

# Геофизика



---

2023 Лекция №12

---

Носов Михаил Александрович

*отделение геофизики, физический факультет МГУ*

---

**<http://ocean.phys.msu.ru/courses/geo/>**

# Волновые движения в океане и атмосфере

# ТИПЫ ВОЛН В ОКЕАНЕ

## (названия волновых явлений)

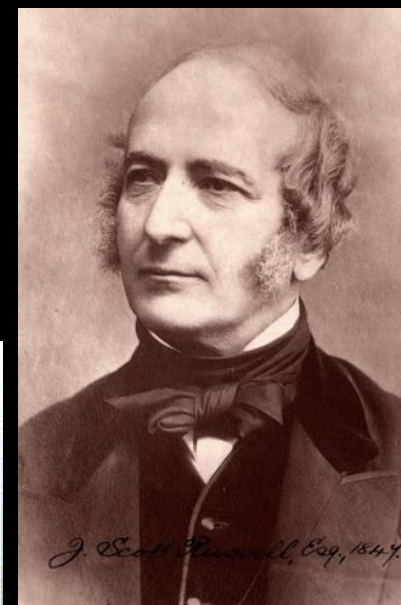
- зыбь (мертвая зыбь)
- сейши (стоячие волны)
- “волны-убийцы” (rogue wave, freak wave)
- цунами
- захваченные волны (рельеф дна, течения)
- приливные волны
- бор (tidal bore – приливной бор)
- Поророка (Амазонка)
- Риссага (о.Менорка)
- Абики (о.Кюсю)
- солитон (частицеподобная волна)
- ...

# СОЛИТОН





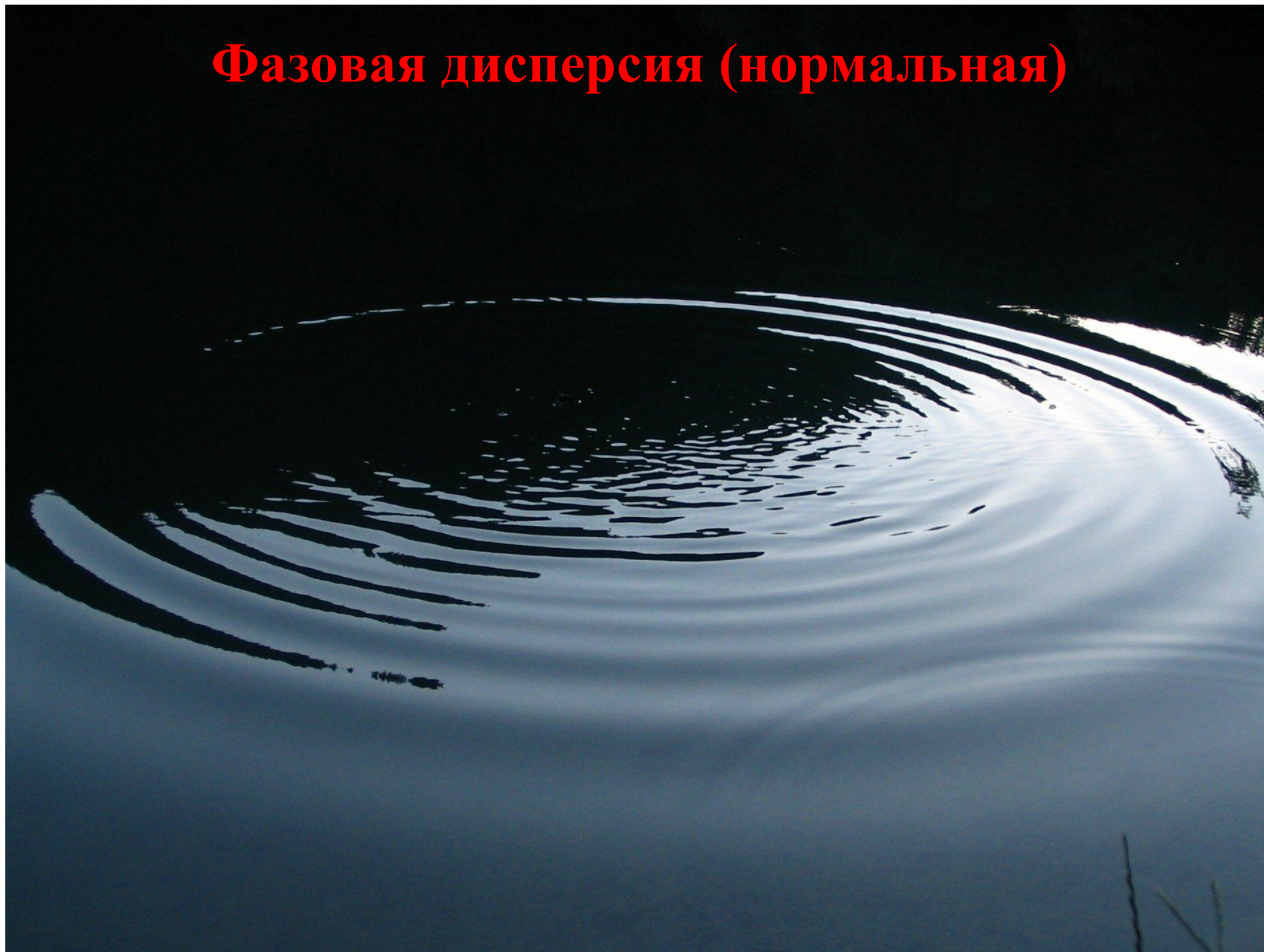
# Открытие солитона (1834 г.)



Джон  
Скотт  
Рассел  
(1808-1882)



# Фазовая дисперсия (нормальная)

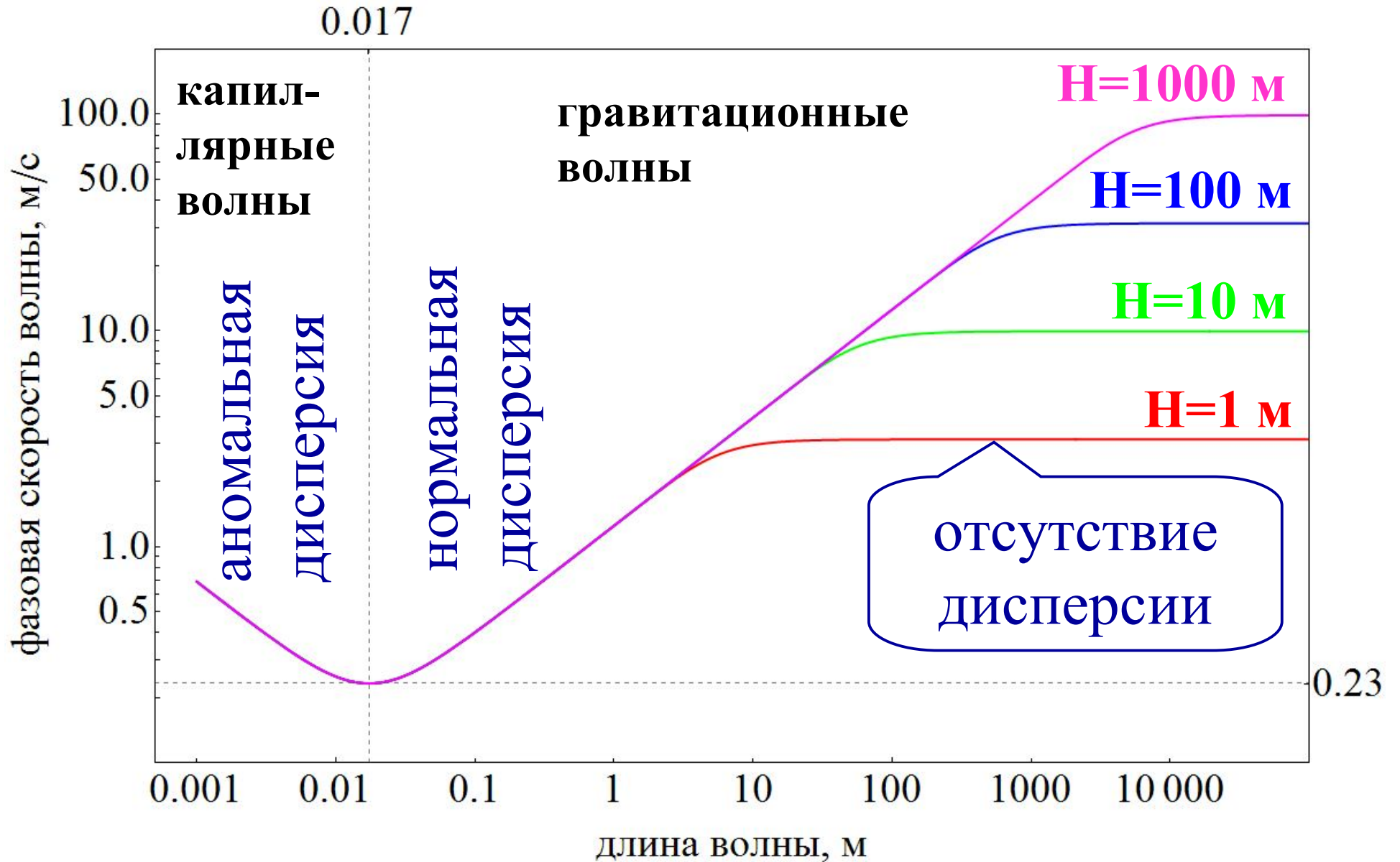




# Фазовая дисперсия (аномальная)

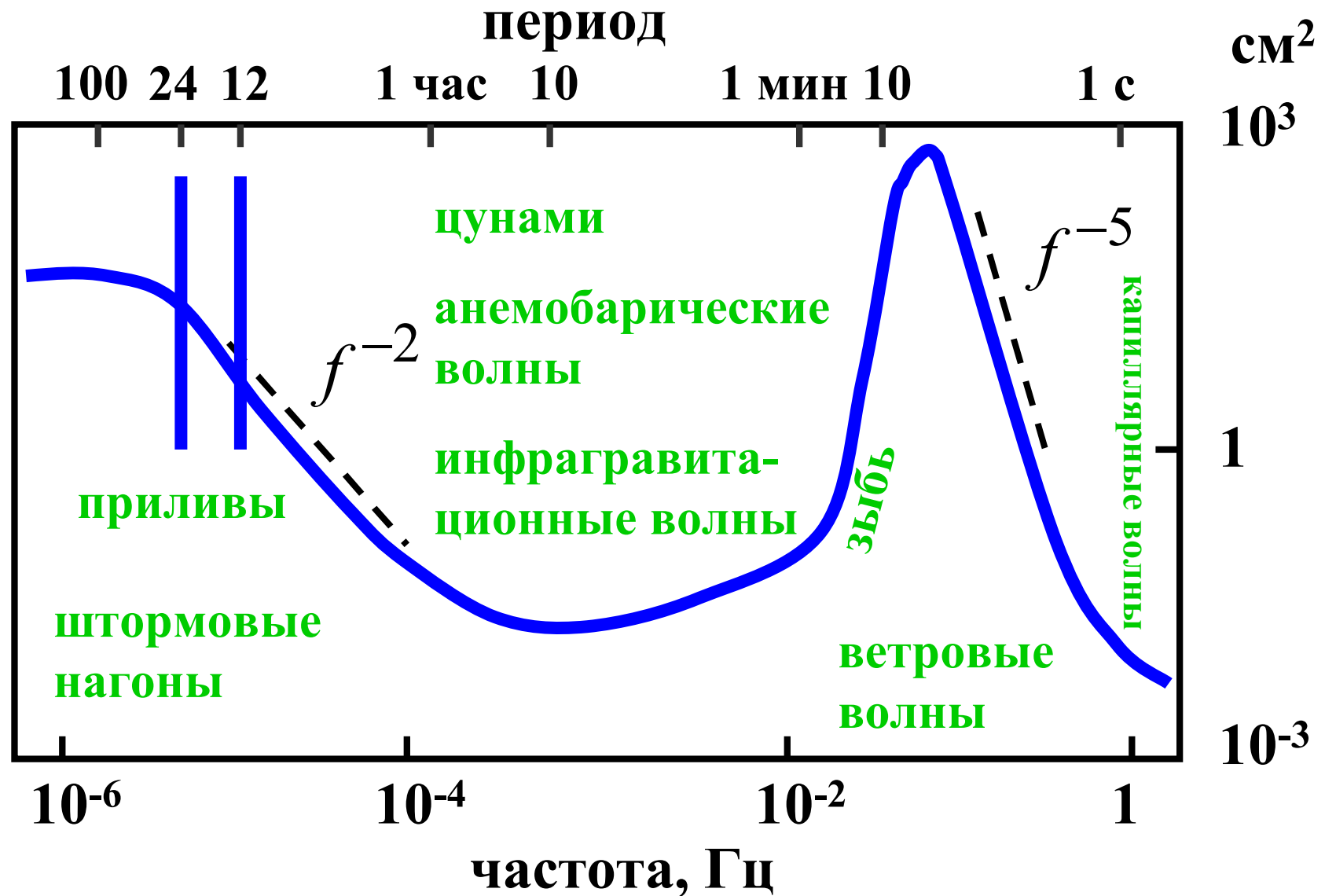


# Фазовая скорость поверхностных волн на воде как функция длины волны и толщины водного слоя $H$





# Спектр гравитационных поверхностных волн в океане



**Математическое  
описание волновых  
движений**

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{(\vec{v}, \vec{\nabla})} \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + \cancel{2[\vec{v} \times \vec{\omega}]} \\
 \phantom{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \nu \Delta \vec{v} + \cancel{\left( \zeta + \frac{\nu}{3} \right) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{v}} \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0
 \end{array} \right.$$



**Система уравнений для описания  
линейных волн без учета вращения Земли  
и сил вязкого трения**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \end{array} \right.$$

**Гравитационные  
волны**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \end{array} \right.$$

**Акустические  
волны**

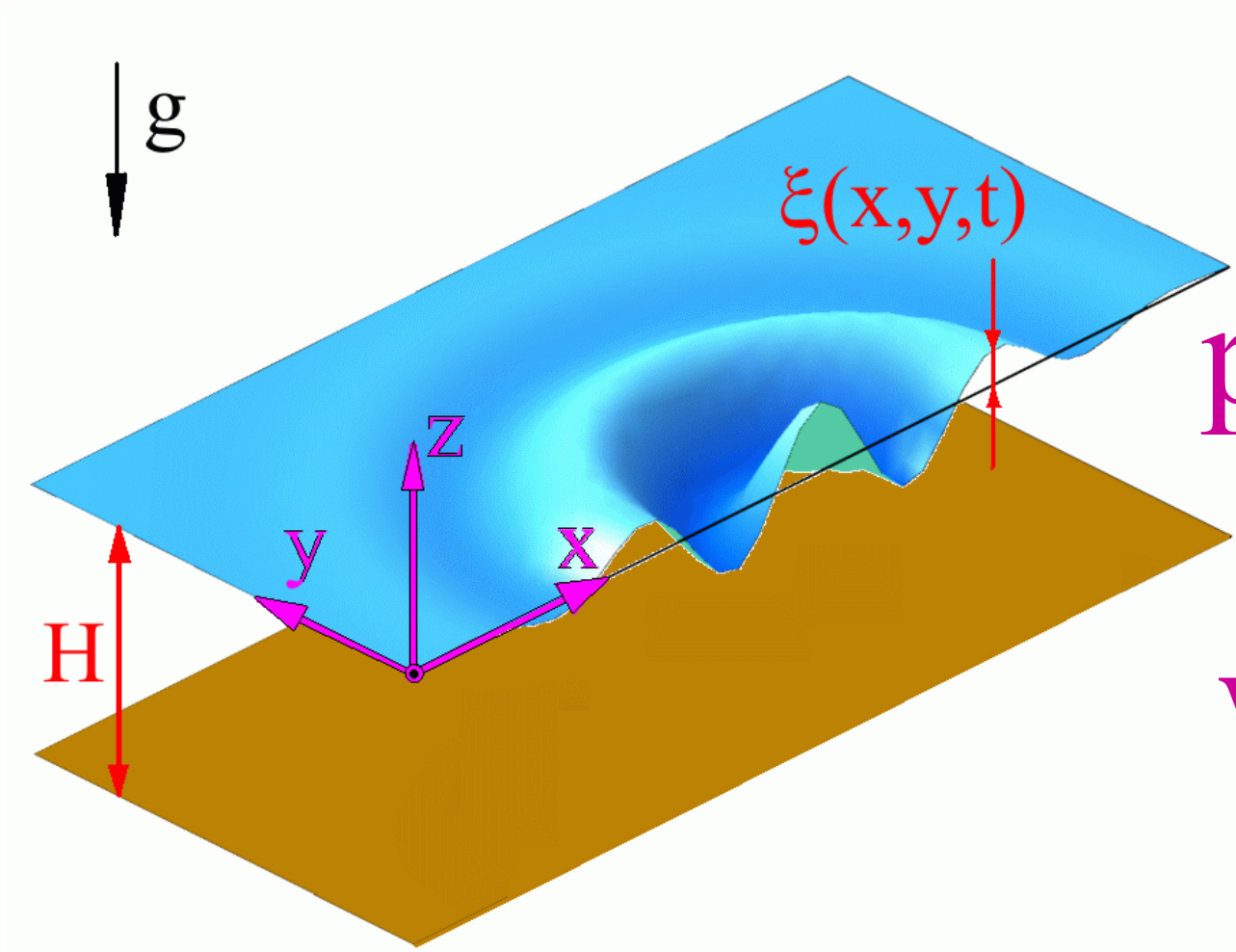
$$\vec{v} \equiv (u, v, w)$$

# Постановка задачи о поверхностных гравитационных волнах

Граничные условия:

$$p|_{z=\xi} = p_{\text{атм}}$$

$$w|_{z=-H} = 0$$



$$H = \text{const}$$

**Линейная теория длинных  
гравитационных волн  
ИЛИ  
теория “мелкой воды”  
( $\lambda \gg H$ )**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad |w| \sim \frac{H}{\lambda} |u_{\text{гориз.}}|$$

$$\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

**приближение  
гидростатики**

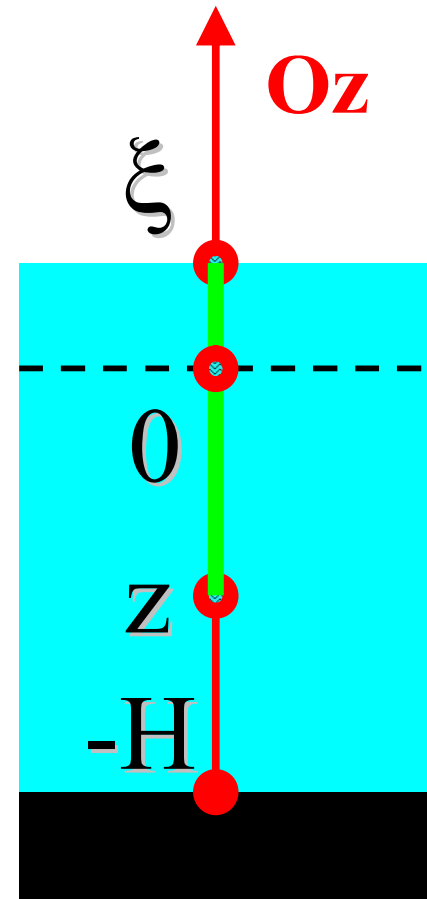


$$p(\xi) = p_{\text{atm}} = \text{const}$$

$$\int_z^\xi dz \left| \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \right.$$

$$p(\xi) - p(z) = -\rho g(\xi - z)$$

$$p(x, y, z, t) = p_{\text{atm}} + \rho g \xi(x, y, t) - \rho g z$$



$$p(x, y, z, t) = p_{\text{atm}} + \rho g \xi(x, y, t) - \rho g z$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

 $\Rightarrow$ 

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

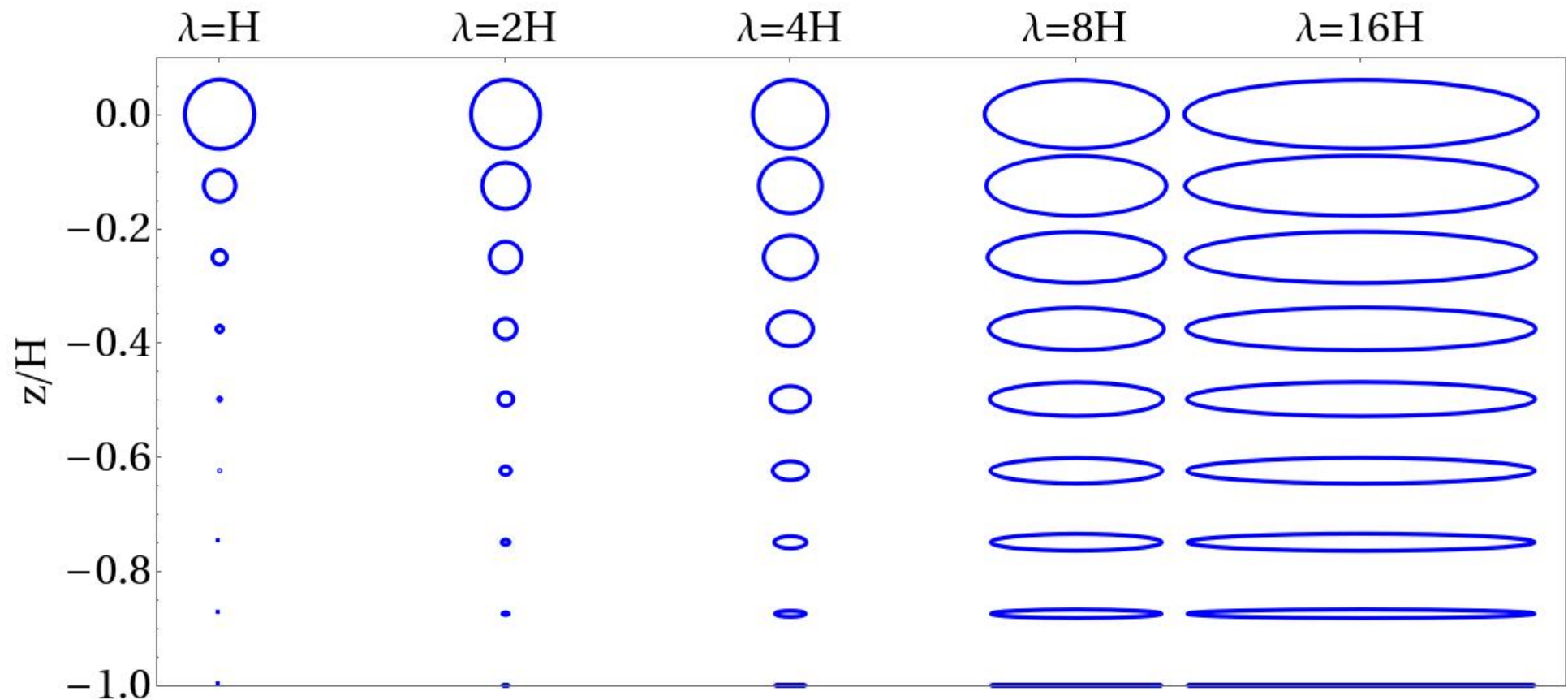
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

 $\Rightarrow$ 

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$(u, v) \neq f(z)$

# Траектории частиц в поверхностных волнах малой амплитуды





$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\int_{-H}^{\xi} dz$$

$$|\xi| \ll H$$

$$(H + \cancel{\xi}) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + w(\xi) - w(-H) = 0$$

$$H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

**0**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -g \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} = -g \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$

$$H \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

# Волновое уравнение для описания длинных гравитационных волн

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{gH}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)$$

Смещение  
поверхности  
воды

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \xi$$

$$c = \sqrt{gH}$$

скорость  
длинных волн

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$u = u_0 f(x - ct)$$

$$\xi = \xi_0 f(x - ct)$$

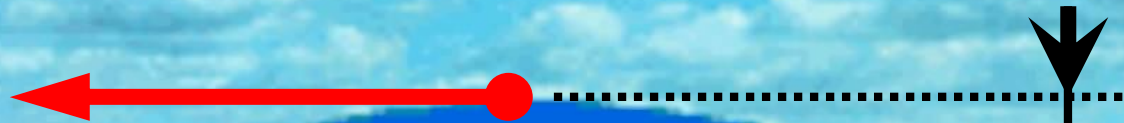
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cu_0 f'$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi_0 f'$$



$$-cu_0 f' = -g\xi_0 f'$$

$$u_0 = \xi_0 \frac{g}{c} = \xi_0 \frac{g}{\sqrt{gH}} = \xi_0 \sqrt{\frac{g}{H}}$$



$\sim 100 \text{ км}$

$A \sim 1 \text{ м}$

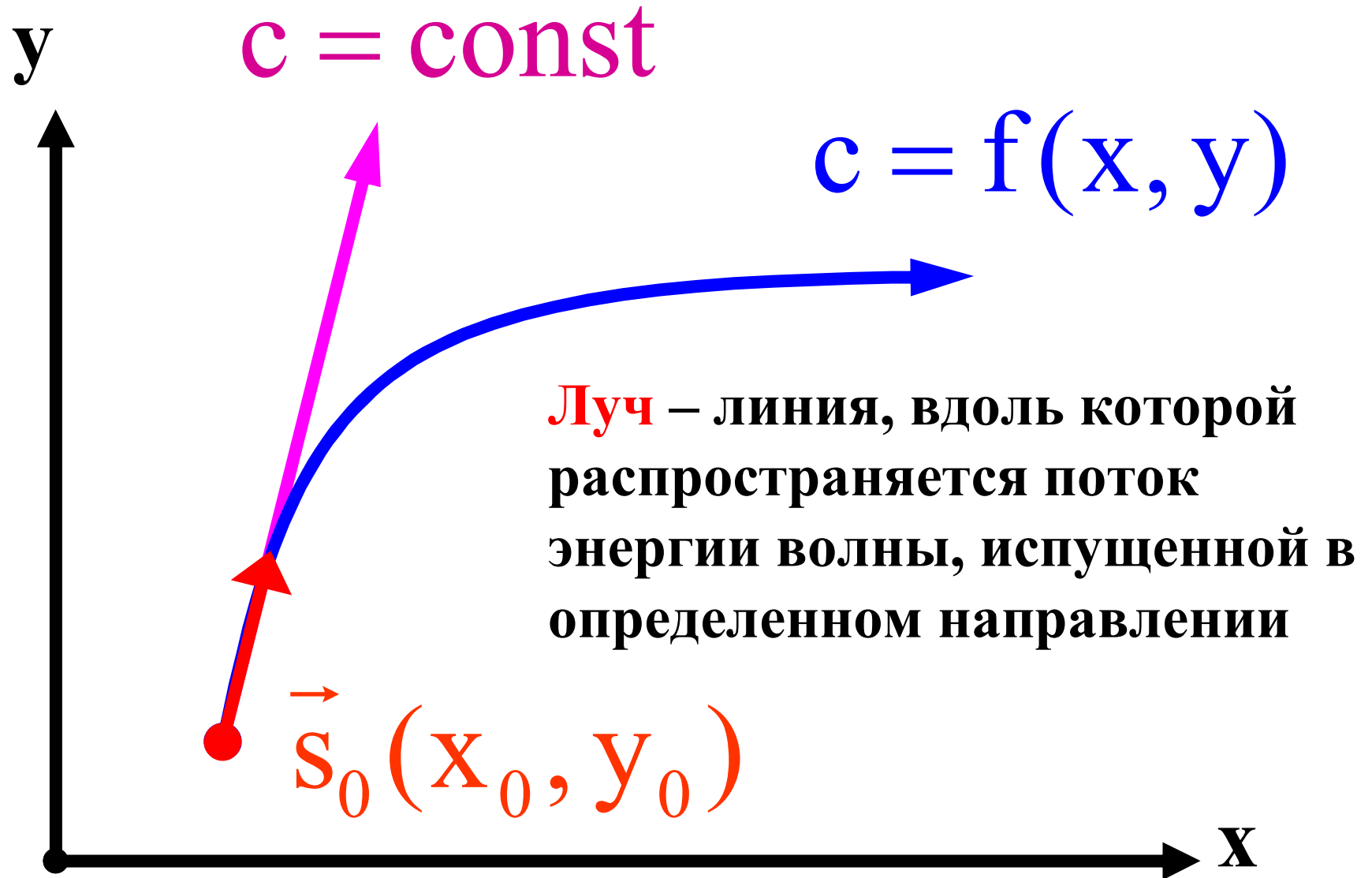
$H \approx 4 \text{ км}$

$$c = \sqrt{gH} \approx 200 \text{ м/с}$$

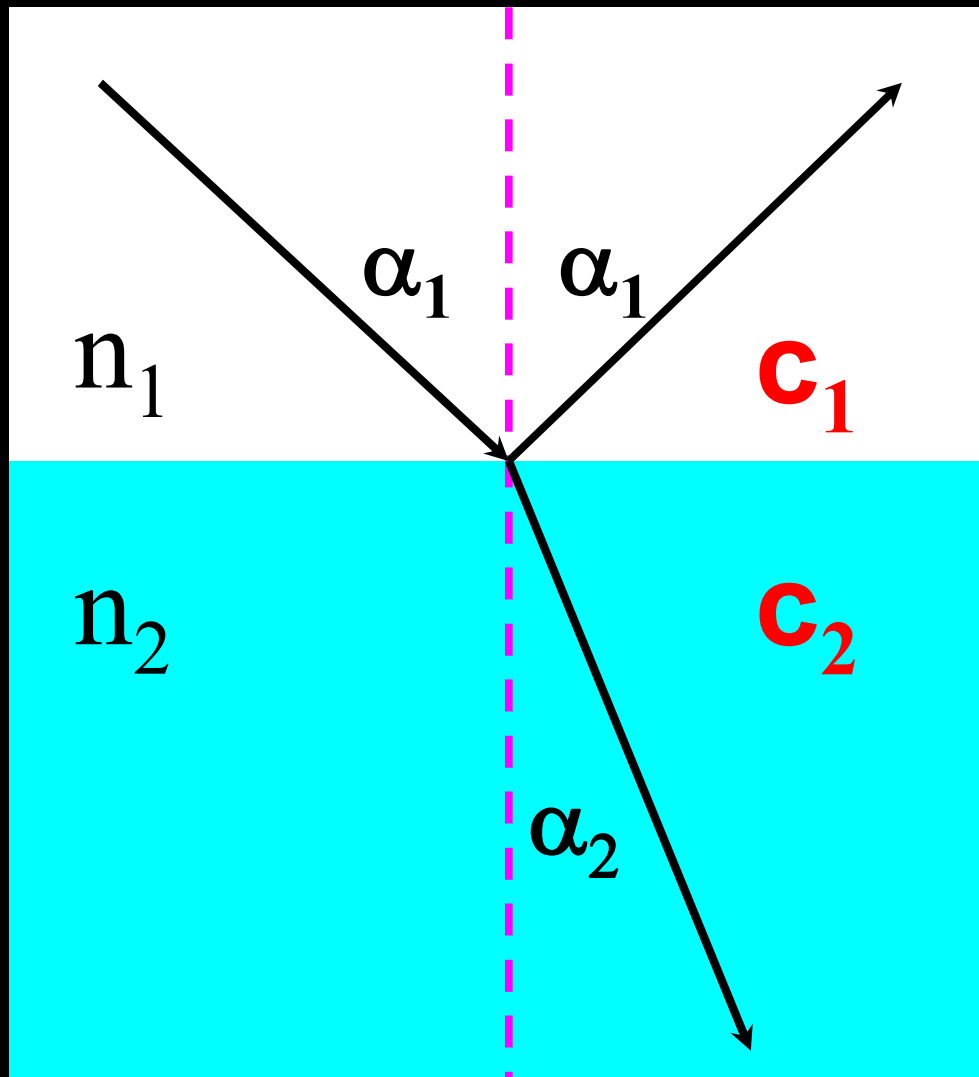
$$U_{\text{гориз}} = A \sqrt{g/H} \approx 0.05 \text{ м/с}$$



# Приближение «геометрической оптики»



# Закон Снеллиуса

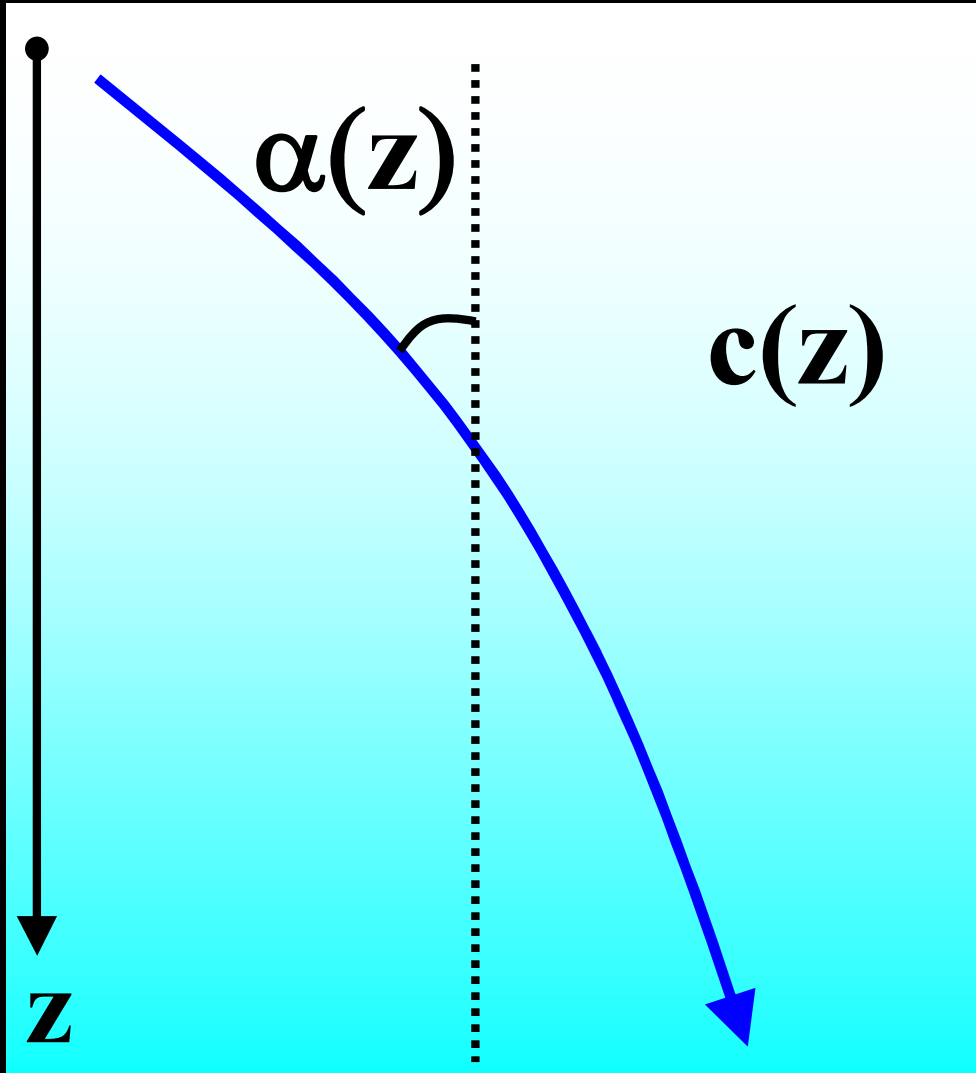


$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$n = c_0 / c$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

# Рефракция

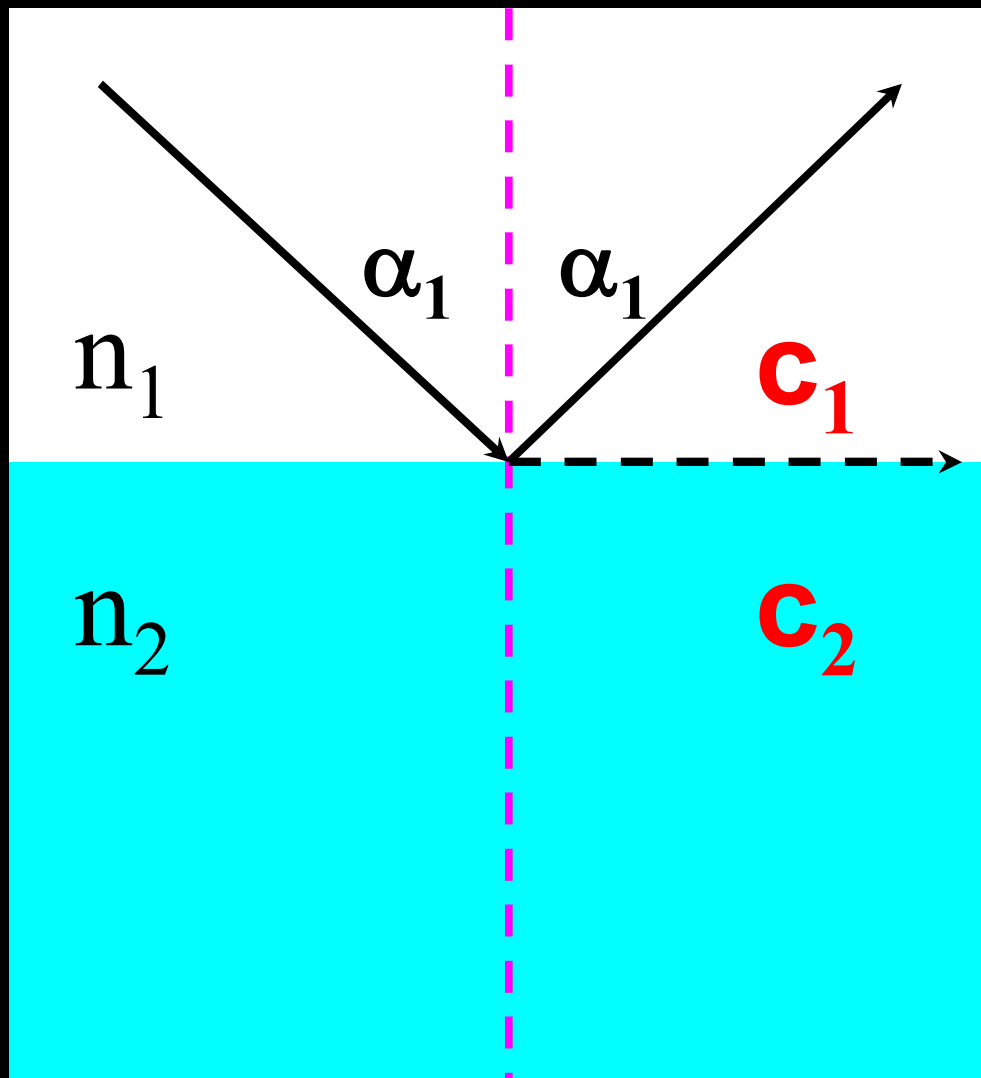


$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{\sin \alpha(z)}{c(z)} = \text{const}$$

**Рефракция** – изменение направления волновых лучей в среде  $c$  (плавно) изменяющейся в пространстве скоростью

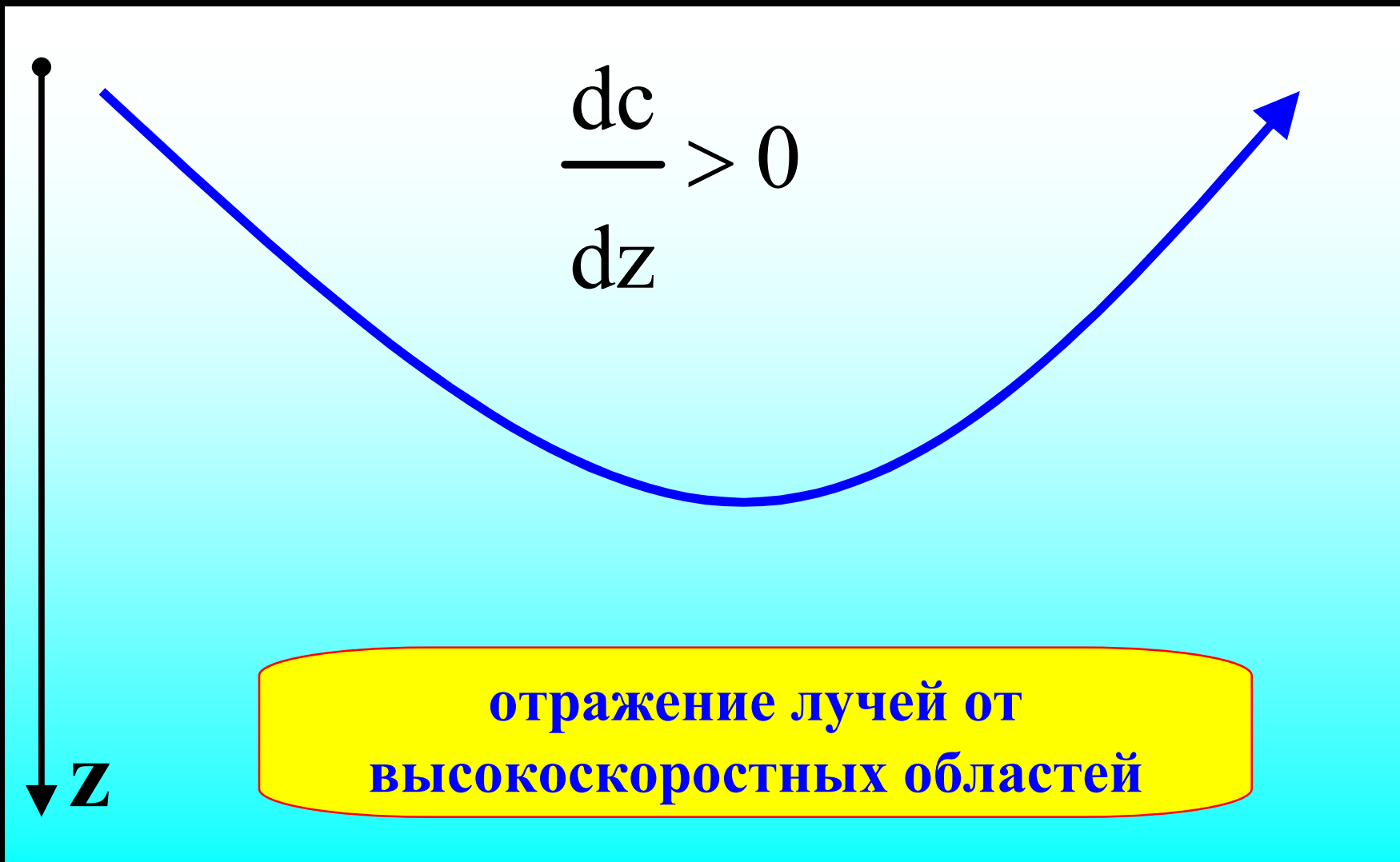
# Полное внутреннее отражение



$$n_2 < n_1$$

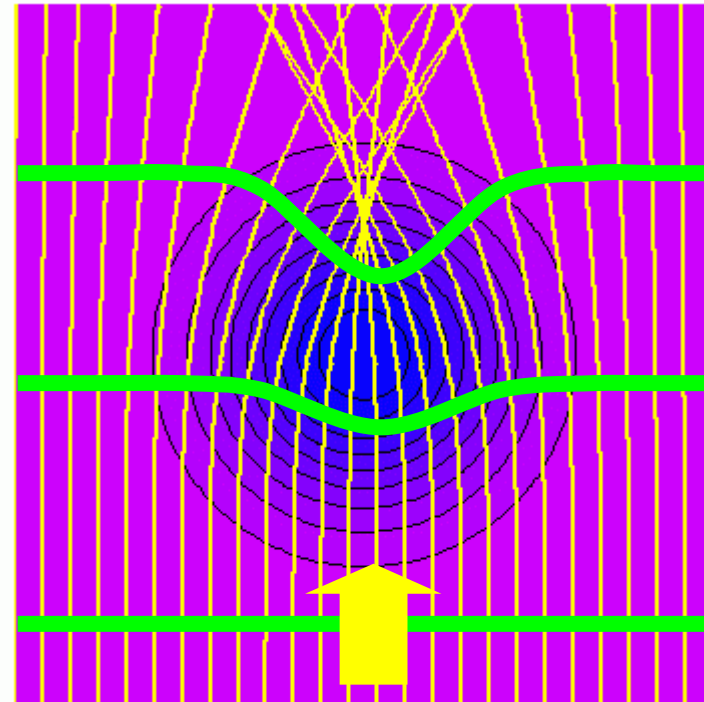
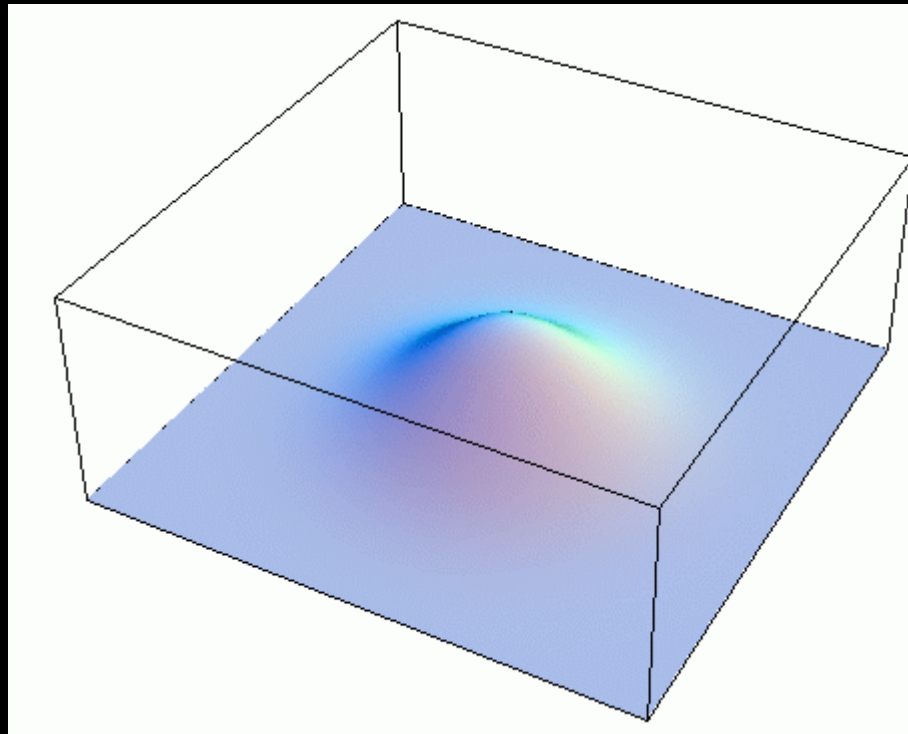
$$c_2 > c_1$$

# Полное внутреннее отражение

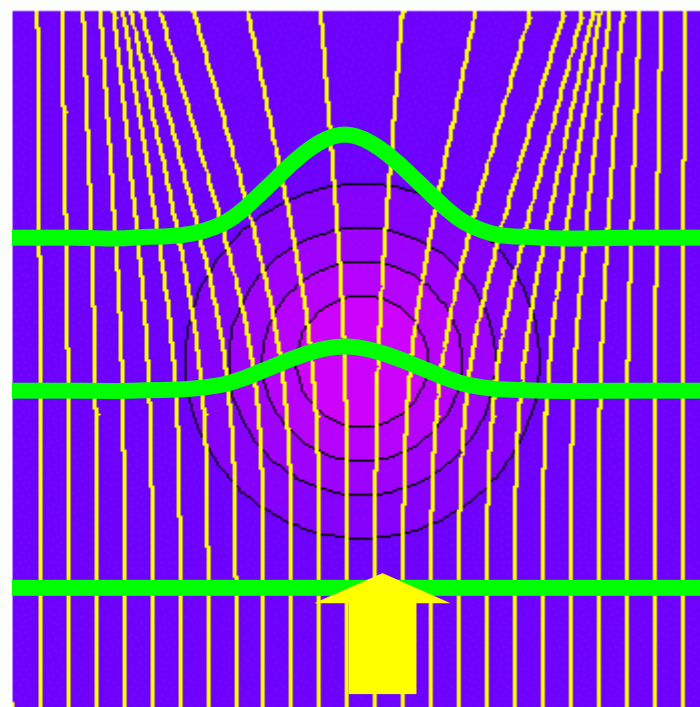
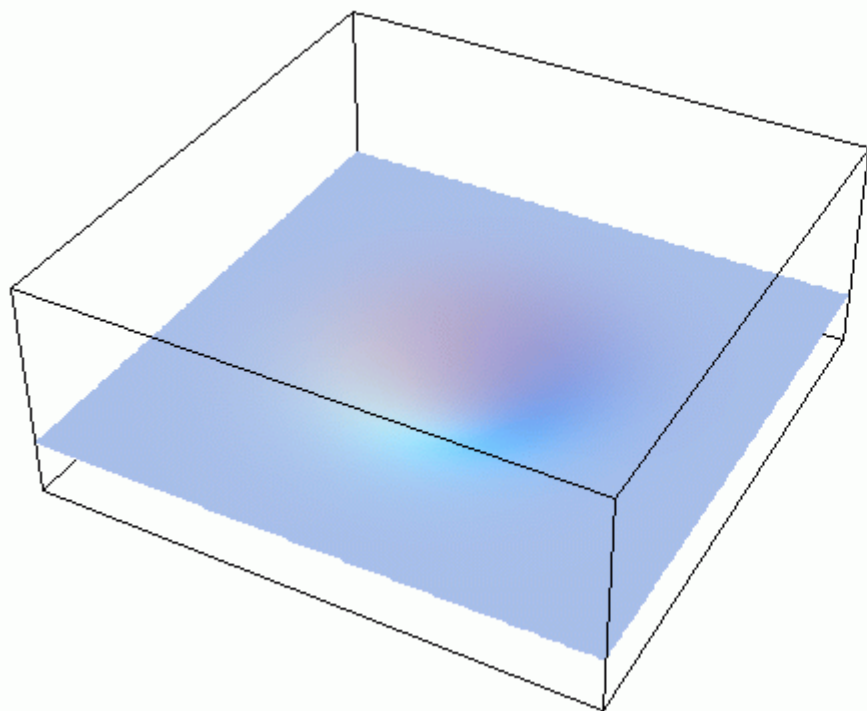




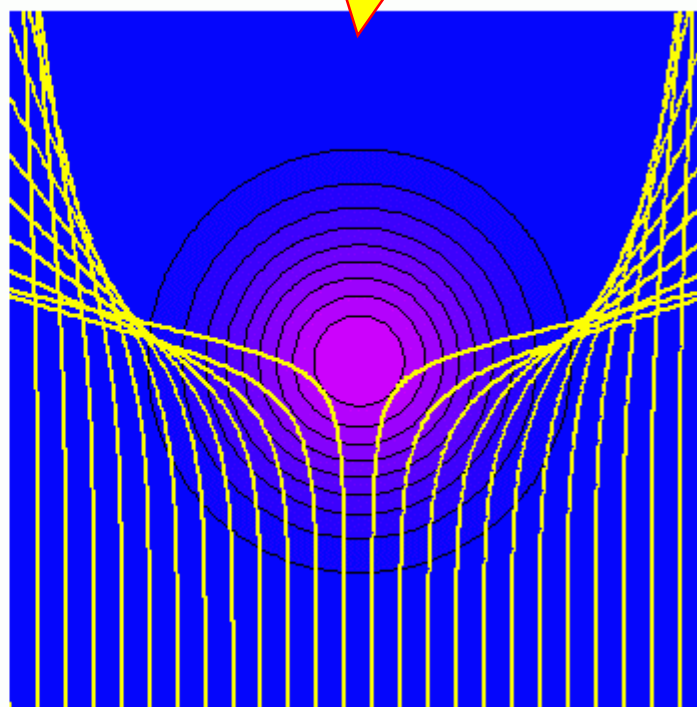
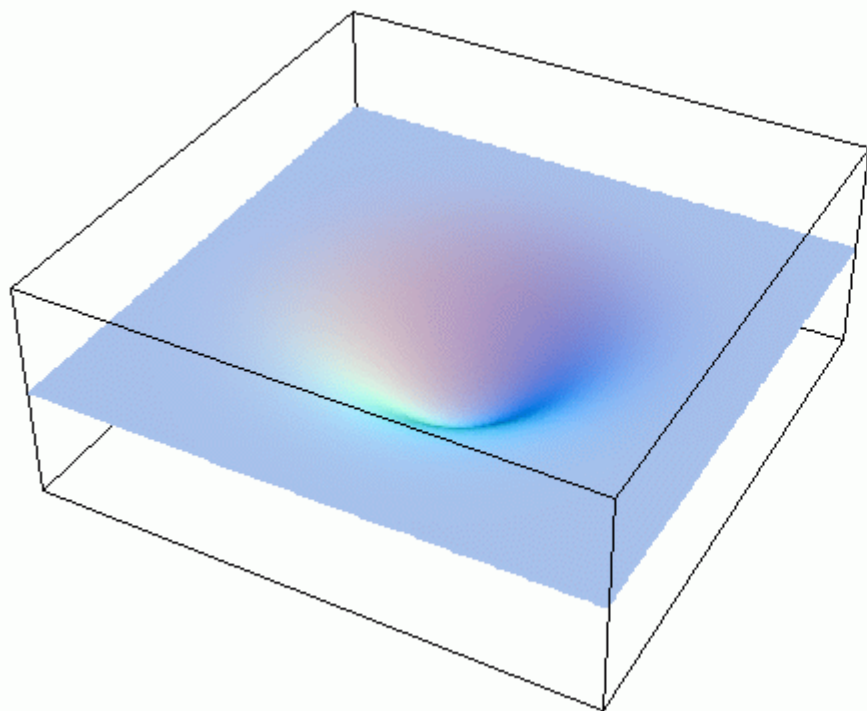
# Фокусировка лучей областью с пониженной скоростью распространения волн



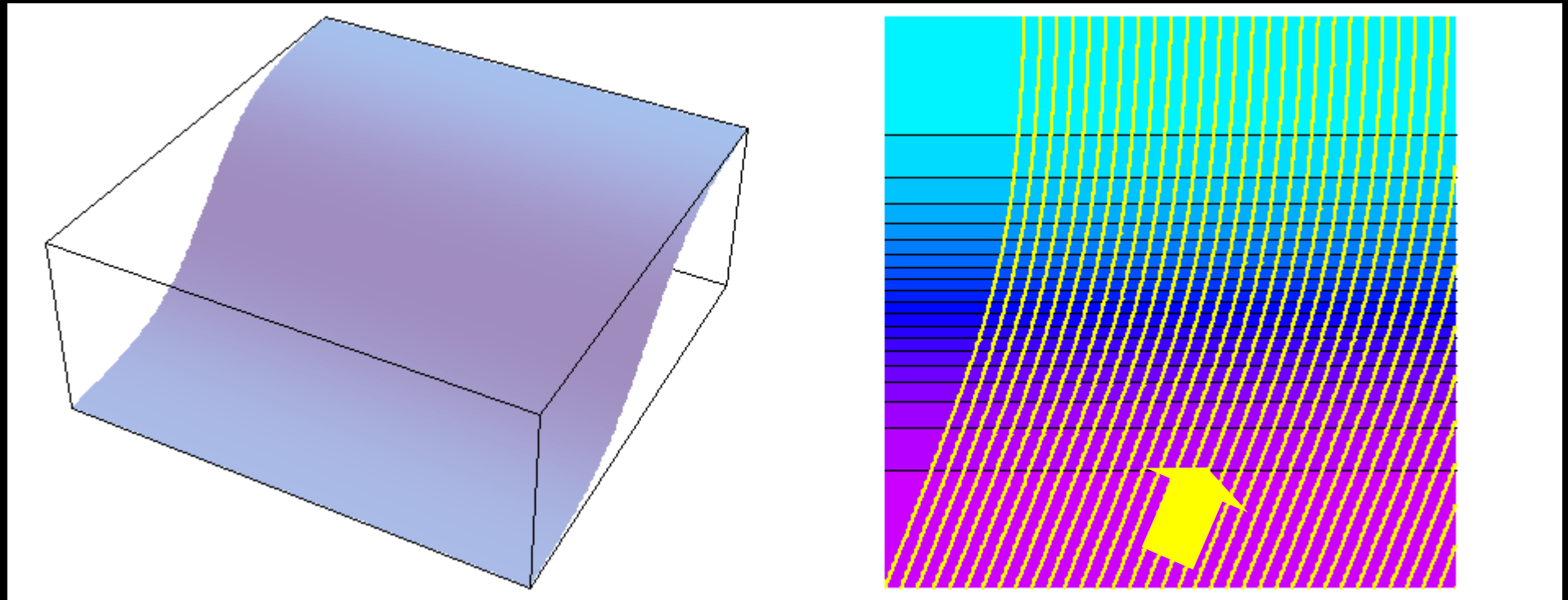
# Дефокусировка лучей областью с повышенной скоростью распространения волн



# Зона тени



# Рефракция гравитационных волн в прибрежной зоне

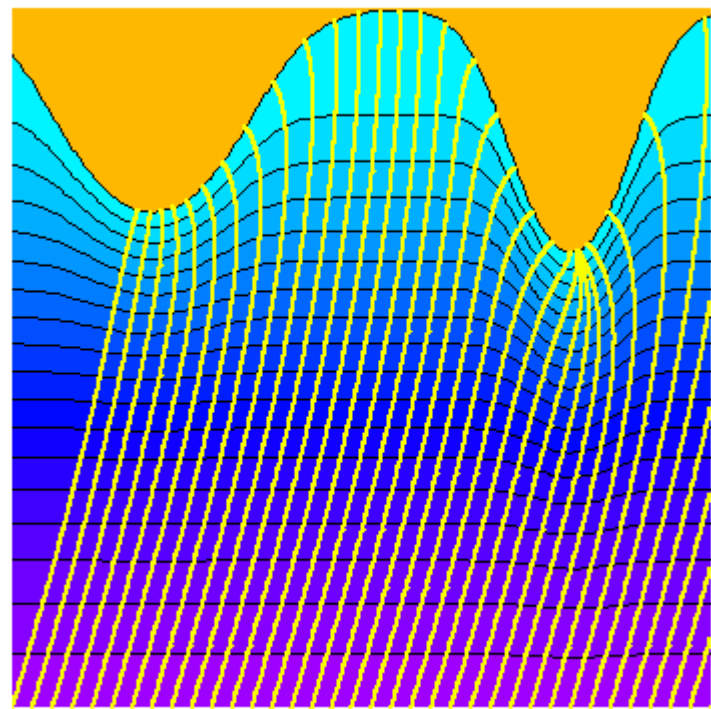
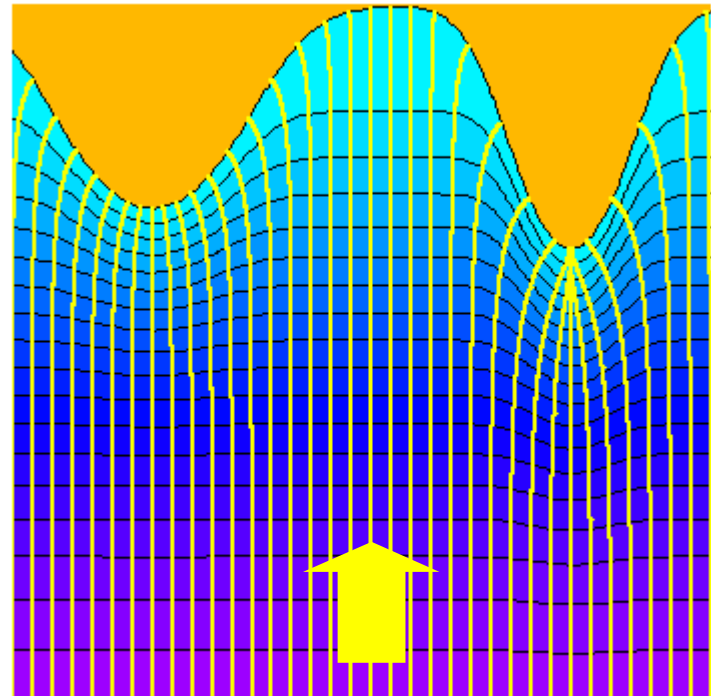
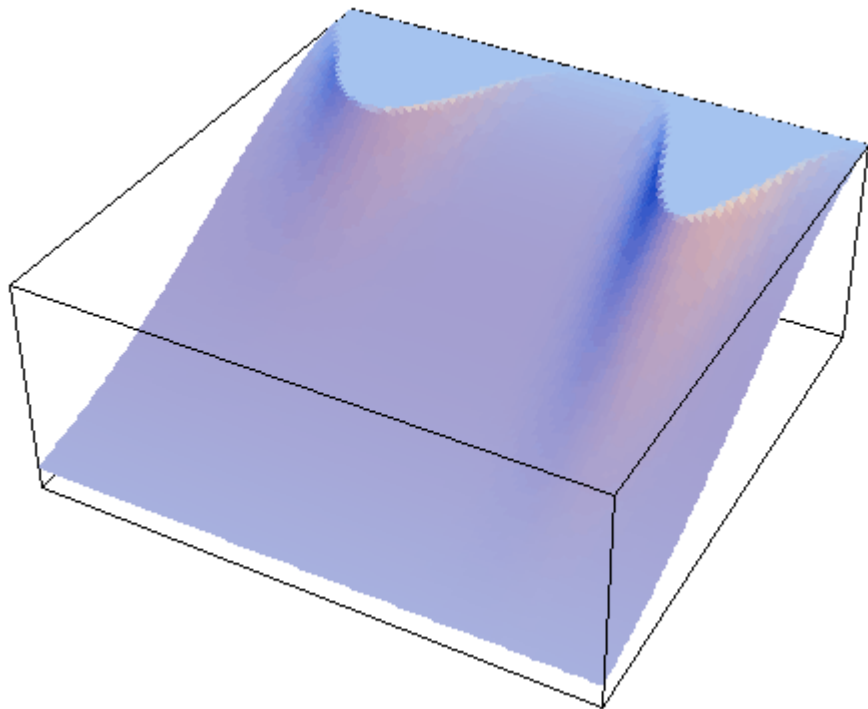
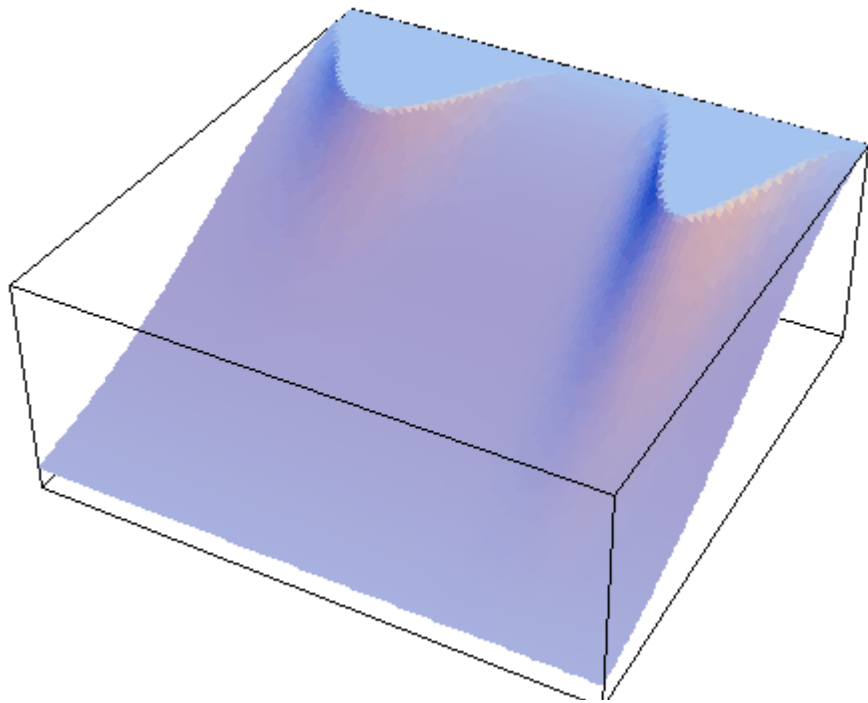


**Волновые лучи подходят к  
побережью по нормали**

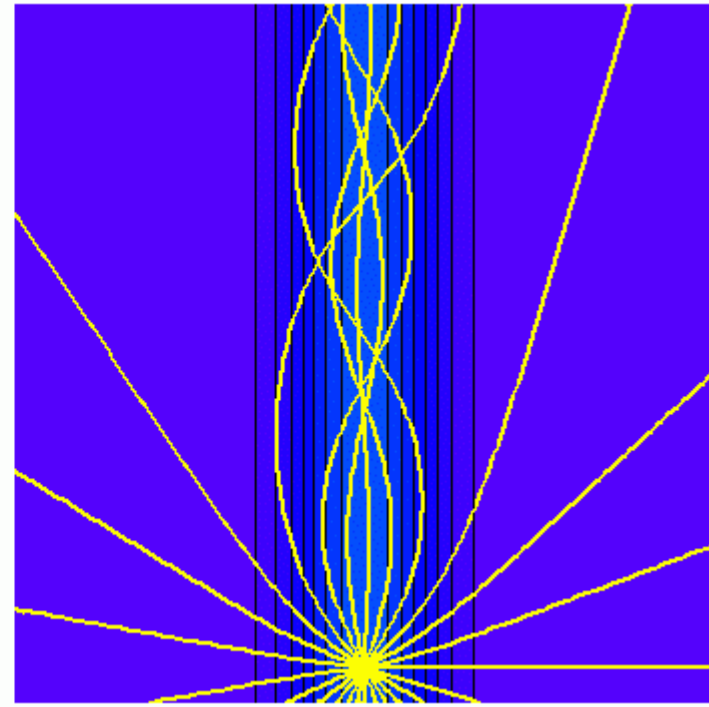
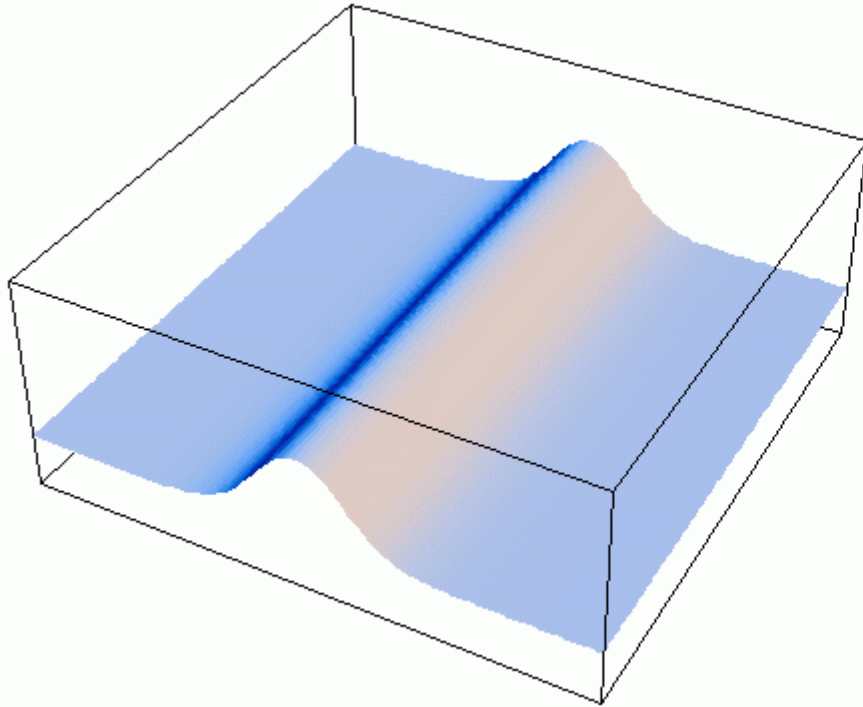
# Концентрация волновой энергии на мысах и защищенность бухт

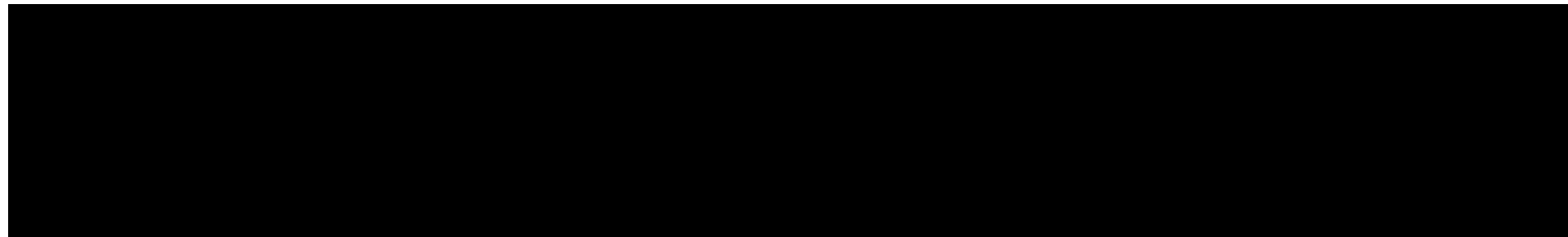
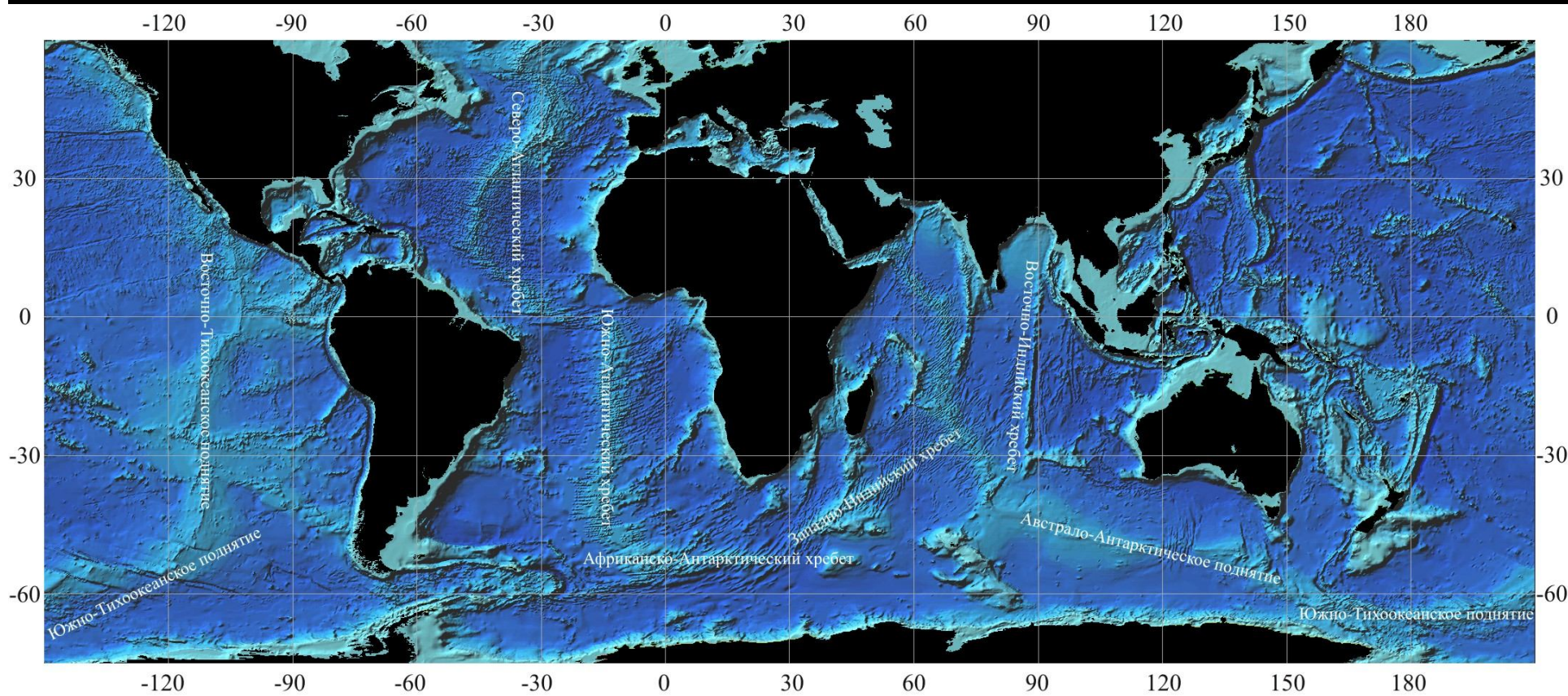
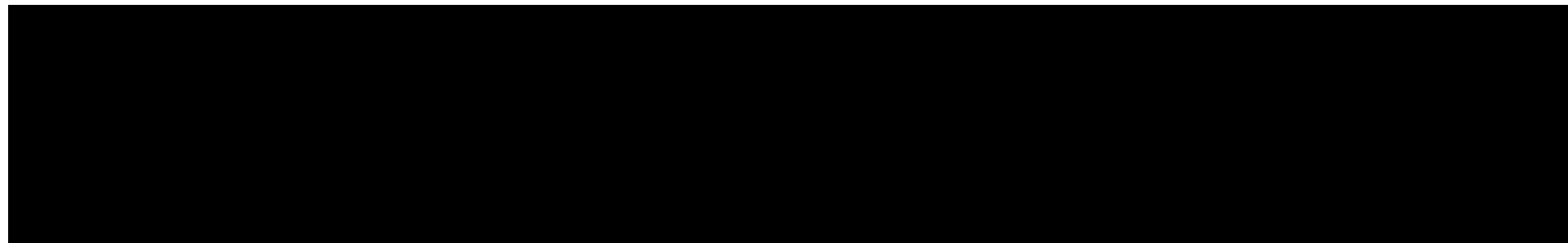






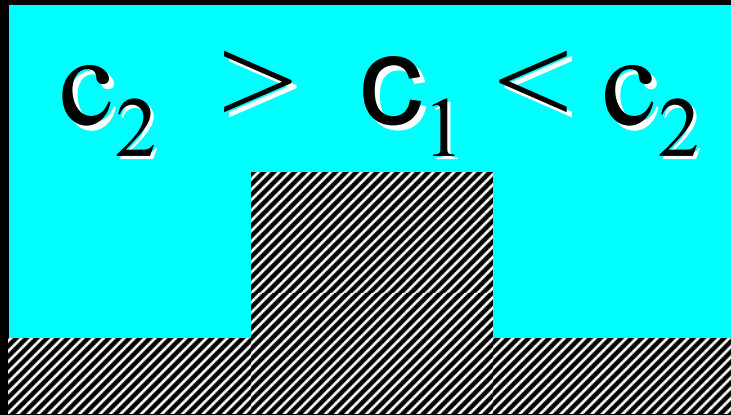
# Захват волн подводными хребтами



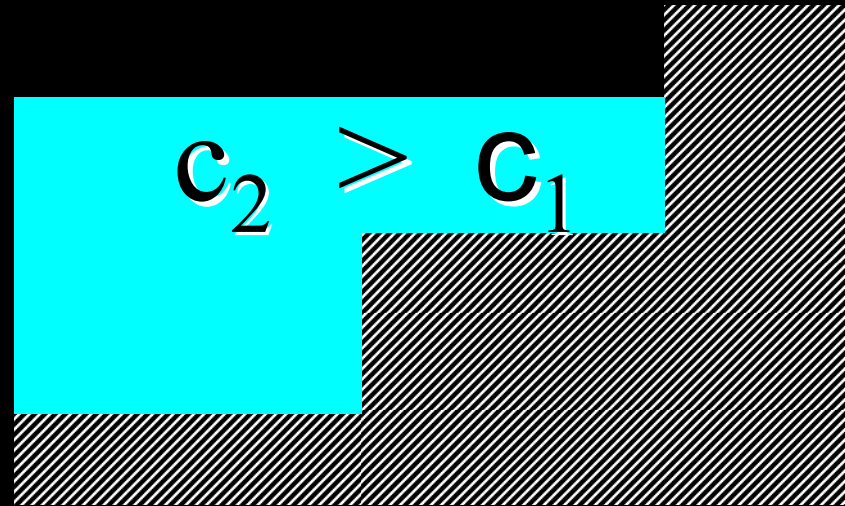


# Захваченные волны

ПОДВОДНЫЙ  
хребет



МАТЕРИКОВЫЙ  
склон и берег





# Захват длинных волн шельфом (Babi Island, the 1992 Flores tsunami)

500 м  
1000 фт





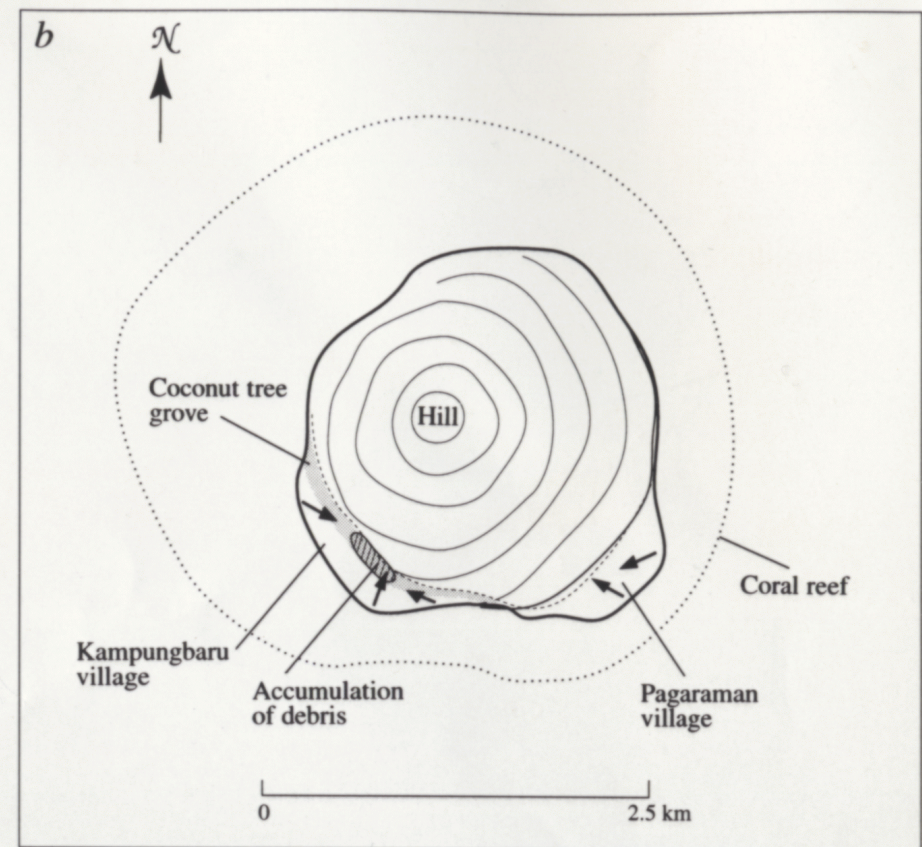
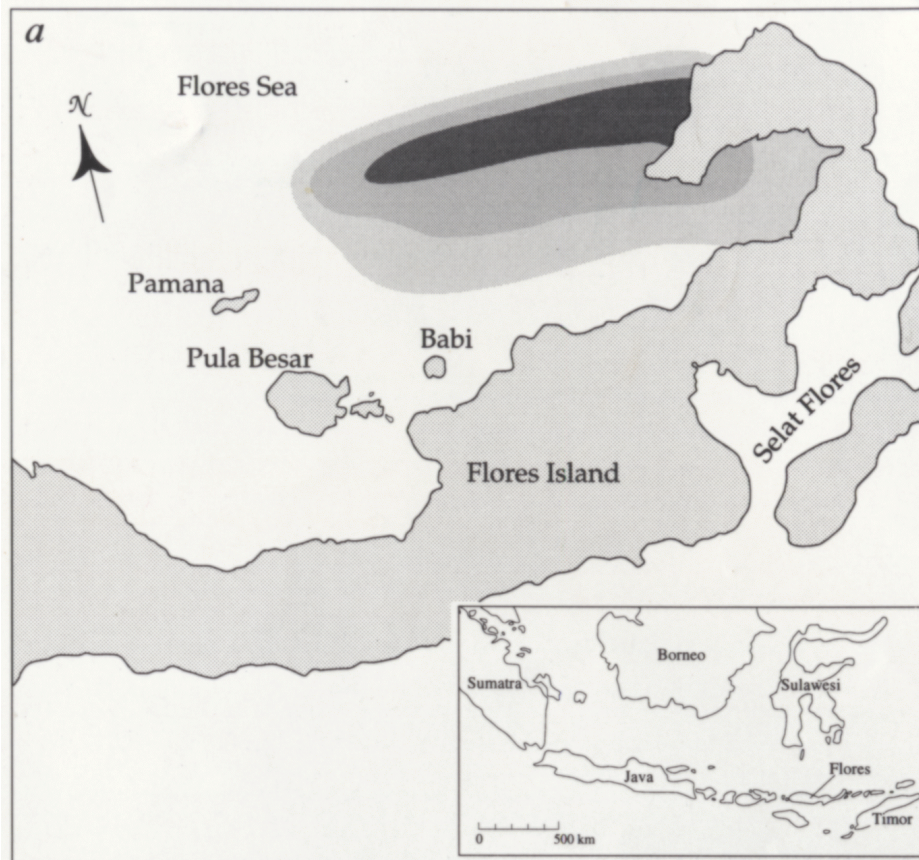
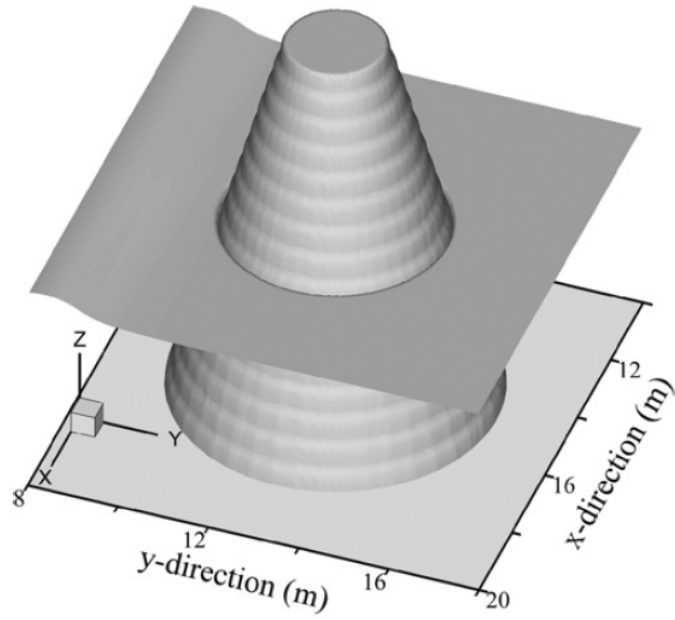


FIG. 1 *a*, Babi Island is located ~5 km offshore from Flores Island, Indonesia. Although detailed sea bottom sounding data are not available, the underwater slope from the island is steep: the 100-m-deep contour around the island is very close to the shore, one sounding in the narrow gap between Babi and Flores is 241 m deep, and the 860-m sounding point in the Flores Sea is 10 km from the island. The shaded areas in the Flores Sea, which represent 3-m, 2-m and 1-m contours, respectively, are estimated vertical tectonic displacement of sea floor where tsunamis were generated<sup>10</sup>. *b*, Details of Babi Island. Near the

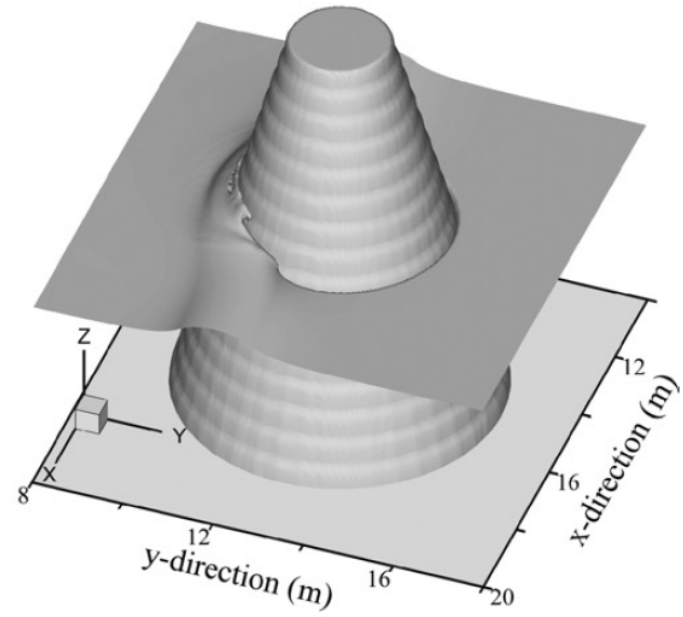
middle of the south shore, there is a small tidal flat which separates Kampungbaru village (on the west side) from Pagaraman village (on the east side). Both villages were completely destroyed by the tsunamis. The tsunami run-up directions, indicated by solid arrow marks, were estimated from the directions of tree falls and debris accumulations (based on field notes taken by H.Y. and F. Imamura during the survey in 1992–93). The maximum tsunami run-up heights are 5.6 m in Pagaraman and 7.1 m in Kampungbaru, respectively.

*[Yeh et al, 1994]*

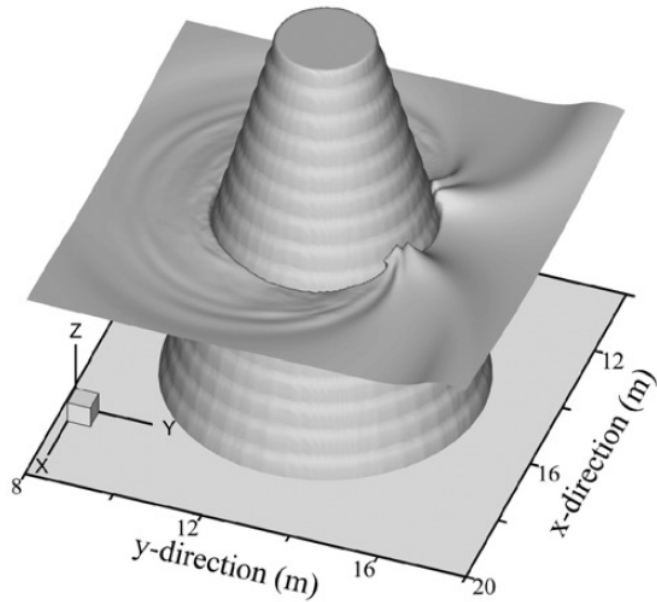




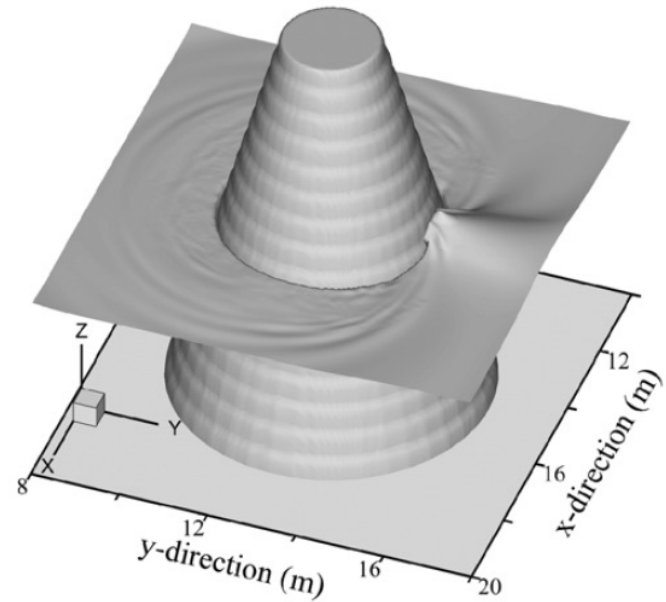
(a)  $t = 7.0$  sec



(b)  $t = 9.0$  sec



(c)  $t = 12.0$  sec



(d)  $t = 13.0$  sec



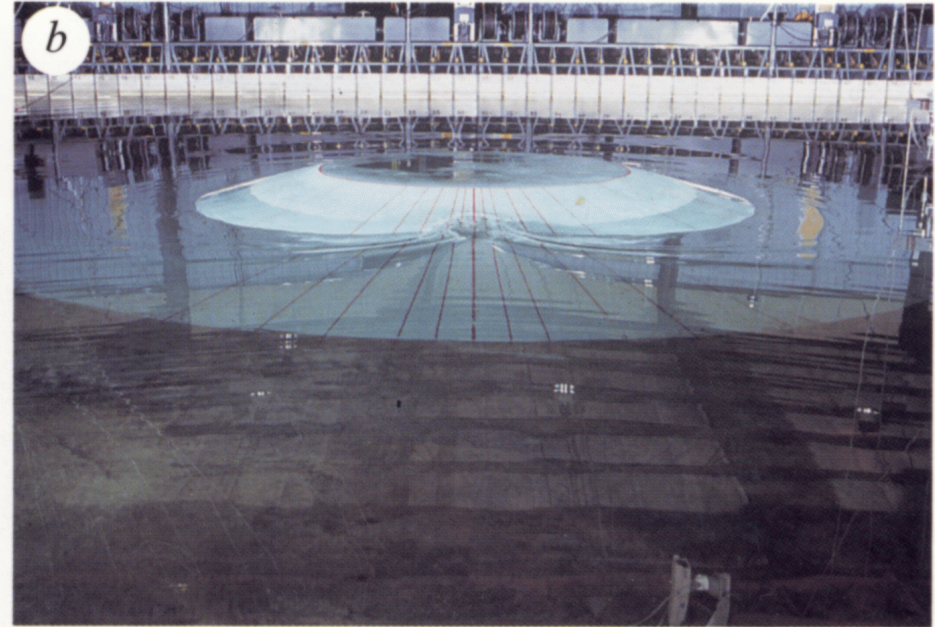
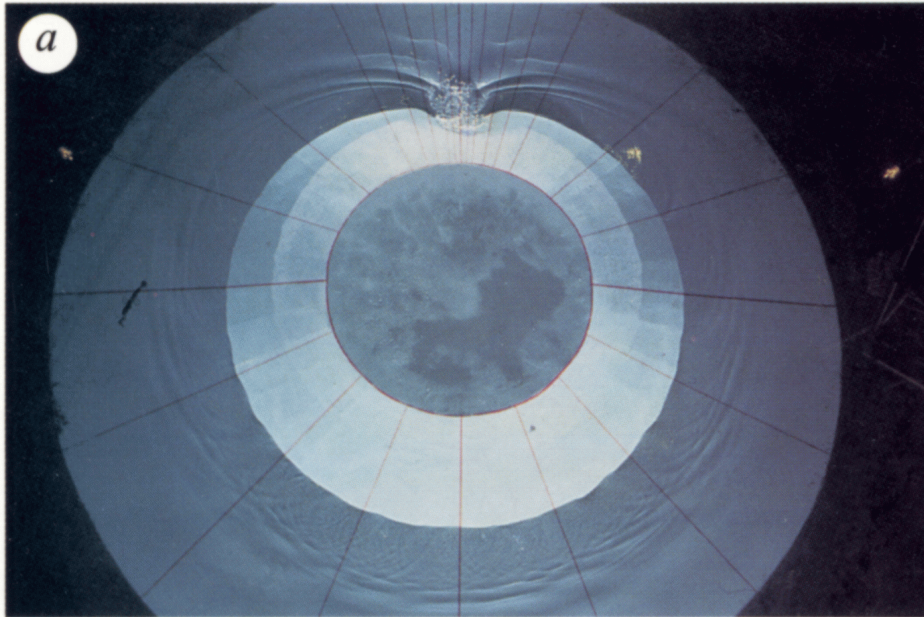


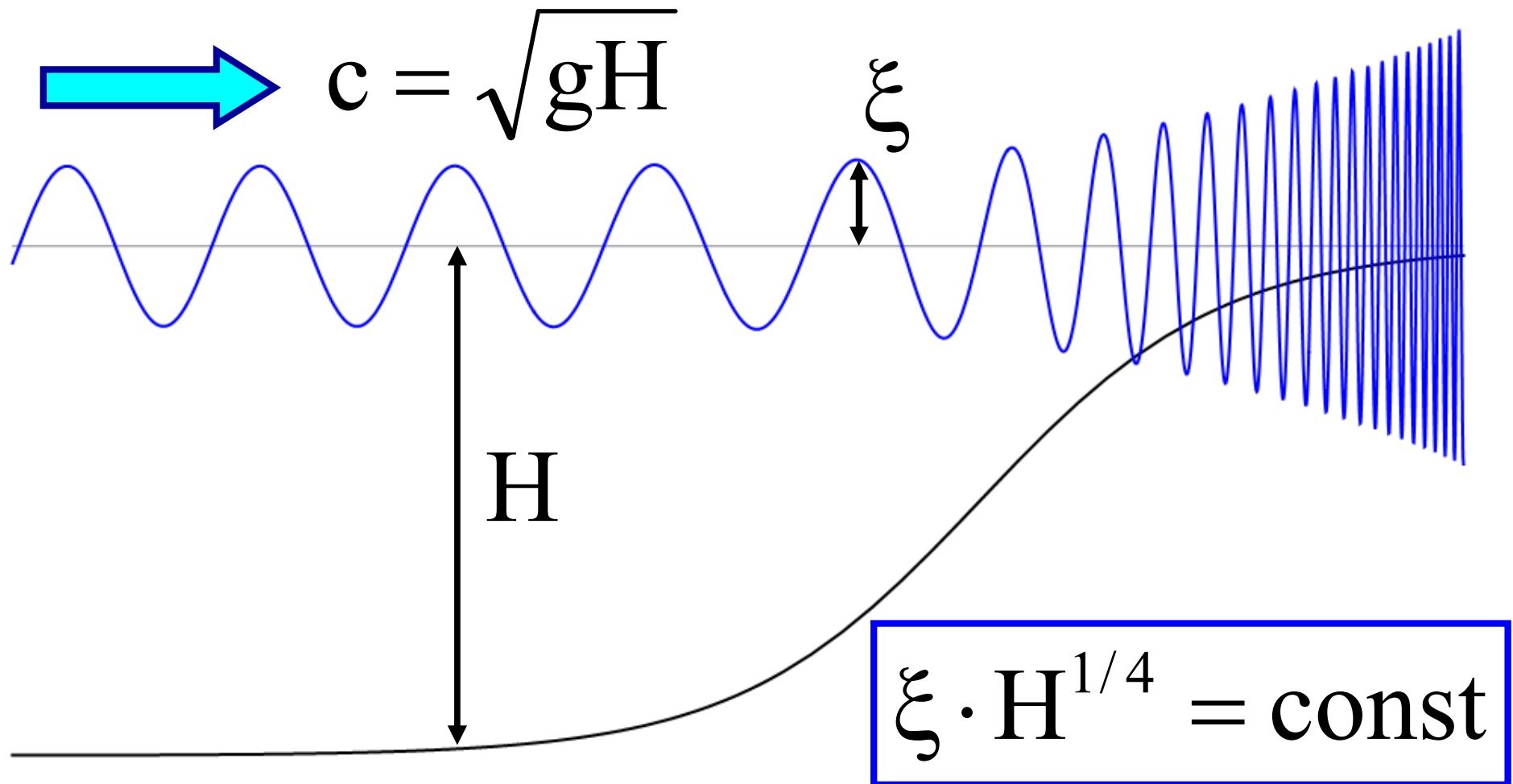
FIG. 3 Views of wave run-up onto the rear side of the cone-shaped island in the laboratory model. *a*, Top view; the wave struck the island from the bottom of the photograph. *b*, Wave paddles are visible beyond

the island. To generate a solitary wave in a precisely controlled manner, the hydraulic powered electro-servo system was used to set the vertical paddles in motion in the horizontal direction.

*[Yeh et al, 1994]*

## Закон Грина (закон "1/4")

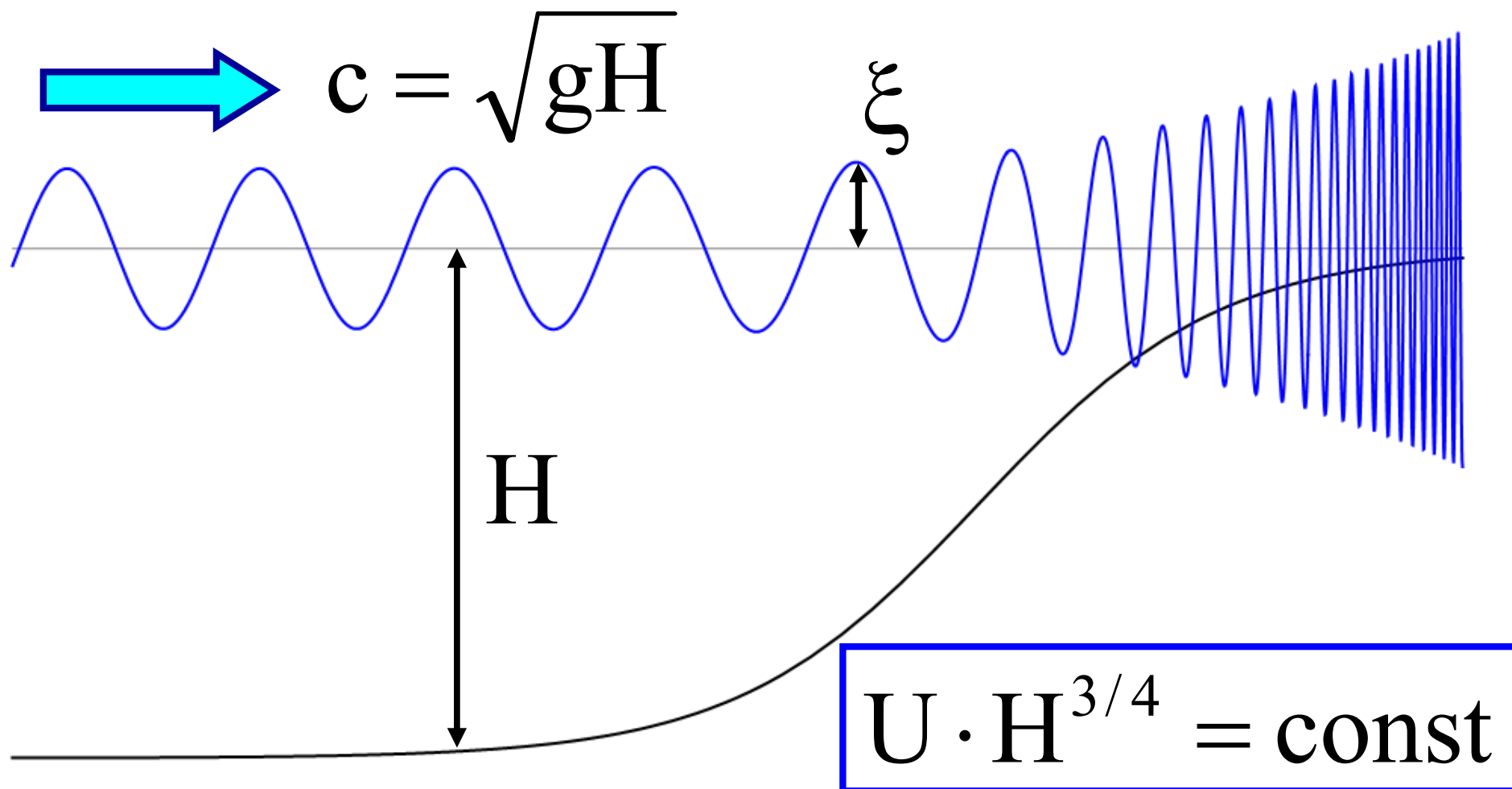
$$W \sim \xi^2 \quad Q \sim \xi^2 c \sim \xi^2 \sqrt{H} = \text{const}$$



# Закон для скорости течения (закон «3/4»)

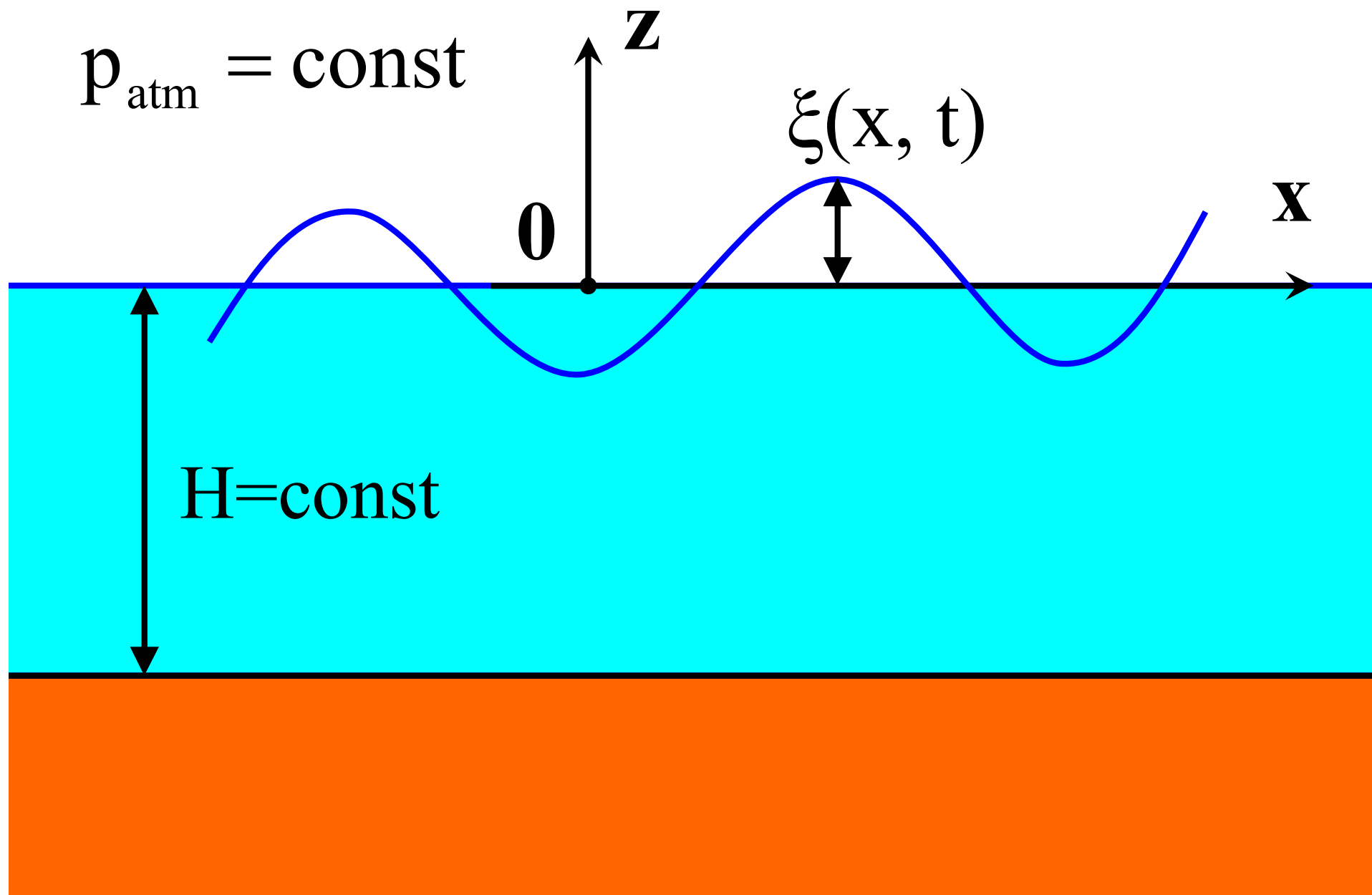
$$W \sim U^2 H$$

$$Q \sim U^2 H c \sim U^2 H^{3/2} = \text{const}$$



**Элементы  
линейной  
потенциальной  
теории волн**

# Постановка 2D задачи (0xz)



# Система уравнений для описания гравитационных волн малой амплитуды в несжимаемой жидкости

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{v} \equiv (u, w)$$

Граничные условия:

$$p|_{z=\xi} = p_{\text{atm}} = \text{const}$$

$$w|_{z=-H} = 0$$

# Потенциал скорости течения

$$\vec{v} = \vec{\nabla}F + \cancel{\vec{\nabla} \times \vec{A}} \quad \text{или} \quad u = \frac{\partial F}{\partial x} \quad w = \frac{\partial F}{\partial z}$$

течение безвихревое

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\Delta F = 0$$

основное уравнение  
потенциальной теории

$$G = -gz$$

гравитационный  
потенциал

$$\vec{g} = \vec{\nabla}G$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{g}$$

$$\vec{\nabla} \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t)$$

произвольная функция времени



$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t)$$

используем для постановки  
граничного условия на свободной  
поверхности воды

$$z = \xi : p = p_{\text{atm}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + g\xi = f(t) - \frac{p_{\text{atm}}}{\rho}$$

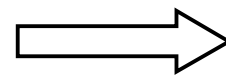
Переопределим потенциал,  
добавив к нему функцию времени,  
компенсирующую  $f(t) - p_{\text{atm}}/\rho$ . На  
поле скорости это не повлияет.

$$\frac{\partial F}{\partial t} + g\xi = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \partial \\ \partial t \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

граничное условие сносим с возмущенной поверхности на невозмущенную

$$z = 0 : \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + gw = 0$$



$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

**Математическая постановка 2D задачи о  
линейных гравитационных волнах  
бесконечно малой амплитуды**

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \Delta F = 0$$

$$z = 0 : \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$z = -H : \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$