

Геофизика



2023 Лекция №8

Носов Михаил Александрович

отделение геофизики, физический факультет МГУ

<http://ocean.phys.msu.ru/courses/geo/>



**Элементы
геофизической
гидродинамики**

**Геофизическая гидродинамика –
динамика бароклинной жидкости (газа)
в поле силы тяжести на неравномерно
прогретой, вращающейся сфере (геоиде)**

Классическая гидродинамика

**бароклинная
жидкость**

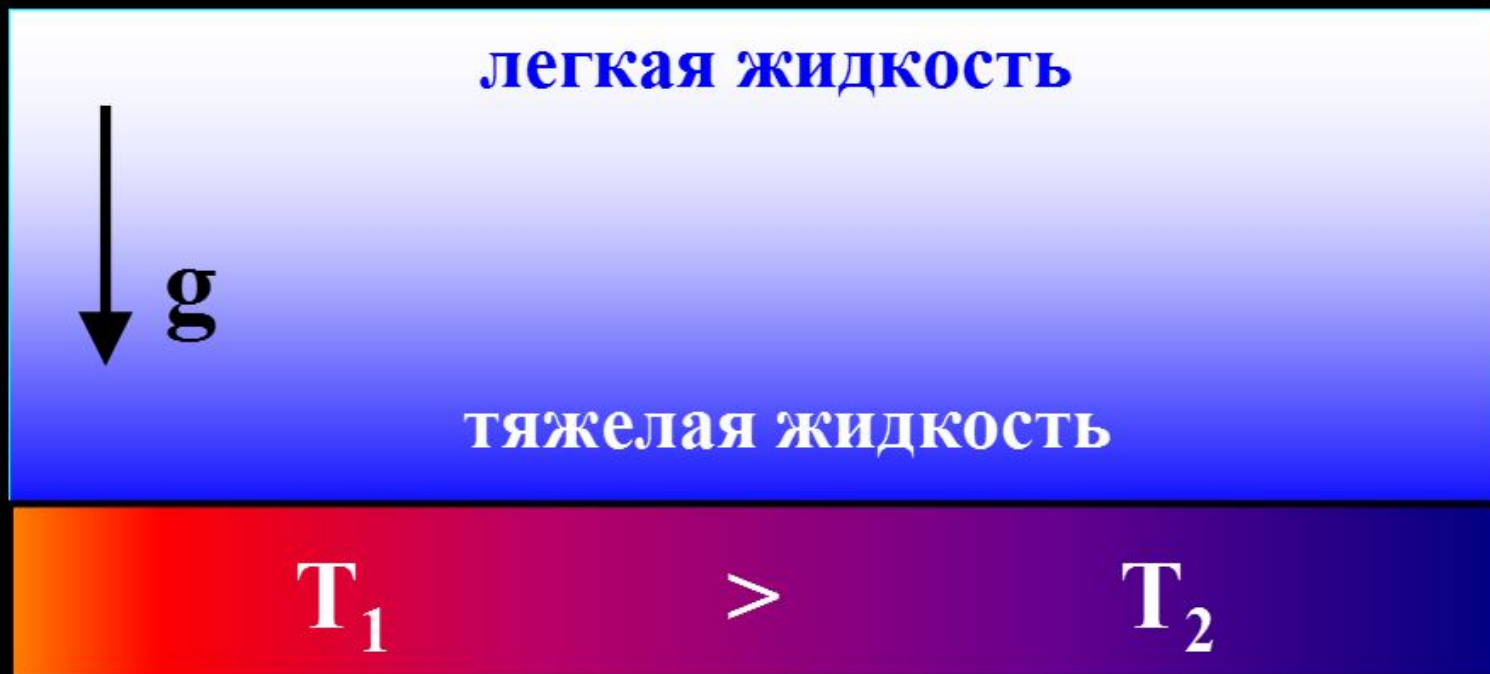
$$\rho = \rho(p, T, \dots)$$

**баротропная
жидкость**

$$\rho = \rho(p)$$

баротропная
жидкость

$$\rho = \rho(p)$$

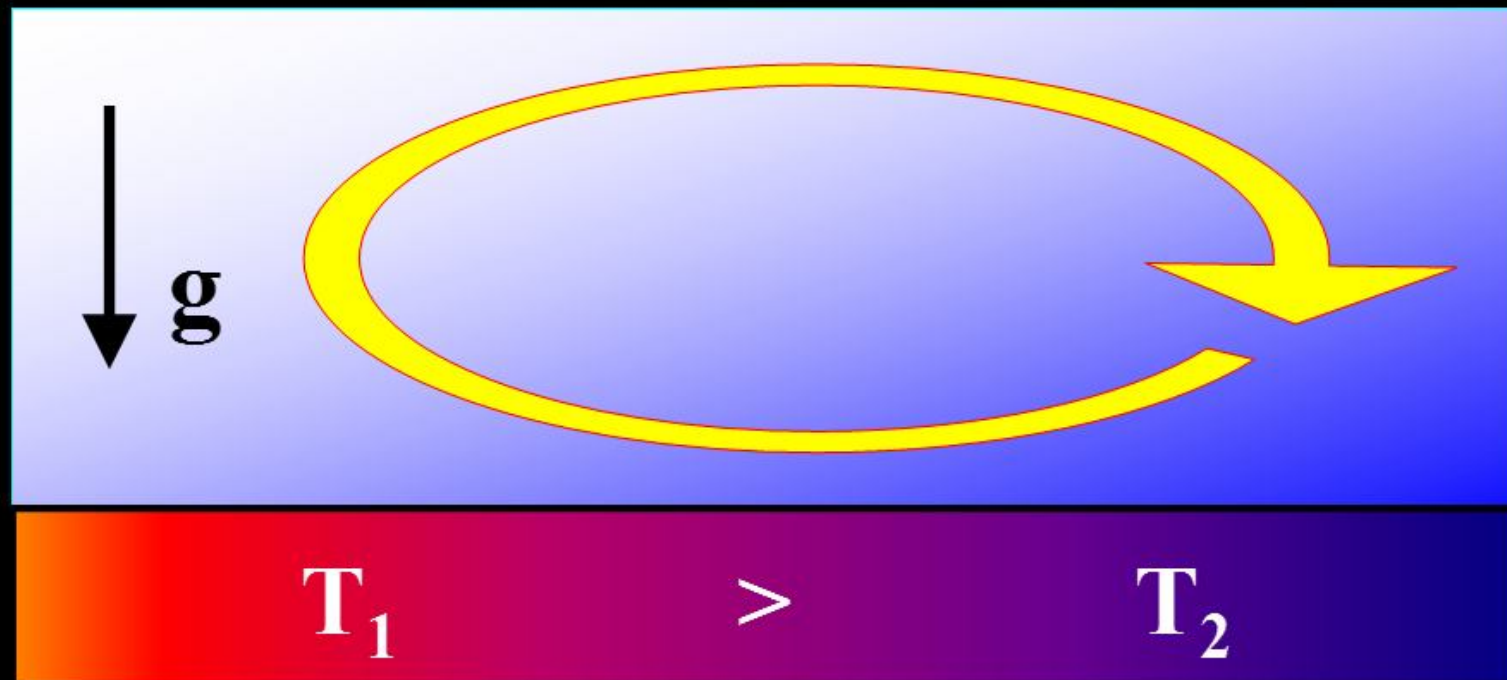


В баротропной жидкости (газе) температурные градиенты не приводят к возникновению течений!

реальные атмосфера и океан

бароклинная
жидкость

$$\rho = \rho(p, T, \dots)$$



В бароклинной жидкости (газе) температурные градиенты приводят к возникновению течений!

Влияние вращения

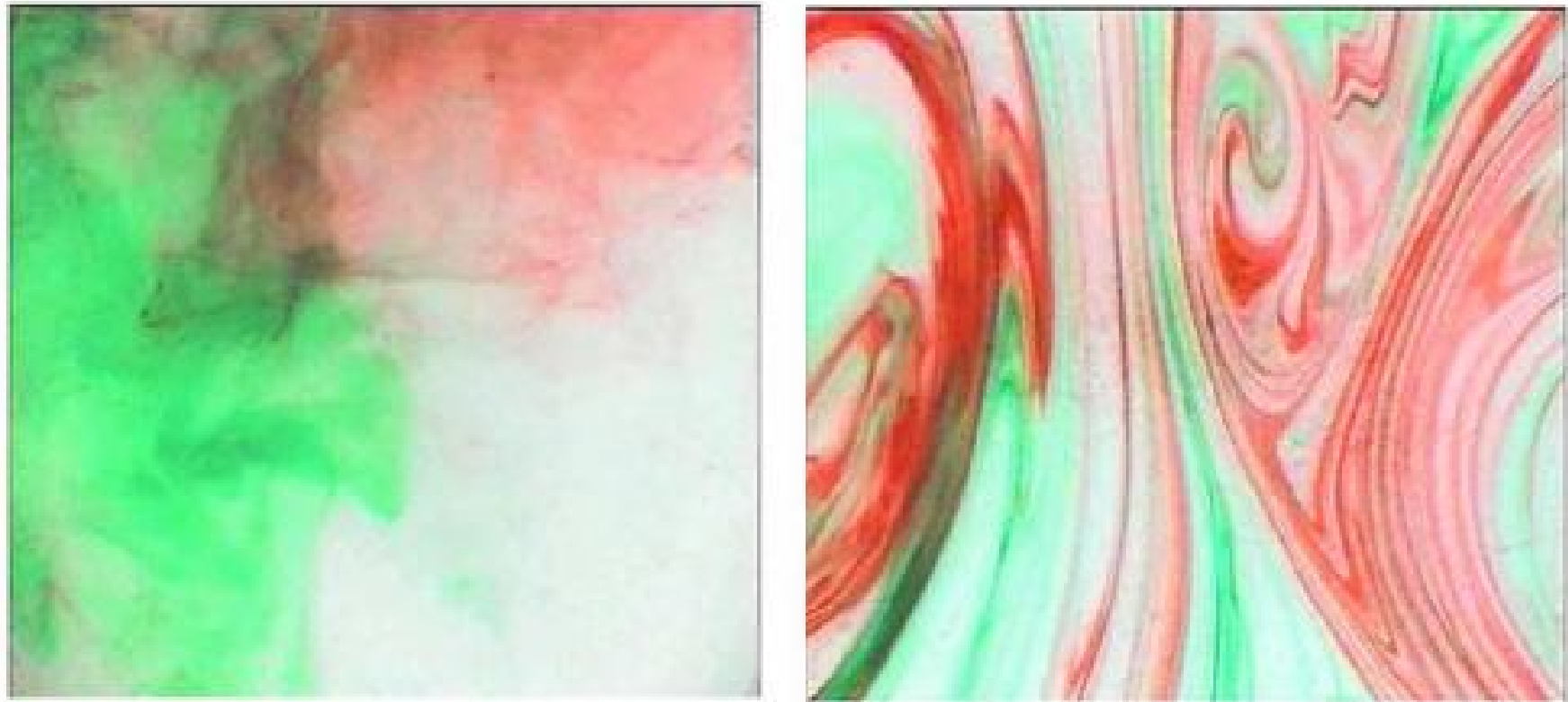
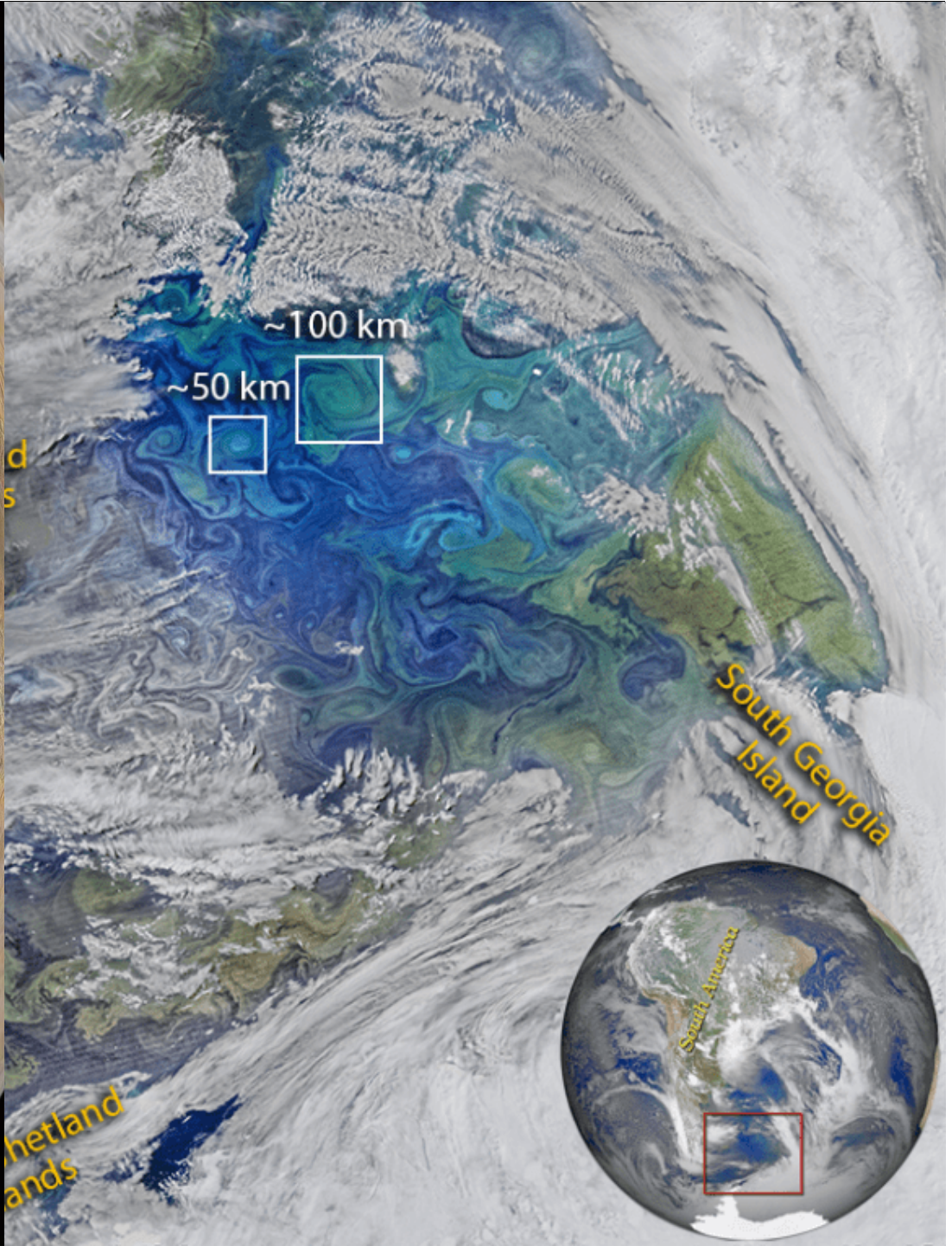


Figure 7.7: Dye distributions from GFD Lab 0: on the left we see a pattern from dyes (colored red and green) stirred into a non-rotating fluid in which the turbulence is three-dimensional; on the right we see dye patterns obtained in a rotating fluid in which the turbulence occurs in planes perpendicular to the rotation axis and is thus two-dimensional.





Gaspard-Gustave de Coriolis
French, Mathematics, Physics
1792-1843

$$\mathbf{F}_{\text{Kop}} = 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

**Геофизическая гидродинамика –
динамика бароклинной жидкости (газа)
в поле силы тяжести на неравномерно
прогретой, вращающейся сфере (геоиде)**

**Большинство крупномасштабных течений атмосферы
и гидросферы происходят в условиях баланса сил:**

по вертикали:

гидростатический баланс

сила градиента давления = сила тяжести

по горизонтали:

геострофический баланс

сила градиента давления = сила Кориолиса

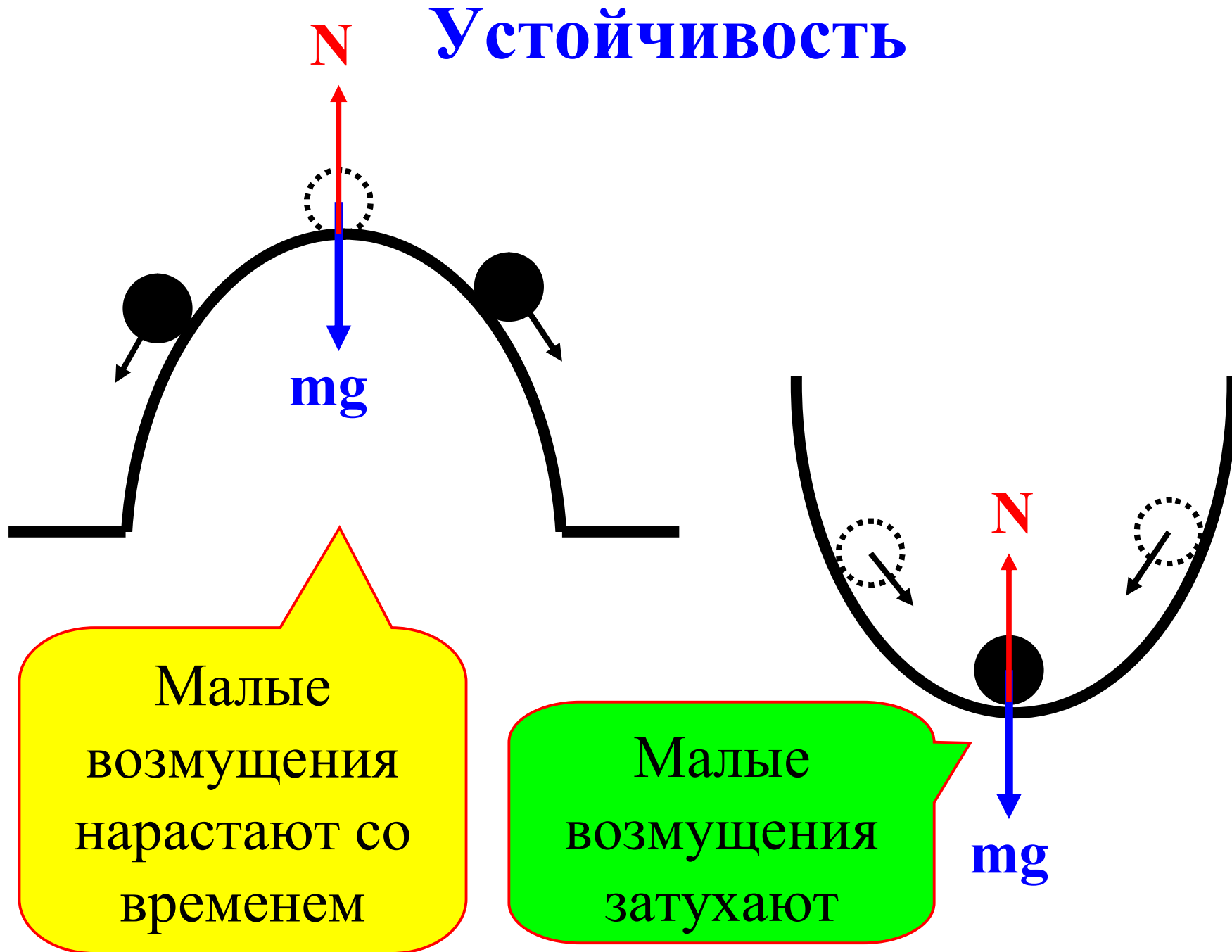
Устойчивость стратификации* и адиабатический градиент

***Стратификация –**

(лат. *stratum* настил слой+ *facere* делать)

распределение по вертикали слоев воды или воздуха с различной плотностью, температурой, соленостью, etc.

Устойчивость

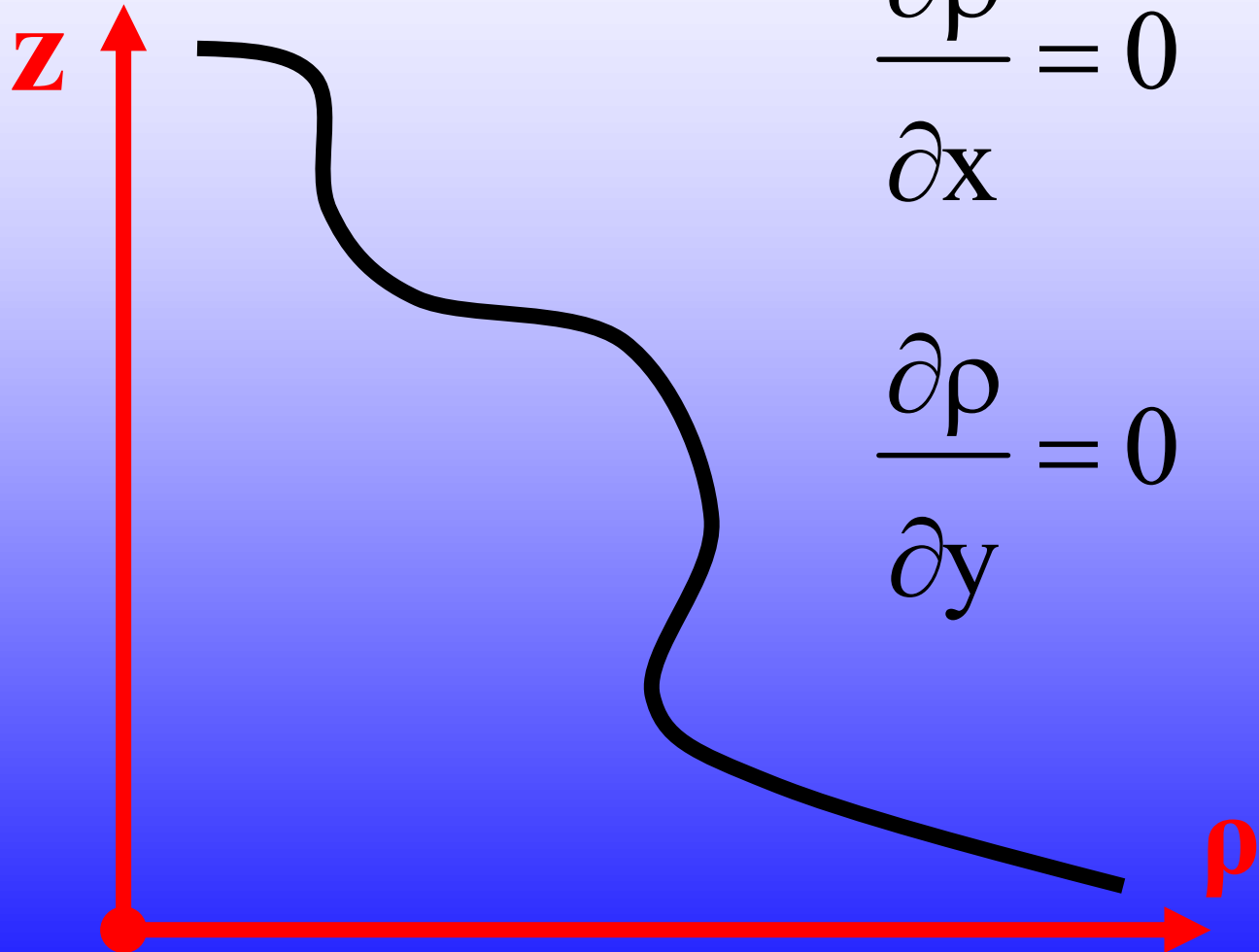


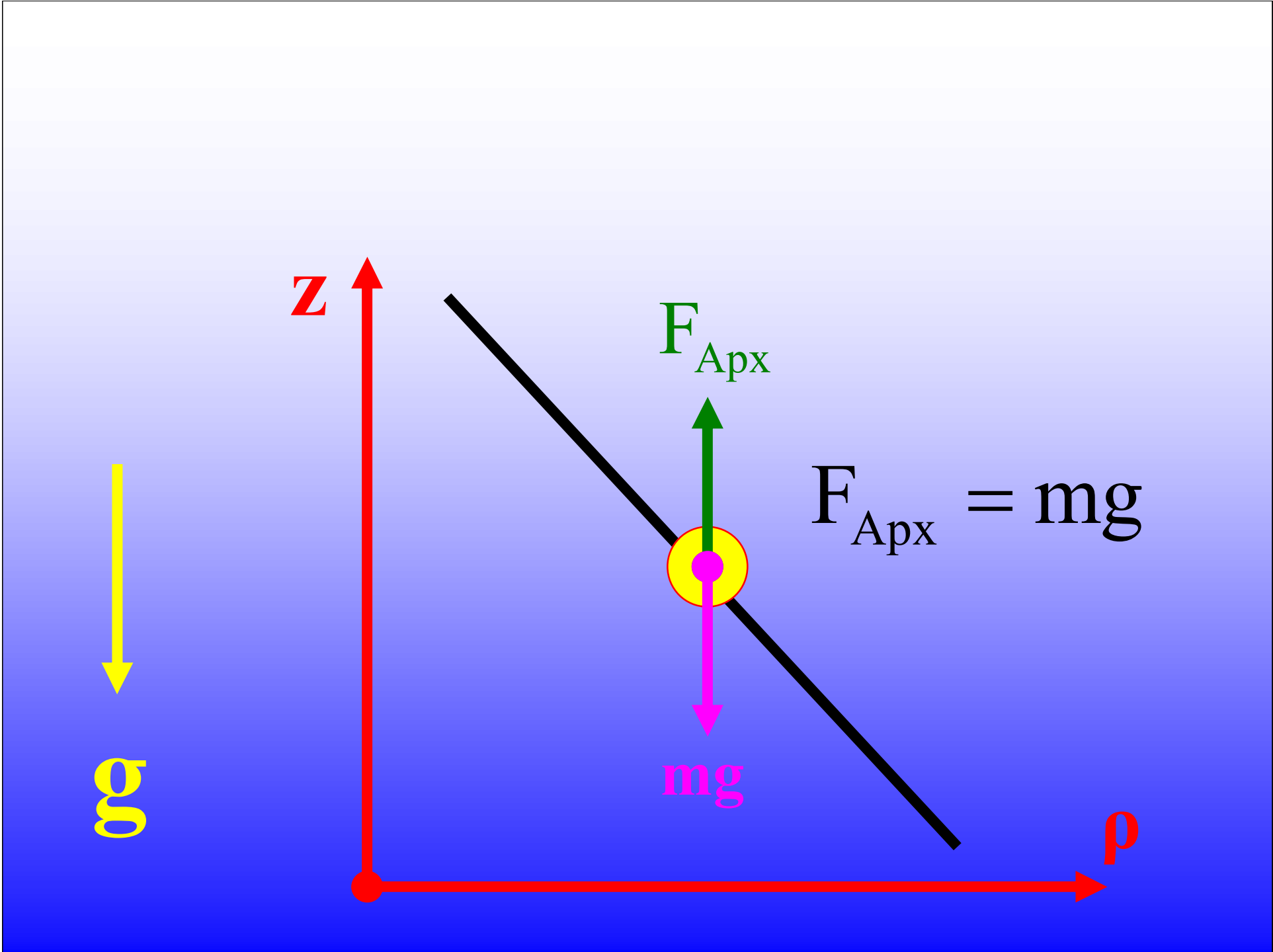
Малые
возмущения
нарастают со
временем

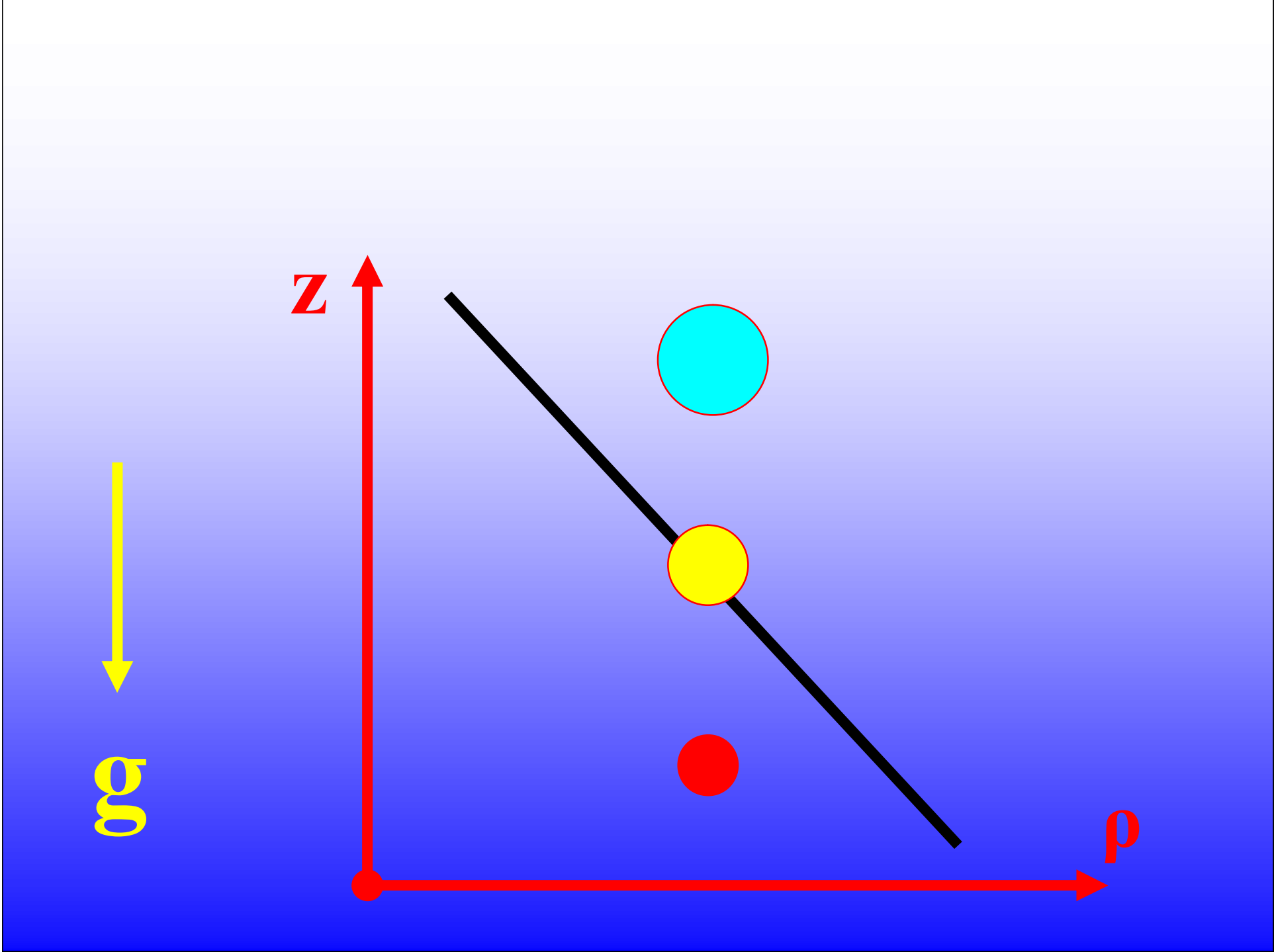
Малые
возмущения
затухают

Стратификация устойчива?

σ_θ







Уравнение движения частицы по вертикали в стратифицированной среде

$$F_{\Sigma} = F_{\text{Арх}} - mg = Vg(\rho_{\text{среды}} - \rho_{\text{частицы}})$$

$$\rho_{\text{среды}} = \rho_0 + \frac{d\rho}{dz} z$$

$$\rho_{\text{частицы}} = \rho_0 + \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s z$$

фактический градиент

адиабатический градиент

$$m \ddot{z} = Vg \left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s \right) z$$

$\rho V =$

$$\ddot{z} - \frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s \right) z = 0$$

уравнение колебаний

$$\ddot{z} - \frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s \right) z = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + N^2 z = 0$$

частота Вейселя-Брента

в океане / атмосфере

$$N \sim 10^{-4} - 10^{-1} \text{ Гц}$$

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s \right)}$$

адиабатический градиент

$$\left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s = \left(\frac{d\rho(p(z))}{dz} \right)_s = \left(\frac{d\rho}{dp} \right)_s \frac{dp}{dz} = -\frac{\rho g}{c^2}$$

$$\left(\frac{d\rho}{dp} \right)_s = \frac{1}{c^2}$$

**скорость
звука**

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

**закон
гидро-
статики**

$$\ddot{z} + N^2 z = 0 \quad N = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s \right)}$$

N – действительная величина

$$z(t) = A \cdot \sin(N \cdot t) + B \cdot \cos(N \cdot t)$$

$$\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dz} < \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s$$

**Устойчивая
стратификация**

N – мнимая величина

$$z(t) = A \cdot \exp(|N| \cdot t) + B \cdot \exp(-|N| \cdot t)$$

$$\frac{d\rho}{dz} > \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s$$

**Неустойчивая
стратификация**

Критерий устойчивости стратификации:

**соотношение фактического и
адиабатического градиентов плотности**

$$\frac{d\rho}{dz} < \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s$$

**Устойчивая
стратификация**

$$\frac{d\rho}{dz} > \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s$$

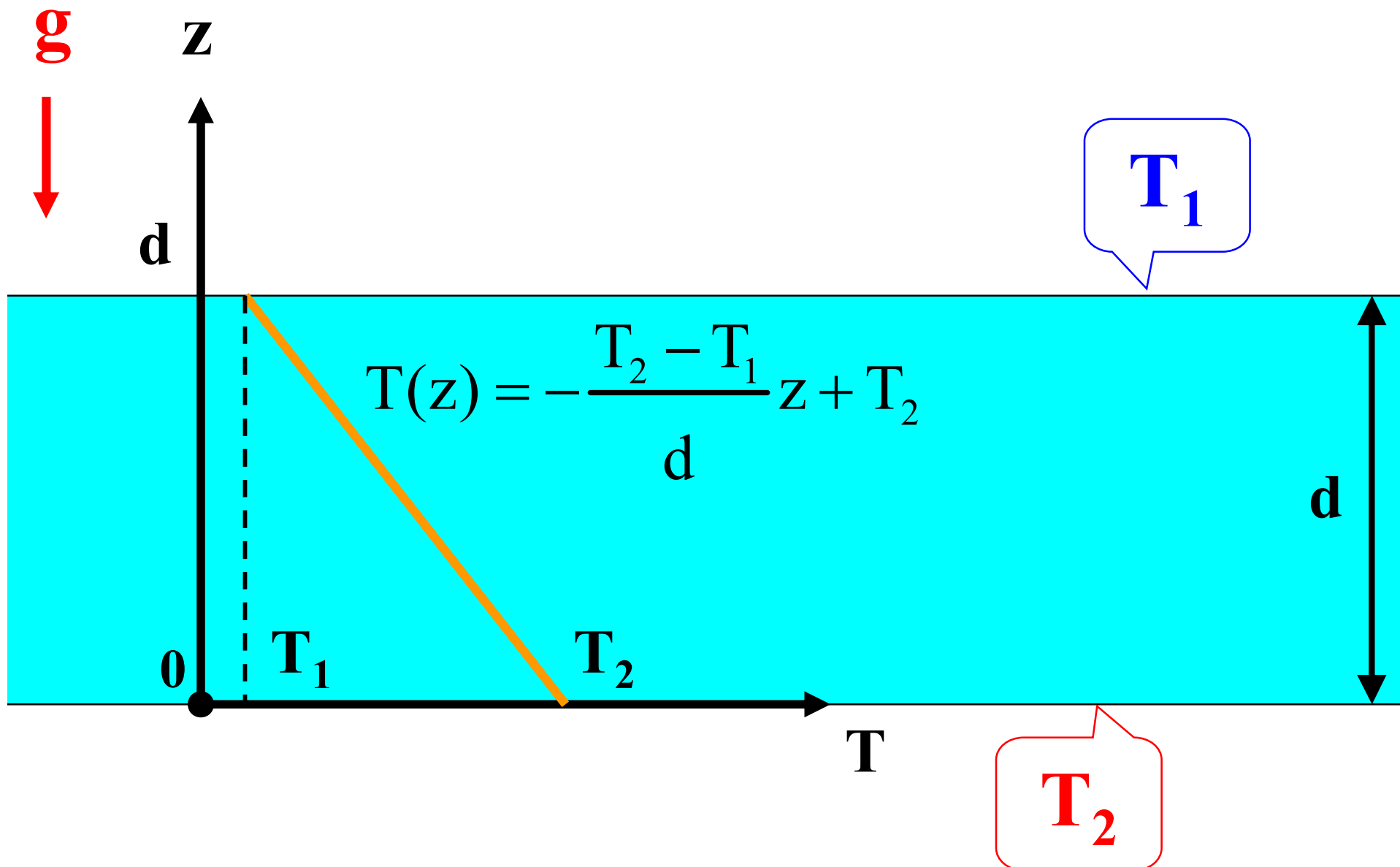
**Неустойчивая
стратификация**



**Термогравитационная
конвекция**

Конвективной неустойчивостью
называется неустойчивость в
газовой или жидкой среде,
находящейся в поле силы тяжести,
которая пронизывается потоком
тепла в направлении
противоположном вектору g

т.е. жидкость или газ подогреваются снизу



ρ - плотность; ν - вязкость; χ - температуропроводность;
 α - коэффициент объемного температурного расширения

g

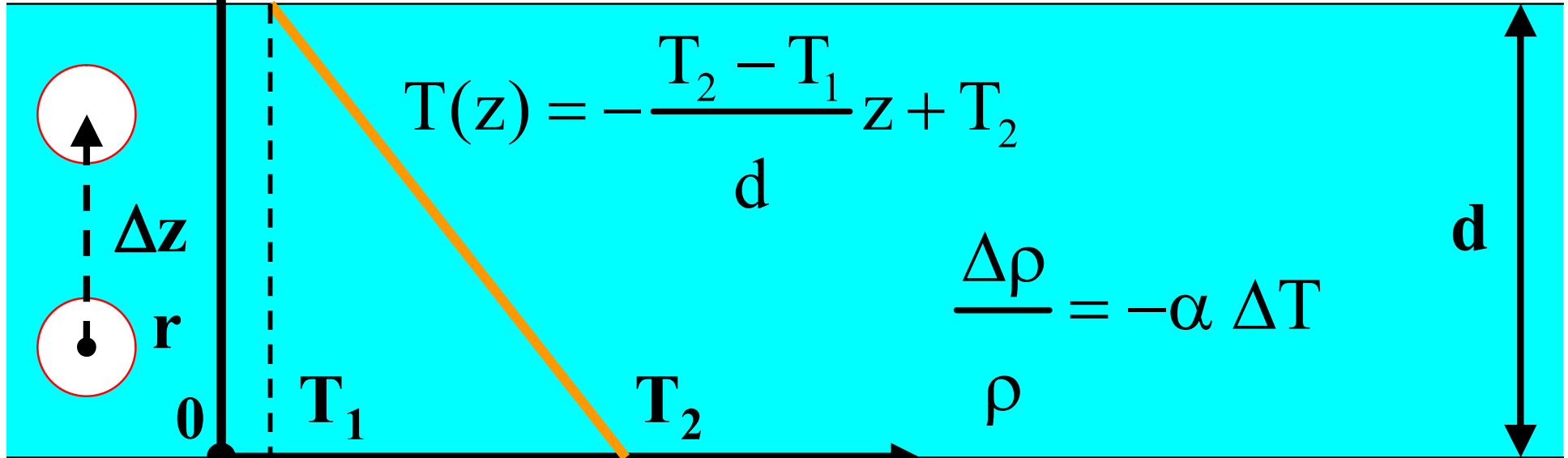


z



d

$$\frac{|\Delta\rho|}{\rho} = \alpha \Delta T = \alpha \frac{T_2 - T_1}{d} \Delta z$$



$$T(z) = -\frac{T_2 - T_1}{d} z + T_2$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\alpha \Delta T$$

Δz

r

0

T₁

T₂

T

d

$$F_{\text{Аpx}} - mg = F_{\text{Стокса}}$$

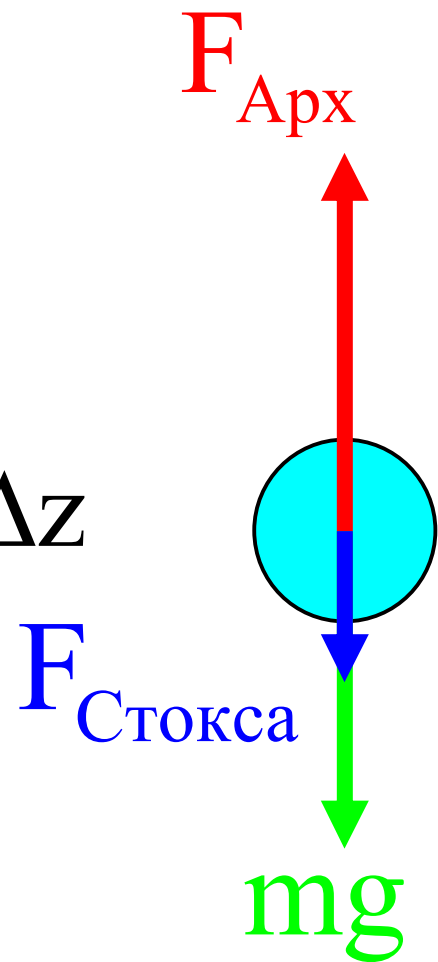
$$F_{\text{Аpx}} - mg = gV \Delta\rho \sim g r^3 \Delta\rho$$

$$F_{\text{Стокса}} = 6\pi\rho\nu r U \sim \rho\nu r U$$

$$U \sim \frac{\Delta\rho g r^2}{\rho \nu} = \frac{\alpha g r^2 (T_2 - T_1)}{\nu d} \Delta z$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \alpha \frac{T_2 - T_1}{d} \Delta z$$

$$\tau_{\Delta z} \sim \frac{\Delta z}{U} = \frac{\nu d}{g \alpha (T_2 - T_1) r^2}$$



$$\tau_{\Delta z} \sim \frac{\nu d}{g \alpha (T_2 - T_1) r^2}$$

?

$$\tau_T \sim \frac{r^2}{\chi}$$

Температуро-
проводность

χ [м² / с]

$$\frac{\tau_T}{\tau_{\Delta z}} \sim \frac{g \alpha (T_2 - T_1) r^4}{\chi \nu d}$$

$r \sim d$

$$Ra = \frac{g \alpha (T_2 - T_1) d^3}{\chi \nu}$$

Число
Рэля

конвекция развивается при $Ra > Ra_{кр} \sim 10^3$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) T = \dots$$

Уравнения гидродинамики (аэрогидромеханики)

Уравнение состояния

$$\rho = \rho(p, T, \dots)$$

парциальное давление
водяного пара

воздух

$$\rho = \rho(p, T, e)$$

соленость

вода

$$\rho = \rho(p, T, s)$$

Уравнение состояния воздуха

$$p = \frac{m}{V} \frac{R}{\mu} T = \rho \frac{R}{\mu} T \equiv \rho R_a T$$

$$R_a \equiv \frac{R}{\mu} = \frac{8.31 \left[\frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{МОЛЬ}} \right]}{0.029 \left[\frac{\text{КГ}}{\text{МОЛЬ}} \right]} \approx 287 \left[\frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{КГ}} \right]$$

$$p = \rho R_a T \Rightarrow \rho = \frac{p}{R_a T}$$

**Уравнение состояния
сухого воздуха**

при Н.У.

$$p = 101325 \text{ Па}$$

$$T = 273.16 \text{ К}$$

$$\left. \begin{array}{l} p = 101325 \text{ Па} \\ T = 273.16 \text{ К} \end{array} \right\} \Rightarrow \rho \approx 1.29 \text{ кг / м}^3$$

$$p_a = \rho_a R_a T$$

**ВОДЯНОЙ
пар**

$$e = \rho_w R_w T$$

$$\rho = \rho_a + \rho_w = \frac{p_a}{R_a T} + \frac{e}{R_w T} = \frac{p - e}{R_a T} + \frac{e}{R_w T}$$

$$\rho = \frac{p}{R_a T} \left(1 - \frac{e}{p} \left[1 - \frac{R_a}{R_w} \right] \right) \approx \frac{p}{R_a T} \left(1 - 0.38 \frac{e}{p} \right)$$

**Уравнение состояния
влажного воздуха**

$$e \sim 10^3 \text{ Па} \Rightarrow \frac{e}{p} \ll 1$$



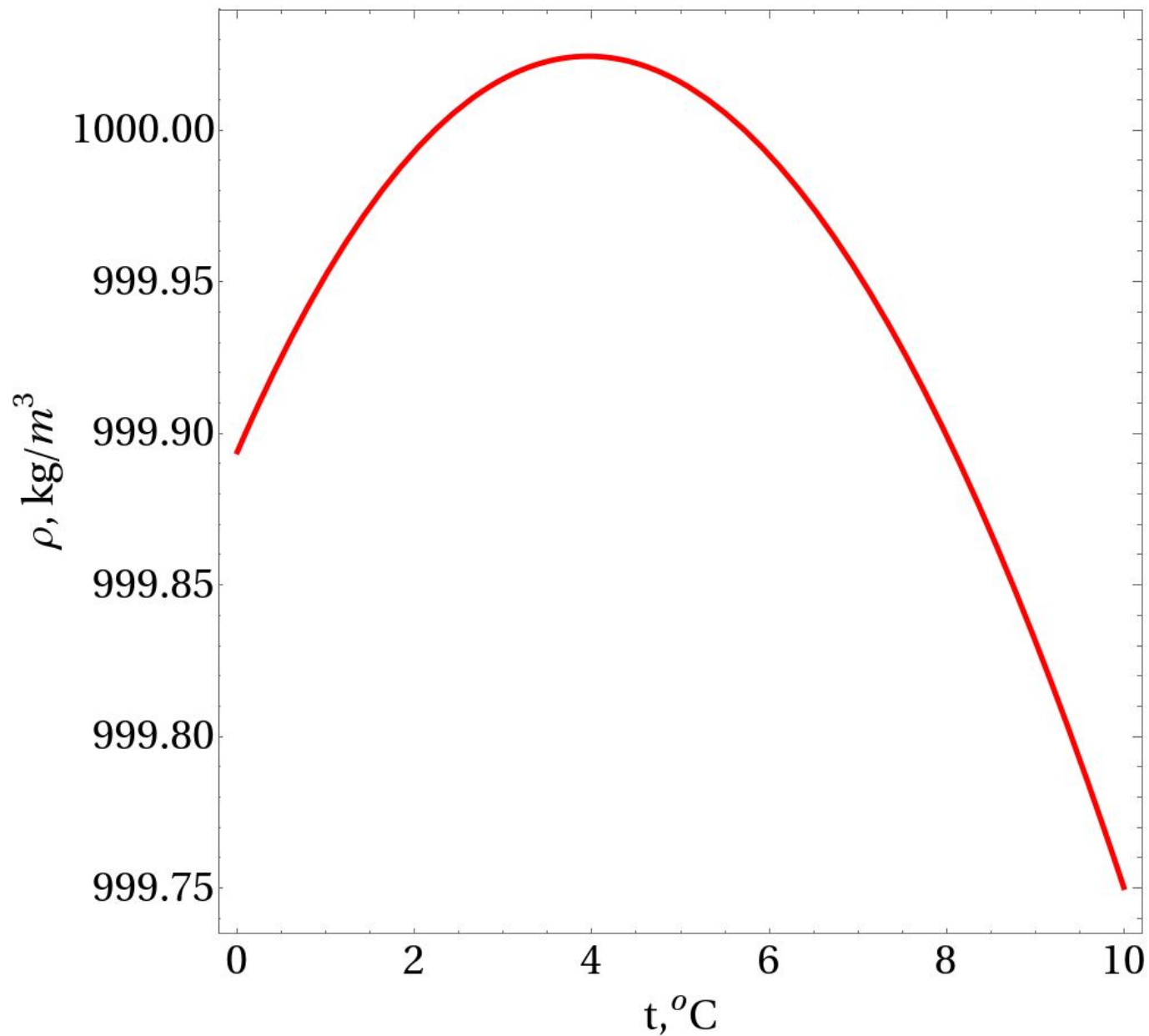
- ❑ Концентрация пара резко падает с высотой
- ❑ В высоких широтах воздух менее влажный чем в тропиках
- ❑ Осадки – концентрация пара, поднятого на высоту конвекцией
- ❑ Содержание пара в атмосфере Земли варьировалось в прошлом в соответствии с ходом температуры

Уравнение состояния морской воды

$$\rho = \rho(p, T, s)$$

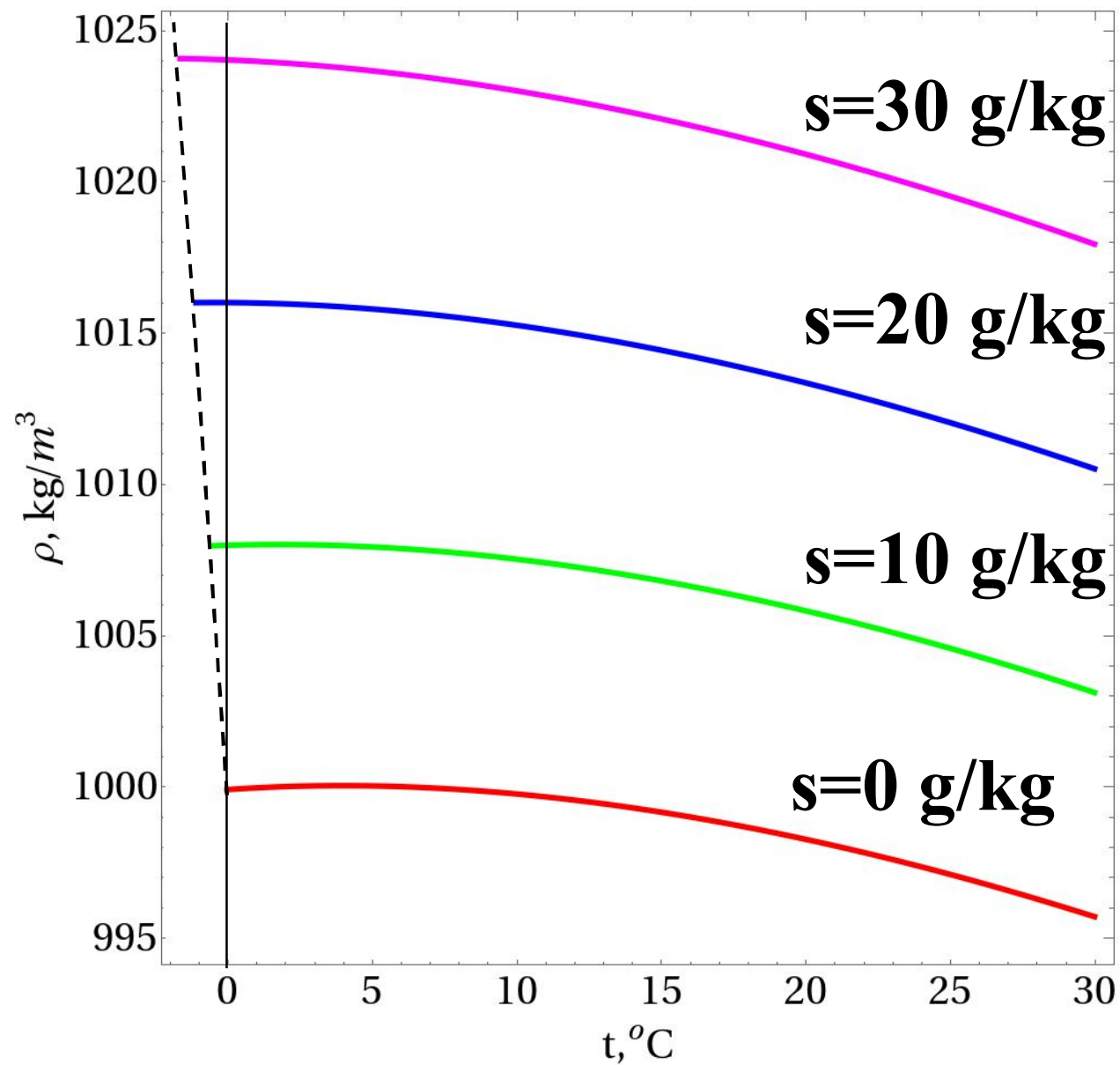
**аналитического выражения не существует,
есть только эмпирические формулы!**

- **Формула Линейкина (5 эмпирических констант)**
- **Уравнение Чена-Миллеро (48 эмпирических констант)**
- **The International Thermodynamic Equation of Seawater – 2010 (www.teos-10.org) - уравнение для потенциала Гиббса**

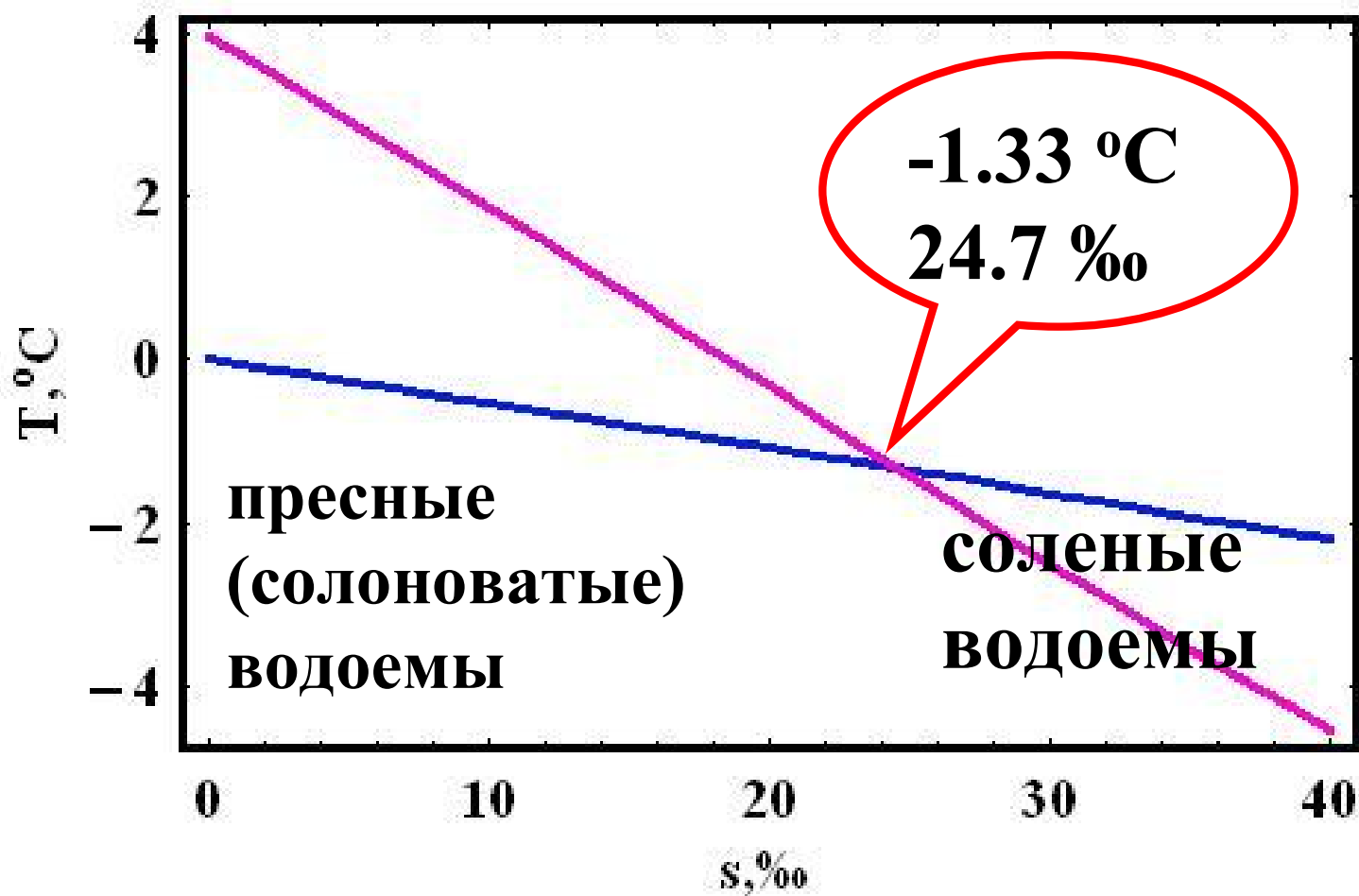


**у пресных (солонватых) вод существует
«температура максимальной плотности»**

Плотность морской воды как функция температуры и солёности



Температура заморзания и максимальной плотности как функция солености



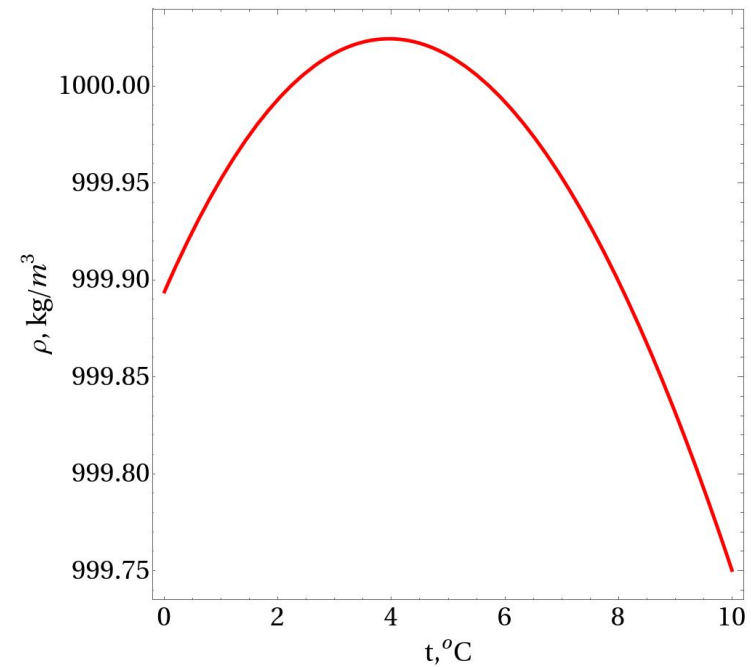
Уникальные свойства воды

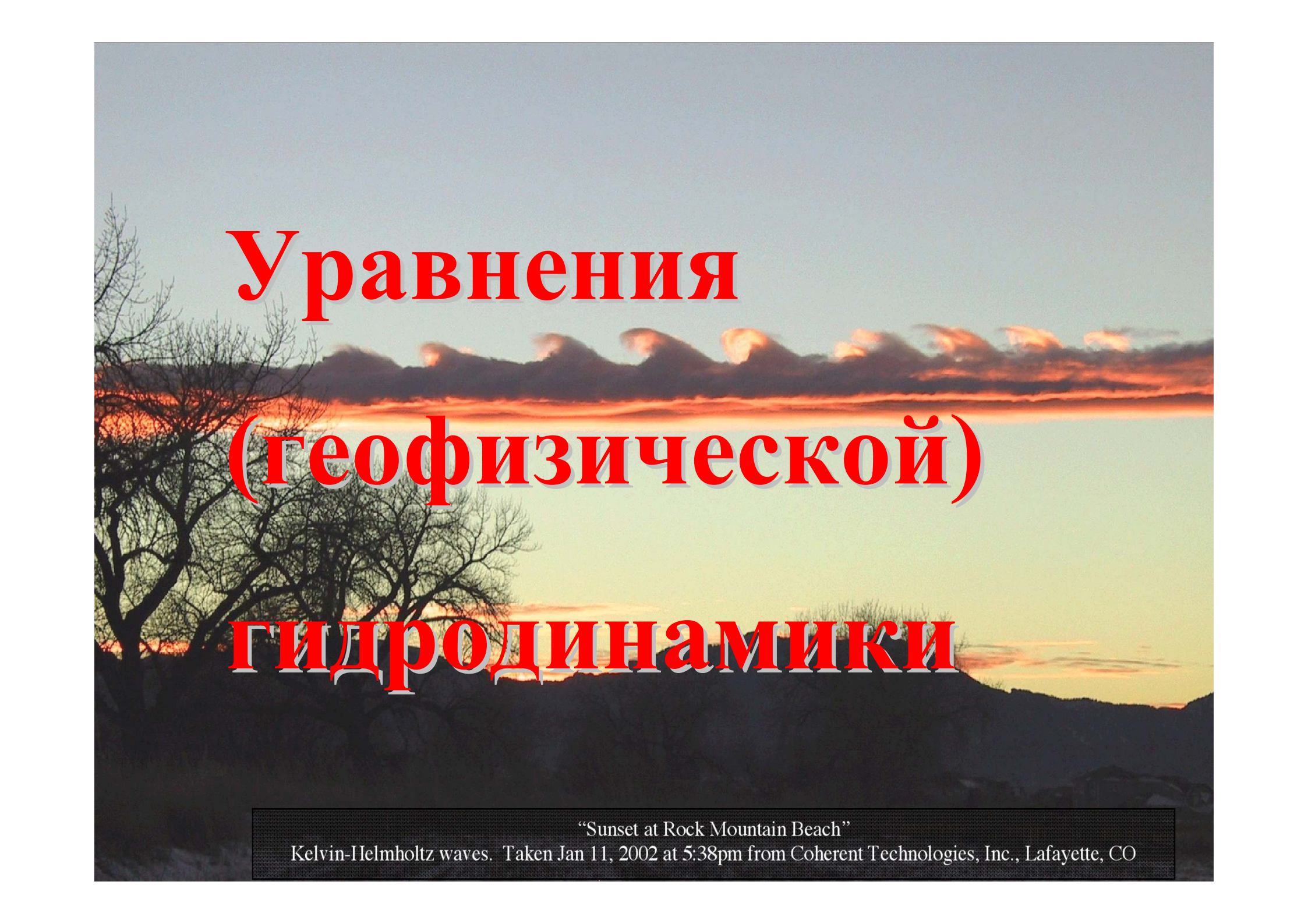
ПЛОТНОСТЬ ЛЬДА < ПЛОТНОСТИ ВОДЫ

917 кг/м³

999.8 кг/м³

**существование
температуры
максимальной
плотности у пресных
(солонатовых) вод**

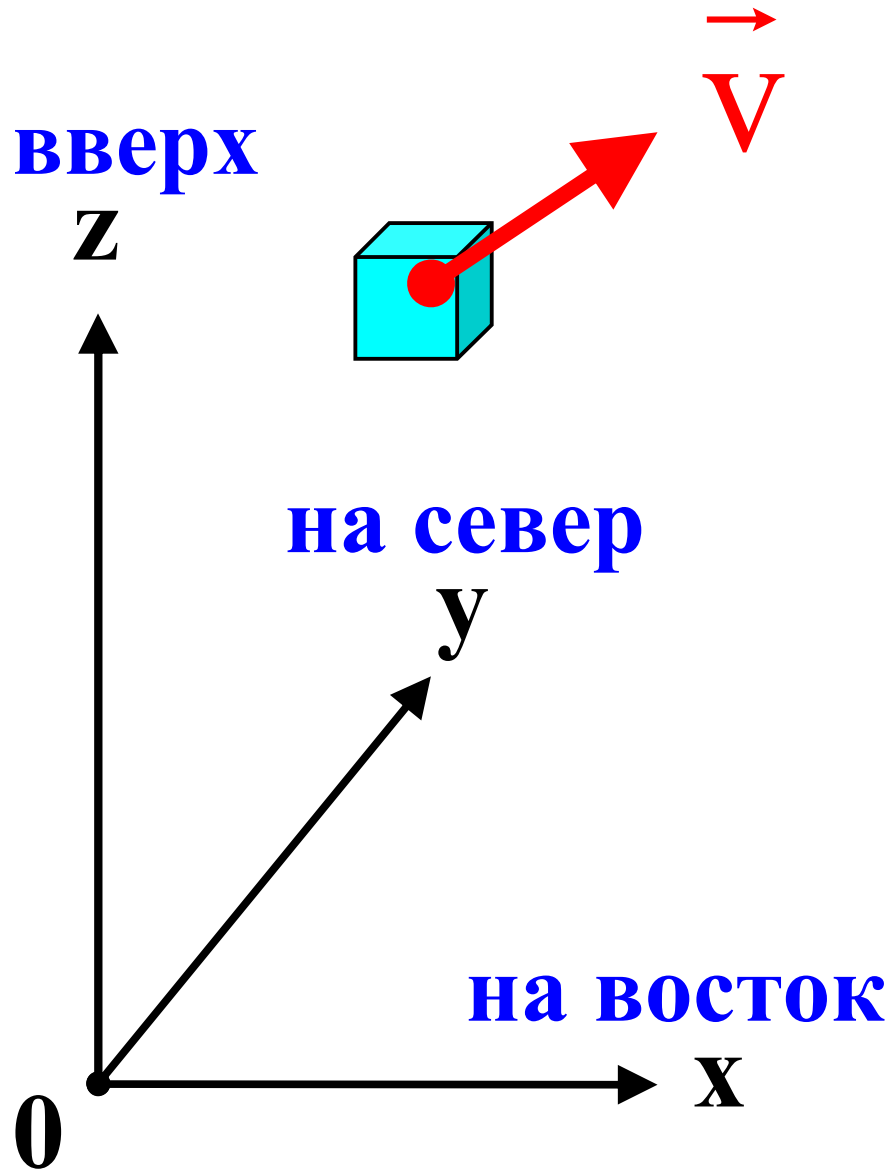


A photograph of a sunset over a landscape. The sky is filled with a series of parallel, wave-like clouds, known as Kelvin-Helmholtz waves, which are illuminated from below by the setting sun, creating a vibrant orange and red glow. The foreground shows the dark silhouettes of trees and a distant horizon line.

Уравнения (геофизической) гидродинамики

“Sunset at Rock Mountain Beach”

Kelvin-Helmholtz waves. Taken Jan 11, 2002 at 5:38pm from Coherent Technologies, Inc., Lafayette, CO



$$\vec{v} = (u_x, u_y, u_z)$$

$$\vec{v} \equiv (u, v, w)$$

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

$$p = p(x, y, z, t)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

ВВЕРХ

Z



на север

y

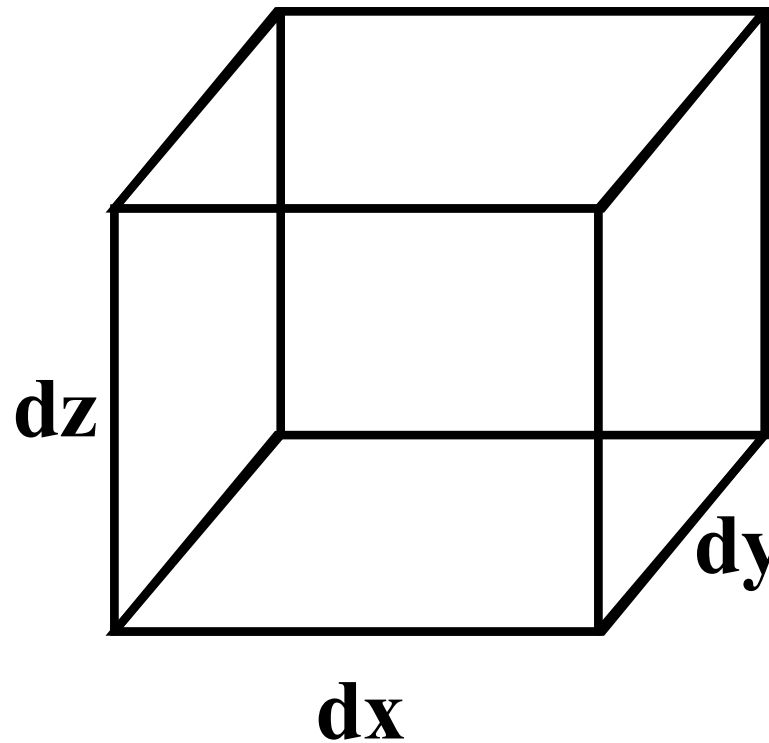


на восток

x

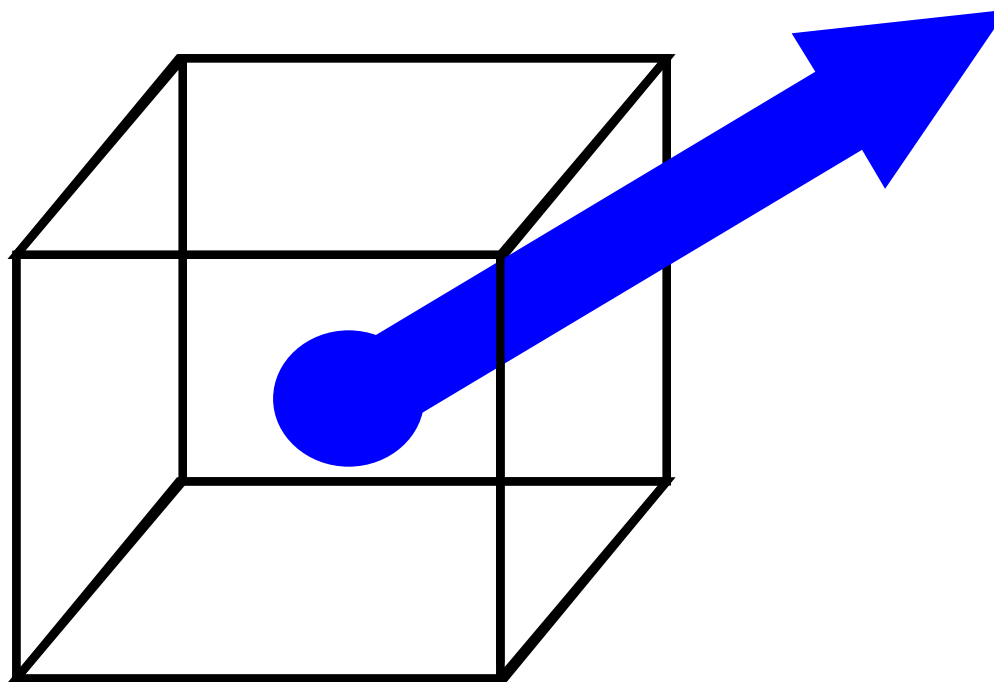


0



Массовые силы

$$F_{\text{масс}} \sim dm = dx dy dz \rho$$

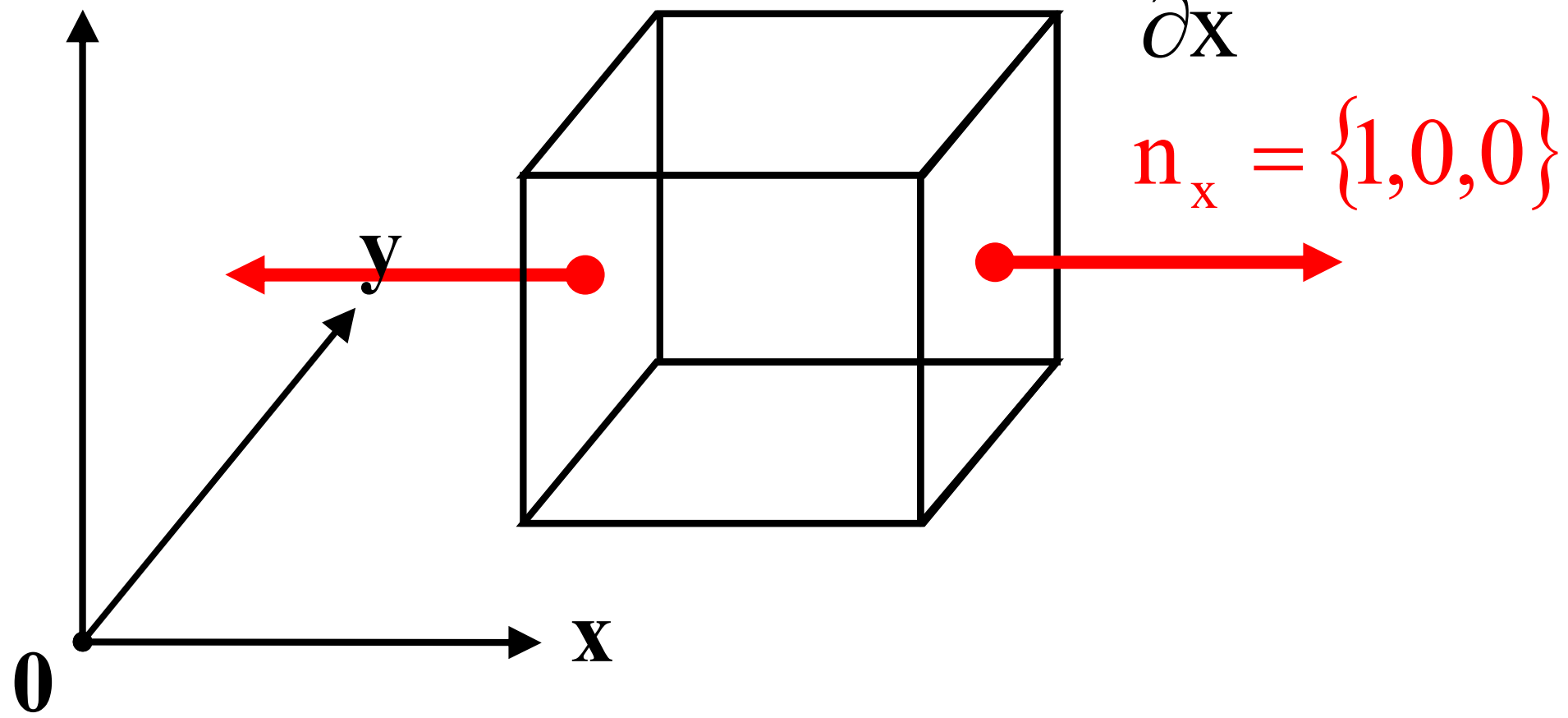


- ❑ сила притяжения (Земля, Луна, Солнце, ...)
- ❑ силы инерции (Кориолиса, центробежная)

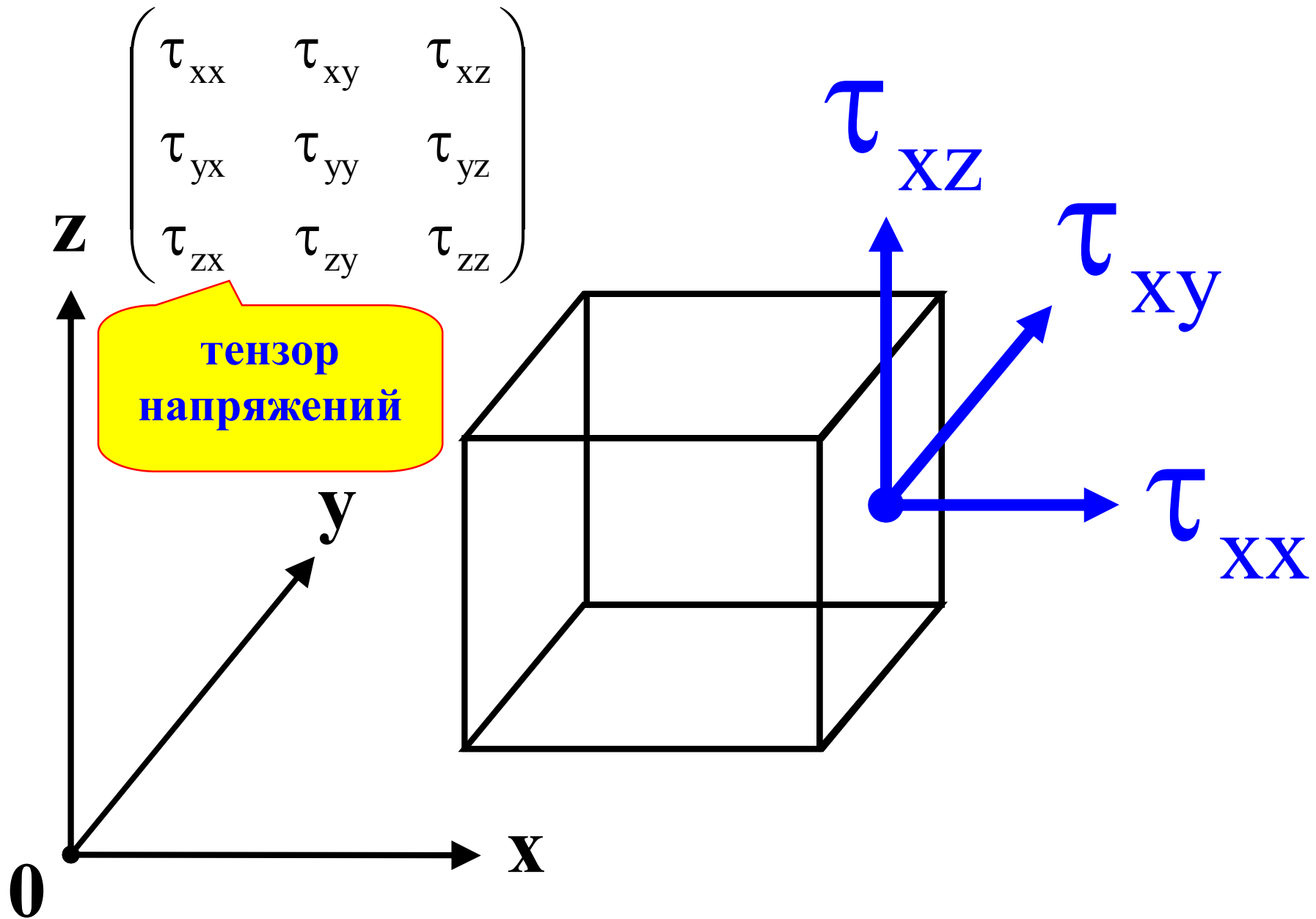
«Поверхностные» силы

$$F_{\text{поверхн}} = [\tau(x + dx) - \tau(x)] dydz$$

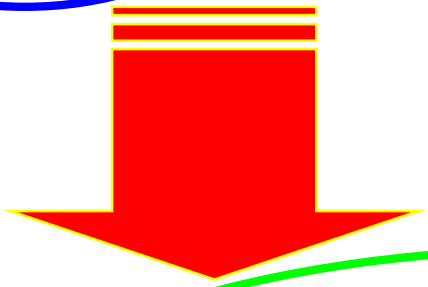
$$n_x' = \{-1, 0, 0\} \quad F_{\text{поверхн}} = \frac{\partial \tau}{\partial x} dx dy dz$$



«Поверхностные» силы



$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{масс}} + \sum \vec{F}_{\text{поверхни}}$$



$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \text{grad div } \vec{v}$$

сила тяжести

сила Кориолиса

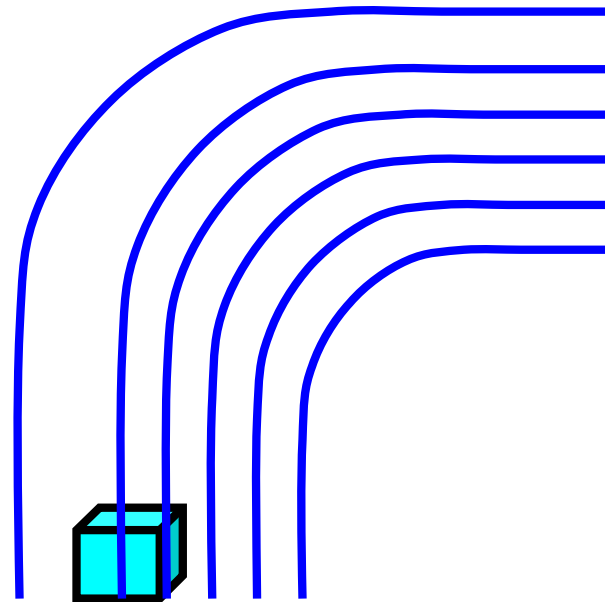
сила градиента давления

сила вязкого трения

$$\vec{v} = \vec{v}(x(t), y(t), z(t), t)$$

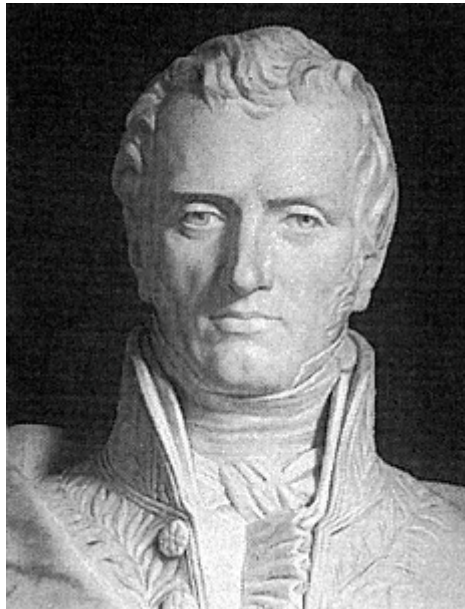
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla} \right) \vec{v}$$

**полная
производная**

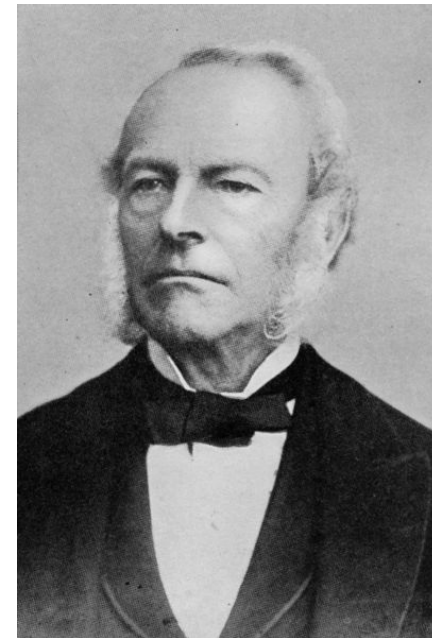


Уравнение Навье-Стокса

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \text{grad div } \vec{v}$$



Анри Навье
1785-1836
французский
механик и инженер



Джордж Стокс
1819-1903
английский физик и
математик

Уравнение Навье-Стокса

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \text{grad div } \vec{v}$$

Число уравнений?

3 шт

Число неизвестных функций:

3 компоненты вектора скорости (u, v, w);

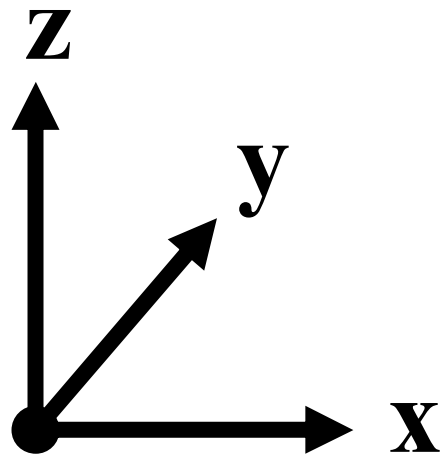
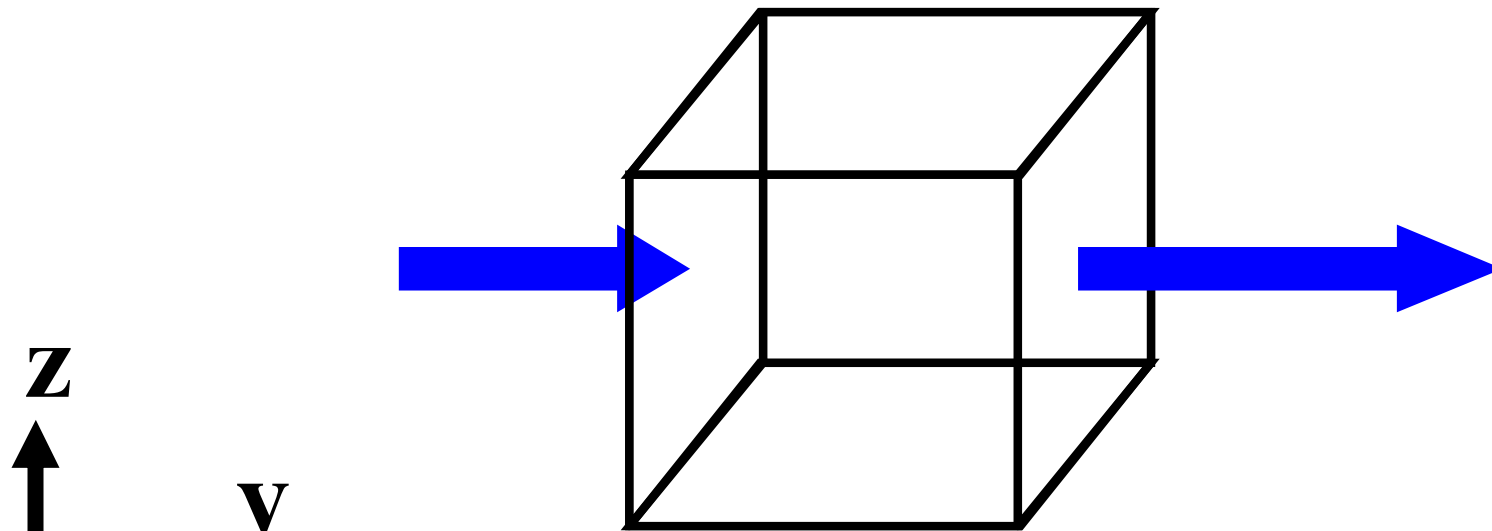
давление (p);

плотность (ρ).

5 шт

Уравнение неразрывности (закон сохранения массы)

$$\rho(x)u(x)dydz$$



$$\rho(x + dx)u(x + dx)dydz$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = dx dy dz \frac{\partial \rho}{\partial t} =$$

$$= -[\rho(x + dx)u(x + dx) - \rho(x)u(x)] dy dz$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial[\rho u]}{\partial x} - \frac{\partial[\rho v]}{\partial y} - \frac{\partial[\rho w]}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho \vec{v}] = 0$$

**уравнение
неразрывности**

уравнение №4

уравнение №5???

Система уравнений гидродинамики (аэрогидромеханики)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \text{grad div } \vec{v}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

5 уравнений

5 неизвестных функций

$$\rho = \rho(p)$$

уравнение №5

уравнение
Навье-Стокса

уравнение
неразрывности

уравнение
состояния