

Геофизика



2023 Лекция №9

Носов Михаил Александрович

отделение геофизики, физический факультет МГУ

<http://ocean.phys.msu.ru/courses/geo/>

Элементы

геофизической

гидродинамики

Система уравнений гидродинамики (аэрогидромеханики)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \text{grad div } \vec{v}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

закон сохранения
массы

2-й закон
Ньютона

уравнение
Навье-Стокса

уравнение
неразрывности

баротропность

$$\rho = \rho(p)$$

уравнение
состояния

бароклинность?

Система уравнений гидродинамики

+уравнение переноса температуры

+уравнение переноса соли/водяного пара

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})T = \chi \Delta T$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})s = \vartheta \Delta s$$

$$\rho = \rho(p, T, s)$$

**система
остается
замкнутой!!!**

$$\vec{v} = (u, v, w) \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

**Что
означает
запись?**

$$\left(\vec{v}, \vec{\nabla} \right) T = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}$$

Граничные условия на поверхностях, ограничивающих область решения задачи

условие прилипания

$$\vec{V} = 0 \text{ или } \vec{V} = \vec{V}_0$$

заданное напряжение
(поток импульса)

$$\eta \frac{\partial u}{\partial z} = \tau$$

заданное давление

$$p = p_0$$

заданный поток тепла

$$-C_p \chi \frac{\partial T}{\partial z} = Q$$

заданная температура

$$T = T_0$$

Граничные условия на поверхностях, ограничивающих область решения задачи

Поверхности могут быть **подвижными и неизвестными**, т.е. их положение определяется из решения задачи

Примеры:

- волны на поверхности воды
- течения с возможностью фазовых переходов (лед-вода, мантия-ядро Земли)
- размыв или выветривание
- etc.

Начальные условия (при $t=0$)

$$\vec{v} = \vec{v}_0(x, y, z)$$

$$p = p_0(x, y, z)$$

$$\rho = \rho_0(x, y, z)$$

$$T = T_0(x, y, z)$$

$$s = s_0(x, y, z)$$

$$\rho_0 = \rho(p_0, T_0, s_0)$$

$$\text{при } \vec{v}_0 = 0$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p_0 + \vec{g} = 0$$

геофизическая практика

**Проблема ассимиляции данных
наблюдений в численные модели**

**Основные
подходы к
упрощению
уравнений
гидродинамики**

Приближение №1:

«среда с постоянной плотностью

$\rho = \rho_0 = \text{const}$ (в.т.ч. несжимаемая)»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \nu \Delta \vec{v} +$$

~~$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0$~~ ~~$+ \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \text{grad div } \vec{v}$~~

$\rho = \rho(p)$

ρ_0

$\text{div } \vec{v} = 0$

Приближение №1:

«среда с постоянной плотностью»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla} \right) \vec{v} = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2 \left[\vec{v} \times \vec{\omega} \right] + \nu \Delta \vec{v}$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right| \sim \frac{U_{xy}}{L}$$

горизонтальный масштаб

$$\left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| \sim \frac{U_z}{H}$$

вертикальный масштаб

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial w}{\partial z}$$



$$U_z \sim \frac{H}{L} U_{xy}$$

Приближение №2: «стационарное течение»

$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \nu \Delta \vec{v} +$$

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

$$+ \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\rho = \rho(p)$$

Приближение №3:

«идеальная (невязкая) жидкость»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \cancel{\nu \Delta \vec{v}} +$$

понижается порядок уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

$$+ \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\rho = \rho(p)$$

Изменение граничного условия:

«прилипание» → «непротекание»

$$\{v_{\tau}=0, v_n=0\} \rightarrow \{v_n=0\}$$

Приближение №4:

«идеальная жидкость постоянной плотности, линейное приближение»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{\left(\vec{v}, \vec{\nabla} \right) \vec{v}} = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2 \left[\vec{v} \times \vec{\omega} \right]$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

если $\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_1, p_1 \\ \vec{v}_2, p_2 \end{array} \right\}$ – решения системы, то \Rightarrow

$A\vec{v}_1 + B\vec{v}_2, Ap_1 + Bp_2$ – решения системы

где A, B – константы

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

2. Геострофическое приближение

strophe (греч.) – вращение, поворот

Крупномасштабные течения атмосферы и океана обычно происходят в условиях **гидростатического** (по вертикали) и **геострофического** (по горизонтали) баланса

$$z : -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} = 0 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] = 0$$

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

статика: $\vec{v} = 0$

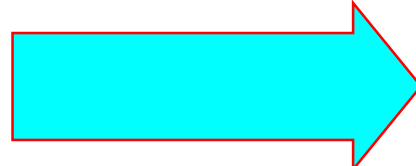
$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{при} \\ \hline \rho = \text{const} \\ \hline g = \text{const} \\ \hline \end{array} \longrightarrow p(z) = p_0 - \rho g z$$

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$



$$U_z \sim \frac{H}{L} U_{xy}$$

вертикальная компонента

$$\cancel{\frac{dw}{dt}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \cancel{F_z^{Cor}}$$

при $\frac{H}{L} \ll 1$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Барометрическая формула



g



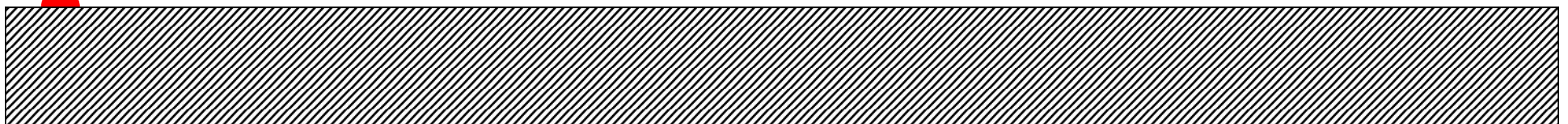
z

$$\frac{dp}{dz} = -g \rho(z) \quad \rho(z) = \frac{p(z)}{R_a T}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{R_a T} p \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{dz}{h}$$

$$(T, g, R_a) \neq f(z)$$

$$h \equiv \frac{R_a T}{g}$$



0

Барометрическая формула



g

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dz}{h}$$

$$\ln p \Big|_{p_0}^{p(z)} = -\frac{z}{h} \Big|_0^z$$



z

$$\ln p(z) - \ln p_0 = -\frac{z}{h}$$

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{z}{h}$$

$$p(z) = p_0 e^{-z/h}$$

$$h = \frac{R_a T}{g}$$

0

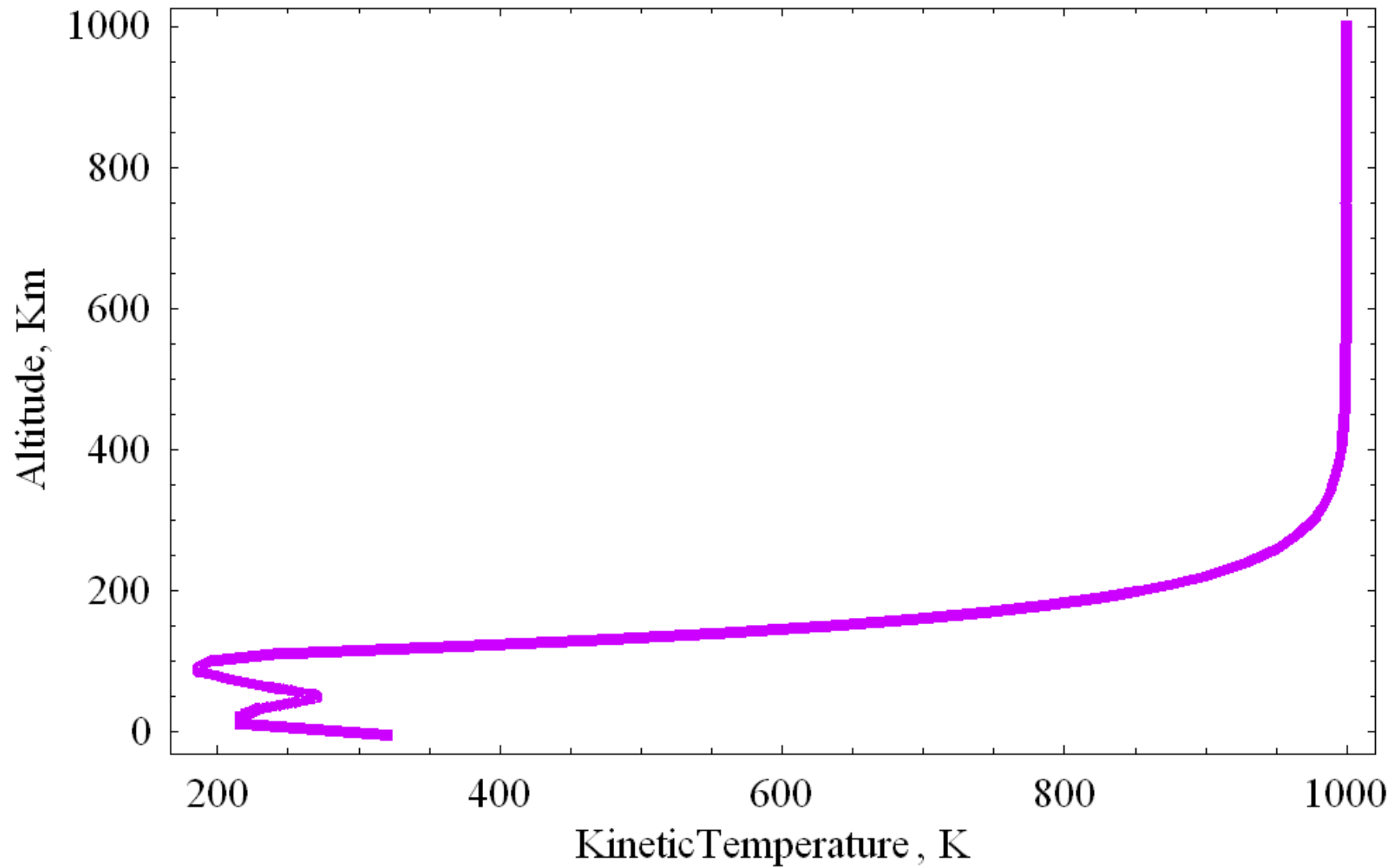
высота однородной атмосферы

Высота однородной атмосферы

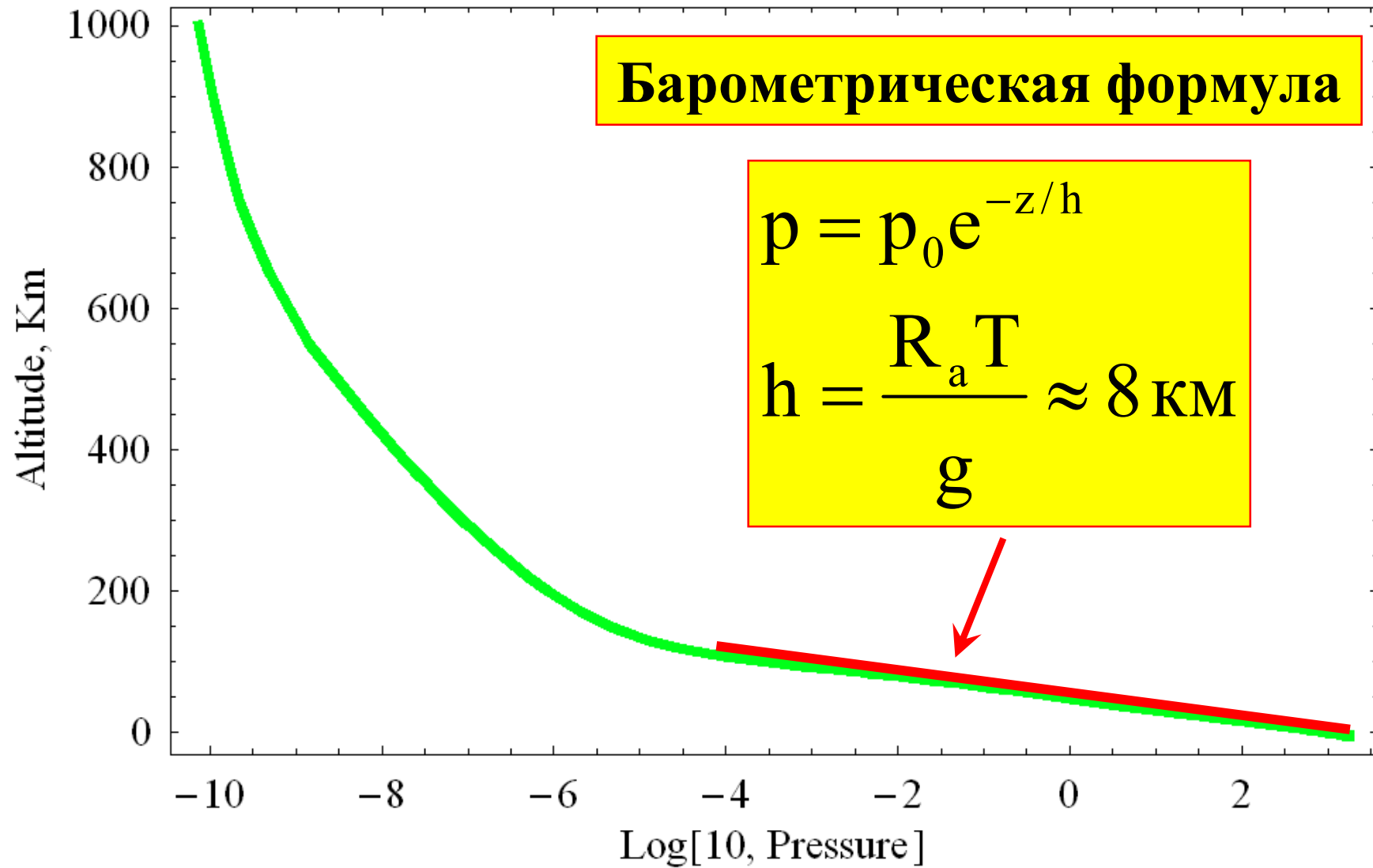
$$R_a = \frac{R}{\mu} = \frac{8.31 \text{ [Дж / моль} \cdot \text{К]}}{0.029 \text{ [кг / моль]}} \approx$$
$$\approx 287 \text{ [Дж / кг} \cdot \text{К]}$$

$$h = \frac{R_a T}{g} = \frac{287 \text{ [Дж / кг} \cdot \text{К]} \cdot 288 \text{ [К]}}{9.8 \text{ [м / с}^2\text{]}} \approx$$
$$\approx 8434 \text{ [м]}$$

Зависимость температуры воздуха от высоты



Зависимость давления воздуха от высоты



«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

2. Геострофическое приближение

strophe (греч.) – вращение, поворот

Крупномасштабные течения атмосферы и океана обычно происходят в условиях **гидростатического** (по вертикали) и **геострофического** (по горизонтали) баланса

$$z : -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} = 0 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] = 0$$

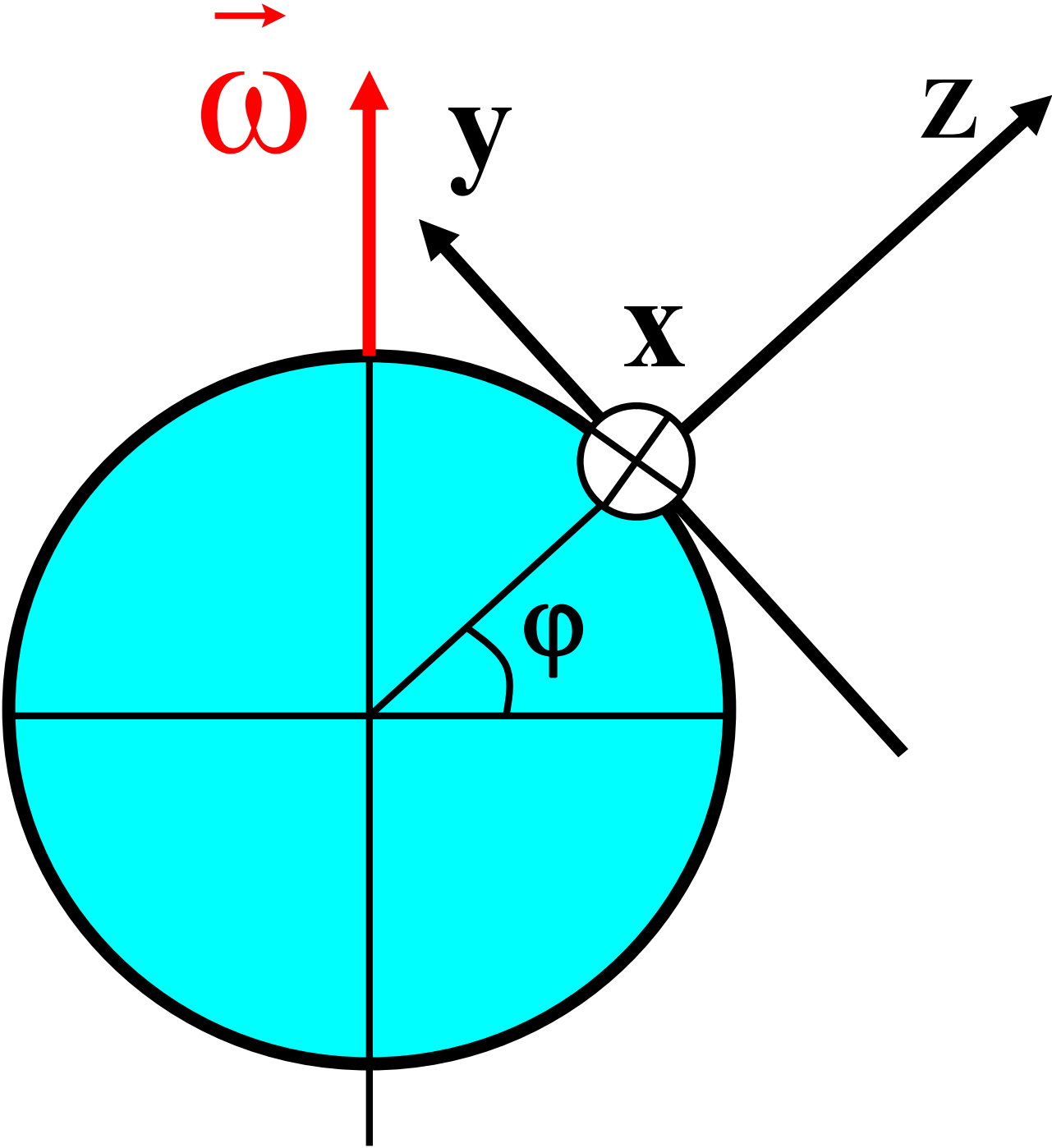
«Геофизические» приближения:

2. Геострофическое приближение

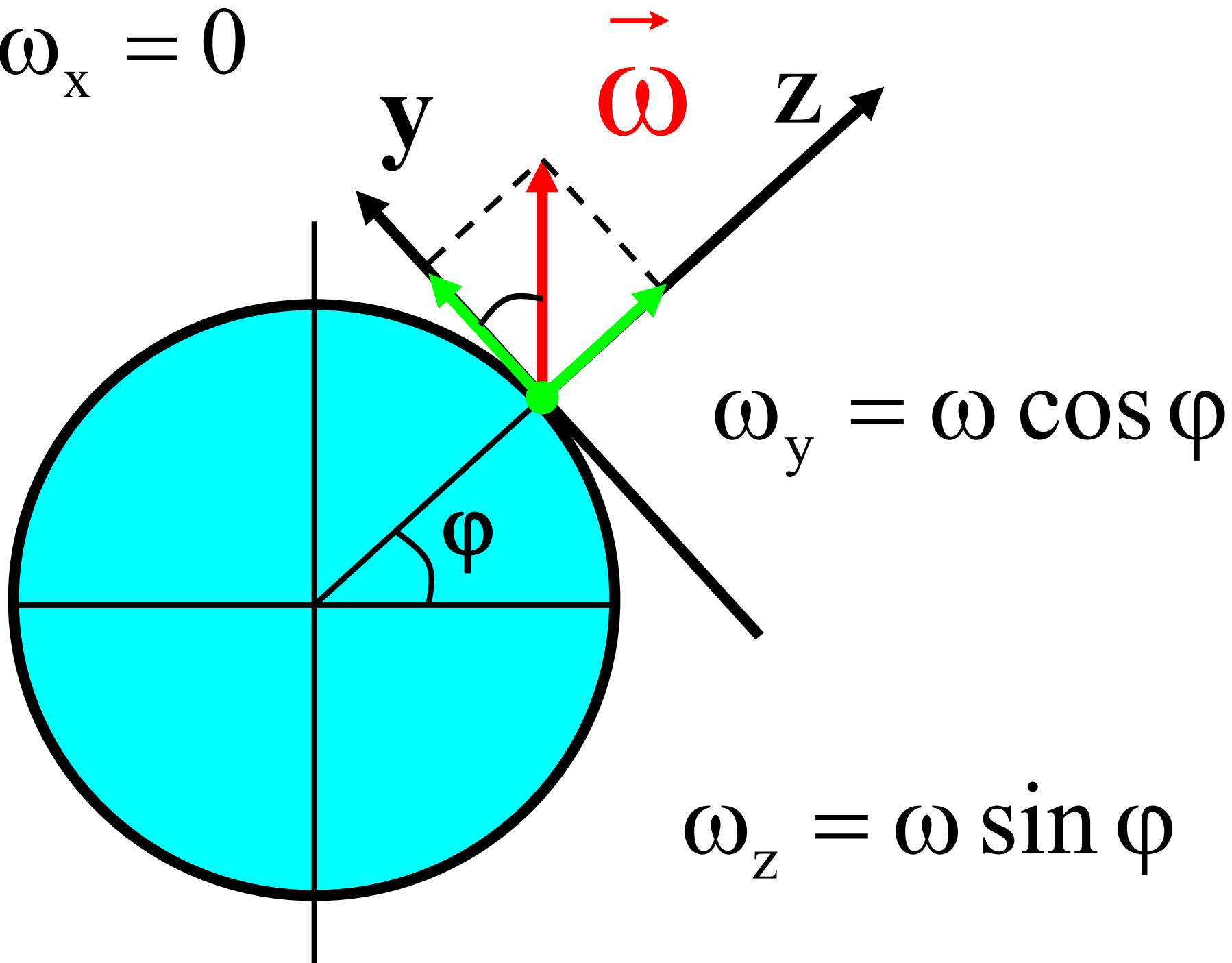
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

по
горизонтали
не действует!



$$\omega_x = 0$$



$$\vec{v} = (u, v, w) \quad \vec{\omega} = (0, \omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi)$$

$$2[\vec{v} \times \vec{\omega}] = 2 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u & v & w \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v\omega_z - w\omega_y \\ w\omega_x - u\omega_z \\ u\omega_y - v\omega_x \end{pmatrix} =$$

традиционное приближение: 1. $w \ll (u, v)$; 2. $F_z^{\text{Кор}} = 0$

$$= 2 \begin{pmatrix} v\omega \sin \varphi - w\omega \cos \varphi \\ -u\omega \sin \varphi \\ u\omega \cos \varphi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2v\omega \sin \varphi \\ -2u\omega \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2[\vec{v} \times \vec{\omega}] \approx \begin{pmatrix} 2v\omega \sin \varphi \\ -2u\omega \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f v \\ -f u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f = 2\omega \sin \varphi$$

**параметр
Кориолиса**

Оценка значимости силы Кориолиса

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

$$\frac{U}{T} \sim \frac{U}{L/U}$$



Carl-Gustaf Rossby

Swedish-US meteorologist

1898-1957

$$U \cdot f$$

$$f = 2\omega \sin \varphi$$

$$\frac{\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|}{|2[\vec{v} \times \vec{\omega}]|} \sim \frac{U}{U \cdot f} = \frac{U}{L \cdot f} \equiv R_0$$

**число
Росби**

геострофическое приближение работает при $R_0 \ll 1$

Оценка числа Россби для природных условий

$$R_o = \frac{U}{L \cdot f}$$

$$f = 2\omega \sin \varphi = \frac{4\pi}{T} \sin \varphi \sim 10^{-4} \text{ c}^{-1}$$

геострофич

приближе

хорошо раб

работает

плохо работает

сидерический
период вращения
Земли
23 ч 56 мин 4.0905 с

$$f_{\text{max}} \approx 1.458 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$$

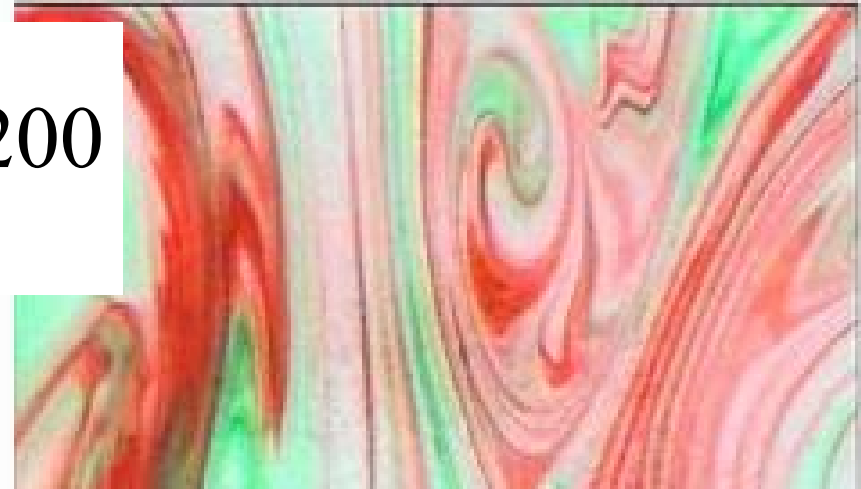
$$\frac{1 [\text{м} / \text{с}]}{10^4 [\text{м}] \times 10^{-4} [\text{c}^{-1}]} \approx 0.01$$

$$R_o = \frac{1 [\text{м} / \text{с}]}{10^5 [\text{м}] \times 10^{-4} [\text{c}^{-1}]} \approx 0.1$$

$$R_o = \frac{1 [\text{м} / \text{с}]}{10^4 [\text{м}] \times 10^{-4} [\text{c}^{-1}]} \approx 1$$

Влияние вращения

$$R_o = \frac{0.01[\text{м/с}]}{0.5[\text{м}] \times 10^{-4}[\text{с}^{-1}]} = 200$$

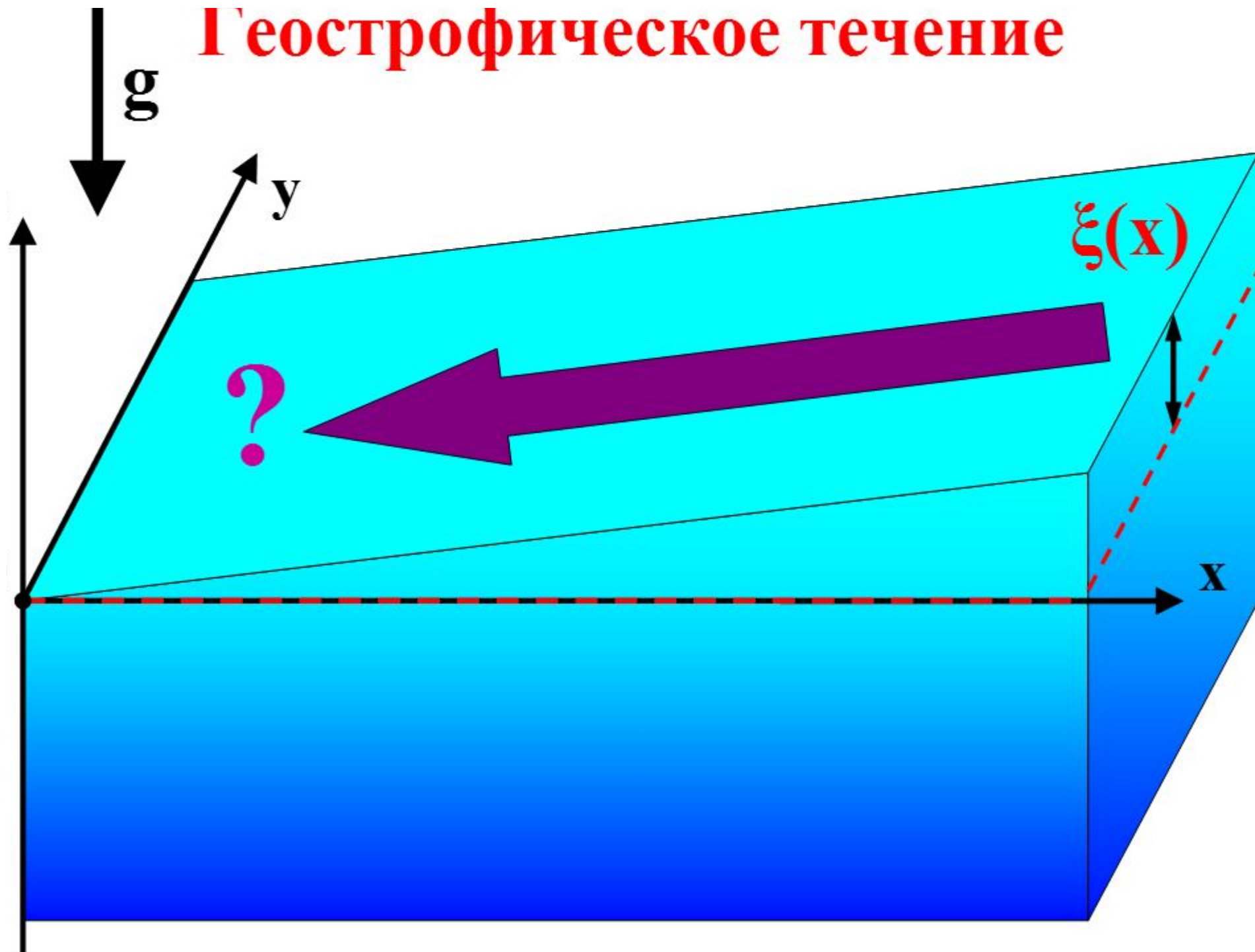


$$R_o = \frac{0.01[\text{м/с}]}{0.5[\text{м}] \times 0.3[\text{с}^{-1}]} \approx 0.06$$



Figure 7.7: Dye distributions from GFD Lab 0: on the left we see a pattern from dyes (colored red and green) stirred into a non-rotating fluid in which the turbulence is three-dimensional; on the right we see dye patterns obtained in a rotating fluid in which the turbulence occurs in planes perpendicular to the rotation axis and is thus two-dimensional.

Геострофическое течение



Геострофическое и гидростатическое приближения

$$x : -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + f v = 0 \quad f = 2\omega \sin \varphi$$
$$\vec{v} = (u, v)$$

$$y : -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - f u = 0 \quad p_{\text{атм}} = \text{const}$$
$$p = p_{\text{атм}} + \rho_0 g (\xi - z)$$

$$z : -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \quad \int_z^{\xi} dz$$

$$x : -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + f v = 0$$

**по условию
задачи:**

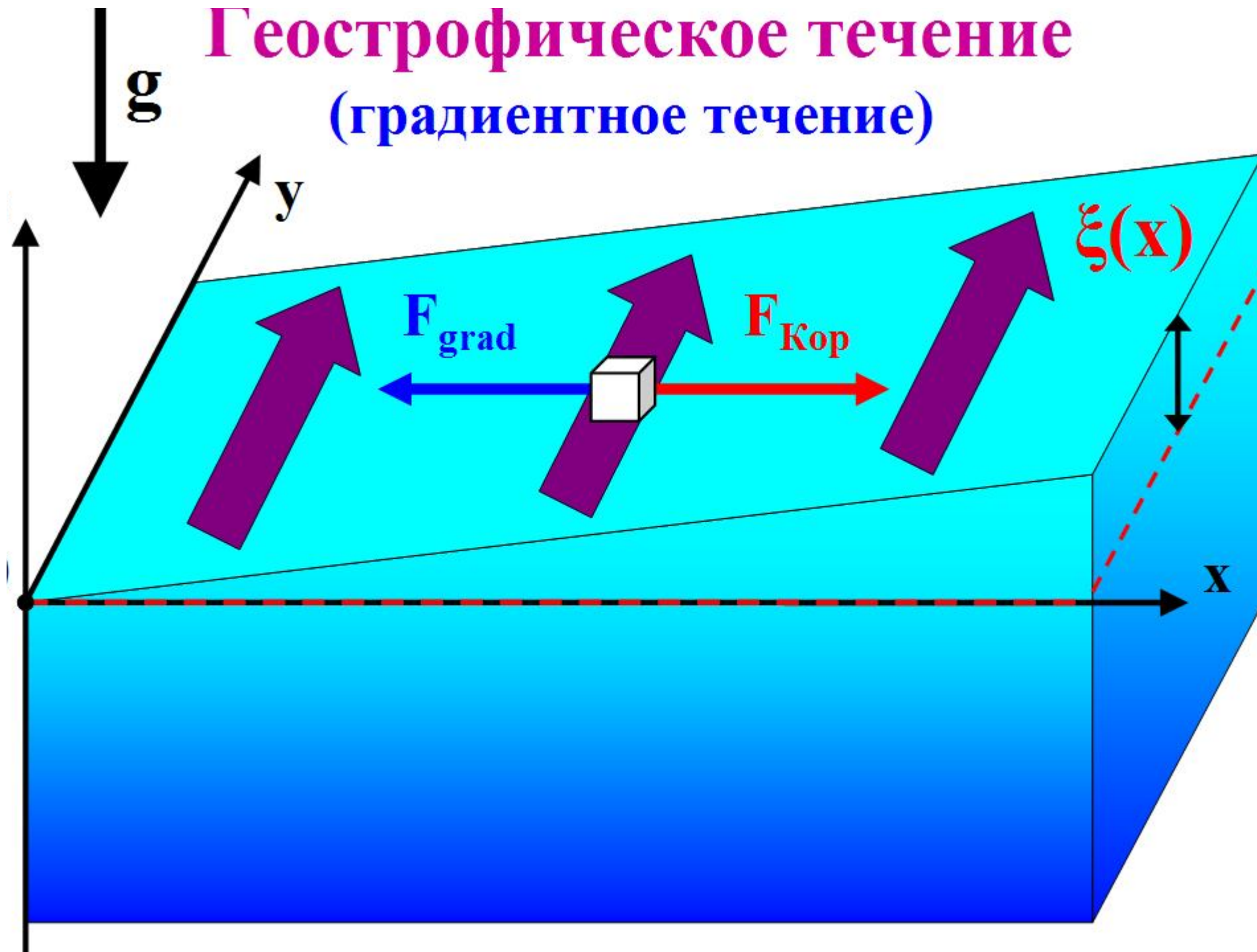
$$\xi = \xi(x)$$

$$y : -g \frac{\partial \xi}{\partial y} - f u = 0$$

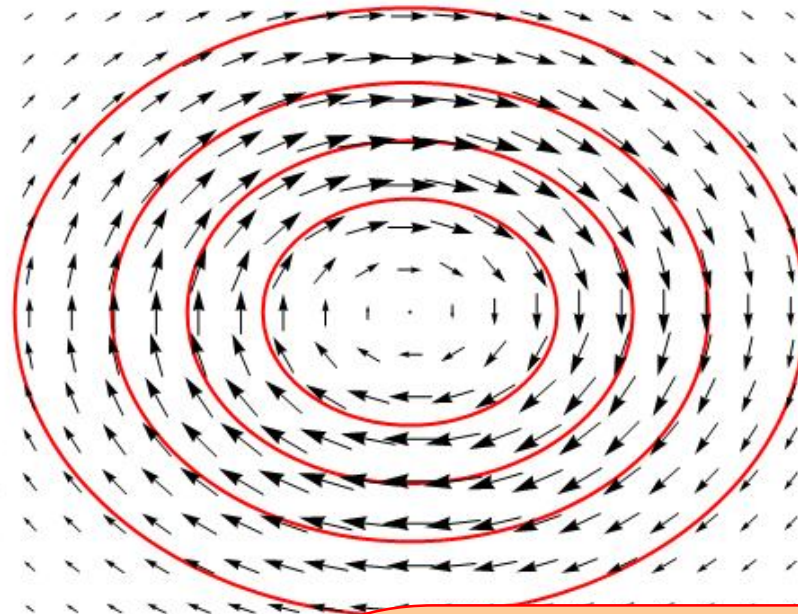
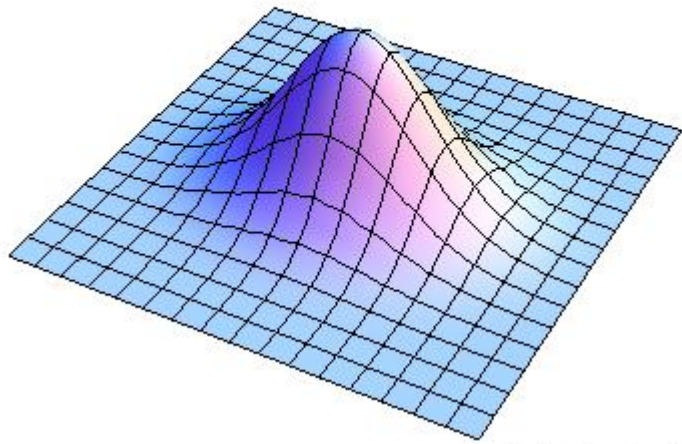
$$x : u = 0$$

$$y : v = \frac{g}{f} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Геострофическое течение (градиентное течение)



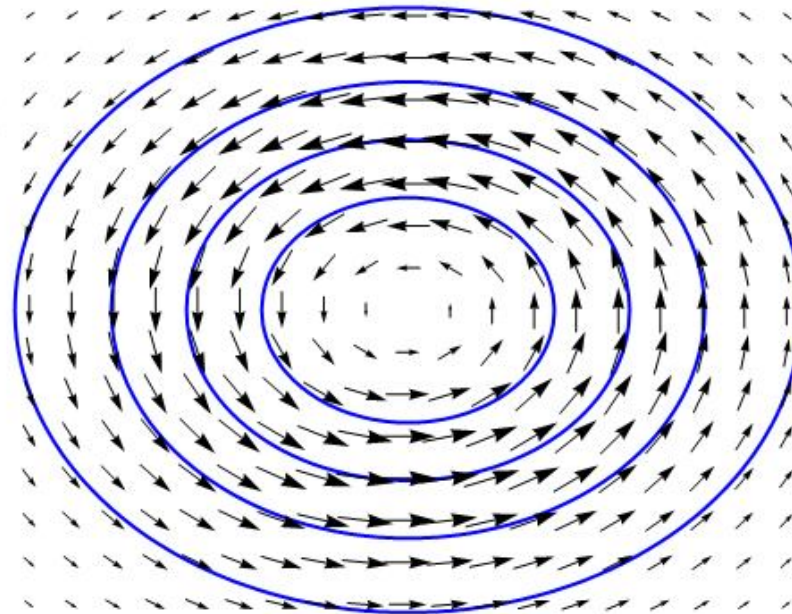
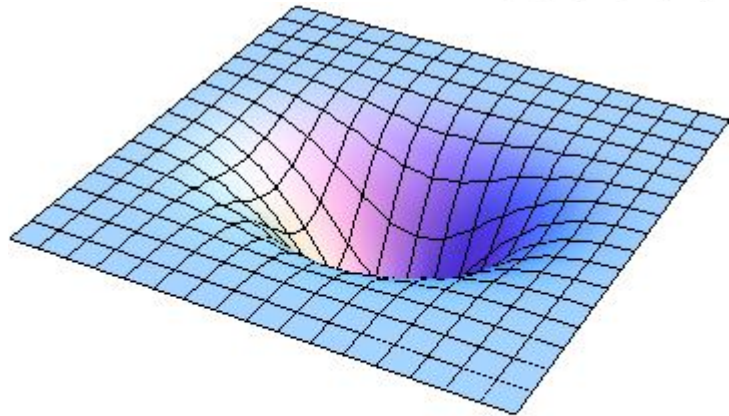
Геострофическое течение вблизи области **поднятия** уровня (Сев.полушарие)



**антициклонический
геострофический вихрь**

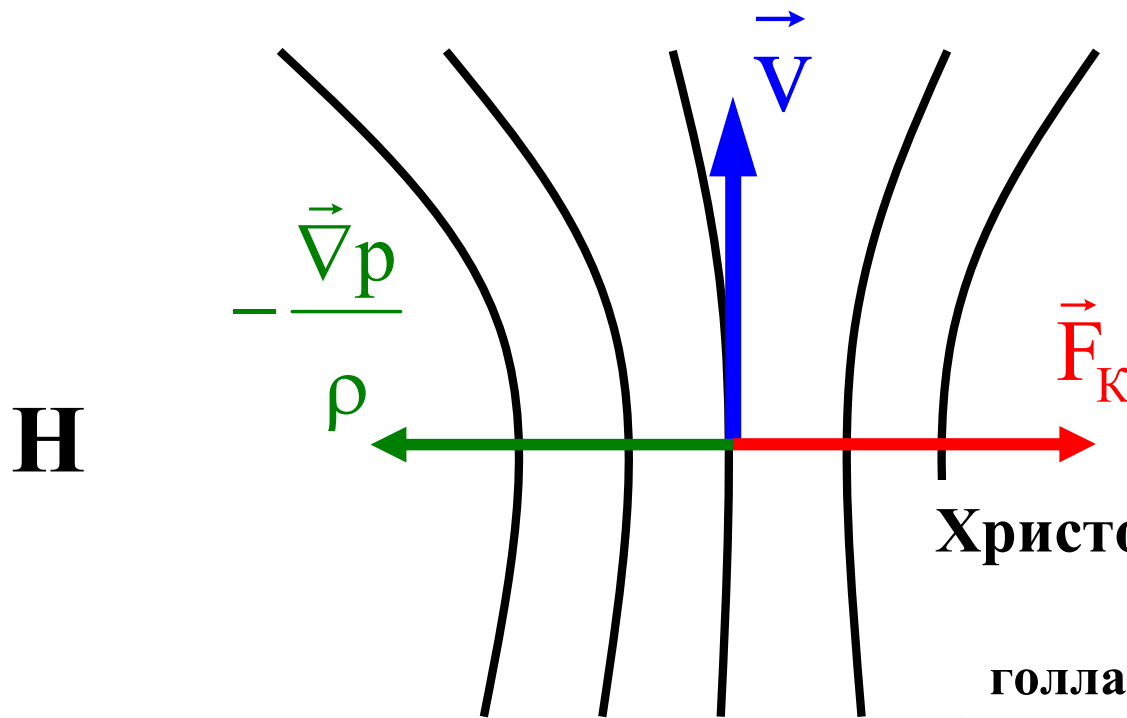
**по часовой стрелке в
сев.полушарии, в
южном полушарии – в
обратном направлении**

Геострофическое течение вблизи области **понижения** уровня (Сев.полушарие)



**циклонический
геострофический
вихрь**

Геострофический ветер



Христофор Бёйс-Баллот
1817-1890
голландский метеоролог

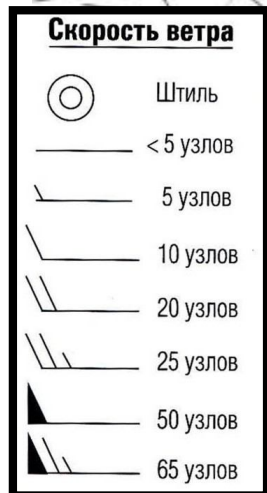
Правило Бейс-Балло, 1857 (Бёйс-Баллот):

«Если в северном полушарии вы встанете спиной к ветру, зона депрессии будет слева от вас, а в южном полушарии – наоборот»

Поля атмосферного давления (изолинии) и скорости ветра на высоте 500 мбар (≈ 5.5 км)

1. Ветер направлен вдоль изобар

2. Скорость ветра выше в области сгущения изобар

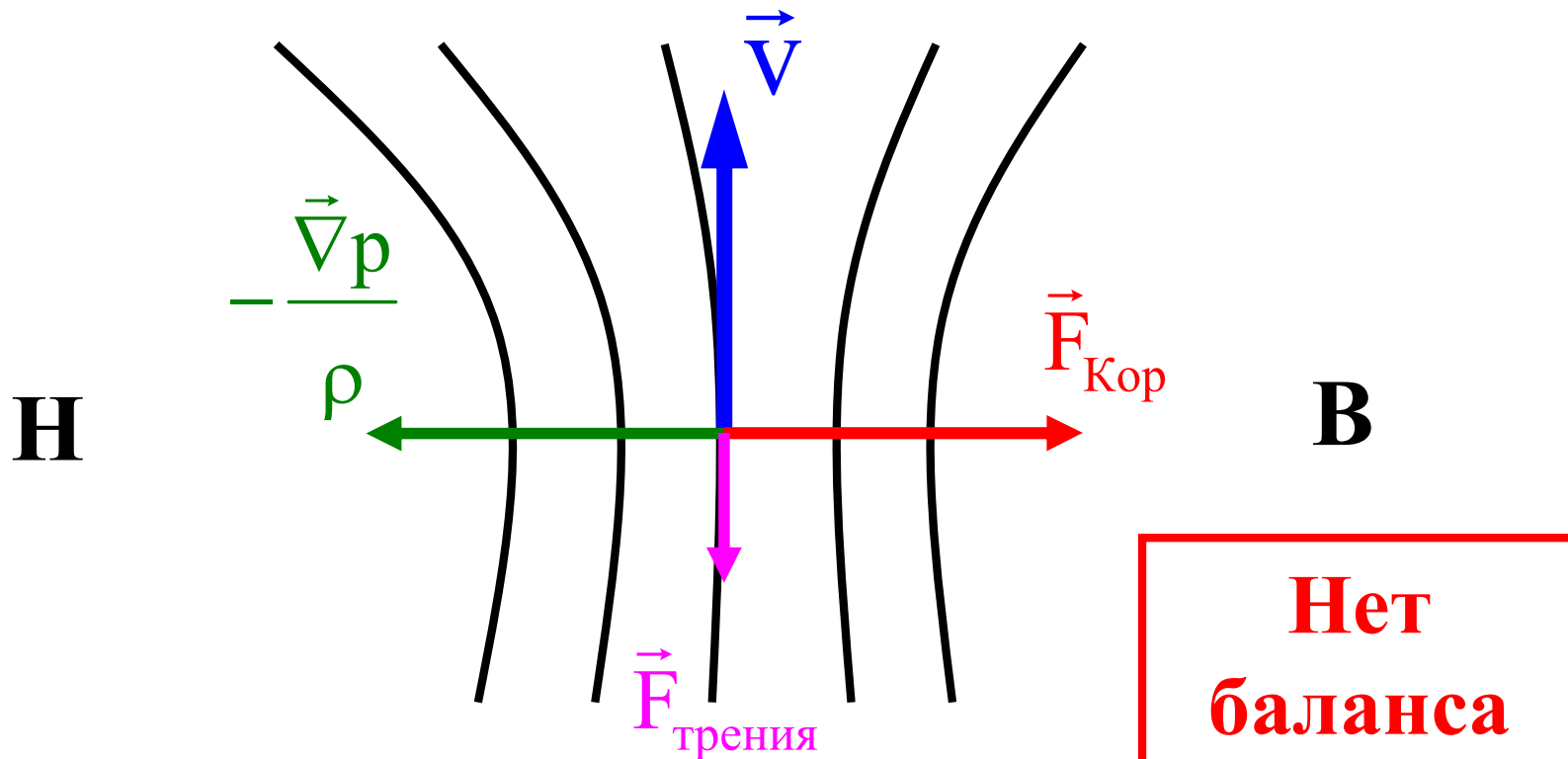


1 узел:
1 морская миля в час
1.852 км/ч
0.514 м/с

**ЦИКЛОНЫ И
АНТИЦИКЛОНЫ
(СИНОПТИЧЕСКИЕ ВИХРИ)**

Геострофический ветер/течение

(Сев. полушарие)

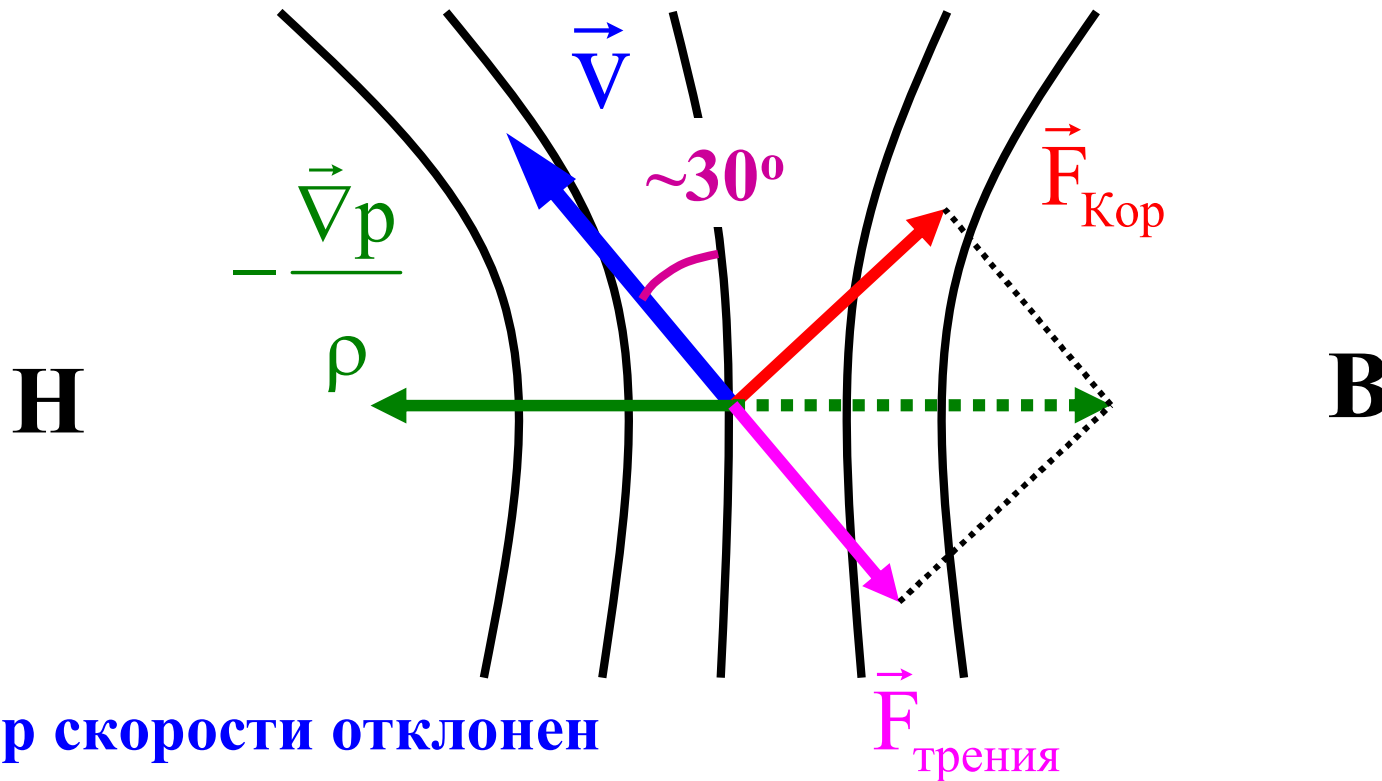


Нет
баланса
сил!

Движение строго
вдоль изобар!!!

Ветер/течение с учетом сил трения

(Сев. полушарие)

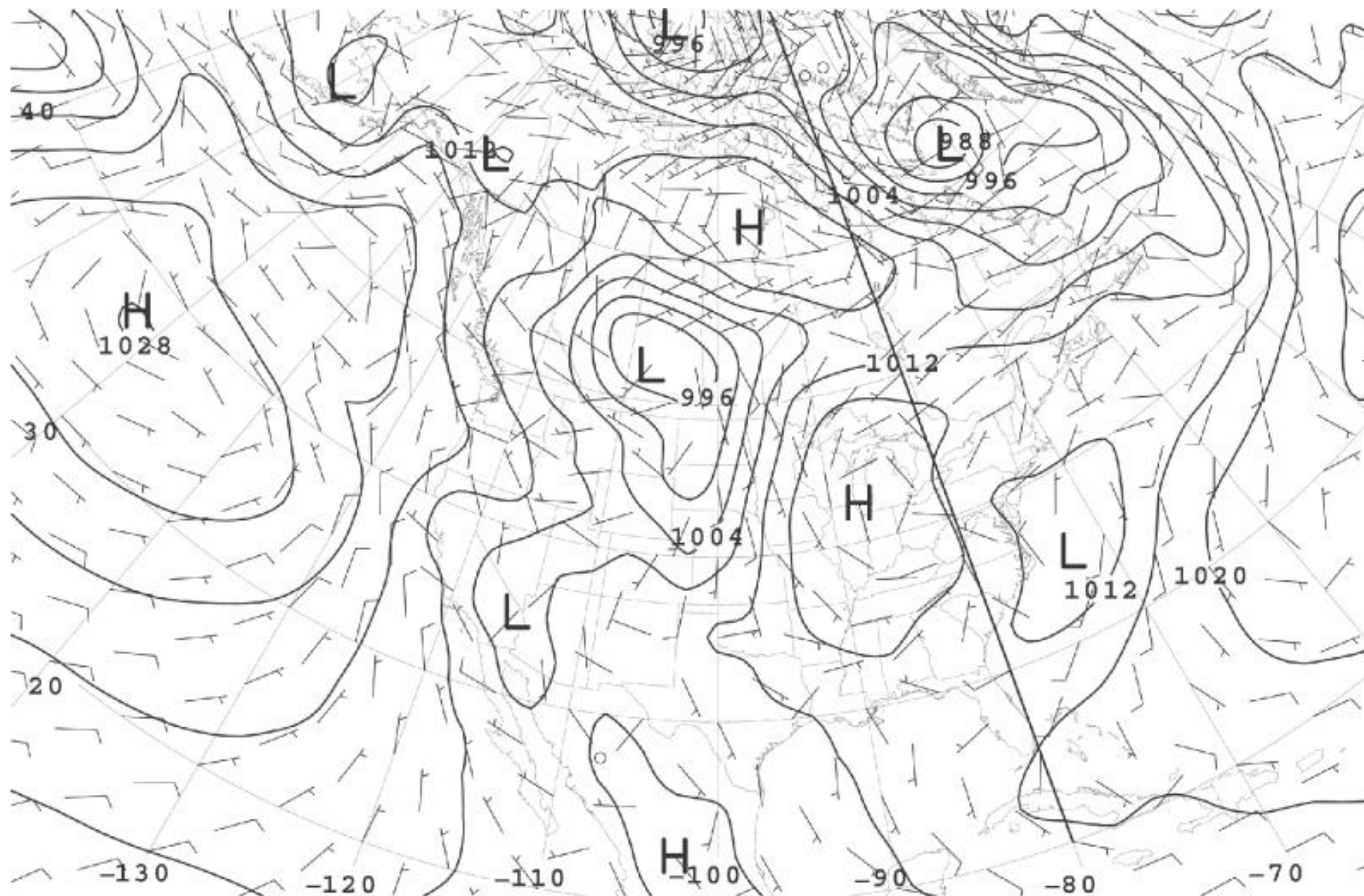


Вектор скорости отклонен
влево от изобары

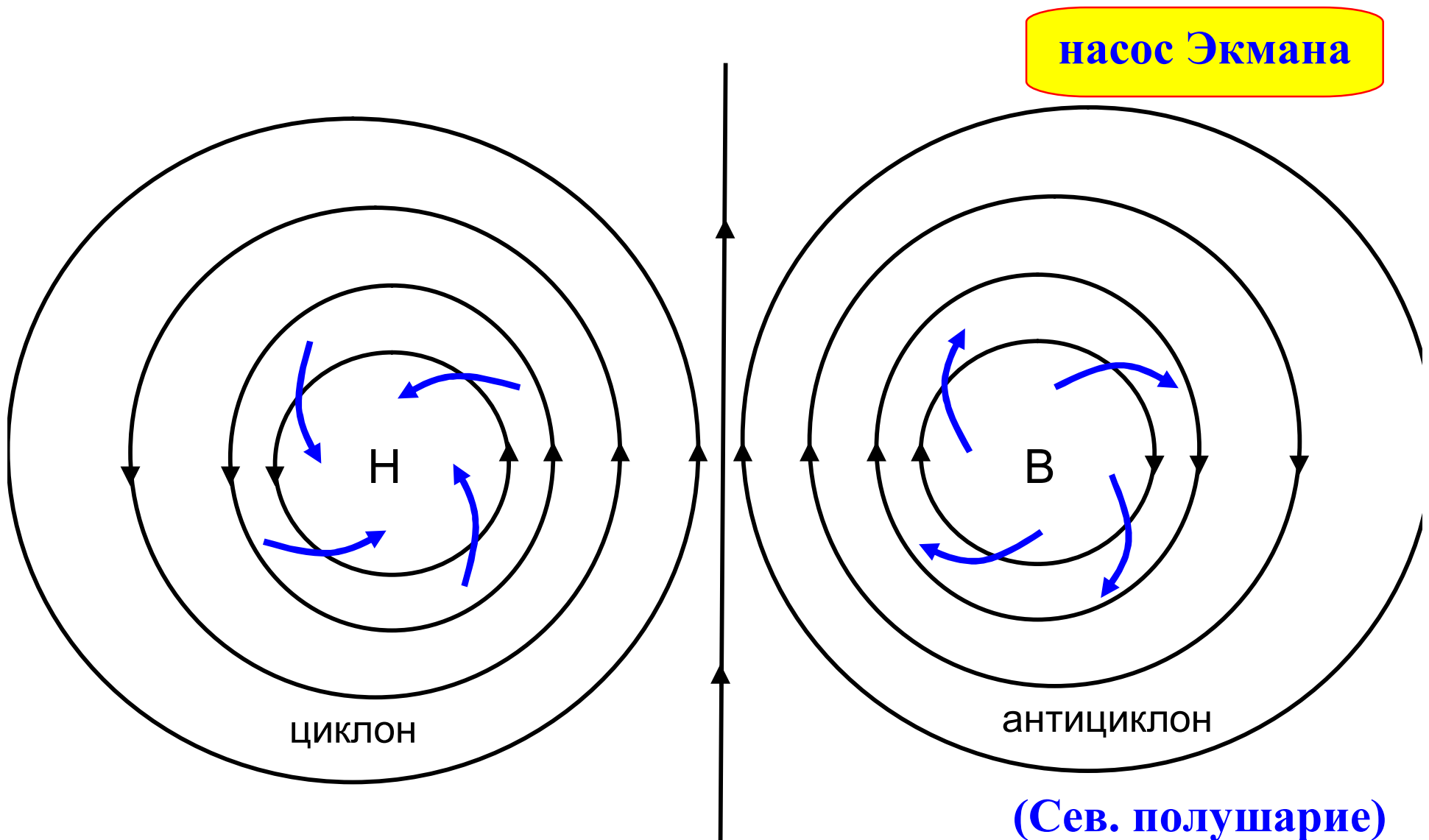
Отклонение существенно до
высот ~ 1500 м

Отклонение у поверхности
земли $\sim 30^\circ$

Поля атмосферного давления (изолинии) и скорости ветра у поверхности земли



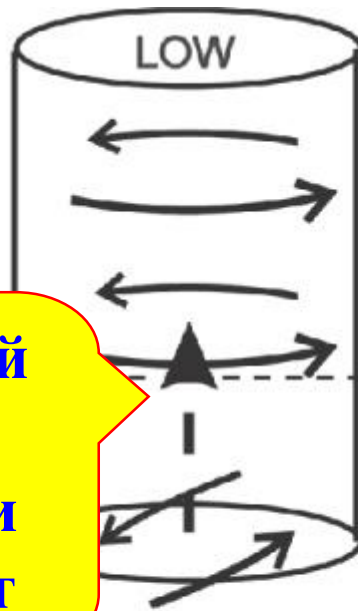
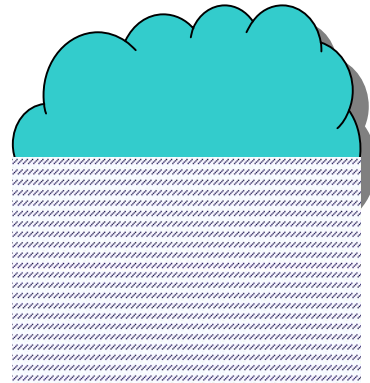
**У поверхности земли, где сила трения велика,
происходит заток воздуха в область низкого давления
и отток воздуха из области высокого давления**



Синоптические вихри

ЦИКЛОН

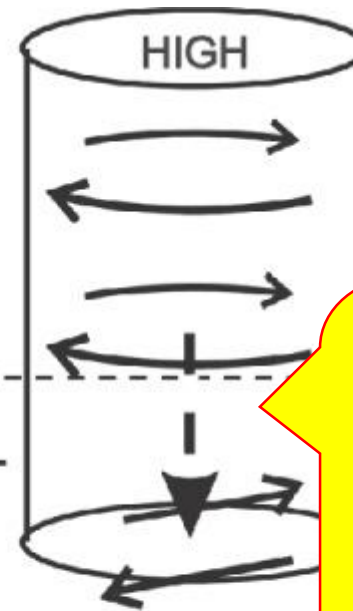
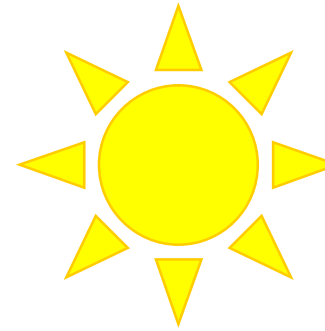
вращение
против
часовой
стрелки
(Сев.
полушарие)



Восходящий
поток со
скоростями
сотни м/сут

АНТИЦИКЛОН

вращение по
часовой
стрелке
(Сев.
полушарие)



Нисходящий
поток со
скоростями от
десятков до
сотен м/сут