, необходимо учесть следующие члены этого разложения. Ближайшие следующие члены имеют третий порядок по амплитуде. Но нас не интересует мгновенное значение амплитуды, а лишь ее среднее значение за период $T = 2\pi/\alpha$. Кроме того, в силу соотношения комплексной и действительной частей частоты ($|\beta| \ll |\alpha|$) заметного изменения амплитуды за один период колебаний не происходит. В любом случае, члены третьего порядка непременно содержат периодический множитель $e^{\pm i\alpha t}$, и, следовательно, при усреднении выпадают. Среди различных вариантов членов четвертого порядка существует величина $AAA^*A^* = |A|^4$, которая не выпадает при усреднении. В итоге, с точностью до членов четвертого порядка, имеем

$$\frac{d}{dt}|A|^2 = 2\beta|A|^2 - \varepsilon|A|^4, \quad (3.8.5)$$

где ε – постоянная Ландау. Само уравнение (3.8.5) именуется уравнение Ландау.

Величина ε , в принципе, может быть как положительной, так и отрицательной. Сначала рассмотрим ситуацию, когда $\varepsilon > 0$. В этом случае, решение уравнения (3.8.5) имеет вид

$$\frac{1}{|A|^2} = \frac{\varepsilon}{2\beta} + \text{const} \cdot e^{-2\beta t}. \quad (3.8.6)$$

Из решения видно, что при $\text{Re} > \text{Re}_c$ на фоне среднего основного течения становится неустойчивым некоторое бесконечно малое возмущение. Это возмущение начинает экспоненциально нарастать, но рост его

сдерживается вторым членом уравнения, и на больших временах величина $|A|^2$ асимптотически стремится к конечному пределу

$$|A|_{\max}^2 = \frac{2\beta}{\varepsilon}. \quad (3.8.7)$$

В итоге из формул (3.8.7) и (3.8.1) получаем, что устанавливающаяся амплитуда возмущений пропорциональна квадратному корню из степени надкритичности (мягкое самовозбуждение)

$$|A|_{\max} \sim \sqrt{(\text{Re} - \text{Re}_c)}. \quad (3.8.8)$$

Вид зависимости (3.8.8) показан на Рис. 3.8.1.

Далее рассмотрим ситуацию, когда величина $\varepsilon < 0$. Теперь для определения предельной амплитуды следует учесть еще один член разложения (по аналогии с рассуждениями выше добавляем величину $\gamma |A|^6$)

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2\beta |A|^2 - \varepsilon |A|^4 - \gamma |A|^6$$

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2\beta |A|^2 - \varepsilon |A|^4 - \gamma |A|^6. \quad (3.8.9)$$

Для ограничения роста амплитуды коэффициент γ , конечно, должен быть положительным.

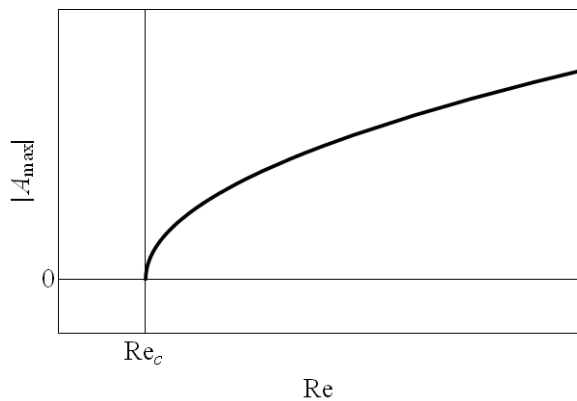


Рис. 3.8.1. Вид зависимости предельной (максимальной) амплитуды от степени надкритичности при положительной постоянной Ландау. Расчет выполнен по формуле (3.8.8).

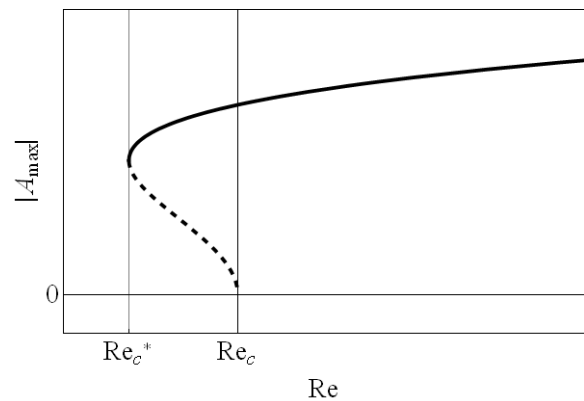


Рис. 3.8.2. Вид зависимости предельной (максимальной) амплитуды от степени надкритичности при отрицательной постоянной Ландау. Расчет выполнен по формуле (3.8.11).

Предельная амплитуда, очевидно, соответствует стационарному состоянию. Приравнивая правую часть уравнения (3.8.9) нулю, получаем биквадратное уравнение

$$\gamma|A|^4 + \varepsilon|A|^2 - 2\beta = 0, \quad (3.8.10)$$

из решения которого находим величину предельной амплитуды

$$|A|_{\max} = \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2\gamma} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4\gamma^2} + \frac{2\beta}{\gamma}}}. \quad (3.8.11)$$

Учитывая связь (3.8.1), можно построить вид зависимости предельной амплитуды от степени надкритичности. На Рис. 3.8.2 сплошной линией показана устойчивая ветвь решения, а пунктирной – неустойчивая. Видно, что при $Re = Re_c$ возмущение скачком возрастает до конечной амплитуды, т.е. этот сценарий соответствует жесткому самовозбуждению. Отметим еще одну важную особенность: в интервале $Re_c^* < Re < Re_c$ исходное состояние оказывается устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям, но неустойчиво по отношению к конечным возмущениям. Такое состояние называют метастабильным.

Внимательный читатель, несомненно, заметил, что уравнения (3.8.5) и (3.8.9) представляют собой динамические системы, а изучение поведения этих систем опирается на стандартные подходы (определение неподвижных точек, анализ их на устойчивость и т.д.).

Подводя итог Главы 3, укажем на следующее общее свойство динамических систем. В большинстве случаев, по мере увеличения потока энергии (вещества), проходящего через распределенную динамическую систему, она (система), как правило, обнаруживает следующие три типа поведения: (1) детерминированное или «ламинарное» движение, когда поток энергии невелик; (2) образование диссипативных структур, когда поток энергии достаточен для «выживания» одной или небольшого числа

пространственных гармоник; (3) хаотическое или турбулентное движение, когда поток энергии оказывается настолько велик, что образуются и взаимодействуют множество пространственных гармоник.

При постановке серии экспериментов с одинаковыми условиями мы обнаружим, что в первом случае результат эксперимента всегда будет неизменен. Во втором случае общий вид диссипативных структур также не будет меняться от эксперимента к эксперименту, но здесь уже возможен элемент случайности (например, направление циркуляции в ячейках Бенара система «выбирает» случайным образом). В третьем случае поведение системы оказывается чрезвычайно чувствительным к неконтролируемым ничтожно малым вариациям условий эксперимента, следовательно, всякий новый эксперимент даст новый результат – этот тип поведения и ассоциируется с турбулентностью.