

Глава 5. Подходы к замыканию уравнений Рейнольдса

В предыдущей главе была выведена система уравнений Рейнольдса, устанавливающая связи между статистическими характеристиками турбулентности. В силу того, что число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных функций, система оказывается незамкнутой, и, следовательно, она не может быть решена без введения дополнительных связей (уравнений). Попытки получить недостающие связи, используя метод Фридмана-Келлера и составляя уравнения для компонент тензора Рейнольдса или для моментов более высокого порядка, не решают проблему незамкнутости: разрыв между числом неизвестных функций и числом уравнений только увеличивается. Отсюда следует вывод, что недостающие связи должны быть заданы независимо от уравнений Рейнольдса. В некоторых случаях дополнительные связи могут быть определены с помощью теории размерности с точностью до эмпирических констант. Чаще, однако, теория размерности приводит к соотношениям, содержащим неизвестные функции или константы, которые опять же необходимо определять экспериментально. Общее число таких функций, используемых в технических приложениях, а также в задачах физики океана и атмосферы, весьма велико. Этот факт всегда стимулировал исследователей к поиску универсальных связей, которые могут быть применены ко многим течениям.

В этой главе будут рассмотрены основные подходы к замыканию системы уравнений Рейнольдса и, попутно, изложены необходимые фундаментальные теоретические представления о гидродинамической турбулентности, а также основные экспериментальные результаты исследования турбулентных течений.

5.1. Полуэмпирические теории турбулентности

Теории турбулентности, использующие наряду со строгими уравнениями гидромеханики также некоторые дополнительные связи, найденные чисто эмпирически (из экспериментов) или же выведенные с помощью качественных рассуждений наглядно-физического характера и затем проверенные на опыте, называются **полуэмпирическими теориями**. Это определение мы процитировали по книге [Монин, Яглом, 1965].

Полуэмпирические теории очень характерны для исследований в области гидродинамической турбулентности. Важнейшие идеи этих теорий были предложены такими известными исследователями как Жозеф Валантен Буссинеск [Boussinesq, 1897], Людвиг Прандтль [Prandtl, 1925], Джеффри Инграм Тейлор [Taylor, 1915, 1932] и Теодор фон Карман [Von Kármán, 1930].

Простейший путь замыкания уравнений Рейнольдса состоит в установлении связей между напряжениями Рейнольдса $\overline{\rho u'_i u'_j}$ и осредненными полями. Для наглядности рассмотрим плоскопараллельный турбулентный поток, в котором средняя скорость имеет единственную отличную от нуля компоненту $\bar{\vec{v}} = (\bar{u}(z), 0, 0)$, а пульсации скорости – две компоненты $\vec{v}' = (u'(x, z, t), 0, w'(x, z, t))$. В таком случае единственное, с чем можно связать турбулентные напряжения – это профиль скорости среднего течения $\bar{u}(z)$. Пользуясь аналогией с молекулярным переносом импульса, который определяется коэффициентом вязкости ν , Буссинеск выдвинул предположение о существовании **коэффициента турбулентной вязкости** K [Boussinesq, 1897]. Правая часть уравнения Рейнольдса для переноса импульса действительно имеет вид, который сам по себе наводит на возможность такого нововведения

$$\rho \frac{d}{dz} \left(v \frac{d\bar{u}}{dz} - \overline{u'w'} \right) = \rho \frac{d}{dz} \left([v + K] \frac{d\bar{u}}{dz} \right), \text{ где } K = - \frac{\overline{u'w'}}{\rho \frac{d\bar{u}}{dz}}. \quad (5.1.1)$$

Аналогично можно ввести и коэффициент турбулентной диффузии K_θ

$$\frac{d}{dz} \left(\chi \frac{d\bar{\theta}}{dz} - \overline{w'\theta'} \right) = \frac{d}{dz} \left([\chi + K_\theta] \frac{d\bar{\theta}}{dz} \right), \text{ где } K_\theta = - \frac{\overline{w'\theta'}}{\frac{d\bar{\theta}}{dz}}. \quad (5.1.2)$$

Заметим, что на самом деле соотношения (5.1.1) и (5.1.2), конечно, не решают проблему замыкания, а только заменяют одни неизвестные функции $\overline{u'w'}$ и $\overline{w'\theta'}$ другими неизвестными функциями – коэффициентами турбулентного обмена K и K_θ . Причем в отличие от молекулярных коэффициентов, коэффициенты турбулентного обмена характеризуют не физические свойства жидкости или газа, а статистические свойства турбулентного движения, следовательно, они вовсе не обязаны являться постоянными величинами. Как правило, коэффициенты турбулентного обмена зависят от пространственных координат и времени. Кроме того, вдали от стенок их значения существенно превосходят соответствующие молекулярные характеристики: $K \gg \nu$ и $K_\theta \gg \chi$.

Решить проблему замыкания – по крайней мере в рассматриваемом частном случае – можно, если предположить, что коэффициент турбулентного обмена K зависит от координат определенным образом. При этом мы приходим к полуэмпирической теории, основанной на гипотезе, которая в дальнейшем может быть проверена на эксперименте.

В качестве наиболее простого предположения можно принять $K = \text{const}$. Так поступают, например, при численном моделировании турбулентных потоков для описания влияния вихрей подсеточного

масштаба. Фактически предположение $K = \text{const}$ эквивалентно введению нового значения вязкости, которое, как уже отмечалось выше, значительно превосходит молекулярный коэффициент. Заметим, что при приближении к твердой непроницаемой поверхности предположение $K = \text{const}$, очевидно, не соответствует действительности. В соответствии с условием прилипания, турбулентные пульсации и, следовательно, сам коэффициент турбулентного обмена при приближении к такой поверхности должны устремляться к нулю.

Другой «более сложный» вариант зависимости имеет вид $K(z) = \alpha z$, где $\alpha = \text{const}$, z – расстояние от стенки (мы рассматриваем слой не слишком близкий к стенке – за пределами подслоя, где действие сил вязкости является определяющим). Забегая вперед, отметим, что такое предположение согласуется с теорией размерностей и находит экспериментальное подтверждение.

Существуют, конечно, и иные виды зависимостей $K(z)$. Достоинство подхода Буссинеска состоит во введении чрезвычайно наглядной характеристики (коэффициента турбулентного обмена), которая допускает простую физическую интерпретацию. Гипотеза Буссинеска широко используется в современных моделях турбулентных течений (см. раздел 5.9).

Другая полуэмпирическая теория была предложена Людвигом Прандтлем [Prandtl, 1925]. Теория базируется на понятии **пути перемешивания** (пути смешения), которое удобно вводить на примере турбулентного переноса консервативной примеси. Вновь будем рассматривать плоскопараллельный турбулентный поток со средней скоростью, направленной вдоль оси $0x$ и зависящей только от поперечной координаты z : $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{u}(z), 0, 0)$, $\mathbf{v}' = (u'(x, z, t), 0, w'(x, z, t))$. Пусть также

концентрация примеси θ зависит только от координаты z : $\bar{\theta} = \bar{\theta}(z)$. В таком случае интерес представляет перенос примеси исключительно вдоль оси Oz . Представим, что существуют некие струйки (пульсации), переносящие примесь с одного уровня z на другой. Причем любая такая струйка проходит некий путь l' и лишь затем *мгновенно* перемешивается с окружающей средой. При этом на уровне z возникает пульсация концентрации

$$\theta' = \bar{\theta}(z \pm l') - \bar{\theta}(z) = \pm l' \frac{d\bar{\theta}}{dz}. \quad (5.1.3)$$

Знак величины l' связан со знаком вертикальной пульсации скорости w' . Если пульсация w' положительна, то перенос идет в положительном направлении, т.е. с уровня $z - l'$. Для отрицательных значений w' перенос идет в отрицательном направлении – с уровня $z + l'$. Поэтому произведение $l'w'$ всегда имеет отрицательный знак. Итак, для турбулентного потока консервативной примеси θ имеем

$$-\overline{w'\theta'} = \overline{w'l'} \frac{d\bar{\theta}}{dz}. \quad (5.1.4)$$

Заметим, что коэффициент турбулентного обмена K_θ может быть выражен через путь смешения (см. формулы (5.1.2) и (5.1.4)) следующим образом:
 $K_\theta = \overline{w'l'}$.

Аналогичный подход может быть применен и для описания турбулентного обмена импульсом. Переносимый импульс с уровня $z \pm l'$, «струйка» создает на уровне z пульсацию скорости

$$u' = \bar{u}(z \pm l') - \bar{u}(z) = \pm l' \frac{d\bar{u}}{dz}. \quad (5.1.5)$$

Компоненту тензора Рейнольдса теперь можно записать следующим образом:

$$\tau = -\rho \overline{u'w'} = \rho \overline{l'w'} \frac{d\bar{u}}{dz}. \quad (5.1.6)$$

Сопоставляя выражения (5.1.1) и (5.1.6) получаем формулу для коэффициента турбулентной вязкости $K = \overline{l'w'}$.

Далее, предположим, что пульсации продольной и поперечной скорости имеют один порядок

$$u' \sim w' = l' \frac{d\bar{u}}{dz}. \quad (5.1.7)$$

С учетом формулы (5.1.7) из выражения (5.1.6) получаем представление для турбулентного напряжения, полученное в свое время Прандтлем.

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right| \frac{d\bar{u}}{dz}, \quad (5.1.8)$$

где $l = \sqrt{\overline{l'l'}}$ – среднее квадратичное значение случайной величины l' , называемой длиной перемешивания или **путем смешения Прандтля**. Знак абсолютной величины в формуле (5.1.8) поставлен для того, чтобы напряжение имело такой же знак, как и величина $d\bar{u}/dz$ (поток импульса должен быть направлен в области с меньшими скоростями среднего течения).

Формулы (5.1.1) и (5.1.8) дают возможность связать коэффициент турбулентной вязкости с путем смешения и профилем средней скорости:

$$K = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right|. \quad (5.1.9)$$

Путь смешения имеет простую физическую интерпретацию. Эта величина характеризует масштаб турбулентности или средний размер турбулентных возмущений.

Слабое место в рассуждениях Прандтля заключается в том, что импульс на самом деле не является консервативной примесью. Дело в том, что на перемещающиеся жидкие частицы действуют силы, которые способны изменять импульс, например, сила градиента давления. Кроме того, подход Прандтля не учитывает вихревой характер движения в турбулентном потоке. Джеффри Инграм Тейлор предположил, что путь смешения должен существовать не для импульса, а для вихря скорости [Taylor, 1915, 1932]. Действительно, в соответствии с известной в гидродинамике теоремой Томсона циркуляция скорости в невязкой жидкости сохраняется. Напомним, что турбулентное движение происходит при больших числах Рейнольдса, что эквивалентно пренебрежимо малой вязкости.

Как и ранее будем рассматривать плоскопараллельный турбулентный поток: $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{u}(z), 0, 0)$, $\mathbf{v}' = (u'(x, z, t), 0, w'(x, z, t))$. Напомним формулу для вихря плоского движения

$$\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (5.1.10)$$

Очевидно, что в рассматриваемом потоке две другие компоненты вихря обращаются в ноль: $\omega_x = \omega_z = 0$. Кроме того, сразу заметим, что в силу того, что $\bar{w} = 0$, для вихря среднего движения верна следующая формула:

$$\bar{\omega}_y = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}. \quad (5.1.11)$$

Найдем производную по координате z от компоненты тензора Рейнольдса

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) = - \overline{u' \frac{\partial w'}{\partial z}} - \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}}. \quad (5.1.12)$$

Из плоского уравнения неразрывности для пульсаций $\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$

выразим величину $\frac{\partial w'}{\partial z}$ и подставим ее в выражение (5.1.12). Кроме того,

добавим к правой части выражения (5.1.12) и, для соблюдения равенства,

одновременно вычтем величину $\overline{w' \frac{\partial w'}{\partial x}}$. Цепочка преобразований имеет

следующий вид:

$$\begin{aligned} \overline{-u' \frac{\partial w'}{\partial z} - w' \frac{\partial u'}{\partial z}} &= \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x} - w' \frac{\partial u'}{\partial z} + w' \frac{\partial w'}{\partial x} - w' \frac{\partial w'}{\partial x}} = \\ &= -\overline{w' \left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} \right)} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2 - w'^2}) = -\overline{w' \omega'_y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2 - w'^2}). \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

В силу того, что средние характеристики потока не зависят от продольной координаты, производная по x от средних величин в (5.1.13) равна нулю.

Окончательно получаем

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = -\rho \overline{w' \omega'_y}. \quad (5.1.14)$$

Проводя уже обычные рассуждения по поводу пути смешения и используя формулу (5.1.11), приходим к следующему выражению:

$$\omega'_y = l'_1 \frac{\partial \overline{\omega_y}}{\partial z} = l'_1 \frac{d^2 \overline{u}}{dz^2}. \quad (5.1.15)$$

Принимая во внимание полученную ранее формулу (5.1.7), получаем

$$\frac{d\tau}{dz} = \rho l_1^2 \frac{d\overline{u}}{dz} \frac{d^2 \overline{u}}{dz^2}, \quad (5.1.16)$$

где $l_1 = \sqrt{-l'_1 l'_1}$ – новая длина перемешивания.

Если учитывать, что поля возмущения плоскопараллельного потока могут быть и трехмерными, то приведенный вывод формулы, конечно,

теряет свою убедительность. В этом случае полученные выражения следует рассматривать как некую связь, допускающую проверку на опыте.

Интересно, что при условии $l_1 = \text{const}$, формула теории Тейлора оказывается эквивалентной формуле теории Прандтля. В самом деле, интегрируя формулу (5.1.16) по z , получаем выражение

$$\tau = \frac{1}{2} \rho l_1^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2,$$

которое совпадает с формулой Прандтля (5.1.8), если положить $l_1 = l\sqrt{2}$.

В применении к напорным течениям в плоском канале или круглой трубе теория Тейлора с $l_1 = \kappa z$ ($\kappa \approx 0.23$ в случае канала и $\kappa \approx 0.19$ в случае трубы) позволяет получить зависимость средней скорости от z , которая почти вплоть до середины канала (или центра трубы) неплохо согласуется с опытными данными [Монин, Яглом, 1965].

Проводя аналогичные рассуждения для потока пассивной консервативной примеси, можно получить выражение для потока примеси и коэффициента турбулентного обмена

$$j = \rho l_2^2 \frac{d\bar{u}}{dz} \frac{d\bar{\theta}}{dz}, \quad K_\theta = l_2^2 \frac{d\bar{u}}{dz},$$

где l_2 – еще одна длина пути перемешивания, характеризующая теперь уже перенос пассивной консервативной примеси θ . Соотношение между l_2 и l (или l_1) определяет значение турбулентных чисел Прандтля

$$\text{Pr} = \frac{K}{K_T} \left[\frac{\text{вязкость}}{\text{теплопроводность}} \right] \text{ и Шмидта } \text{Sc} = \frac{K}{K_\theta} \left[\frac{\text{вязкость}}{\text{диффузия}} \right].$$

Теории Прандтля и Тейлора не решают полностью вопроса о связи между напряжениями Рейнольдса и полем средней скорости, т.к. в них возникает новая неизвестная величина – длина пути перемешивания.

Определение пути смещения вновь требует привлечения дополнительных гипотез.

В 1930 г Теодор фон Карман предложил гипотезу о локальном кинематическом подобии поля турбулентных пульсаций скорости [Von Kármán, 1930]. Согласно гипотезе Кармана, поля турбулентных пульсаций скорости в окрестности каждой точки развитого турбулентного течения (за исключением точек вязкого подслоя) подобны друг другу и отличаются лишь масштабами длины и времени (или длины и скорости).

Математическая формулировка гипотезы такова. В каждой точке \vec{x}_0 могут быть определены такой масштаб длины $l(\vec{x}_0)$ и такой масштаб скорости $U(\vec{x}_0)$, что в окрестности этой точки поле турбулентных пульсаций будет иметь вид

$$\vec{u}'(\vec{x}) = U(\vec{x}_0)\vec{V}(\vec{\xi}), \quad \vec{\xi} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0 - \bar{u}(\vec{x}_0)t}{l(\vec{x}_0)},$$

где функция $\vec{V}(\vec{\xi})$ универсальна, т.е. не зависит от точки \vec{x}_0 и от поля средней скорости. На самом деле гипотеза Кармана накладывает *слишком сильные* ограничения на индивидуальные реализации поля пульсационной скорости, которые весьма «своенравны» и непостоянны по своей природе.

Но гипотезу о локальном подобии можно применить к среднему полю скорости, в этом случае налагаемые требования уже не являются слишком жесткими. Итак, будем полагать, что в каждой точке турбулентного потока может быть определен такой масштаб $l(z_0)$, для которого с точностью до малых третьего порядка относительно $l(z_0)$ в интервале $z_0 \leq z \leq z_0 + l$ выполняется следующее условие:

$$\frac{\bar{u}(z) - \bar{u}(z_0)}{\bar{u}(z_0 + l) - \bar{u}(z_0)} = f(\xi), \quad (5.1.17)$$

где $\xi = \frac{z - z_0}{l(z_0)}$.

Удерживая первые три члена разложения (5.1.17) в ряд Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}(z) - \bar{u}(z_0)}{\bar{u}(z_0 + l) - \bar{u}(z_0)} &= \frac{(z - z_0) \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right)_{z_0} + \frac{1}{2} (z - z_0)^2 \left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2} \right)_{z_0}}{l(z_0) \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right)_{z_0} + \frac{1}{2} l^2(z_0) \left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2} \right)_{z_0}} = \\ &= \frac{\xi + \frac{1}{2} \xi^2 \left[l(z_0) \left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2} \right)_{z_0} / \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right)_{z_0} \right]}{1 + \frac{1}{2} \left[l(z_0) \left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2} \right)_{z_0} / \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right)_{z_0} \right]}. \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

Согласно принятой гипотезе, выражение (5.1.18) не должно зависеть от z_0 .

Для этого необходимо потребовать выполнение условия

$$l(z_0) \left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2} \right)_{z_0} / \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right)_{z_0} = \text{const}.$$

В итоге, для масштаба длины имеем следующее выражение

$$l(z_0) = \left| \text{const} \cdot \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right)_{z_0} / \left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2} \right)_{z_0} \right|. \quad (5.1.19)$$

Масштаб длины, конечно, не может иметь отрицательный знак, поэтому в (5.1.19) фигурирует абсолютная величина отношения производных. В качестве константы в (5.1.19) используется постоянная Кармана $\text{const} \equiv \kappa \approx 0.41$.

Интересно заметить, что формула (5.1.19) может быть получена и из следующих общих соображений. В силу инвариантности (Галилея) уравнений движения масштаб $l(z_0)$ не может зависеть от абсолютного значения средней скорости $\bar{u}(z_0)$, но лишь от ее изменения в данной точке

(т.е. от производных по пространству). При разложении функции $\bar{u}(z)$ в ряд в точке z_0 , первая возможность составить из производных $\left(\frac{d^n \bar{u}}{dz^n}\right)_{z_0}$

комбинацию с размерностью длины возникнет уже при учете первых двух производных. Отсюда сразу и вытекает формула (5.1.19).

Следует еще заметить, что формула (5.1.18) может быть получена и из гипотезы Кармана о локальном кинематическом подобии поля турбулентных пульсаций (см. [Монин, Яглом, 1965], стр. 301).

Зная масштаб $l(z_0)$ и используя выражение (5.1.8), несложно получить формулу Кармана для абсолютной величины турбулентного напряжения

$$\tau = \rho \kappa^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^4 \bigg/ \left(\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\right)^2. \quad (5.1.20)$$

По сравнению с формулой Прандтля (5.1.8) формула Кармана (5.1.20) обладает тем преимуществом, что не содержит никаких новых неизвестных функций, а связывает турбулентное напряжение с полем средней скорости напрямую. Но формула (5.1.20) имеет и существенный недостаток. Она не может быть применена для течений, профиль которых обладает точкой перегиба, в которой обращается в ноль вторая производная $d^2\bar{u}/dz^2$. В этой точке турбулентное напряжение стремится к бесконечности, что физически некорректно. Аналогичные проблемы с точкой перегиба свойственны, конечно, и формуле для масштаба $l(z_0)$ (5.1.19).

5.2. Два экспериментальных закона развитой турбулентности

Осреднение уравнений гидродинамики (даже дополненное полуэмпирическими теориями) не позволяет полностью решить проблему описания турбулентного движения. Необходимые для замыкания системы Рейнольдса дополнительные связи и величины эмпирических коэффициентов можно получить, опираясь на результаты физических экспериментов.

В настоящем разделе речь пойдет о развитой турбулентности ($Re \gg 1$), существующей *вдали от твердых стенок*. Из множества разнообразных экспериментальных данных о турбулентных потоках такого рода, следуя монографии [Фриш, 1998], выделим два основных эмпирических закона развитой турбулентности:

1. **Закон «двух третей»;**
2. **Закон конечной диссипации энергии.**

В соответствии с законом «двух третей», в турбулентном потоке при очень больших числах Рейнольдса средний квадрат разности скоростей в двух точках, находящихся на расстоянии r друг от друга, равен $C(\varepsilon r)^{2/3}$, где C – универсальная числовая постоянная (Рис. 5.2.1).

Другой формой этого закона является закон «пяти третей», согласно которому плотность распределения кинетической энергии по спектру волновых чисел k имеет вид $C_1 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$. Характерный вид спектра турбулентного движения представлен на Рис. 5.2.2.

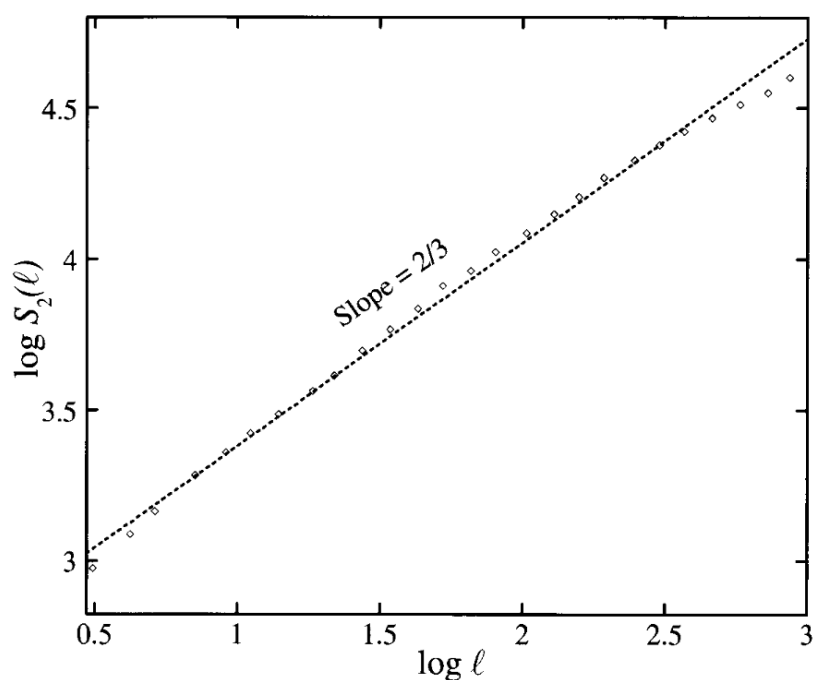


Рис. 5.2.1. Экспериментальное подтверждение закона «двух третей». Рисунок заимствован из книги [Фриш, 1998].

Закон «двух третей» («пяти третей») проявляется только в определенном интервале масштабов, называемом **инерционный интервал**. С ростом числа Рейнольдса инерционный интервал расширяется и может достигать 2-3 порядков.

Многочисленные экспериментальные подтверждения закона “2/3” (“5/3”) дают хорошие результаты не только при измерениях в аэродинамических трубах и природных условиях, но и на сравнительно небольших установках с использованием течения газообразного гелия при низких температурах. В последнем случае большие числа Рейнольдса достигаются за счет малой кинематической вязкости гелия $\sim 10^{-3} \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ (для сравнения вязкость воды $\sim 10^{-2} \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$, воздуха $\sim 1.5 \cdot 10^{-1} \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$).

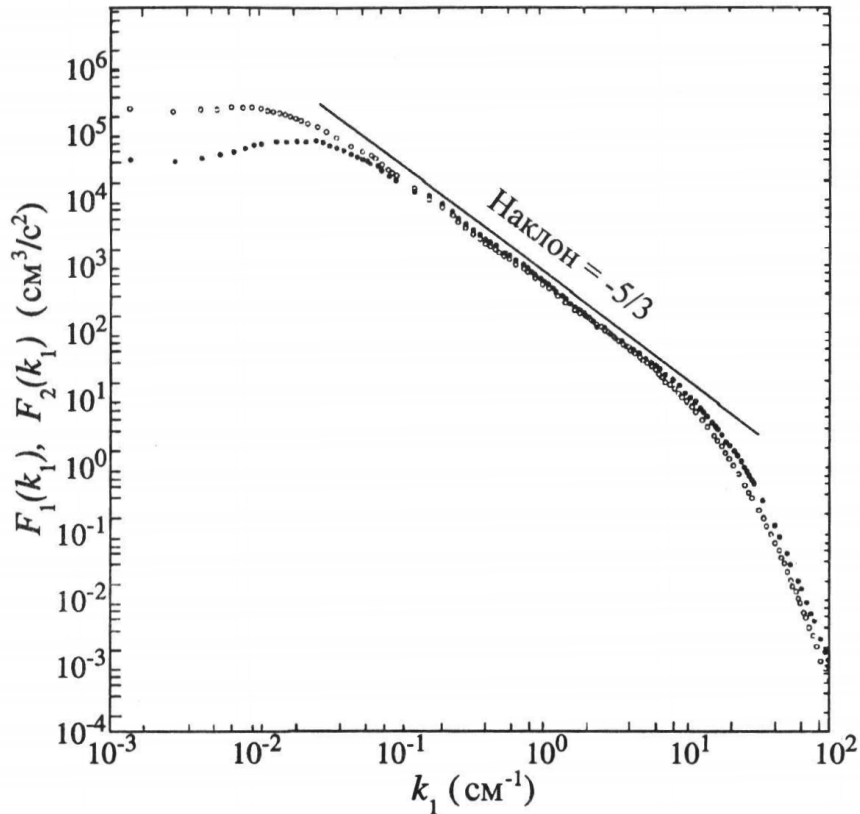


Рис. 5.2.2. Экспериментальное подтверждение закона «пяти третей». Рисунок заимствован из книги [Фриш, 1998].

Из измерений спектра турбулентности в природных условиях следует отметить хорошо известную специалистам работу [Grant et al., 1962]. Измерения турбулентности проводились в приливном течении в проливе (Discovery Passage) у западного побережья Канады при числах Рейнольдса до $Re = 2.8 \cdot 10^8$. Закон “5/3” наблюдался в диапазоне более трех порядков изменения волнового числа.

Закон конечной диссипации энергии формулируется следующим образом. Если в эксперименте с турбулентным течением все параметры поддерживаются постоянными, кроме вязкости, которая понижается до минимально возможной, то поведение удельной диссипации энергии соответствует ее стремлению к положительному конечному пределу ($\lim_{\nu \rightarrow 0} \bar{\epsilon} = \text{const} > 0$). В эксперименте этот закон проявляется, например, в

том, что диссипация энергии ε не зависит от вязкости (но при этом, безусловно, само свойство диссипации есть проявление вязкости).

В соответствии с уравнением (4.3.10), удельная диссипация энергии дается формулой

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \nu \sum_{ij} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2}. \quad (5.2.1)$$

Поскольку мы рассматриваем турбулентность при очень больших числах Рейнольдса, то непосредственная диссипация энергии осредненного течения под действием молекулярной вязкости пренебрежимо мала. Эффективный переход кинетической энергии течения в тепло происходит только на малых пространственных масштабах. Расписывая формулу (5.2.1) в терминах средних величин и пульсаций и учитывая, что $\overline{\partial u_i / \partial x_j} \ll \overline{\partial u'_i / \partial x_j}$, получаем

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \nu \sum_{ij} \overline{\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2} \approx \frac{1}{2} \nu \sum_{ij} \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2}. \quad (5.2.2)$$

Заметим, что положительность предела $\lim_{\nu \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}$, фигурирующего во втором экспериментальном законе, прямо вытекает из формулы (5.2.2), полученной теоретически. Что касается конечности величины $\lim_{\nu \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}$, то это не есть следствие формулы (5.2.2), а именно экспериментальный факт, говорящий о том, что вязкость так формирует (выглаживает) поле скорости, что существует упомянутый выше конечный предел.

Поставить физический эксперимент, в котором все параметры будут поддерживаться постоянными, а вязкость изменяться в широких пределах, довольно сложно. Свое реальное подтверждение второй закон находит в экспериментах по изучению силы (сопротивления), действующей со

стороны потока жидкости или газа на обтекаемое тело. Из принципа подобия для несжимаемого течения вытекает следующая простая формула для силы:

$$F = \frac{1}{2} C \rho S U^2, \quad (5.2.3)$$

где U – скорость потока вдали от обтекаемого тела, S – площадь поперечного сечения, ρ – плотность жидкости (газа), C – безразмерный коэффициент сопротивления, который не является константой, но функцией числа Рейнольдса $C = C(Re)$. Число Рейнольдса в данном случае определим как $Re = U\sqrt{S}/\nu$.

В соответствии с принципом подобия, для тел одинаковой формы функция $C(Re)$ должна представлять собой некоторую универсальную зависимость. Определение силы сопротивления представляет собой чрезвычайно востребованную практическую задачу, поэтому функция $C(Re)$ была многократно и детально измерена для тел различной

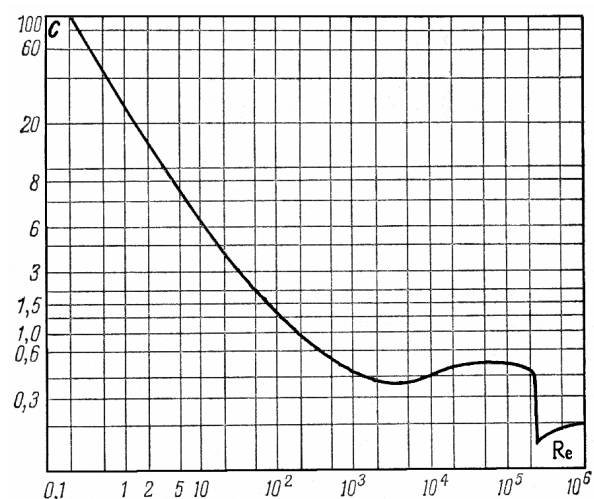


Рис. 5.2.2. Типичная зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса. Рисунок заимствован из книги [Ландау, Лифшиц, 1986].

формы. Типичная зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса показана на Рис. 5.2.2. При малых числах Рейнольдса ($Re < 10$) $C \sim Re^{-1}$, т.е. $F \sim U$ (закон Стокса). В диапазоне $10^2 < Re < 10^5$ коэффициент остается приблизительно постоянным. При $Re \sim 10^5$ наступает «провал»: коэффициент сопротивления C уменьшается в несколько раз. Причем в некоторых случаях уменьшение это настолько значительно, что даже сама сила F убывает при увеличении скорости! Это

явление, именуемое **кризисом сопротивления**, происходит из-за того, что турбулентная область «сдувается» вниз по потоку. Следует заметить, что кризис сопротивления наблюдается не всегда. Так, например, при обтекании диска, поставленного поперек потока, область отрыва всегда находится на краю диска.

Для нас, однако, важен не факт существования кризиса сопротивления, но наличие диапазона, в котором коэффициент C не зависит от числа Рейнольдса, а, следовательно, и от вязкости.

Работа, совершаемая силой F , очевидно идет на развитие турбулентности, энергия которой, в конце концов, переходит в тепло. Для установившегося движения генерация и диссипация турбулентной энергии должны совпадать. Поэтому диссипацию турбулентной энергии можно рассчитать как мощность работы, производимой силой F

$$W = UF = \frac{1}{2} C \rho S U^3. \quad (5.2.4)$$

Но от вязкости в выражении (5.2.4) зависит только коэффициент сопротивления. Постоянство этого коэффициента в диапазоне чисел Рейнольдса $10^2 < Re < 10^5$ и подтверждает существование конечного предела $\lim_{\nu \rightarrow 0} \bar{\varepsilon} = \text{const} > 0$.

5.3. Каскад Ричардсона. Применение теории размерностей к развитой турбулентности

Для дальнейшего развития представлений о турбулентном движении привлечем некоторые дополнительные соображения, называемые **структурным подходом**. Основы этого подхода заложил Льюис Фрай Ричардсон [Richardson, 1922].

Развитие турбулентности происходит в соответствии со следующим сценарием. При возрастании числа Re сначала возникают крупномасштабные пульсации (чем меньше масштаб движения, тем позже такие пульсации появятся). При очень больших числах Рейнольдса в турбулентном потоке присутствуют пульсации различных масштабов, но основную роль играют именно крупномасштабные пульсации, размер которых порядка линейного размера области L (величину L еще называют внешним масштабом турбулентности). Крупномасштабные вихревые движения создают пульсации скорости, которые сравнимы с изменением средней скорости потока на расстоянии L . Мелкомасштабные турбулентные движения участвуют в потоке со значительно меньшими амплитудами, и их можно рассматривать как мелкую структуру, накладывающуюся на основные крупномасштабные турбулентные движения. В мелкомасштабных пульсациях заключена малая часть всей кинетической энергии жидкости.

Итак, на больших расстояниях L изменение пульсационной скорости определяется крупномасштабными пульсациями $\sim \Delta u/L$ (здесь мы не рисуем горизонтальную черту над средней скоростью). Что же касается частот этих крупномасштабных пульсаций, то они имеют порядок отношения средней скорости u (но не ее изменения Δu) к размерам L : $\sim u/L$. На малых расстояниях $\lambda \ll L$ изменение скорости связано с пульсациями малых масштабов $\sim v_\lambda/\lambda \gg \Delta u/L$. Можно ввести понятие числа Рейнольдса для различных масштабов турбулентности

$$Re_\lambda = \frac{v_\lambda \lambda}{\nu}. \quad (5.3.1)$$

Чем меньше число Re_λ , тем меньше масштаб движения. При больших Re велики также и Re_λ крупномасштабных пульсаций. Но большие Re_λ эквивалентны малым вязкостям, следовательно, для крупномасштабного

турбулентного движения вязкость роли не играет, и в крупномасштабных пульсациях не происходит заметной диссипации энергии. Вместе с тем, именно крупномасштабное движение является основным в турбулентном потоке.

Развитие представлений о диссипации энергии в турбулентном потоке связывают с именем Льюиса Фрайя Ричардсона. Он был первым, кто предложил рассматривать развитую турбулентность как **иерархию вихрей**, разных порядков, в которой “вихри” данного порядка возникают за счет потери устойчивости более крупными “вихрями” предыдущего порядка, заимствуя у них энергию и, в свою очередь, теряя устойчивость, порождают более мелкие “вихри” следующего порядка, которым они передают энергию. Таким образом, возникает своеобразный **каскадный процесс**. От пульсаций больших масштабов энергия переходит к пульсациям с меньшими масштабами практически без потерь. В тепло энергия начинает переходить только на уровне самых мелкомасштабных пульсаций (для стационарного потока, разумеется, должен существовать источник энергии турбулентности).

Соответствующая физическая картина развитой турбулентности хорошо передается английскими рифмованными строчками, по-видимому, также принадлежащими Ричардсону (см. стр.66 книги [Richardson, 1922]).

Big whirls have little whirls that feed on their velocity,

And little whirls have lesser whirls, and so on to viscosity.

Стихотворный вариант перевода на русский язык, принадлежащий В.Н. Штерну, опубликован в статье [Обухов, 1983]

В поток бурлящий бросив взгляд,

Вихрей увидишь там каскад:

Меньшой энергию у большего берет,

Пока мельчайших вязкость не сощрет.

В силу того, что вязкость жидкости существенна только для малых масштабов $\sim \lambda_0$, то при $\lambda \gg \lambda_0$ все величины, относящиеся к турбулентному движению, не могут зависеть от вязкости. Или, иными словами, эти величины не должны меняться при изменении вязкости. Такое обстоятельство сужает круг величин, определяющих свойства турбулентного движения, следовательно, соображения подобия и размерностей становятся очень важными.

Рассмотрим среднее количество энергии, диссипируемой в единицу времени в единице массы жидкости

$$\varepsilon \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{с}} \right] \equiv \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}^3} \right].$$

Величина ε – «священная корова» теории турбулентности. Образно говоря, на диссипацию, как бусинки на нитку, нанизаны (в порядке убывания масштабов) все вихри турбулентного потока. Можно еще сказать, что ε являет собой поток энергии, постоянно передаваемый от вихрей большего масштаба к вихрям меньшего масштаба.

Диссипация, очевидно, обязана тому, что вязкость существует, но она от вязкости не зависит, следовательно, порядок величины ε можно определить с помощью величин, характерных для крупномасштабных движений: ρ , L , Δu . Существует единственная подходящая комбинация

$$\varepsilon \sim \frac{\Delta u^3}{L} \sim \frac{b^{3/2}}{L} \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}^3} \right], \quad (5.3.2)$$

где b – энергия турбулентного движения $b = \frac{1}{2} \sum u_i'^2$.

Напомним, что согласно гипотезе Буссинеска, турбулентно движущуюся жидкость можно описывать турбулентной вязкостью K $[\text{м}^2 \text{с}^{-1}]$. Из величин ρ , L , Δu можем составить следующую комбинацию требуемой размерности:

$$K \sim L \Delta u = L \sqrt{b} \left[\text{м}^2 \text{с}^{-1} \right]. \quad (5.3.3)$$

Формула (5.3.3) позволяет выявить новый физический смысл числа Рейнольдса (отношение турбулентного и молекулярного коэффициентов вязкости)

$$\text{Re} \equiv \frac{L \Delta u}{\nu} \sim \frac{K}{\nu}. \quad (5.3.4)$$

Комбинируя формулы (5.3.2) и (5.3.3), выразим диссипацию турбулентной энергии через турбулентную вязкость и масштаб

$$\varepsilon \sim \frac{\Delta u^3}{L} = \frac{(\Delta u L)^3}{L^4} \sim \frac{K^3}{L^4}. \quad (5.3.5)$$

Получим еще одну полезную формулу, определяющую порядок изменения давления на протяжении области турбулентного движения. Из величин $\rho, L, \Delta u$ можно составить единственную комбинацию с размерностью давления:

$$\Delta p \sim \rho \Delta u^2. \quad (5.3.6)$$

5.4. Теория Колмогорова-Обухова

Основополагающий вклад в развитие представлений о турбулентности внесли выдающиеся советские ученые Андрей Николаевич Колмогоров и Александр Михайлович Обухов [Колмогоров, 1941а, 1941б; Обухов, 1941]. По году выхода важнейших работ в этой области теорию Колмогорова-Обухова иногда сокращенно называют «К-41» [Фриш, 1998, Баренблатт, 2004].

Основной объект теории К-41 – изотропная мелкомасштабная турбулентность. Само понятие об **однородной и изотропной турбулентности** ввел еще в 1935 г Джеффри Инграм Тейлор. Такая

турбулентность определяется тем условием, что все конечномерные распределения вероятностей гидродинамических полей в конечном числе точек пространства-времени инвариантны относительно любых ортогональных преобразований (параллельных переносов, вращений и отражений) системы пространственных координат. Это тот частный случай течений, для которых структура статистических моментов гидродинамических полей и вид соответствующих уравнений Фридмана-Келлера оказываются наиболее простыми. Трудности замыкания уравнений, правда, остаются в силе.

Колмогоров дополнил существовавшие до него представления о каскадном процессе передачи энергии от крупномасштабных вихрей к мелкомасштабным следующими рассуждениями. Вследствие хаотичности передачи энергии, ориентирующее влияние среднего течения при каждом переходе к более мелким возмущениям должно ослабевать. Следовательно, это влияние никак не сказывается на движениях малого масштаба. Поэтому, несмотря на то, что среднее течение неоднородно и анизотропно, мелкомасштабная турбулентность должна быть однородна и изотропна. Исходя из этих представлений, Колмогоров сформулировал следующие две гипотезы.

1-ая гипотеза Колмогорова: статистические характеристики мелкомасштабных компонентов развитой турбулентности полностью определяются двумя размерными параметрами: удельной диссипацией турбулентной энергии ε [м²/с³] и кинематической вязкостью ν [м²/с]. В соответствии с теорией размерности, можно ввести типичный пространственный масштаб, время жизни и скорость внутреннего движения для мельчайших вихрей:

$$\lambda_0 = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} ; \quad \tau_0 = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} ; \quad v_{\lambda_0} = (\nu \varepsilon)^{1/4} . \quad (5.4.1)$$

Величина λ_0 носит название «**внутренний масштаб турбулентности**». Физический смысл этой величины – характерный размер наименьших вихрей или масштаб длины, на котором вязкость становится существенной.

2-ая гипотеза Колмогорова: статистические характеристики компонентов развитой турбулентности с масштабом длины $\lambda_0 \ll \lambda \ll L$ и времени $\tau_0 \ll \tau \ll T$, где L и T – внешние масштабы, определяются единственным размерным параметром ε . Соответствующий диапазон масштабов называется **инерционный интервал**, он имеет значительную протяженность только при больших числах Рейнольдса.

Со стороны малых масштабов к инерционному интервалу примыкает так называемая **область диссипации**, а со стороны больших масштабов – **область энергии**. Несложно догадаться, что в *области энергии* происходит генерация турбулентной энергии. В *инерционном интервале* энергия передается практически без потерь «вниз по масштабам». А в *области диссипации* энергия переходит в тепло.

Определим порядок величины изменения скорости турбулентного движения на расстоянии λ ($\lambda_0 \ll \lambda \ll L$). В соответствии со второй гипотезой Колмогорова, свойства турбулентного движения должны определяться скоростью диссипации турбулентной энергии ε . Из имеющихся величин (λ и ε) можно составить только одну комбинацию с размерностью скорости

$$v_\lambda \sim (\varepsilon \lambda)^{1/3}. \quad (5.4.2)$$

Формула (5.4.2) являет собой один из вариантов математического выражения **закона Колмогорова-Обухова**.

Представим закон Колмогорова-Обухова в спектральной форме. Пусть k – «волновое число», определяемое как $k = \lambda^{-1}$. Тогда кинетическая энергия пульсаций в интервале от k до $k + dk$ дается следующей простой

формулой: $E(k)dk$. Размерность энергии – $[m^2c^{-2}]$, размерность интервала волновых чисел dk – $[m^{-1}]$. Следовательно, размерность спектральной плотности энергии $E(k)$ – $[m^3c^{-2}]$. Составляя комбинацию размерности $[m^3c^{-2}]$ из величин ε и k , получаем

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (5.4.3)$$

Интегрирование формулы (5.4.3) по всем возможным значениям k , очевидно, дает полную энергию турбулентного движения E_0 . Нижний предел интегрирования соответствует турбулентным вихрям максимальных размеров λ , верхний предел – внутреннему масштабу турбулентности λ_0 .

$$E_0 = \int_k^{1/\lambda_0} E(k)dk \sim -\frac{\varepsilon^{2/3}}{k^{2/3}} \Big|_k^{1/\lambda_0} = \varepsilon^{2/3} (\lambda^{2/3} - \lambda_0^{2/3}) \approx (\varepsilon\lambda)^{2/3}. \quad (5.4.4)$$

В (5.4.4) мы учли соотношение $\lambda_0 \ll \lambda$.

Основной вклад в энергию турбулентного движения обеспечивают крупномасштабные пульсации, следовательно, имеет место следующая оценка:

$$E_0 \sim v_\lambda^2. \quad (5.4.5)$$

Из (5.4.4) и (5.4.5) получаем формулу, соответствующую закону Колмогорова-Обухова (и первому экспериментальному закону)

$$v_\lambda^2 \sim (\varepsilon\lambda)^{2/3}.$$

Наряду с пространственными масштабами турбулентных пульсаций, можно рассматривать также и их временные характеристики – частоты. Инерционный интервал в частотном диапазоне определяется следующим образом: $u/L \ll \omega \ll u/\lambda_0$. Нижний конец частотного спектра турбулентного движения связан со скоростью среднего потока и внешним масштабом, а верхний – со скоростью среднего потока и внутренним масштабом турбулентности. Неравенство $\omega \gg u/L$ означает, что по

отношению к локальным свойствам турбулентности основное движение можно считать стационарным.

Распределение энергии по частотному спектру в инерционной области получается из распределения по волновым числам при помощи простой замены переменных. Важно подчеркнуть, что речь идет о частоте для наблюдателя, находящегося в *неподвижной* системе отсчета. Если средний поток скорости u проносит мимо наблюдателя вихрь с масштабом λ , то период соответствующего возмущения, очевидно, оценивается по формуле $T = \lambda / u$, которая в переменных частота и волновое число, выглядит следующим образом:

$$k = \omega / u . \quad (5.4.6)$$

Формальная замена переменных в выражении (5.4.3), выполненная в соответствии с (5.4.6), дает

$$E(k)dk \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} dk = \varepsilon^{2/3} \omega^{-5/3} u^{5/3} d\left(\frac{\omega}{u}\right) = (u\varepsilon)^{2/3} \omega^{-5/3} d\omega ,$$

$$E(\omega) \sim (u\varepsilon)^{2/3} \omega^{-5/3} . \quad (5.4.7)$$

Величина $E(\omega)d\omega$ представляет собой энергию турбулентного движения, заключенную в частотном интервале от ω до $\omega + d\omega$. Заметим, что на практике закон “5/3” проще проверять в форме (5.4.7), т.е. для частотных спектров.

В качестве еще одного примера использования второй гипотезы Колмогорова рассмотрим задачу о **турбулентной диффузии**. Турбулентная диффузия, очевидно, приводит к постепенному расхождению частиц, находящихся первоначально вблизи друг от друга. Рассмотрим две частицы, расположенные на некотором расстоянии λ . Будем полагать, что величина λ принадлежит инерционному интервалу $\lambda_0 \ll \lambda \ll L$, – в этом случае единственным определяющим параметром является диссипация турбулентной энергии ε . Руководствуясь соображениями размерности,

можно заключить, что скорость изменения расстояния между частицами со временем определяется формулой

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}. \quad (5.4.8)$$

Интегрируя соотношение (5.4.8), найдем, что время τ , в течение которого две частицы, находившиеся первоначально на расстоянии λ_1 друг от друга, разойдутся на расстояние $\lambda_2 \gg \lambda_1$, равно по порядку величины

$$\tau \sim \lambda_2^{2/3} \varepsilon^{-1/3}. \quad (5.4.9)$$

Следует отметить самоускоряющийся характер процесса: скорость расхождения растет с увеличением λ . Это связано с тем, что к расхождению частиц, находящихся на расстоянии λ , приводят только пульсации масштабов $\leq \lambda$; пульсации больших масштабов переносят частицы вместе и не приводят к их расхождению. Отметим, что эти результаты могут быть применены, например, к изучению переноса пассивной примеси турбулентным потоком.

5.5. Универсальный закон турбулентности вблизи стенки

Рассматривая свойства развитой турбулентности вдали от твердых стенок, мы исходили из того, что при $Re \gg 1$ жидкость ведет себя как невязкая. Но можно ли пренебречь вязкостью при описании движения жидкости вблизи твердых стенок? Напомним, что граничные условия для идеальной жидкости требуют исчезновения только нормальной компоненты скорости, а на касательную компоненту никаких ограничений не накладывается. При этом в вязкой жидкости должны обращаться в нуль как нормальная, так и тангенциальная компоненты скорости. Несложно догадаться, что у реальной (вязкой) жидкости при $Re \gg 1$ падение

скорости до нуля будет происходить почти полностью в тонком пристеночном слое. Этот слой носит название **пограничного слоя** и характеризуется наличием в нем значительных градиентов скорости. Падение скорости в пограничном слое обуславливается вязкостью жидкости, которой здесь нельзя пренебрегать, несмотря на большие числа Рейнольдса.

Перед изучением свойств турбулентного движения вблизи твердых стенок полезно обратиться к одной из задач классической гидродинамики. Рассмотрим стационарное течение между двумя параллельными пластинами при отсутствии градиента давления (течение Куэтта). Оставаясь на фиксированном расстоянии H друг от друга, пластины движутся каждая в своей плоскости с постоянными скоростями.

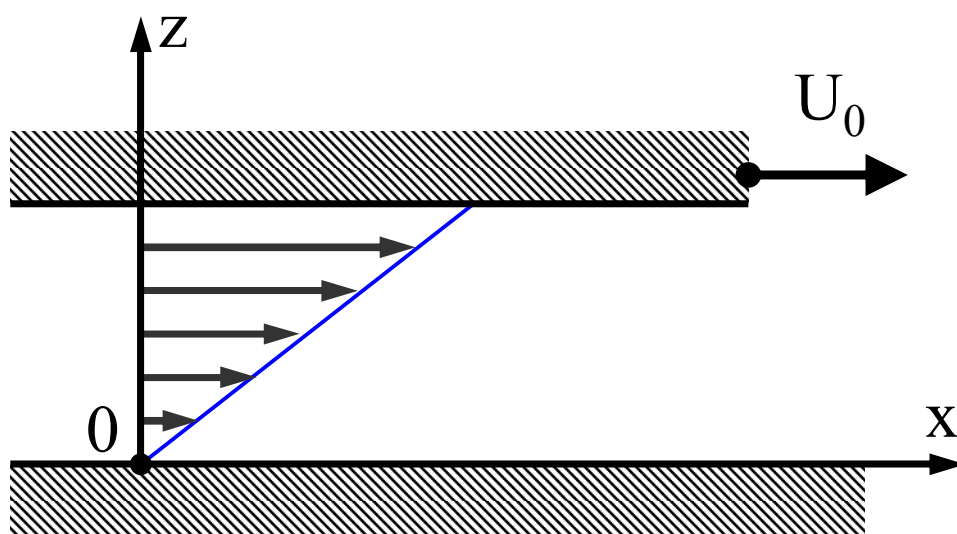


Рис. 5.5.1. Течение Куэтта: постановка задачи и профиль скорости.

Для определенности свяжем начало прямоугольной системы координат с нижней пластиной (Рис. 5.5.1), а ось $0z$ направим перпендикулярно ее плоскости. В выбранной нами системе отсчета нижняя пластина неподвижна, а верхняя перемещается с постоянной скоростью U_0 в некотором направлении. Направляя ось $0x$ по скорости верхней

пластины, переходим к двумерной задаче в плоскости $0xz$. Искомое течение имеет единственную отличную от нуля компоненту, которая зависит только от одной координаты $\vec{v} = (u(z), 0)$. Полагая, что $\partial p / \partial x = 0$, преобразуем x -компоненту уравнения Навье-Стокса

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=0} + u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{w}_{=0} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{=0} + \nu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

В итоге приходим к простому дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (5.5.1)$$

Интегрируя уравнение (5.5.1) с учетом граничных условий $u(0) = 0$ и $u(H) = U_0$, приходим к **линейному профилю скорости**

$$u(z) = \frac{U_0}{H} z. \quad (5.5.2)$$

Течение Куэтта вызывается подвижной верхней пластиной. Предположим, что вместо верхней пластины имеется полупространство, заполненное движущейся жидкостью. Вне зависимости от сложности структуры течения вдали от твердых границ, при приближении к ним течение неминуемо будет ориентироваться вдоль поверхности границы. Рассматривая один из слоев жидкости, скользящих вдоль границы в качестве «верхней пластины» и пренебрегая градиентом давления, мы приходим к аналогии с течением Куэтта. Отсюда следует, что в непосредственной близости твердой поверхности, где действие сил вязкости является определяющим, всегда должен существовать именно линейный профиль скорости.

Напомним, что профиль скорости течения Пуазейля не является линейным даже вблизи твердой поверхности. Связано это с присутствием продольного градиента давления.

Перейдем к рассмотрению турбулентного потока, текущего вдоль твердой плоской поверхности. Для простоты ограничимся двумерным случаем. Математическая постановка задачи соответствует Рис. 5.5.1 (конечно, без верхней пластины). Будем полагать, что среднее течение стационарно и имеет только горизонтальную компоненту, зависящую от вертикальной координаты $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{u}(z), 0)$, а продольным градиентом среднего давления можно пренебречь ($\partial\bar{p}/\partial x = 0$). Что касается пульсаций скорости, то они уже могут обладать не одной, а двумя компонентами, причем каждая из них зависит от обеих пространственных координат и от времени $\bar{\mathbf{v}}' = (u'(x, z, t), w'(x, z, t))$.

С учетом означенных предположений, из уравнения Рейнольдса получаем аналог выражения (5.5.1)

$$\frac{d}{dz} \left(\nu \frac{d\bar{u}}{dz} - \overline{u'w'} \right) = 0. \quad (5.5.3)$$

Интегрирование уравнение (5.5.3) по z дает

$$\nu \frac{d\bar{u}}{dz} - \overline{u'w'} = \text{const} \equiv \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (5.5.4)$$

Формула (5.5.4) говорит о том, что поток x -ой компоненты импульса, направленный от жидкости к поверхности, остается неизменным на любом расстоянии от поверхности. Физический смысл величины τ_0 [Н/м²] – сила, действующая со стороны турбулентного потока на единицу площади поверхности, вдоль которой этот поток течет. Величина $u^* \equiv \sqrt{\tau_0/\rho}$ обладает размерностью скорости и называется **динамической скоростью или скоростью трения (friction velocity)**.

В формуле (5.5.4) имеется неизвестная величина $\overline{u'w'}$, поэтому, в отличие от течения Куэтта, мы не можем рассчитать профиль средней скорости. Но, пользуясь теорией размерности, можно сделать выводы о

возможной форме функции $\bar{u}(z)$. Ранее, в разделе 5.4, мы основывали размерностный анализ на удельной диссипации турбулентной энергии ε . Но вблизи стенки величина ε является функцией координат, поэтому использование ее в размерностных оценках нецелесообразно и следует подобрать какие-либо иные параметры. Одним из таких параметров, несомненно, должна быть динамическая скорость u^* . Кроме того, осредненные характеристики турбулентного течения на расстоянии z от поверхности могут зависеть от кинематической вязкости ν . В итоге имеем следующий набор определяющих параметров:

1. динамическая скорость u^* ;
2. расстояние до поверхности z ;
3. кинематическая вязкость ν .

Общий вид профиля скорости дается следующей формулой:

$$\bar{u}(z) = u^* f(\xi), \quad (5.5.5)$$

где $f(\xi)$ – некоторая универсальная функция, $\xi = zu^*/\nu$ – единственная безразмерная комбинация, которую дают величины u^* , z , ν . Формула (5.5.5) представляет собой **универсальный закон турбулентности вблизи стенки**.

Изложенные выше соображения справедливы, если стенка является идеально гладкой. В действительности, разумеется, абсолютно гладких поверхностей не существует. Пусть неровность или шероховатость поверхности характеризуется высотой имеющихся на ней бугорков h . Динамическая скорость и кинематическая вязкость жидкости дают единственную величину с размерностью длины $z^* = \nu/u^*$, физический смысл которой – толщина вязкого подслоя. Теперь можно корректно определить, является поверхность гладкой или шероховатой. Итак, если неровности поверхности не «выступают» за пределы вязкого подслоя

($h < z^*$), то поверхность можно считать гладкой. В противном случае поверхность является шероховатой.

При приближении к твердой поверхности, турбулентные пульсации скорости, а, следовательно, и величина $\overline{u'w'}$ должны стремиться к нулю. Слой жидкости, в котором $\nu |d\bar{u}/dz| \gg |\overline{u'w'}|$, называется **вязким или ламинарным подслоем**. Пренебрегая в формуле (5.5.4) членом $\overline{u'w'}$, приходим к простому уравнению

$$\frac{\tau_0}{\rho} \equiv u^{*2} = \nu \frac{d\bar{u}}{dz}. \quad (5.5.6)$$

Интегрирование уравнения (5.5.6) с учетом граничного условия $\bar{u}(0) = 0$ дает линейный профиль средней скорости в вязком подслое

$$\bar{u}(z) = \frac{u^{*2}}{\nu} z. \quad (5.5.7)$$

Для области, лежащей выше вязкого подслоя $z \gg z^*$, турбулентные напряжения превосходят вязкие, следовательно, на этот раз $\nu |d\bar{u}/dz| \ll |\overline{u'w'}|$, и в уравнении (5.5.4) следует пренебречь членом $\nu d\bar{u}/dz$. В этом случае от вязкости уже ничего не зависит, и осредненные характеристики турбулентного течения на расстоянии z от поверхности определяются только двумя величинами:

1. динамической скоростью u^* ;
2. расстоянием до поверхности z .

Здесь мы уже не сможем определить абсолютные величины скорости, но можем получить закон ее изменения, т.е. производную $d\bar{u}/dz$. Теория размерностей дает следующую очевидную формулу:

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = A_1 \frac{u^*}{z}, \quad (5.5.8)$$

где A_1 – универсальная безразмерная постоянная. В результате интегрирования уравнения (5.5.8) имеем следующий вид профиля скорости:

$$\bar{u}(z) = u^* A_1 \ln(z) + A_2, \quad (5.5.9)$$

где A_2 – новая постоянная, которая, вообще говоря, может зависеть от вязкости. Слой жидкости, где выполняется соотношение (5.5.9), называется **логарифмическим пограничным слоем**. Формула (5.5.9) впервые была получена Карманом в 1930 г и затем Прандтлем в 1932 г. Величина $1/A_1 = \kappa$ именуется **постоянная Кармана**.

Важно иметь в виду, что для логарифмического пограничного слоя получен только закон изменения скорости, но не ее абсолютная величина. Константы A_1 и A_2 теоретически не определяются, но их значения можно получить их экспериментов. Переписывая формулу (5.5.9) в виде универсальной зависимости (5.5.5), получаем

$$\bar{u}(z) = u^* \left(\frac{1}{\kappa} \ln \xi + C \right). \quad (5.5.10)$$

По данным экспериментов различных исследователей константы κ и C , варьируются в следующих пределах: $\kappa = 0.38 \div 0.44$ ($1/\kappa = 2.25 \div 2.65$), $C = 4.1 \div 6.3$ [Баренблатт, 2004].

При условии, что $\ln(z u^* / \nu)$ достаточно велик, константой C можно пренебречь. Тогда неплохо выполняется следующая формула:

$$\bar{u}(z) = \frac{u^*}{\kappa} \ln \xi. \quad (5.5.11)$$

Результаты экспериментов и изложенные выше теоретические соображения позволяют составить следующую общую картину (Рис. 5.5.2). В пристеночной области профиль средней скорости турбулентного потока

является линейным при $\xi < 5$, в диапазоне $5 < \xi < 30$ существует только эмпирическая зависимость (пунктирная линия), а в диапазоне $\xi > 30$ профиль описывается логарифмической формулой.

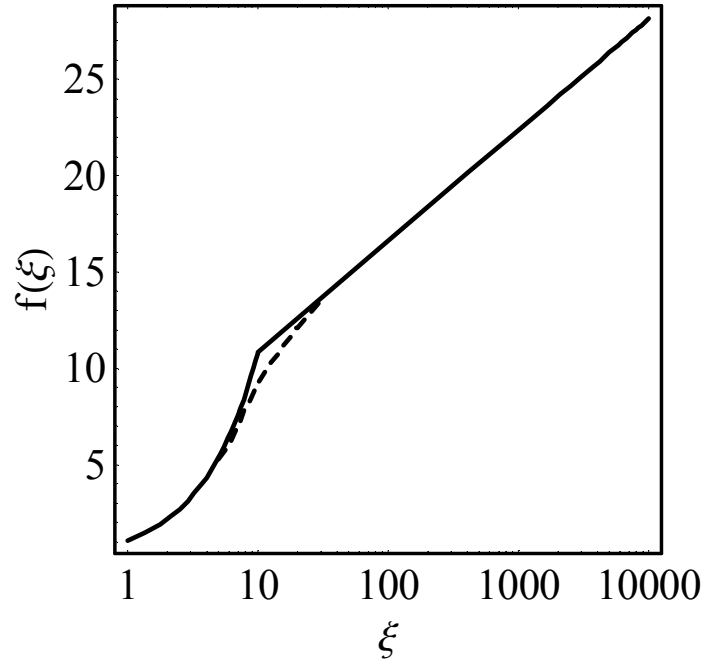


Рис.5.5.2. Универсальная зависимость, определяющая профиль средней скорости в пограничном слое.

Многочисленные результаты экспериментов, накопившиеся за более чем 60 лет изучения пристеночной турбулентности свидетельствуют о том, что логарифмический закон Кармана-Прандтля не является абсолютно универсальным [Zagarola, Smits, 1998; Баренблатт, 2004]. На Рис. 5.5.3 показаны экспериментальные данные, показывающие явное расщепление кривых в зависимости от числа Рейнольдса. Впрочем, всегда есть область, где профиль скорости неплохо соответствует логарифмическому закону.

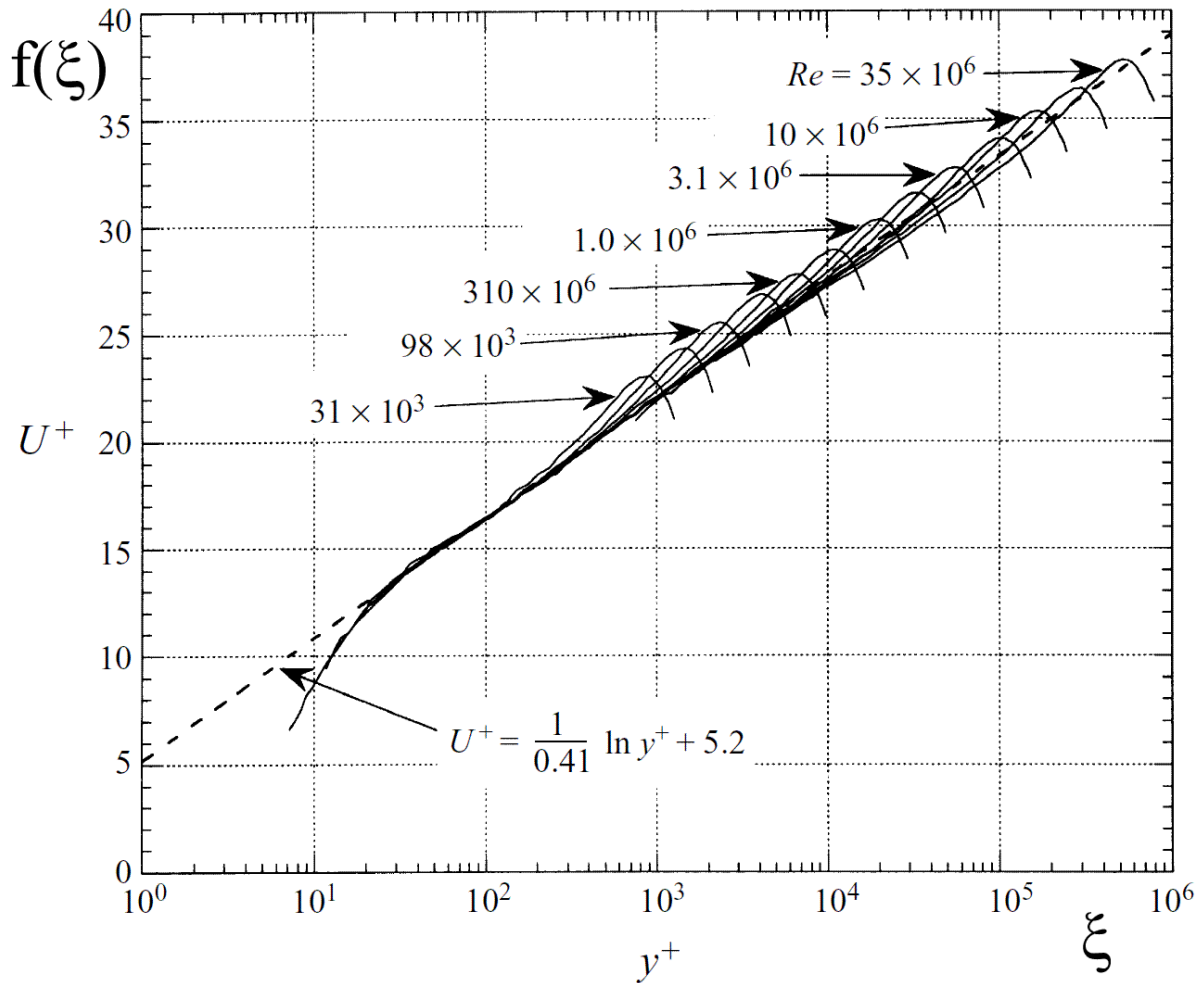


Рис. 5.5.3. Расщепление зависимости, определяющей профиль средней скорости в пограничном слое, в соответствии с числами Рейнольдса. Пунктиром показан логарифмический профиль, рассчитанный в соответствии с формулой, показанной на рисунке. Сплошные линии – огибающие экспериментальных данных (кривые поворачивают в центре трубы). Рисунок заимствован из статьи [Zagarola, Smits, 1998].

До сих пор мы полагали, что поверхность достаточно гладкая. Если же поверхность шероховатая, то полученная формула логарифмического профиля несколько изменится. В качестве меры шероховатости выберем порядок величины выступов шероховатости h . Существенна сравнительная величина h и z^* . Если толщина z^* велика по сравнению с h , то шероховатость вообще не существенна. Если эти величины одного порядка, то никаких общих формул написать нельзя. Но в случае сильной шероховатости ($h \gg z^*$) опять можно установить некоторые общие

соотношения. Говорить о вязком подслое в этом случае, очевидно, нельзя. Вокруг выступов шероховатости будет происходить турбулентное движение, характеризующееся величинами τ_0/ρ и h . Вязкость, очевидно, входит в выражения не должна. Итак, в потоке, текущем вдоль шероховатой поверхности, средняя скорость делается малой ($\sim u^*$) на расстояниях $z \sim h$. Отсюда ясно, что распределение скоростей будет описываться формулой, получающейся из формулы для логарифмического профиля (5.5.10) при формальной замене $z^* \rightarrow h$:

$$\bar{u}(z) = \frac{u^*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{h}\right). \quad (5.5.12)$$

5.6. Диссипация энергии в логарифмическом пограничном слое

При решении задач о турбулентных потоках, ограниченных стенками, часто бывает необходимо ставить граничные условия на диссипацию энергии ε . Но вблизи стенок эта величина уже не является той постоянной, которая контролирует турбулентность, как это было вдали от стенок.

Для получения представлений о поведении величины ε в пристеночной области, обратимся к полученному ранее в разделе 4.3 уравнению, которое представляет собой баланс плотности кинетической энергии в потоке несжимаемой жидкости $E = \rho u_\beta u_\beta / 2$:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [E u_\alpha + p u_\alpha - u_\beta \sigma_{\beta\alpha}] = -\rho \varepsilon.$$

Пренебрегая тензором вязких напряжений $\sigma_{\beta\alpha}$, влияние которого в логарифмическом пограничном слое незначительно, и используя условие стационарности ($\partial E / \partial t = 0$), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} [E u_\alpha + p u_\alpha] = -\rho \varepsilon. \quad (5.6.1)$$

Из уравнения (5.6.1) видно, что плотность потока энергии в направлении оси $0z$ определяется следующим выражением:

$$Q_E = \left(\rho \frac{u^2 + w^2}{2} + p \right) w. \quad (5.6.2)$$

Запишем выражение (5.6.2) с учетом средних значений и пульсаций и осредним его в соответствии с правилами Рейнольдса

$$Q_E = \overline{\left(\rho \frac{(\bar{u} + u')^2 + (\bar{w} + w')^2}{2} + \bar{p} + p' \right) (\bar{w} + w')}.$$

В дальнейших преобразованиях будем учитывать, что $\bar{w} = 0$ и $p' \sim \rho u_i'^2$. Кроме того, принимая во внимание соотношение $|u_i'| \ll |\bar{u}_i|$, будем пренебрегать членами третьего порядка малости.

$$\begin{aligned} Q_E &= \overline{\frac{\rho(\bar{u}^2 w' + 2\bar{u}u'w' + u'^2 w' + w'^3)}{2} + \bar{p} w' + p' w'} = \\ &= \bar{\rho} \bar{u} \overline{u' w'} + \frac{\bar{\rho}}{2} (\overline{u'^2 w'} + \overline{w'^3}) + \underbrace{\overline{p' w'}}_{\sim \rho u'^2 w'} \approx \bar{\rho} \bar{u} \cdot \overline{u' w'}. \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

По мере приближения к стенке поток энергии Q_E уменьшается, что, очевидно, связано с диссипацией энергии. Из уравнения (5.6.1) следует, что диссипация в единице массы определяется формулой

$$\varepsilon = -\frac{1}{\rho} \frac{dQ_E}{dz}. \quad (5.6.4)$$

С учетом выражения (5.6.3) получаем

$$\varepsilon = -\frac{d}{dz}(\overline{u \cdot u'w'}). \quad (5.6.5)$$

Как было установлено ранее, в логарифмическом пограничном слое величина $-\overline{u'w'} = \tau_0 / \rho = u^{*2}$ не зависит от координаты z , следовательно, эту величину можно вынести из под знака производной

$$\varepsilon = -\overline{u'w'} \frac{d\overline{u}}{dz} = \frac{\tau_0}{\rho} \frac{d\overline{u}}{dz}. \quad (5.6.6)$$

Далее, учитывая, что производная $d\overline{u}/dz$ определяется формулой (5.5.8) приходим к следующему набору соотношений для диссипации:

$$\varepsilon = A_1 \frac{\tau_0 u^*}{\rho z}, \quad \varepsilon = A_1 \frac{u^{*3}}{z}, \quad \varepsilon = \frac{A_1}{z} \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{3/2}. \quad (5.6.7)$$

Напомним, что константа $A_1 = 1/\kappa$, называется постоянная Кармана ($\kappa = 0.38 \div 0.44$). Формулы (5.6.7) показывают, что в пограничном слое, по мере приближения к твердой поверхности, удельная диссипация турбулентной энергии возрастает по закону z^{-1} , где z – расстояние до поверхности.

Формулы (5.6.7) находят свое применение, например, при постановке граничных условий в $k-\varepsilon$ моделях турбулентности, которые будут рассмотрены в разделе 5.9.

5.7. Прямое численное моделирование

Со второй половины 20-го века определенные надежды на решение проблемы турбулентности связывают с прямым численным моделированием (DNS – direct numerical simulation). Стремительное развитие вычислительной техники и численных методов решения

уравнений в частных производных продолжают подпитывать интерес к применению DNS методов и в настоящее время.

Для расчета турбулентных течений необходимо решать нестационарное уравнение Навье-Стокса, дополненное уравнениями состояния, неразрывности и переноса тепла (влаги или иной примеси). На пути численного решения уравнений непременно возникают две фундаментальные проблемы.

Первая проблема состоит в следующем. При решении уравнения Навье-Стокса численными методами поля скорости течения и давления рассчитываются в конечном числе узловых точек для дискретных моментов времени. Если мы хотим описать все возможные – даже самые мельчайшие – детали турбулентного потока, то расстояние между узловыми точками (шаг по пространству) не должно превышать внутренний масштаб турбулентности (см. раздел 5.4) $\lambda_0 = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$. Кроме того, шаг по времени не должен превышать величину $\tau_0 = (\nu / \varepsilon)^{1/2}$ или величину $\tau_1 = \lambda_0 / u$ (промежуток времени, за которое вихрь размера λ_0 , переносимый потоком со скоростью u , минует неподвижного наблюдателя).

Задавшись некоторым числом Рейнольдса $Re = uL / \nu$, оценим количество пространственных узлов и шагов по времени, которые необходимы для адекватного воспроизведения турбулентного потока. Из определения числа Рейнольдса выразим вязкость $\nu = uL / Re$, а диссипации турбулентной энергии оценим по теории размерности $\varepsilon \sim u^3 / L$. Подставляя эти выражения в формулу для внутреннего масштаба турбулентности, получаем $\lambda_0 \sim L / Re^{3/4}$. Число узлов для решения трехмерной задачи определяется выражением $N_{3D} = (L / \lambda_0)^3 \sim Re^{9/4}$.

Проводя аналогичные несложные преобразования для временных масштабов, получаем: $\tau_0 \sim (L/u)Re^{-1/2}$ и $\tau_1 \sim (L/u)Re^{-3/4}$. Очевидно, что при больших числах Рейнольдса $\tau_1 \ll \tau_0$, следовательно, для шага по времени целесообразно опираться именно на величину τ_1 . При численном моделировании динамики турбулентного потока расчет следует вести достаточно продолжительное время $T \sim L/u$. В противном случае по результатам расчета будет невозможно определить средние величины. Число шагов по времени оценивается следующим образом: $N_T \sim T/\tau_1 \sim Re^{3/4}$.

Общее число шагов по пространству-времени оценивается величиной $N_{4D} = N_{3D}N_T \sim Re^3$. Видно, что с увеличением числа Рейнольдса величина N_{4D} стремительно возрастает. При типичном для развитой турбулентности значении числа Рейнольдса $Re = 10^4$, получаем весьма солидную величину $N_{4D} \sim 10^{12}$. Напомним, что во время известных экспериментов, выполненных в 1962 г. в следе за островом в канале около Ванкувера, достигались числа Рейнольдса $3 \cdot 10^8$. Для воспроизведения этого течения потребовалось бы колоссальное – «космических» масштабов – число шагов $N_{4D} \sim 2.7 \cdot 10^{25}$. На современном этапе развития вычислительной техники, и в обозримом будущем, численное решение такой задачи за разумное время невозможно.

Но даже в том случае, если бы соответствующая вычислительная задача была решена неким сверхмощным компьютером, пришлось бы столкнуться со **второй проблемой**. Из-за случайности флуктуаций поля скорости в турбулентных потоках важными с практической точки зрения характеристиками течения являются средние по времени или по ансамблю значения пульсационных переменных. Чтобы рассчитать эти средние величины, необходимо многократно (!) провести однотипные расчеты,

каждый со слегка отличными начальными и граничными условиями (т.к. речь идет о математике, а не о физическом эксперименте, то мы можем обеспечить любую заданную точность этих условий), а затем вычислить среднее по ансамблю.

Колоссальный объем вычислений, требуемый при прямых расчетах турбулентных течений, во многих случаях представляет собой действительно непреодолимое препятствие. Во всяком случае, прямые расчеты далеко не всегда могут быть использованы для практических приложений. И уж точно не приходится говорить об успешном применении DNS методов для воспроизведения крупномасштабных геофизических течений, – эта задача относится к очень далекой перспективе.

Ограниченность DNS метода стимулировала развитие альтернативных подходов. Наиболее естественное разрешение проблем состоит в отказе от воспроизведения мелкомасштабных компонент турбулентности. Такой подход реализуется в методе LES (Large Eddy Simulation – моделирование крупных вихрей). Идея метода состоит в формальном разделении вихрей на крупные и мелкие (подсеточного масштаба), например, при помощи осреднения по пространству. Вывод уравнений формально эквивалентен процедуре получения уравнений Рейнольдса. Влияние мелких вихрей на крупномасштабное движение учитывается путем введения турбулентной вязкости. Причем во многих случаях предполагается, что турбулентная вязкость не зависит от пространственных координат и времени.

Но основные подходы к описанию турбулентных течений базируются на уравнениях Рейнольдса. Их несомненное преимущество – математически строгий вывод уравнений, а главный недостаток, как мы уже неоднократно отмечали, – незамкнутость системы уравнений. Поиск возможностей замкнуть систему уравнений Рейнольдса привел к

появлению довольно любопытных разработок, на одной из которых мы остановимся в следующем разделе.

5.8. Модель переноса турбулентной вязкости

Пусть поток переносит некоторую скалярную величину F . Тогда, при условии выполнения законов сохранения, можно формально записать эволюционное уравнение для величины F

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_j} + G - D, \quad (5.8.1)$$

где Φ_j – поток величины F вследствие диффузии, G – генерация величины F , D – диссипация величины F . Легко убедиться, что уравнения Навье-Стокса, Рейнольдса, переноса примеси (в т.ч. уравнение диффузии или теплопроводности) имеют как раз именно такой вид.

В работе [Nee, Kovasznaу, 1969] было предложено в качестве величины F рассматривать суммарный коэффициент диффузии $K = \nu + K_T$, где ν – молекулярная вязкость, а K_T – коэффициент турбулентной вязкости. Если предположить, что в турбулентных течениях коэффициент диффузии величины K равняется K (условие самодиффузии), то приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + u_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) + G - D, \quad (5.8.2)$$

$$G = 0.133 (K - \nu) \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|, \quad D = \frac{0.8}{L^2} K (K - \nu), \quad (5.8.3)$$

где L – масштаб турбулентности. Числовые коэффициенты в выражениях (5.8.3) получены экспериментально путем.

Модели переноса турбулентной вязкости не нашли широкого применения в расчетах турбулентных течений, т.к. в дальнейшем было показано, что гипотеза переноса турбулентной вязкости уступает в точности представлений моделям переноса турбулентной кинетической энергии. Превосходство моделей переноса кинетической энергии во многом обеспечивается тем, что основное уравнение (баланса турбулентной энергии) строго выводится из уравнения Навье-Стокса при осреднении в соответствии с правилами Рейнольдса.

5.9. $k - \varepsilon$ модели турбулентности

В этом разделе рассмотрим одного их представителей семейства так называемых двухпараметрических моделей – $k - \varepsilon$ модель турбулентности. Свое название модель получила в связи с использованием уравнения баланса турбулентной энергии, традиционно обозначаемой $k \equiv E_t / \rho = \overline{u'_\beta u'_\beta} / 2$, и уравнения для диссипации турбулентной энергии ε .

Перепишем уравнение баланса турбулентной энергии (4.4.6) с использованием нового обозначения для энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[k u_\alpha + \frac{1}{2} \overline{u'_\beta u'_\beta u'_\alpha} + \frac{\overline{p' u'_\alpha}}{\rho} - \frac{\overline{u'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}}}{\rho} \right] = \\ = -\varepsilon - \overline{u'_\alpha u'_\beta} \frac{\partial \overline{u_\beta}}{\partial x_\alpha}. \end{aligned} \quad (5.9.1)$$

Напомним, что это уравнение было строго получено из уравнений гидродинамики.

Считая турбулентность развитой, пренебрежем в уравнении (5.9.1) тензором вязких напряжений $\sigma'_{\alpha\beta}$. Кроме того, мы пренебрежем членом

$\overline{p'u'_\alpha}$, который, как показывают измерения, относительно мал. Но в любом случае небольшой вклад этого члена в диффузию турбулентной энергии будет учитываться в коэффициенте турбулентного обмена. Итак, будем полагать, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\frac{1}{2} \overline{u'_\beta u'_\beta u'_\alpha} + \frac{\overline{p'u'_\alpha}}{\rho} \right] \approx \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [\overline{k u'_\alpha}].$$

Вводя турбулентный коэффициент диффузии энергии турбулентности K_E , можем записать

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} [\overline{k u'_\alpha}] = -\text{div}(K_E \text{ grad } k). \quad (5.9.2)$$

Член, описывающий генерацию турбулентной энергии $-\rho \overline{u'_\alpha u'_\beta} \partial \overline{u_\beta} / \partial x_\alpha$, свяжем с коэффициентом турбулентной вязкости K_T и полем среднего течения (гипотеза Буссинеска). Пользуясь аналогией с тензором вязких напряжений, определяемым как

$$\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right),$$

запишем

$$-\overline{u'_\alpha u'_\beta} = K_T \left(\frac{\partial \overline{u_\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \overline{u_\beta}}{\partial x_\alpha} \right). \quad (5.9.3)$$

Выражение (5.9.3) позволяет представить член, описывающий генерацию турбулентной энергии в следующем виде:

$$-\overline{u'_\alpha u'_\beta} \frac{\partial \overline{u_\beta}}{\partial x_\alpha} = K_T G, \quad (5.9.4)$$

где

$$\begin{aligned}
G &= \left(\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} = \\
&= 2 \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2.
\end{aligned}$$

С учетом сделанных предположений от (5.9.1) приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}k) = \operatorname{div}(K_E \operatorname{grad} k) + K_T G - \varepsilon. \quad (5.9.5)$$

Следующий шаг состоит в использовании соотношений, вытекающих из теории размерностей

$$K_E \sim K_T \sim k^2 / \varepsilon, \quad (5.9.6)$$

$$\varepsilon \sim k^{3/2} / L, \quad (5.9.7)$$

где L – масштаб турбулентности.

Но позволит ли учет связей (5.9.6) и (5.9.7) замкнуть систему? Простой подсчет показывает, что мы оперируем тремя компонентами средней скорости, средним давлением, энергией k , диссипацией энергии ε , коэффициентами турбулентного обмена K_E и K_T и масштабом турбулентности L . Всего насчитывается девять неизвестных функций. Уравнения Рейнольдса (три компоненты) и неразрывности вместе с уравнением баланса турбулентной энергии и размерностными соотношениями дают только восемь связей (уравнений) из требуемых девяти. Одного уравнения не хватает.

Искомое девятое уравнение вводится искусственно следующим способом. Предполагается, что для диссипации турбулентной энергии существует уравнение, форма которого аналогична уравнению для турбулентной энергии. Члены, описывающие «генерацию диссипации» и «диссипацию диссипации», опять выражаются по теории размерностей

через уже известные величины. Похожее уравнение можно составить и для масштаба турбулентности. Тогда нам пришлось бы пользоваться такими оригинальными терминами как «генерация масштаба турбулентности» и «диссипация масштаба турбулентности».

Величины k , ε , $K_T(K_E)$ и L связаны между собой размерностными соотношениями, что позволяет исключить из рассмотрения масштаб турбулентности L (при введении уравнения для переноса масштаба турбулентности, следовало бы исключать из рассмотрения величину ε). В итоге приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \operatorname{div}(\overline{\overline{v}k}) = \operatorname{div}\left(\left[v + \frac{K_T}{\sigma_k}\right] \operatorname{grad} k\right) + K_T G - \varepsilon, \quad (5.9.8)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(\overline{\overline{v}\varepsilon}) = \operatorname{div}\left(\left[v + \frac{K_T}{\sigma_\varepsilon}\right] \operatorname{grad} \varepsilon\right) + C_{1\varepsilon} K_T G \frac{\varepsilon}{k} - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (5.9.9)$$

$$K_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (5.9.10)$$

где $C_\mu = 0.09$, $C_{\varepsilon 1} = 1.44$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$, $\sigma_k = 1.0$ и $\sigma_\varepsilon = 1.3$ – эмпирические коэффициенты, обеспечивающие удовлетворительные результаты расчетов различных турбулентных течений.

Уравнения (5.9.8)-(5.9.10) вместе с уравнениями Рейнольдса и уравнением неразрывности составляют *замкнутую* систему, которая называется **$k - \varepsilon$ моделью**. Действительно, полученная система оперирует семью неизвестными (\overline{u} , \overline{v} , \overline{w} , \overline{p} , k , ε и K_T) и семью уравнениями.

Интересно, что в отсутствии поля среднего течения уравнения (5.9.8)-(5.9.10) сами по себе представляют замкнутую систему. В этом случае, разумеется, должны делаться какие-то дополнительные предположения относительно функции G , описывающей генерацию турбулентности.

$k - \varepsilon$ модели не очень хорошо работают при описании пристеночных течений, что связано с особенностями диссипации в этой области. Существенно лучшие результаты получаются, если в качестве второго параметра использовать не диссипацию, а величину $\omega = \varepsilon/k$. Этот параметр имеет размерность частоты и показывает скорость диссипации, приходящуюся на единицу энергии турбулентности. Такие модели турбулентности именуется $k - \omega$ модели.

Кроме того, существуют и $k - L$ модели, использующие в качестве второго параметра масштаб турбулентности.