# Глава 4. Статистическая теория турбулентности

Огромный диапазон масштабов турбулентного движения в реальных природных течениях (например, в океане размер вихрей варьируется от тысяч километров до долей миллиметра) делает технически невозможным прямое численное решение задачи. Кроме того, чувствуется интуитивно, что воспроизводить все детали турбулентного потока нецелесообразно, и возможны подходы к описанию турбулентного движения, которые позволят пренебречь мелкомасштабной структурой потока. Например, можно применить к движению методы осреднения и получить потоки “ламинарного типа”, т.е. медленные и плавные, которые могут быть исследованы традиционными методами. Причем правила осреднения, примененные к уравнениям гидродинамики, должны давать простые уравнения относительно средних значений.

Процедура осреднения с успехом применяется в молекулярной физике. Большой разрыв между масштабами микроскопического и макроскопического движений позволяет обосновать применимость такой процедуры. В случае турбулентного движения ситуация оказывается более сложной. Известно, что почти вся реальная геофизическая турбулентность имеет непрерывный спектр. Но процедура осреднения предполагает заранее, что турбулентное движение может быть разбито на медленное и быстрое (пульсационное). В этой связи, вопрос об осреднении и о правилах вычисления средних значений является *тонким вопросом* теории турбулентности.

Статистические методы широко применяются в современной теории турбулентности. Их основы были заложены во второй широко известной работе Осборна Рейнольдса [Reynolds, 1895]. Описание этих методов можно найти во многих статьях и монографиях. Но наиболее детальное изложение статистической теории турбулентности содержится в двухтомной монографии [Монин, Яглом, Т.1 - 1965, Т.2 - 1967].

## 4.1. Пространственно-временное и теоретико-вероятностное среднее. Условия осреднения Рейнольдса

На практике осредняют по конечному промежутку времени или области пространства. С математической точки зрения пространственно-временное осреднение рассматривается следующим образом (здесь и далее среднее обозначаем сплошной чертой сверху):

$$\overline{f(\vec{x},t)} = \int\iiint f(\vec{x}-\vec{\xi},t-\tau)\,\omega(\vec{\xi},\tau)\,d\vec{\xi}\,d\tau\,, \qquad (4.1.1)$$

где $\omega(\vec{\xi},\tau)$ - весовая функция, равная “0” вне некоторой конечной области пространства-времени. Весовая функция выбирается так, что

$$\int\iiint \omega(\vec{\xi},\tau)\,d\vec{\xi}\,d\tau = 1\,.$$

Полагая $\omega(\vec{\xi},\tau)=\omega(\vec{\xi})\,\delta(\tau)$ или $\omega(\vec{\xi},\tau)=\omega(\tau)\delta(\vec{\xi})$, переходим к пространственному или временному осреднению.

Очевидно, что “среднее значение”, определенное по формуле (4.1.1), зависит от вида весовой функции. Как выбрать наилучшую весовую функцию? Какое из этих “средних значений” будет наилучшим? Однозначного ответа на эти вопросы не существует.

Использование осреднения с весовой функцией, конечно, очень удобно и наглядно, но приводит к сложностям при аналитических расчетах, кроме того, для любой задачи необходимо решать вопрос о конкретном виде функции $\omega(\vec{\xi},\tau)$. Следовательно, нужно найти какое-нибудь иной, более универсальный, подход к осреднению.

Наиболее перспективным и удобным здесь оказывается **теоретико-вероятностный подход**, трактующий поля гидродинамических величин в турбулентном потоке как случайные поля.

Перейдем от рассмотрения одного турбулентного потока к статистической совокупности аналогичных потоков при одинаковых внешних условиях. Вспомним, что при ламинарном обтекании препятствия у нас все время реализуется одинаковое течение. Но при турбулентном обтекании каждый раз возникает новая картина, т.к. малые возмущения потока неконтролируемыми изменениями начальных и граничных условий (вспомним странный аттрактор) имеют существенные последствия.

Будем считать каждую из реализаций поля скорости, давления, концентрации примеси и т.п. представителем некоторого множества реализаций. Если зафиксировать начальные и граничные условия (с той степенью точности, на которую мы способны) и многократно повторять опыт, то среднее арифметическое всех реализаций оказывается устойчивым, т.е. оно слабо колеблется относительно некоторого среднего уровня.

Наличие устойчивых средних величин означает, что наш набор опытов представляет собой **статистический ансамбль**. А полученное таким образом среднее значение будем называть теоретико-вероятностным средним значением.

Далее введем функцию плотности вероятности $p(u)$, так что

$$P(u_1 < u < u_2) = \int_{u_1}^{u_2} p(u)\,du,$$

где $P(u_1 < u < u_2)$ – вероятность того, что в некоторой заданной точке параметр $u$ (например, компонента скорости течения) находится в пределах от $u_1$ до $u_2$. Величины, имеющие определенную плотность вероятности, называются **случайными величинами**.

Теоретико-вероятностное среднее значение случайной величины, как известно, дается формулой

$$\overline{u} = \int u\, p(u) du,$$

а теоретико-вероятностное среднее значение произвольной функции F от случайной величины u определяется как

$$\overline{F(u)} = \int F(u)\, p(u)\, du.$$

Итак, с точки зрения теории вероятностей, значение скорости в точке турбулентного потока представляет собой случайную величину, характеризуемую определенным распределением вероятности.

Все рассуждения, проделанные выше, касались значения некоторого параметра потока (давление, компонента скорости и т.п.) в фиксированной точке в фиксированный момент времени. Но можно говорить и о множестве случайных полей $u(\vec{x}, t)$ и любое конкретно реализуемое в эксперименте поле рассматривать как одного «представителя». Чем же заменяется в данном случае плотность вероятности?

В случайном поле в любой фиксированной точке $M = (\vec{x}, t)$ величина u(M) является случайной величиной, следовательно, любой точке M отвечает своя плотность вероятности $p_M(u)$. Если мы рассмотрим две точки $M_1$ и $M_2$, то существует двухточечная функция плотности вероятности $p_{M_1,M_2}(u_1, u_2)$, такая, что

$$P\big(u_1 < u_1(M_1) < u_1 + du_1,\quad u_2 < u_2(M_2) < u_2 + du_2\big) = p_{M_1,M_2}(u_1, u_2) du_1 du_2.$$

Если $M_1, M_2, .... M_N$ - произвольные N точек пространства-времени, то им отвечает функция N переменных $p_{M_1,M_2,....M_N}$, которая является N-мерной плотностью вероятности.

Два турбулентных потока мы будем считать одинаковыми, если (одномерные и многомерные) плотности вероятности у них совпадают.

Приведем основные свойства многомерной функций плотности вероятности:

1. $p_{M_1,M_2,\ldots\ldots M_N} > 0$;
2. $\iiint\limits_N p_{M_1,M_2,\ldots\ldots M_N} du_1 du_2 \ldots du_N = 1$;
3. Точки $M_i$ можно менять местами в произвольном порядке;
4. $p_{M_1,M_2,\ldots\ldots M_K} = \iiint\limits_N p_{M_1,\ldots\ldots M_K, M_{K+1},\ldots\ldots M_N} du_{K+1} \ldots du_N$.

Теперь среднее значение произвольной функции может быть вычислено по формуле

$$\overline{F} = \iiint\limits_N F(u_1,\ldots u_N) p_{M_1,\ldots M_N}(u_1,\ldots u_N) du_1 \ldots du_N. \qquad (4.1.2)$$

В силу того, что мы приняли предположение о существовании распределений вероятности для всех гидродинамических полей, можно применять аппарат теории вероятностей. Однако, при таком подходе сразу же возникает вопрос о сопоставлении выводов теории с данными измерений. Согласно теоретико-вероятностному определению, среднее значение понимается как среднее, взятое *по всем возможным* значениям рассматриваемой величины. Поэтому для эмпирического определения средних значений со значительной точностью мы должны были бы иметь результаты очень большого числа аналогичных опытов. Т.о. предположение о существовании распределений вероятности само по себе еще не снимает вопроса о законности использования в теории турбулентности обычных временных или пространственных средних, а лишь меняет постановку вопроса. Теперь, вместо исследования частных свойств того или иного метода осреднения, мы должны выяснить, насколько близки соответствующие эмпирические средние к вероятностным средним значениям.

Положение дел здесь вполне аналогично статистической физике, где приходится заменять теоретические “средние по ансамблю” (средние по совокупности возможных состояний системы) непосредственно наблюдаемыми временными (пространственными) средними. Справедливость такой замены может быть в некоторых специальных случаях доказана строго (эргодическая теорема Дж. Биркгофа), в остальных случаях используется эргодическая гипотеза.

**Эргодическая гипотеза** (предложена Л. Больцманом в 1887 г. для обоснования статистической физики): «средние значения при неограниченном увеличении интервала осреднения (пространства и/или времени) сходятся к соответствующим теоретическим средним значениям».

При *ламинарном* течении уравнения гидродинамики позволяют однозначно определить значения всех характеристик потока в любой момент будущего времени по начальным значениям полей (и граничным условиям). В *турбулентном* потоке значения начальных условий также будут определять при помощи уравнений гидродинамики все будущие значения, но эти будущие значения будут существенно зависеть от ничтожных неконтролируемых возмущений начальных и граничных условий. И, кроме того, будут иметь сложный и запутанный характер, так что точное определение их – это практически бесполезная задача, следовательно, уравнения гидродинамики следует использовать для исследования соответствующих распределений вероятности.

Напомним еще несколько теоретико-вероятностных понятий, которые будут нам полезны в дальнейшем.

**Моменты случайных величин**

$$B_{k_1,k_2,\ldots k_N} = \overline{u_1^{k_1} u_2^{k_2} \ldots u_N^{k_N}} = \iiint\limits_N u_1^{k_1} u_2^{k_2} \ldots u_N^{k_N} \; p(u_1, u_2, \ldots u_N) du_1 du_2 \ldots du_N,$$

где $k_1, k_2, \ldots k_N$ - целые неотрицательные числа, $\sum k_i$ - порядок момента.

**Центральные моменты** (моменты отклонений величин от их средних значений)

$$b_{k_1,k_2,\ldots k_N} = \overline{(u_1 - \overline{u_1})^{k_1} (u_2 - \overline{u_2})^{k_2} \ldots (u_N - \overline{u_N})^{k_N}}.$$

**Стационарные случайные функции (процессы)**

$$p_{t_1,t_2,\ldots t_N}(u_1, u_2, \ldots u_N) = p_{t_1+h,t_2+h,\ldots t_N+h}(u_1, u_2, \ldots u_N) = p_{t_2-t_1,\ldots t_N-t_1}(u_1, u_2, \ldots u_N),$$

$$\overline{u(t)} = u = \text{const}, \quad \tilde{u}(t) = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} u(t+\tau) d\tau \underset{T\to\infty}{\to} \overline{u}(t).$$

**Однородные случайные поля**

$$p_{x_1,x_2,\ldots x_N}(u_1, u_2, \ldots u_N) = p_{x_1+h,x_2+h,\ldots x_N+h}(u_1, u_2, \ldots u_N) = p_{x_2-x_1,\ldots x_N-x_1}(u_1, u_2, \ldots u_N).$$

Теоретико-вероятностные средние значения обладают следующими пятью важными свойствами, которые в теории турбулентности называются **условиями осреднения Рейнольдса**:

1. $\overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}$;
2. $\overline{af} = a\overline{f}$ (при $a = \text{const}$);
3. $\overline{a} = a$;
4. $\overline{\dfrac{\partial f}{\partial s}} = \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial s}$;
5. $\overline{\overline{f} g} = \overline{f}\,\overline{g}$.

Вводя величину $f' = f - \overline{f}$, которую в дальнейшем будем называть **пульсацией**, запишем несколько очевидных, но важных следствий условий осреднения Рейнольдса:

1. $\overline{f'} = 0$;
2. $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$;

3. $\overline{\overline{f}\,\overline{g}} = \overline{f}\,\overline{g}$;

4. $\overline{\overline{f}\,g'} = 0$.

Условия осреднения Рейнольдса и следствия из них используются для осреднения уравнений гидродинамики. Этой процедуре будут посвящены следующие разделы этой главы.

## 4.2. Система уравнений Рейнольдса

Выше уже отмечалось, что сложная структура гидродинамических полей турбулентного потока ставит под вопрос целесообразность описания всех тонкостей этой структуры при решении практических задач. Поэтому далее мы будем изучать осредненные статистические характеристики совокупности аналогичных течений, предполагая, что все гидродинамические поля являются случайными полями, т.е. существуют соответствующие многомерные (многоточечные) плотности вероятности $p_{M_1,M_2,\dots M_N}(u_1, u_2, \dots u_N)$.

Кроме того, мы будем предполагать, что существует статистический ансамбль аналогичных течений, характеризуемый определенными непрерывными распределениями вероятности. Отметим, что обычного определения турбулентности как “течения, сопровождаемого беспорядочными пульсациями и т.д.” недостаточно для построения математической теории турбулентности. Если же статистический ансамбль существует, то можно строить теорию.

На практике обычно используются не средние по ансамблю, а временные или пространственные средние, следовательно, случайные поля должны удовлетворять условиям эргодической теоремы, или следует принять эргодическую гипотезу.

Важнейшая и простейшая статистическая характеристика случайного гидродинамического поля – **среднее** значение $\overline{u}$. Среднее в теории турбулентности обычно обозначают чертой сверху. Величина $u' = u - \overline{u}$ называется **пульсацией** и обозначается штрихом. Разложение гидродинамических полей на средние и пульсации – это основное в рассуждениях Рейнольдса.

В принципе можно полагать, что пространственные и временные турбулентные неоднородности могут иметь сколь угодно малые масштабы вплоть до длины свободного пробега молекул и времени между последовательными столкновениями молекул. Но в случае малых масштабов использование макроскопических уравнений гидродинамики было бы незаконным. На самом деле, турбулентные неоднородности никогда не имеют столь малых пространственно-временных размеров. На микроскопических масштабах затраты энергии на преодоление сил вязкого трения становятся так велики, что само существование таких движений невозможно.

Минимальные временные и пространственные масштабы турбулентных пульсаций (для задач физики атмосферы и океана ~1 мм, ~0.1 с) во всех случаях на несколько порядков превосходят соответствующие характеристики молекулярных движений. Например, при нормальных условиях в воздухе длина свободного пробега молекул $L \sim 10^{-7}$ м, скорость молекул $v \sim 5 \cdot 10^{2}$ м/с, а характерный масштаб времени $T \sim L/v \sim 2 \cdot 10^{-10}$ с.

Итак, на расстояниях порядка турбулентных неоднородностей все поля меняются плавно, функции являются дифференцируемыми и, следовательно, применение обычных дифференциальных уравнений гидродинамики вполне оправдано. Однако, непосредственное использование этих уравнений, как уже было установлено ранее, невозможно из-за неустойчивости, т.е. зависимости решений от мельчайших неподконтрольных деталей начальных условий. Это, однако, не означает, что уравнения гидродинамики вообще не могут быть использованы при изучении турбулентности. В силу того, что индивидуальные реализации гидродинамических полей подчиняются уравнениям гидродинамики, то, следовательно, и статистические характеристики этих полей должны быть связаны целым рядом соотношений.

При выводе осредненных уравнений, называемых **уравнениями Рейнольдса**, будем исходить из системы Навье-Стокса в предположении несжимаемой жидкости.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}, \tag{4.2.1}$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \tag{4.2.2}$$

Скорость течения жидкости и давление представим в виде суммы средней и пульсационной частей

$$\vec{v} = \overline{\vec{v}} + \vec{v}', \; p = \overline{p} + p'. \tag{4.2.3}$$

При процедуре осреднения уравнений будем исходить из условий осреднения Рейнольдса и следствий из них. Соответствующие выражения приведены в конце раздела 4.1.

Процедуру осреднения начнем с уравнения неразрывности.

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}} = \overline{\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}} = 0 .$$

Учитывая, что среднее от пульсации равно нулю, приходим к уравнению неразрывности традиционного вида, но уже для среднего движения

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}=0 \text{ (или } \operatorname{div}\bar{\vec{v}}=0\text{)}. \qquad (4.2.4)$$

Заметим, что $\operatorname{div}\vec{v}=\operatorname{div}\bar{\vec{v}}+\operatorname{div}\vec{v}'=0$. Но $\operatorname{div}\bar{\vec{v}}=0$, следовательно, уравнение неразрывности выполняется и для пульсаций $\operatorname{div}\vec{v}'=0$.

Далее выполним осреднение динамического уравнения на примере x - вой компоненты уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \qquad (4.2.5)$$

Подставим в уравнение (4.2.5) записанные покомпонентно выражения (4.2.3)

$$u=\bar{u}+u',\ v=\bar{v}+v',\ w=\bar{w}+w',\ p=\bar{p}+p'$$

и выполним операцию осреднения в соответствии с условиями Рейнольдса. В процессе выкладок будет использовано следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uu)+\frac{\partial}{\partial y}(uv)+\frac{\partial}{\partial z}(uw)=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+$$
$$+u\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{=0,\ \text{т.к.}\ \operatorname{div}\vec{v}=0}. \qquad (4.2.6)$$

Далее последовательно применим правила осреднения Рейнольдса и следствия из них к нелинейному члену.

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x}(uu)+\frac{\partial}{\partial y}(uv)+\frac{\partial}{\partial z}(uw)}=\overline{\frac{\partial}{\partial x}(uu)}+\overline{\frac{\partial}{\partial y}(uv)}+\overline{\frac{\partial}{\partial z}(uw)}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{uu}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{uv}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{uw}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{(\bar{u}+u')(\bar{u}+u')}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{(\bar{u}+u')(\bar{v}+v')}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{(\bar{u}+u')(\bar{w}+w')}\right)=$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\overline{u}\,\overline{u} + 2\overline{u}u' + u'u'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\overline{u}\,\overline{v} + \overline{u}v' + \overline{v}u' + u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\overline{u}\,\overline{w} + \overline{u}w' + \overline{w}u' + u'w'}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u}\,\overline{u} + \overline{u'u'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u}\,\overline{v} + \overline{u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{u}\,\overline{w} + \overline{u'w'}\right).$$

На последнем этапе выкладок мы воспользовались тем, что

$\overline{\overline{u}u'} = \overline{\overline{u}v'} = \overline{\overline{v}u'} = \overline{\overline{u}w'} = \overline{\overline{w}u'} = 0$.

В результате имеем:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2}\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'u'}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u'v'}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{u'w'}\right). \qquad (4.2.7)$$

В уравнении (4.2.7) появились новые неизвестные вида $\overline{u'_i u'_j}$ (моменты второго порядка).

Полезно аналогичные операции произвести в тензорных обозначениях. Напомним, что тензорные обозначения подразумевают суммирование по повторяющемуся индексу (в данном случае по “$\alpha$”). Исходная система уравнений (4.2.1) и (4.2.2) теперь имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right), \qquad (4.2.8)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \qquad (4.2.9)$$

Как это уже было показано выше, в силу того, что выполняется уравнение неразрывности, имеет силу следующее равенство (аналог (4.2.6)):

$$u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(u_i u_\alpha\right). \qquad (4.2.10)$$

Кроме того, следует заметить, что

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} p\delta_{i\alpha}, \qquad (4.2.11)$$

где $\delta_{i\alpha}$ – символ Кронекера.

Введем еще и **вязкий тензор напряжений** в несжимаемой жидкости

$$\sigma_{ij} = \rho\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \qquad (4.2.12)$$

Легко убедиться, что

$$\frac{\partial \sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = \rho\nu\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\right) = \rho\nu\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right). \qquad (4.2.13)$$

При получении (4.2.13) мы воспользовались независимостью смешанной производной от порядка дифференцирования и уравнением неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(0) = 0.$$

С учетом (4.2.10), (4.2.11) и (4.2.13) динамическое уравнение Навье-Стокса можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[u_i u_\alpha + \frac{p}{\rho}\delta_{i\alpha} - \frac{\sigma_{i\alpha}}{\rho}\right] = 0. \qquad (4.2.14)$$

Далее, пользуясь правилами осреднения Рейнольдса, получаем:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\overline{u_i} + u'_i)(\overline{u_j} + u'_j)} = \overline{u_i}\,\overline{u_j} + \overline{u'_i u'_j}. \qquad (4.2.15)$$

В итоге приходим к системе **уравнений Рейнольдса** в тензорных обозначениях

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\overline{u_i}\,\overline{u_\alpha} + \overline{u'_i u'_\alpha} + \frac{\overline{p}}{\rho}\delta_{i\alpha} - \frac{\overline{\sigma_{i\alpha}}}{\rho}\right] = 0, \qquad (4.2.16)$$

$$\frac{\partial \overline{u_\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0. \qquad (4.2.17)$$

Возможен и такой вариант записи уравнения (4.2.16)

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_\alpha}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\nu\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_\alpha} - \overline{u_i' u_\alpha'}\right).$$

Величина $\tau_{ij} = -\rho\overline{u_i' u_j'}$ представляет собой тензор дополнительных напряжений, именуемый **тензор напряжений Рейнольдса**. Эти напряжения возникают из-за наличия турбулентных пульсаций и носят название **напряжения Рейнольдса**. Своим происхождением они обязаны нелинейности уравнений гидродинамики.

Следует еще отметить, что если в исходном уравнении Навье-Стокса (4.2.1) присутствует некая внешняя сила, которую можно представить как сумму среднего значения и пульсации: $F_i = \overline{F_i} + F_i{}'$, то в результате процедуры осреднения в уравнении Рейнольдса (4.2.16) также появится дополнительный член $\overline{F_i}$, описывающий действие осредненной внешней силы.

Полученные уравнения Рейнольдса есть уравнения баланса импульса осредненного движения, входящие в них напряжения Рейнольдса описывают турбулентный перенос этого импульса.

Похожие уравнения могут быть получены и для произвольной консервативной скалярной субстанции, переносимой жидкостью (тепло, пар, дым, соль и т.п.). Важно заметить, что импульс на самом деле не является консервативной примесью, т.к. в уравнении присутствует градиент давления, и могут действовать внешние силы (т.е. существуют источники и стоки импульса). Исходное уравнение, описывающее перенос консервативной субстанции T, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha\frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = \chi\Delta T, \qquad (4.2.18)$$

где $\chi$ - молекулярный коэффициент диффузии величины T (например, коэффициент молекулярной температуропроводности). Делаем традиционное для теории турбулентности предположение

$$T = \overline{T} + T', \quad u = \overline{u} + u'. \tag{4.2.19}$$

Далее получим вспомогательную формулу (аналог выражения (4.2.10))

$$u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(T u_\alpha), \tag{4.2.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(T u_\alpha) = u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} + T\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{=\operatorname{div} v = 0}.$$

Осреднение уравнения (4.2.18) дает уравнение переноса консервативной скалярной примеси в турбулентном потоке

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \overline{u_\alpha}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_\alpha} = \chi\Delta\overline{T} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\overline{u'_\alpha T'}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\chi\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_\alpha} - \overline{u'_\alpha T'}\right), \tag{4.2.21}$$

где $-\overline{u'_\alpha T'}$ – турбулентный поток консервативной примеси.

Система уравнений Рейнольдса является *незамкнутой*, то есть число входящих в нее уравнений оказывается меньше, чем число неизвестных функций. Действительно, система (4.2.16)-(4.2.17) включает в себя четыре уравнения и десять неизвестных функций. Помимо трех компонент скорости среднего течения $\overline{u_i}$ и среднего давления $\overline{p}$, в уравнениях Рейнольдса появились еще шесть новых неизвестных вида $\overline{u'_i u'_j}$. Формально, разумеется, существует девять комбинаций $\overline{u'_i u'_j}$, но с учетом условия симметрии $\overline{u'_i u'_j} = \overline{u'_j u'_i}$, их число сокращается до шести. Незамкнутость системы Рейнольдса – это «расплата» за переход к средним значениям.

Для замыкания системы можно попытаться получить динамические уравнения на величины $\overline{u_i' u_j'}$. Для этого используется **метод Фридмана-Келлера**. Суть метода заключается в следующем. На первом этапе к искомой величине $\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{u_i' u_j'}\right)$ применяются стандартные правила дифференцирования в сочетании с правилами осреднения Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{u_i' u_j'}\right)=\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial t}u_j'}+\overline{u_i'\frac{\partial u_j'}{\partial t}}. \qquad (4.2.22)$$

На втором этапе, согласно определению, пульсация под знаком производной по времени выражается через полную и среднюю скорость

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t}=\frac{\partial u_i}{\partial t}-\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t}. \qquad (4.2.23)$$

Первый член в правой части (4.2.23) прямо выражается из уравнения Навье-Стокса (4.2.14), а второй – из уравнения Рейнольдса (4.2.16). Последний и наиболее громоздкий этап состоит в умножении полученного результата на пульсацию скорости (см. формулу (4.2.22)) с последующим выполнением процедуры осреднения.

Важно иметь в виду, что получаемые в итоге эволюционные (динамические) уравнения для моментов второго порядка содержат новые неизвестные функции – моменты второго и третьего порядка ($\overline{u_i' u_j' u_k'}$, $\overline{u_i' u_j' \frac{\partial u_k'}{\partial x_k}}$, $\overline{p' u_k'}$ и т.п.). В принципе, для этих новых неизвестных функций опять можно воспользоваться методом Фридмана-Келлера и составить эволюционные уравнения, но в них, разумеется, возникнут новые неизвестные – моменты более высокого порядка. В общем случае в эволюционное уравнение для момента порядка N будут всегда входить моменты N+1 порядка. Причем с ростом порядка выражаемого момента N разрыв между числом неизвестных и числом уравнений будет только увеличиваться.

Тем не менее, составление таких уравнений представляет определенный интерес, т.к. позволяет сделать ряд качественных выводов о свойствах турбулентных течений. Особенно полезным оказывается уравнение баланса турбулентной энергии, описывающее изменение плотности кинетической энергии пульсационного движения $\overline{u'_\alpha u'_\alpha}/2$. Члены этого уравнения имеют ясный физический смысл, так что, несмотря на громоздкость, уравнение баланса удачно дополняет систему уравнений Рейнольдса. Использование уравнения баланса турбулентной энергии в дополнение к уравнениям Рейнольдса впервые было предложено в работе [Колмогоров, 1942].

### 4.3. Уравнение для плотности кинетической энергии в потоке несжимаемой жидкости

В настоящем разделе будет получено уравнение для плотности кинетической энергии в потоке несжимаемой жидкости. Для минимизации выкладок используем тензорные обозначения.

В данном разделе мы будем исходить из уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho u_i u_\alpha + p\delta_{i\alpha} - \sigma_{i\alpha}\right] = 0. \tag{4.3.1}$$

Используя метод Фридмана-Келлера, запишем

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i u_j = \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial t}. \tag{4.3.2}$$

Заметим, что в качестве компонент скорости в формуле (4.3.2), очевидно, могут с одинаковым успехом выступать полные скорости, пульсации или средние значения.

Для начала, используя уравнение Навье-Стокса (4.3.1) и формулу (4.3.2), получим эволюционное уравнение для величины $\rho u_i u_j$. При выводе уравнения мы используем следующее очевидное тождество

$$u_j \frac{\partial}{\partial x_\alpha} F_{i\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(u_j F_{i\alpha}\right) - F_{i\alpha}\frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}. \qquad (4.3.3)$$

Итак, для первого слагаемого в правой части формулы (4.3.2) получаем

$$\rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho u_i u_j u_\alpha + p u_i \delta_{j\alpha} - u_i \sigma_{j\alpha}\right] = \\ = \rho u_j u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + p\delta_{j\alpha}\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \sigma_{j\alpha}\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}. \qquad (4.3.4)$$

Для второго члена имеем аналогичное уравнение

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho u_j u_i u_\alpha + p u_j \delta_{i\alpha} - u_j \sigma_{i\alpha}\right] = \\ = \rho u_i u_\alpha \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + p\delta_{i\alpha}\frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} - \sigma_{i\alpha}\frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}. \qquad (4.3.5)$$

Складывая уравнения (4.3.4) и (4.3.5), получаем искомое эволюционное уравнение для величины $\rho u_i u_j$

$$\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[2\rho u_i u_j u_\alpha + p\left(u_i \delta_{j\alpha} + u_j \delta_{i\alpha}\right) - \left(u_i \sigma_{j\alpha} + u_j \sigma_{i\alpha}\right)\right] = \\ = \rho u_\alpha \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}\right) + p\left(\delta_{j\alpha}\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \delta_{i\alpha}\frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}\right) - \left(\sigma_{j\alpha}\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \sigma_{i\alpha}\frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}\right). \qquad (4.3.6)$$

Преобразуем первый член в правой части уравнения (4.3.6)

$$\rho u_\alpha \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}\right) = \rho u_\alpha \frac{\partial \left(u_i u_j\right)}{\partial x_\alpha},$$

и внесем компоненту скорости $u_\alpha$ под знак производной (последняя операция правомерна в силу уравнения неразрывности $\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0$)

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big((u_i u_j)\,u_\alpha\Big)=\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_\alpha}u_\alpha+(u_i u_j)\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_\alpha}u_\alpha\,.$$

Теперь несложно заметить, что первый член в правой части уравнения (4.3.6) равен половине второго члена левой части, следовательно, в результате взаимного уничтожения исчезает множитель “2” и первый член правой части. Делая очевидное упрощение второго члена в правой части, окончательно имеем

$$\frac{\partial\,\rho u_i u_j}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big[\rho u_i u_j u_\alpha+p\big(u_i\delta_{j\alpha}+u_j\delta_{i\alpha}\big)-\big(u_i\sigma_{j\alpha}+u_j\sigma_{i\alpha}\big)\Big]=$$
$$=p\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\left(\sigma_{j\alpha}\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}+\sigma_{i\alpha}\frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}\right). \tag{4.3.7}$$

Из уравнения (4.3.7) легко получить уравнение для плотности кинетической энергии $E=\rho u_\beta u_\beta/2$. Для этого формально следует положить $i=j\equiv\beta$ и просуммировать по вновь появившимся повторяющимся индексам $\beta$ (фактически эта процедура означает, что из 9 формально существующих уравнений (4.3.7) мы выбираем 3 уравнения и суммируем их).

$$\frac{\partial\,2E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big[2Eu_\alpha+2pu_\beta\delta_{\beta\alpha}-2u_\beta\sigma_{\beta\alpha}\Big]=2p\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta}-2\sigma_{\beta\alpha}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}. \tag{4.3.8}$$

Учитывая, что $u_\beta\delta_{\beta\alpha}=u_\alpha$ и $\dfrac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta}=0$ (уравнение неразрывности), окончательно имеем

$$\frac{\partial\,E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big[Eu_\alpha+pu_\alpha-u_\beta\sigma_{\beta\alpha}\Big]=-\sigma_{\beta\alpha}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\equiv-\rho\varepsilon\,, \tag{4.3.9}$$

где $\rho\varepsilon$ – удельная (на единицу времени и объема) диссипация кинетической энергии. В результате ряда несложных преобразований

$$\rho\varepsilon=\sigma_{\beta\alpha}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}=\rho\nu\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}=$$
$$=\frac{\rho\nu}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right)=\frac{\rho\nu}{2}\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2 \quad (4.3.10)$$

получаем, что знак члена, описывающего диссипацию энергии, строго определен. Из-за диссипации (перехода в тепло) энергия потока всегда уменьшается.

Другие члены уравнения (4.3.9) также имеют простой физический смысл. Член $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[Eu_\alpha\right]$ описывает адвективный перенос энергии потоком, член $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[pu_\alpha\right]$ – работу сил давления, а член $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[-u_\beta\sigma_{\beta\alpha}\right]$ – работу сил вязкого трения.

## 4.4. Уравнение для компонент тензора Рейнольдса и уравнение баланса турбулентной энергии

Теперь обратимся к получению уравнений на компоненты тензора Рейнольдса $\rho\overline{u_i' u_j'}$. Заметим следующую формулу:

$$\overline{u_i u_j}=\overline{u_i}\;\overline{u_j}+\overline{u_i' u_j'},$$

из которой вытекает

$$\frac{\partial\rho\,\overline{u_i' u_j'}}{\partial t}=\frac{\partial\rho\,\overline{u_i u_j}}{\partial t}-\frac{\partial\rho\,\overline{u_i}\;\overline{u_j}}{\partial t}=\overline{\frac{\partial\rho\,u_i u_j}{\partial t}-\frac{\partial\rho\,\overline{u_i}\;\overline{u_j}}{\partial t}}. \quad (4.4.1)$$

Величина $\dfrac{\partial \rho\, u_i u_j}{\partial t}$ из (4.4.1) определяется уже полученным в разделе 4.3 уравнением (4.3.7). Для получения искомого уравнения нам еще необходимо знать величину $\dfrac{\partial \rho\, \overline{u_i}\,\overline{u_j}}{\partial t}$. Т.к. теперь речь идет о среднем движении, то исходить следует из уравнения Рейнольдса

$$\frac{\partial \rho \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho\, \overline{u_i}\,\overline{u_\alpha} + \rho\, \overline{u_i' u_\alpha'} + \overline{p}\,\delta_{i\alpha} - \overline{\sigma_{i\alpha}}\right] = 0, \tag{4.4.2}$$

вид которого практически аналогичен уравнению Навье-Стокса (4.3.1). При получении уравнения (4.3.7) мы неоднократно пользовались уравнением неразрывности для полной скорости $u_i$. Как было показано в разделе 4.2, уравнение неразрывности выполняется и для среднего течения $\overline{u_i}$. Следовательно, мы можем получить искомое уравнение формальной заменой $u_i \to \overline{u_i}$. При этом, конечно, не следует забывать, что теперь мы исходим из уравнений Рейнольдса, а не Навье-Стокса, и следует учесть член, описывающий напряжения Рейнольдса.

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho \overline{u_i}\,\overline{u_j}}{\partial t} + \\
+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho \overline{u_i}\,\overline{u_j}\,\overline{u_\alpha} + \overline{p}\left(\overline{u_i}\delta_{j\alpha} + \overline{u_j}\delta_{i\alpha}\right) - \left(\overline{u_i}\,\overline{\sigma_{j\alpha}} + \overline{u_j}\,\overline{\sigma_{i\alpha}}\right) + \rho\,\overline{u_i' u_\alpha'}\,\overline{u_j} + \rho\,\overline{u_j' u_\alpha'}\,\overline{u_i}\right] = \\
= \overline{p}\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) - \left(\overline{\sigma_{i\alpha}}\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_\alpha} + \overline{\sigma_{j\alpha}}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_\alpha}\right) + \left(\rho\,\overline{u_i' u_\alpha'}\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_\alpha} + \rho\,\overline{u_j' u_\alpha'}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_\alpha}\right).
\end{gathered} \tag{4.4.3}$$

Для плотности кинетической энергии осредненного движения $E_s = \dfrac{1}{2}\rho \overline{u_\beta}\,\overline{u_\beta}$ из (4.4.3) получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial E_s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[E_s\overline{u_\alpha}+\bar{p}\,\overline{u_\alpha}-\overline{u_\beta}\,\overline{\sigma_{\beta\alpha}}+\rho\overline{u'_\alpha u'_\beta}\,\overline{u_\beta}\right]=-\rho\varepsilon_s+\rho\overline{u'_\alpha\, u'_\beta}\frac{\partial\overline{u_\beta}}{\partial x_\alpha},(4.4.4)$$

где $\rho\varepsilon_s=\overline{\sigma_{\beta\alpha}}\dfrac{\partial\overline{u_\beta}}{\partial x_\alpha}=\dfrac{\rho\nu}{2}\sum\limits_{\alpha\beta}\left(\dfrac{\partial\overline{u_\alpha}}{\partial x_\beta}+\dfrac{\partial\overline{u_\beta}}{\partial x_\alpha}\right)^2$ – удельная диссипация энергии осредненного движения под действием молекулярной вязкости. Слагаемое $\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho\overline{u'_\alpha u'_\beta}\,\overline{u_\beta}\right]$ описывает работу турбулентных напряжений. Прочие члены в левой части имеют такой же смысл, как соответствующие члены уравнения (4.3.9).

Далее, для определения величины $\dfrac{\partial\rho\,\overline{u_i u_j}}{\partial t}$, осредним полученное в разделе 4.3 уравнение (4.3.7). Для этой цели предварительно выполним следующие несложные преобразования с первым членом в квадратной скобке:

$$\overline{u_i u_j u_\alpha}=\overline{(\overline{u_i}+u'_i)(\overline{u_j}+u'_j)(\overline{u_\alpha}+u'_\alpha)}=\overline{(\overline{u_i}\,\overline{u_j}+\overline{u_i}u'_j+\overline{u_j}u'_i+u'_iu'_j)(\overline{u_\alpha}+u'_\alpha)}=$$

$$=\overline{\overline{u_i}\,\overline{u_j}\,\overline{u_\alpha}+\overline{u_i}\,\overline{u_\alpha}u'_j+\overline{u_j}\,\overline{u_\alpha}u'_i+\overline{u_\alpha}u'_iu'_j+\overline{u_i}\,\overline{u_j}u'_\alpha+\overline{u_i}u'_ju'_\alpha+\overline{u_j}u'_iu'_\alpha+u'_iu'u'_\alpha}=$$

$$=\overline{u_i\,u_j\,u_\alpha}+\overline{u_\alpha u'_iu'_j}+\overline{u_i u'_ju'_\alpha}+\overline{u_j u'_iu'_\alpha}+\overline{u'_iu'u'_\alpha}\,.$$

Все прочие преобразования, необходимые для осреднения уравнения (4.3.7), укладываются в схему (4.2.15), которую мы уже неоднократно использовали ранее. В итоге из уравнения (4.3.7) получаем

$$\frac{\partial\rho\overline{u_iu_j}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big[\overline{\rho u_i u_j u_\alpha}+\overline{\rho u_\alpha u'_iu'_j}+\overline{\rho u_i u'_ju'_\alpha}+\overline{\rho u_j u'_iu'_\alpha}+\overline{\rho u'_iu'u'_\alpha}+$$

$$+\overline{pu_i}\delta_{j\alpha}+\overline{pu_j}\delta_{i\alpha}+\overline{p'u'_i}\delta_{j\alpha}+\overline{p'u'_j}\delta_{i\alpha}-\left(\overline{u_i\sigma_{j\alpha}}+\overline{u_j\sigma_{i\alpha}}+\overline{u'_i\sigma'_{j\alpha}}+\overline{u'_j\sigma'_{i\alpha}}\right)\Big]=$$

$$=\left(\bar{p}\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}+\bar{p}\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}+\overline{p'\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}+\overline{p'\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}}\right)-\left(\overline{\sigma_{j\alpha}}\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_\alpha}+\overline{\sigma_{i\alpha}}\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_\alpha}+\overline{\sigma'_{j\alpha}\frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha}}+\overline{\sigma'_{i\alpha}\frac{\partial u'_j}{\partial x_\alpha}}\right).$$

(4.4.5)

Для получения искомого уравнения для компонент тензора напряжений Рейнольдса, в соответствии с формулой (4.4.1), следует вычесть из уравнения (4.4.5) уравнение (4.4.3). В результате приходим к следующему выражению:

$$\frac{\partial \rho \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho \overline{u_i' u_j'}\,\overline{u_\alpha} + \rho \overline{u_i' u_j' u_\alpha'} + \left(\overline{p' u_i'}\,\delta_{j\alpha} + \overline{p' u_j'}\,\delta_{i\alpha}\right) - \left(\overline{u_i' \sigma_{j\alpha}'} + \overline{u_j' \sigma_{i\alpha}'}\right)\right] =$$

$$= \overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)} - \left(\overline{\sigma_{i\alpha}' \frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha}} + \overline{\sigma_{j\alpha}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}}\right) - \left(\rho \overline{u_i' u_\alpha'} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_\alpha} + \rho \overline{u_j' u_\alpha'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_\alpha}\right). \tag{4.4.6}$$

Уравнение (4.4.6), кроме средней скорости и напряжений Рейнольдса, содержит целый ряд новых неизвестных: третьи центральные моменты $\rho \overline{u_i' u_j' u_\alpha'}$, взаимные моменты давления и скорости $\overline{p' u_i'}$ и $\overline{p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$, вторые моменты пульсации скорости, входящие в выражения $\overline{u_i' \sigma_{j\alpha}'}$ и $\overline{\sigma_{i\alpha}' \frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha}}$. Здесь следует еще раз подчеркнуть, что уравнения Рейнольдса, даже будучи дополненными уравнениями для напряжений Рейнольдса (4.4.6), не образуют замкнутой системы и, следовательно, не могут быть решены без каких-либо дополнительных предположений.

Из уравнения (4.4.6) после суммирования по $i = j \equiv \beta$ получается уравнение для средней плотности кинетической энергии пульсационного движения $E_t = \rho \overline{u_\beta' u_\beta'} / 2$.

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[E_t \overline{u_\alpha} + \frac{1}{2}\rho\, \overline{u_\beta' \, u_\beta' \, u_\alpha'} + \overline{p' u_\alpha'} - \overline{u_\beta' \sigma_{\alpha\beta}'}\right] = \tag{4.4.7}$$

$$= -\rho \overline{\varepsilon_t} - \rho \overline{u_\alpha' \, u_\beta'} \frac{\partial \overline{u_\beta}}{\partial x_\alpha},$$

где $\rho\overline{\varepsilon_t} = \overline{\sigma'_{\alpha\beta}\dfrac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}} = \dfrac{\rho\nu}{2}\sum_{\alpha\beta}\overline{\left(\dfrac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\beta} + \dfrac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2}$ – средняя удельная диссипация энергии пульсационного движения под действием вязкости. В левой части уравнения (4.4.7) в квадратных скобках стоит плотность потока турбулентной энергии, связанная с адвективным переносом осредненным течением, турбулентной вязкостью (т.е. пульсационной компонентой скорости), пульсациями давления и молекулярной вязкостью. Слагаемое, входящее в правую часть уравнений (4.4.4) и (4.4.7) с разными знаками $\rho\overline{u'_\alpha\, u'_\beta}\dfrac{\partial \overline{u_\beta}}{\partial x_\alpha}$, описывает взаимные превращения энергии осредненного и пульсационного движений.

Уравнение баланса турбулентной энергии дополняет уравнения Рейнольдса, т.к. устанавливает новые дополнительные связи между статистическими характеристиками турбулентности. Оно, конечно, содержит новые неизвестные, но физический смысл членов этого уравнения достаточно очевиден, и это облегчает попытки выразить их через более простые характеристики.