

Геофизика




2023 Лекция №13

Носов Михаил Александрович

отделение геофизики, физический факультет МГУ

<http://ocean.phys.msu.ru/courses/geo/>



Волновые движения в океане и атмосфере

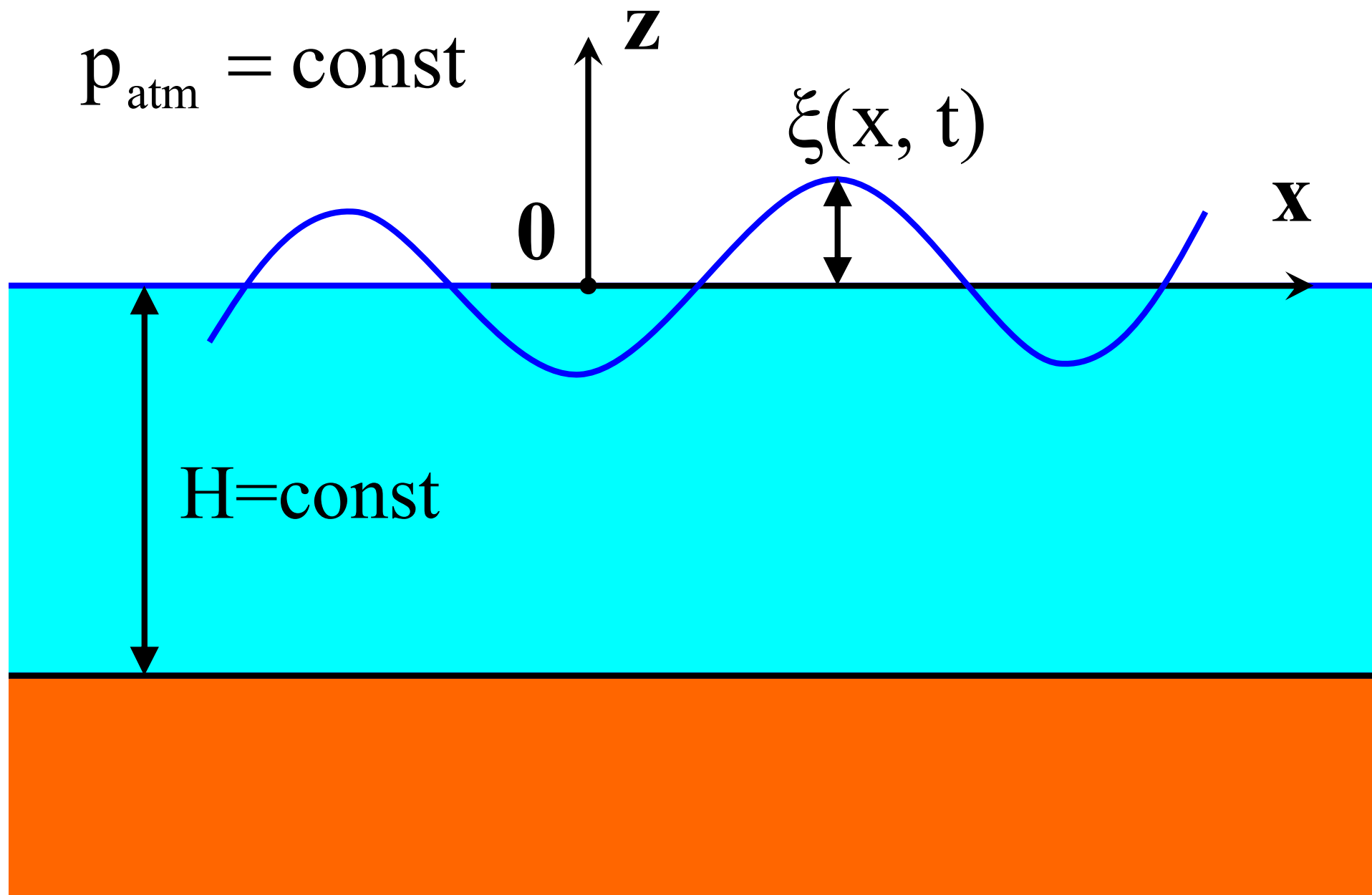
**Элементы
линейной
потенциальной
теории волн**

$$\vec{v} = \vec{\nabla} F$$

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$w = \frac{\partial F}{\partial z}$$

Постановка 2D задачи (0xz)



**Математическая постановка 2D задачи о
линейных гравитационных волнах
бесконечно малой амплитуды**

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \Delta F = 0$$

$$z = 0 : \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$z = -H : \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Общий вид решения уравнения Лапласа

$$F(x, z, t) = \left(A \cdot e^{kz} + B \cdot e^{-kz} \right) e^{i(\omega t - kx)}$$

или

$$F(x, z, t) = \left(A \cdot \text{sh}(kz) + B \cdot \text{ch}(kz) \right) e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -k^2 F$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = k^2 F$$

Общий вид решения уравнения Лапласа

$$F(x, z, t) = (A \cdot \operatorname{sh}(kz) + B \cdot \operatorname{ch}(kz)) e^{i(\omega t - kx)}$$

Граничное условие на поверхности

$$z = 0 : \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$\begin{aligned} & -\omega^2 (A \cdot \operatorname{sh}(0) + B \cdot \operatorname{ch}(0)) e^{i(\omega t - kx)} + \\ & + gk (A \cdot \operatorname{ch}(0) + B \cdot \operatorname{sh}(0)) e^{i(\omega t - kx)} = 0 \end{aligned}$$

$$\omega^2 B = gkA$$

**Решение, удовлетворяющее граничному
условию на поверхности**

$$F(x, z, t) = A \left(\operatorname{sh}(kz) + \frac{gk}{\omega^2} \operatorname{ch}(kz) \right) e^{i(\omega t - kx)}$$

Граничное условие на дне

$$z = -H : \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$\operatorname{ch}(kH) - \frac{gk}{\omega^2} \operatorname{sh}(kH) = 0$$

$$\operatorname{th}(kH)$$

$$\omega^2 = gk \frac{\operatorname{sh}(kH)}{\operatorname{ch}(kH)}$$

Дисперсионное соотношение для поверхностных гравитационных волн

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$c = \lambda / T$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

циклическая
частота

$$c_{\text{фаз}} = \omega / k$$

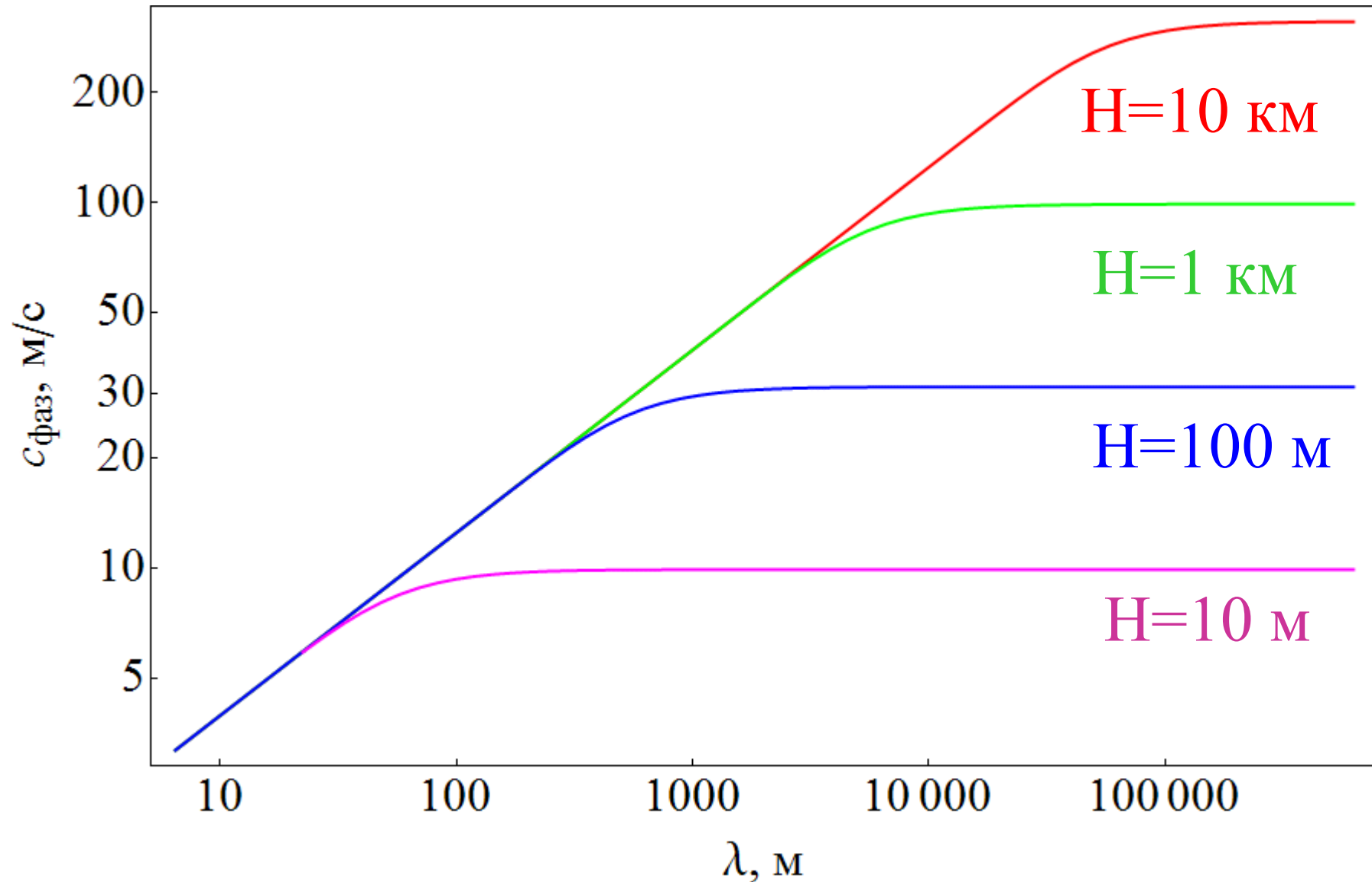
волновое
число

Фазовая скорость гравитационных волн

$$c_{\text{фаз}}(\mathbf{k}) = \frac{\omega(\mathbf{k})}{k} = \frac{\sqrt{gk \operatorname{th}(kH)}}{k}$$

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH)$$

Фазовая скорость как функция длины волны и глубины



H - масштаб длин \sqrt{gH} - масштаб скоростей

$H / \sqrt{gH} = \sqrt{H / g}$ - масштаб времени

Безразмерные переменные

$$k^* \equiv kH$$

$$c_{\text{фаз}}^* \equiv c_{\text{фаз}} / \sqrt{gH}$$

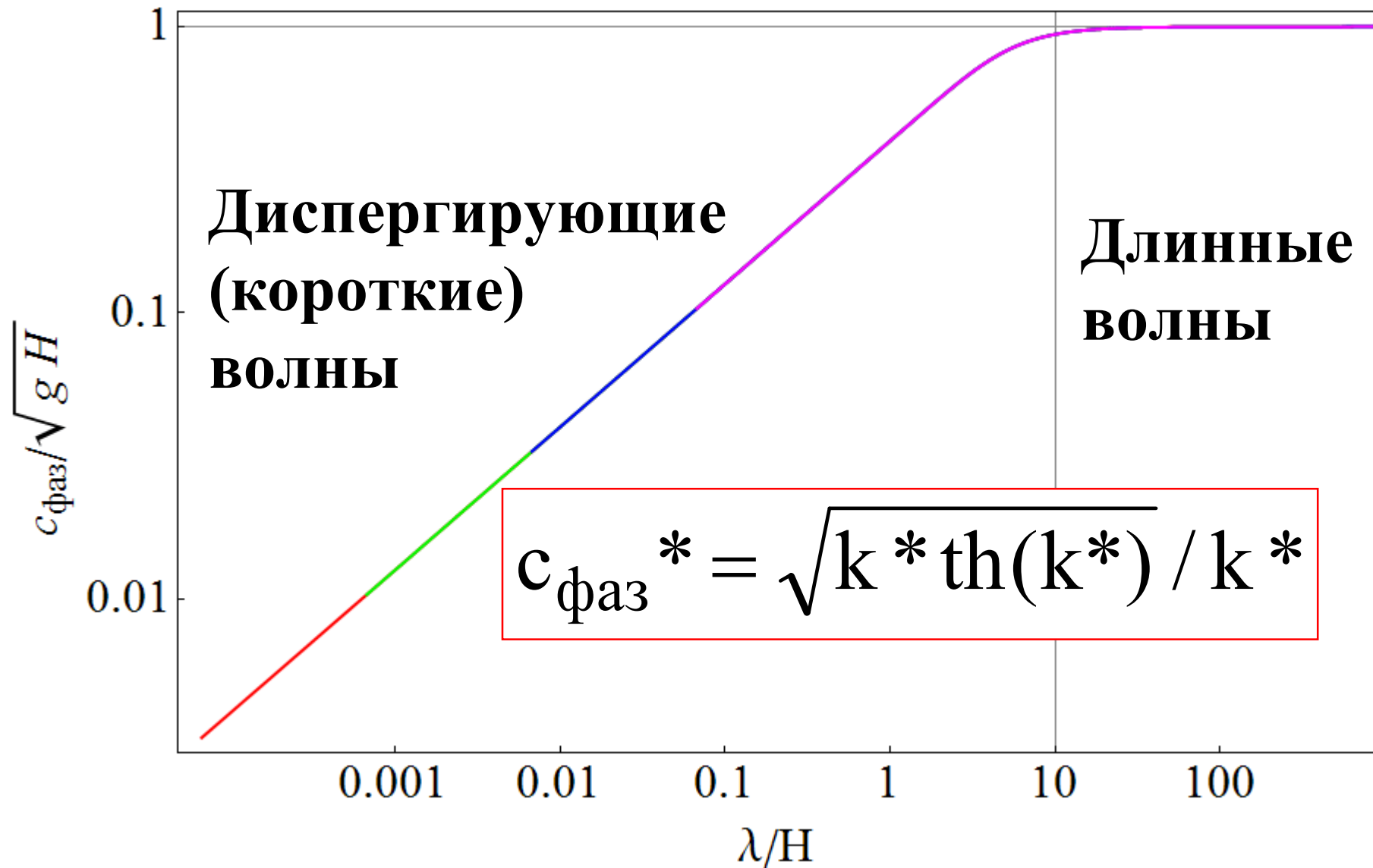
$$\omega^* \equiv \omega \sqrt{H / g}$$

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH) \longrightarrow \frac{g}{H} \omega^{*2} = g \frac{k^*}{H} \operatorname{th}(k^*)$$

$$\omega^{*2} = k^* \operatorname{th}(k^*)$$

$$c_{\text{фаз}}^* = \sqrt{k^* \operatorname{th}(k^*)} / k^*$$

Нормированная фазовая скорость как функция отношения длины волны к глубине

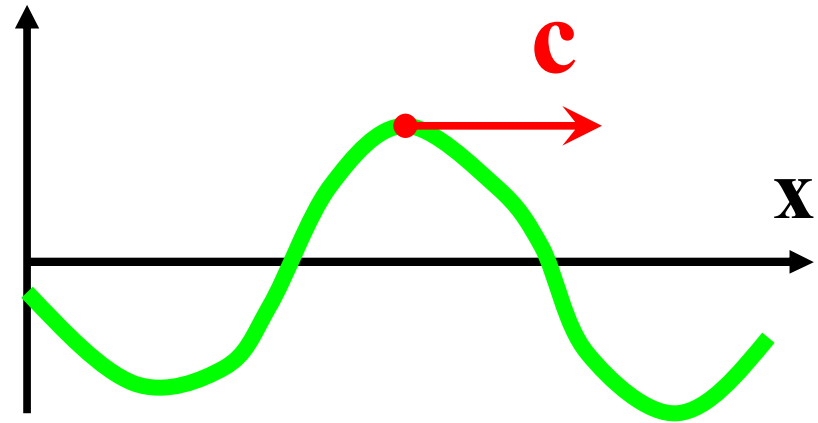


Фазовая и групповая скорости волн

$$\cos(\omega t - kx)$$

$$(ct - x)$$

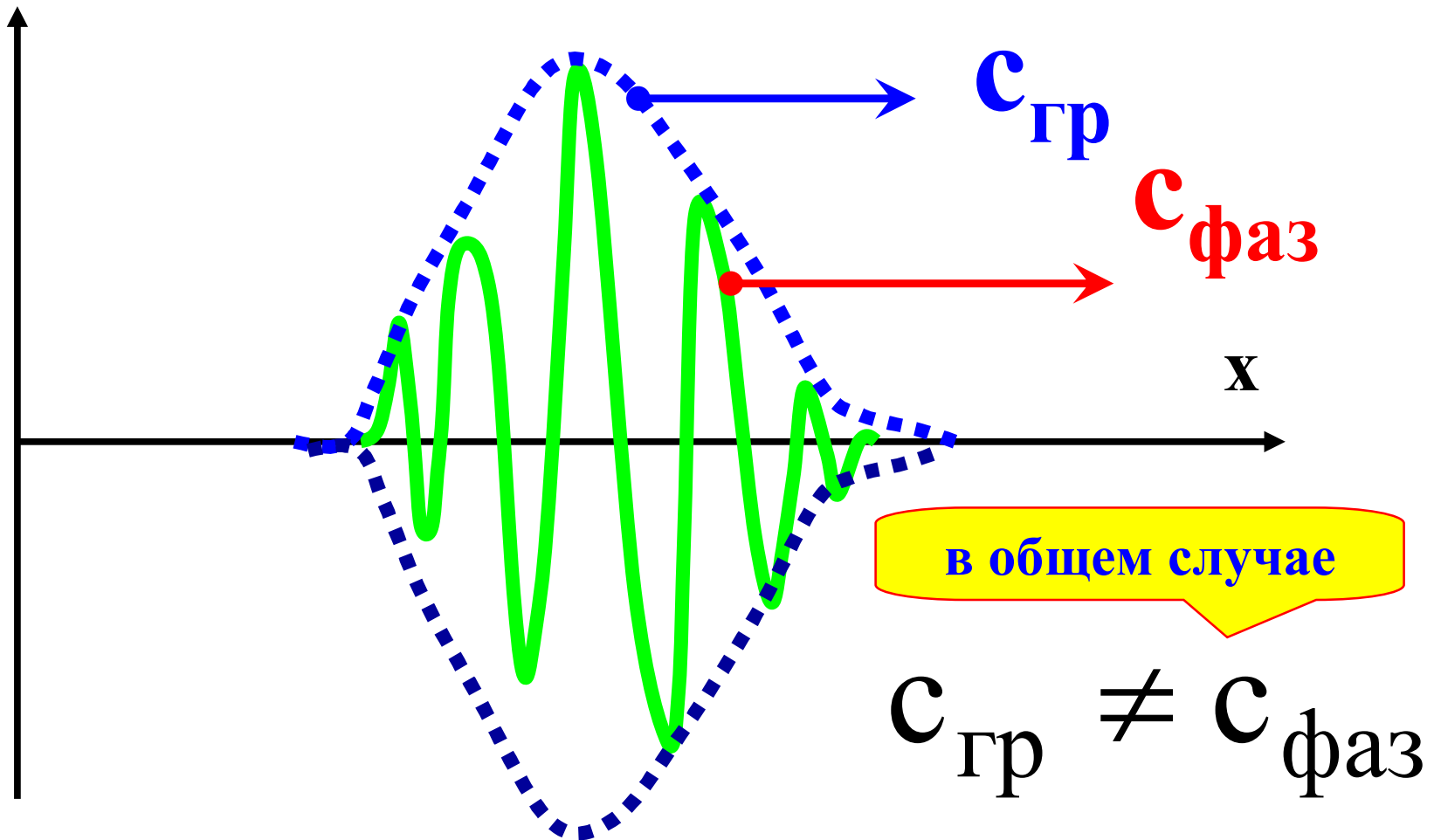
$$(t - x/c)$$



$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T}$$

Фазовая и групповая скорости волн

энергия переносится группами волн,
т.е. с групповой скоростью



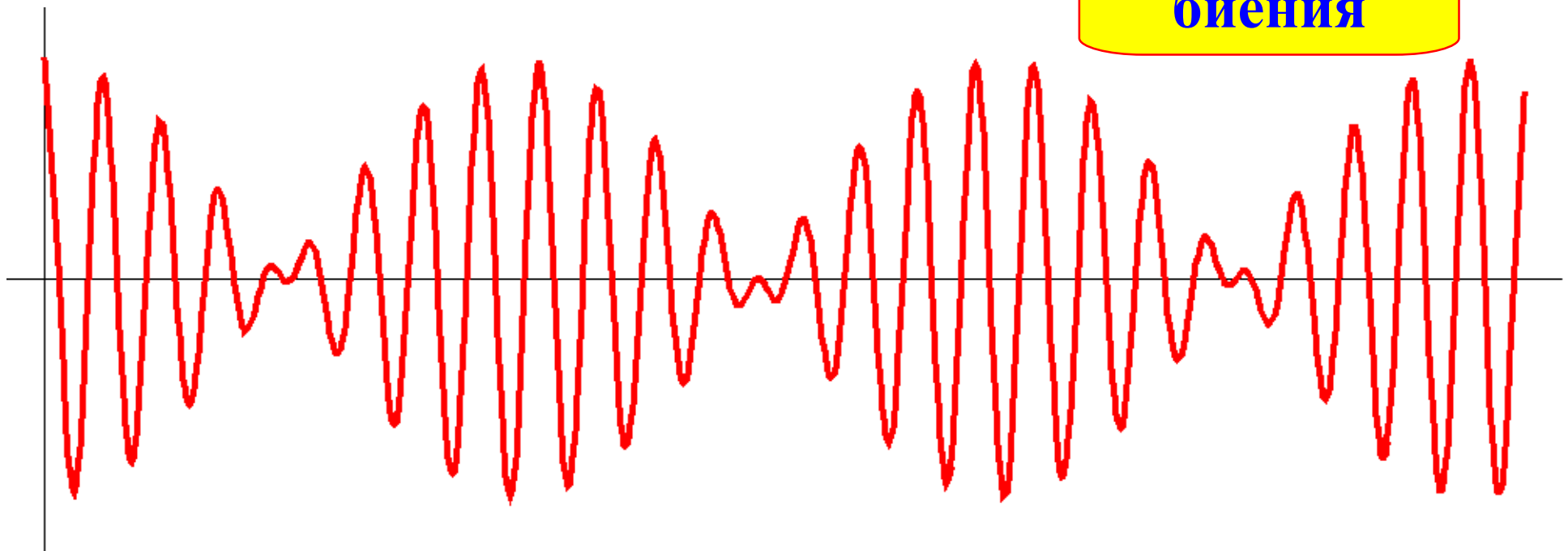
в общем случае

$$c_{гр} \neq c_{фаз}$$

$$\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) =$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

биения



$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}$$

$$c_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}$$

Недиспергирующие волны

$$\omega = c_{\text{фаз}} k, \quad c_{\text{фаз}} \neq f(k)$$

$$c_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = c_{\text{фаз}}$$

Диспергирующие волны

$$c_{\text{гр}} \neq c_{\text{фаз}}$$

$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}$$

$$c_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}$$

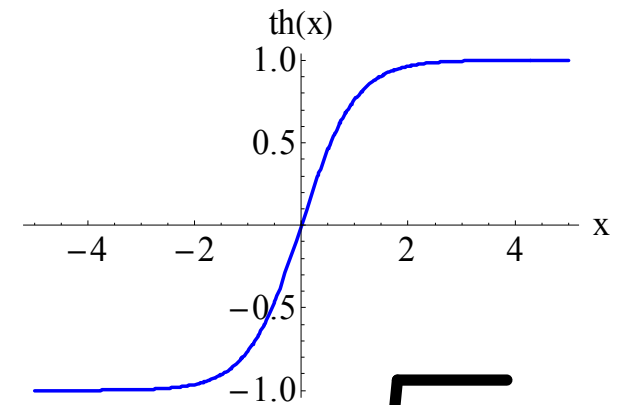
Диспергирующие волны

$$c_{\text{фаз}} = \frac{\sqrt{gk \operatorname{th}(kH)}}{k}$$

$$c_{\text{гр}} = \frac{g(kH / \operatorname{ch}^2(kH) + \operatorname{th}(kH))}{2\sqrt{gk \operatorname{th}(kH)}}$$

Предельный случай №1

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH)$$



«Глубокая вода» ($kH \gg 1$)

$$\omega^2 = gk$$

$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

Волны на «глубокой воде» подвержены дисперсии

$$\omega = \sqrt{gk}$$

$$c_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

групповая скорость меньше фазовой

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi}}$$

объясняет
явление
«мертвая
зыбь»

$$\lambda = 1 \text{ м} \Rightarrow c \approx 1.3 \text{ м/с}$$

$$\lambda = 10 \text{ м} \Rightarrow c \approx 4 \text{ м/с}$$

$$\lambda = 100 \text{ м} \Rightarrow c \approx 13 \text{ м/с}$$

Предельный случай №2

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH)$$

Волны на «мелкой воде» не подвержены дисперсии

«Мелкая вода» ($kH \ll 1$)

$$\omega^2 = gH k^2$$

$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH}$$

групповая скорость равна фазовой

$$\omega = \sqrt{gH} k$$

$$c_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{gH}$$

Дисперсионное соотношение для гравитационно-капиллярных волн

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\alpha}{\rho} k^3 \right) \text{th}(kH)$$

$\alpha \approx 0.075 \text{ Н/м}$
при $t = 20^\circ \text{C}$

$$p - p_{\text{atm}} = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$p - p_{\text{atm}} = -\alpha \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)$$

**формула
Лапласа**

Предельные случаи (№3 и №4):

капиллярные

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\alpha}{\rho} k^3 \right) \text{th}(kH)$$

гравитационные

короткие волны

$$k \gg \sqrt{\rho g / \alpha}$$

$$\lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}} \approx 0.017 \text{ м}$$

длинные волны

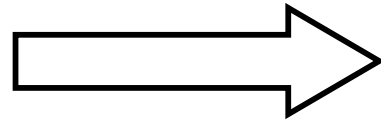
$$k \ll \sqrt{\rho g / \alpha}$$

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho} k^3$$

$$\omega^2 = gk \text{th}(kH)$$

Аномальная дисперсия капиллярных волн

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho} k^3$$



$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} k^{3/2}$$

$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\alpha k}{\rho}}$$

$$c_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\alpha k}{\rho}}$$

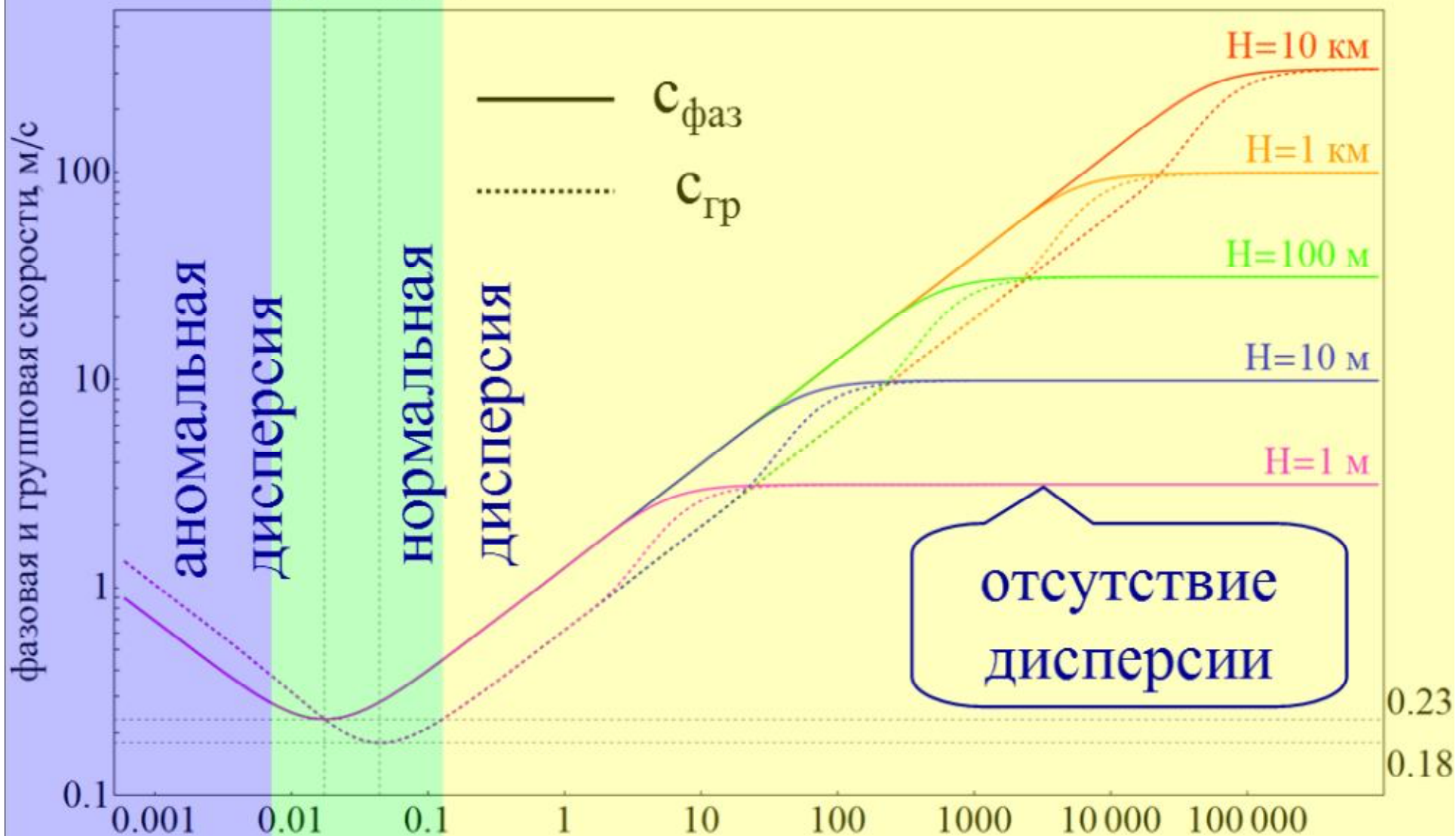
$$c_{\text{гр}} > c_{\text{фаз}}$$

капиллярные

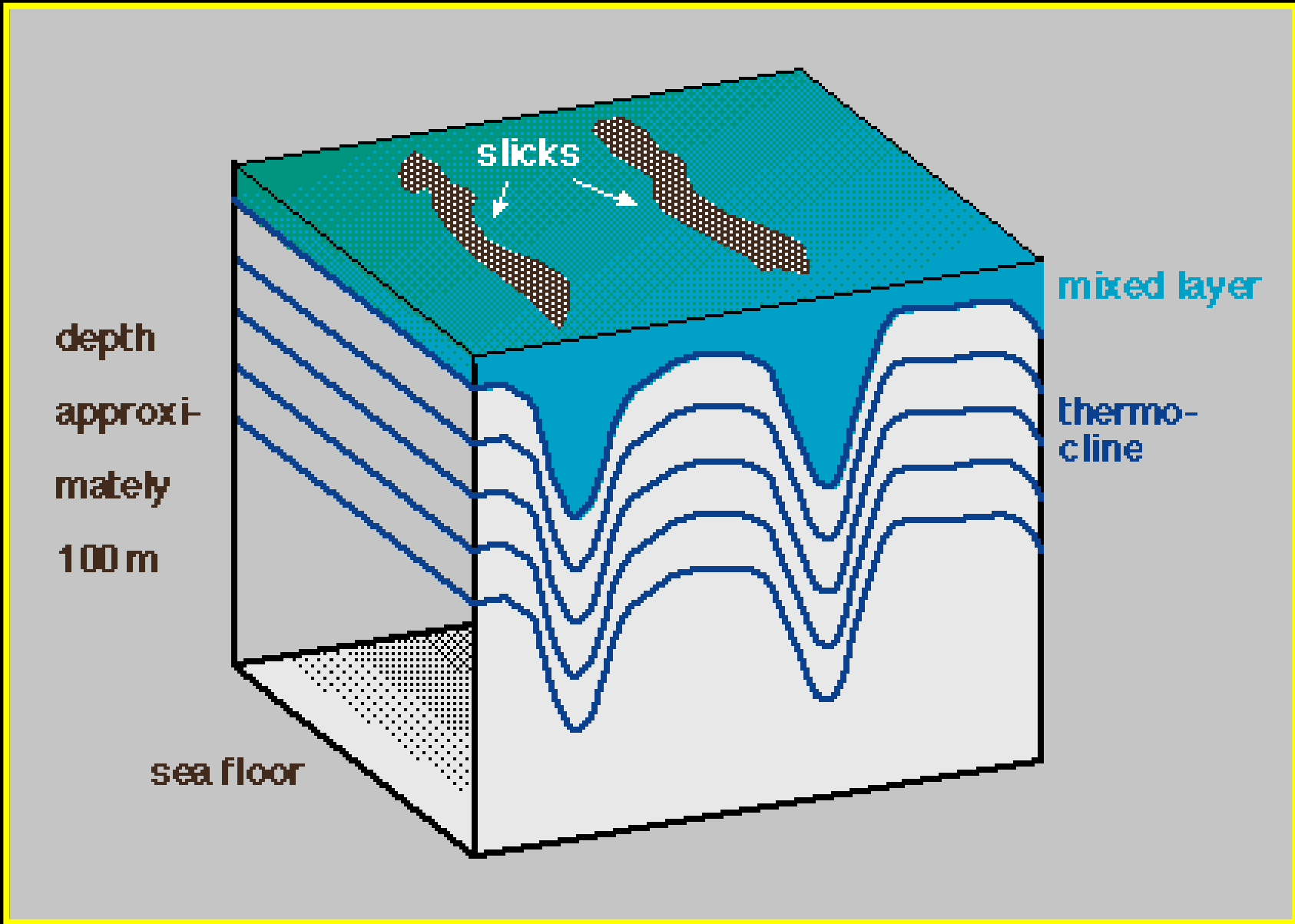
гравитационные


гравитационно-капиллярные

0.017 0.044



Внутренние волны

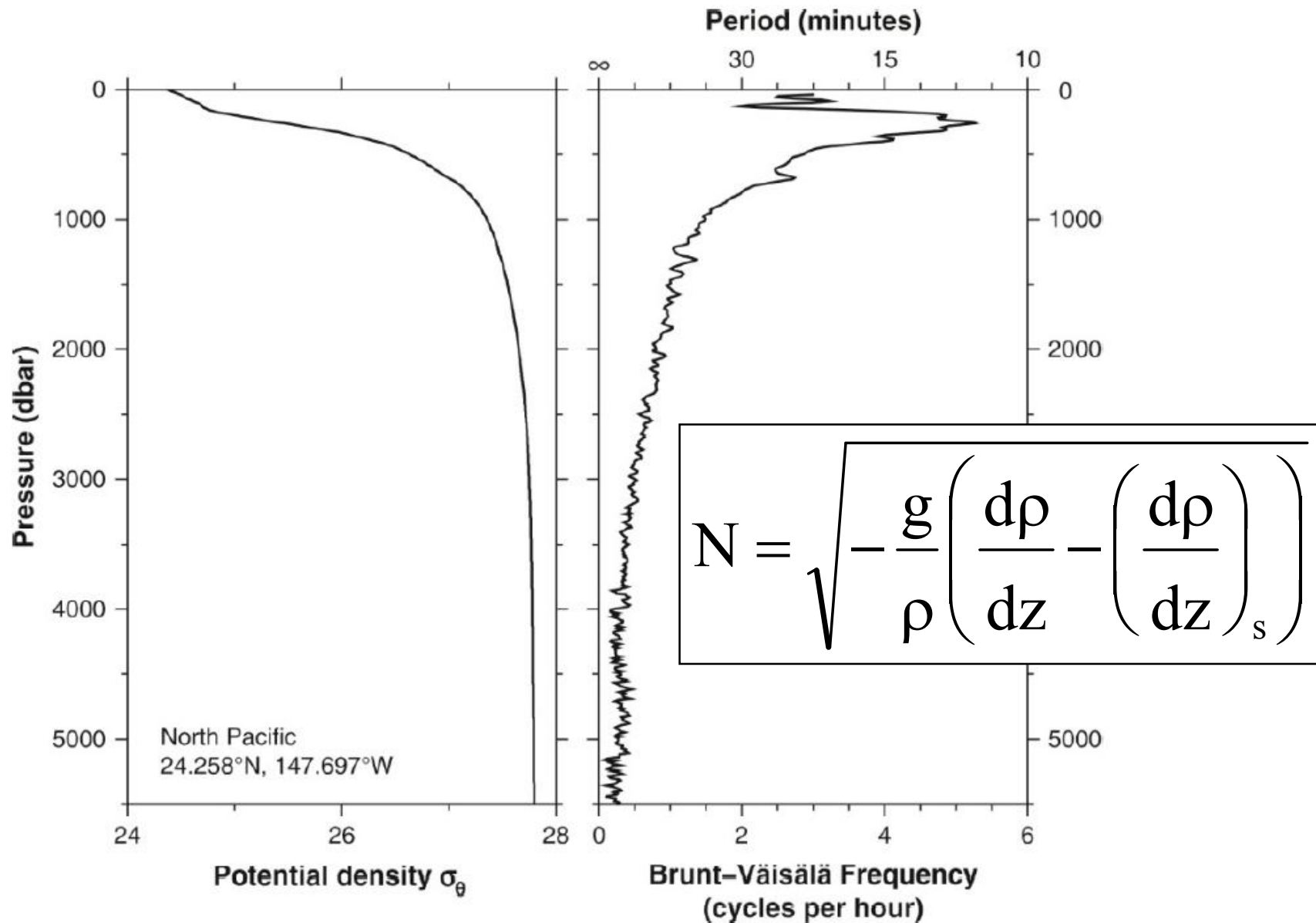


A satellite photograph of the Strait of Gibraltar, showing the narrow passage between the Iberian Peninsula and North Africa. The water in the strait exhibits a distinct pattern of internal waves, appearing as a series of parallel, wavy lines that change in color from light blue to dark blue. The surrounding land is visible in shades of green and brown. The text is overlaid on a black rectangular background in the upper right corner.

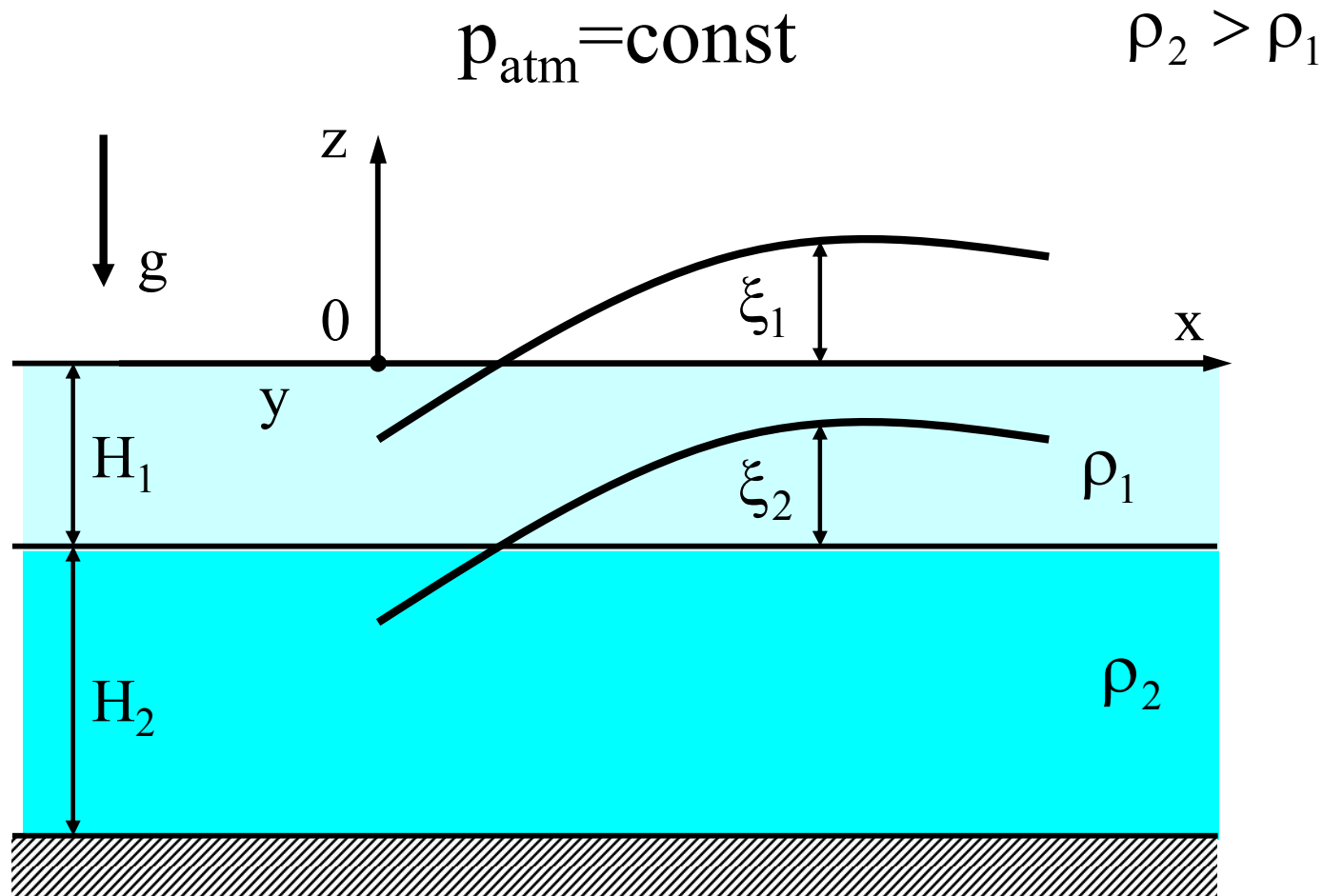
**Внутренние
волны океане
(Гибралтар)**

***Astronaut
photographs
June 3, 2004***

Вертикальные профили плотности и частоты Вяйсяля-Брента в океане



Длинные волны в двухслойной жидкости: постановка 2D задачи



Оценка скоростей распространения поверхностных и внутренних волн

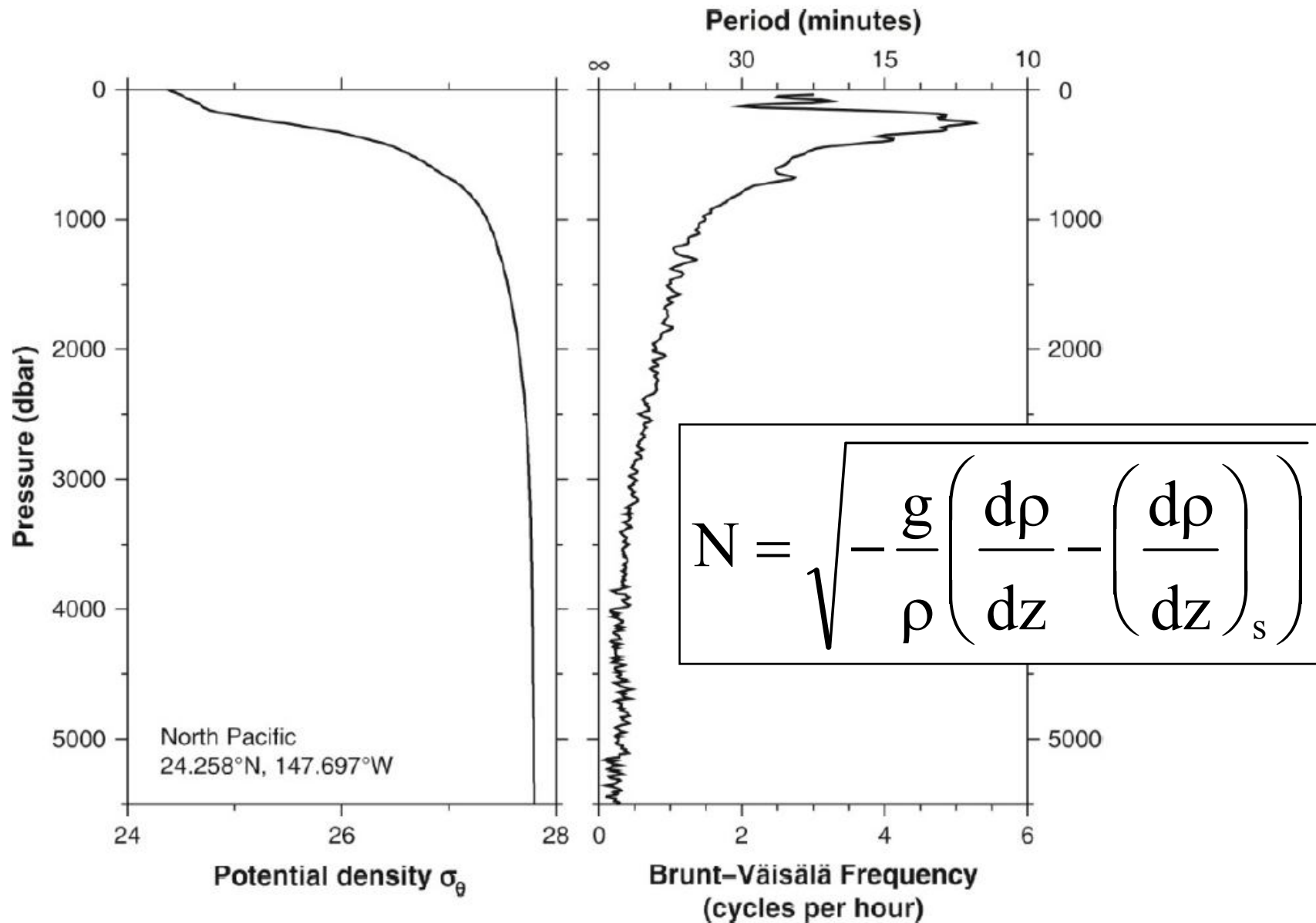
$$c_{\text{поверхн}} = \sqrt{g(H_1 + H_2)} \approx 200 \text{ м/с}$$

$$H_1 = 100 \text{ м} \quad H_2 = 4000 \text{ м}$$

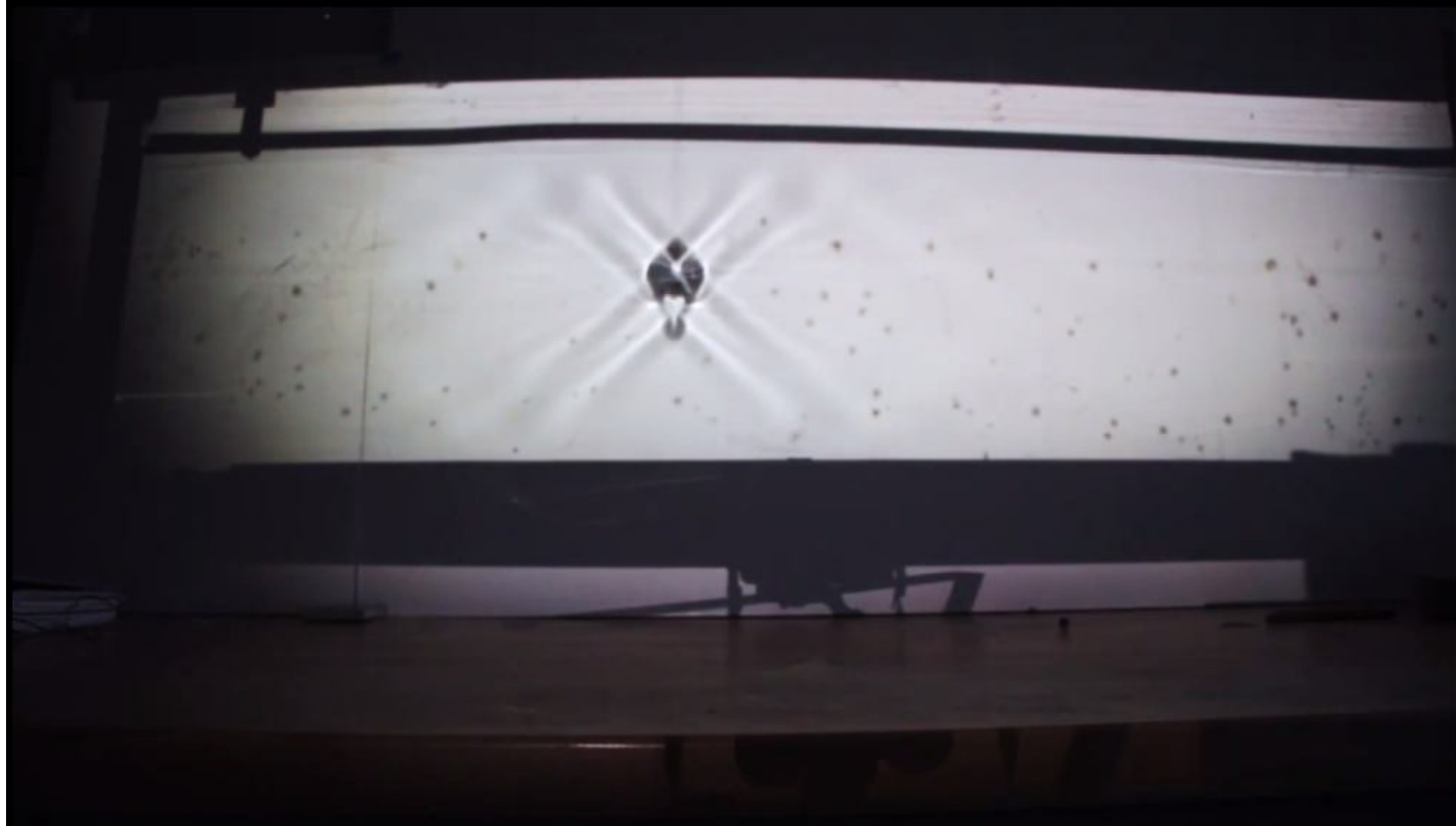
$$g = 9.8 \text{ м/с}^2 \quad \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} = 0.003$$

$$c_{\text{внутр}} = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)gH_1H_2}{\rho_2(H_1 + H_2)}} \approx 1.7 \text{ м/с}$$

Вертикальные профили плотности и частоты Вяйсяля-Брента в океане



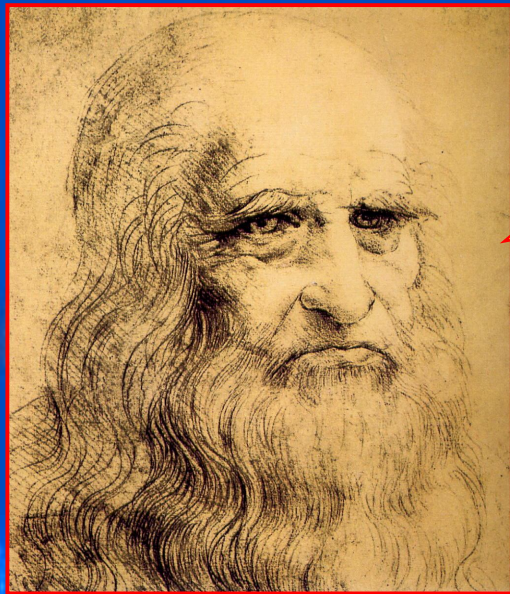
Внутренние волны в непрерывно стратифицированной жидкости



Акустические

ВОЛНЫ

«...погрузив трубу одним концом в воду и прижав другой ее конец к уху, можно услышать корабли, идущие вдали...»



Леонардо да Винчи
1452- 1519



Система уравнений для описания линейных волн без учета вращения Земли и сил вязкого трения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \end{array} \right.$$

**Гравитационные
волны**

**Акустические
волны**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0 \end{array} \right.$$

\vec{v}' - малая

величина

$$\frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho_0} = \vec{g}$$

ρ_0

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

$$\vec{v}_0 = 0$$

$$p = p_0 + p'$$

$$|p'| \ll p_0$$

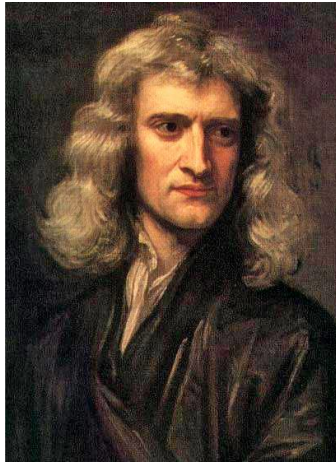
$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

$$|\rho'| \ll \rho_0$$

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}} \right)_s \mathbf{p}'$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}} \right)_s = \frac{1}{c^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = - \frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} \quad | \text{div} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{v}' = 0 \quad | \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right.$$



Sir Isaac Newton

~~$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}} \right)_T \mathbf{p}'$$~~

~~$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}} \right)_T = \frac{1}{c_T^2}$$~~



Pierre-Simon Laplace

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s p' \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \operatorname{div}(\vec{v}')}{\partial t} = -\frac{\Delta p'}{\rho_0} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial \operatorname{div}(\vec{v}')}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial \operatorname{div}(\vec{v}')}{\partial t} = 0 \right.$$

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \Delta p' = 0$$

Скорость звука

Волновое уравнение (акустика)

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \Delta p' = 0$$

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \approx \begin{array}{l} \text{воздух} \\ 340 \text{ м / с} \\ \text{вода} \\ 1500 \text{ м / с} \end{array}$$

Скорость звука

Модовая структура гидроакустических волн

нормальные
частоты:

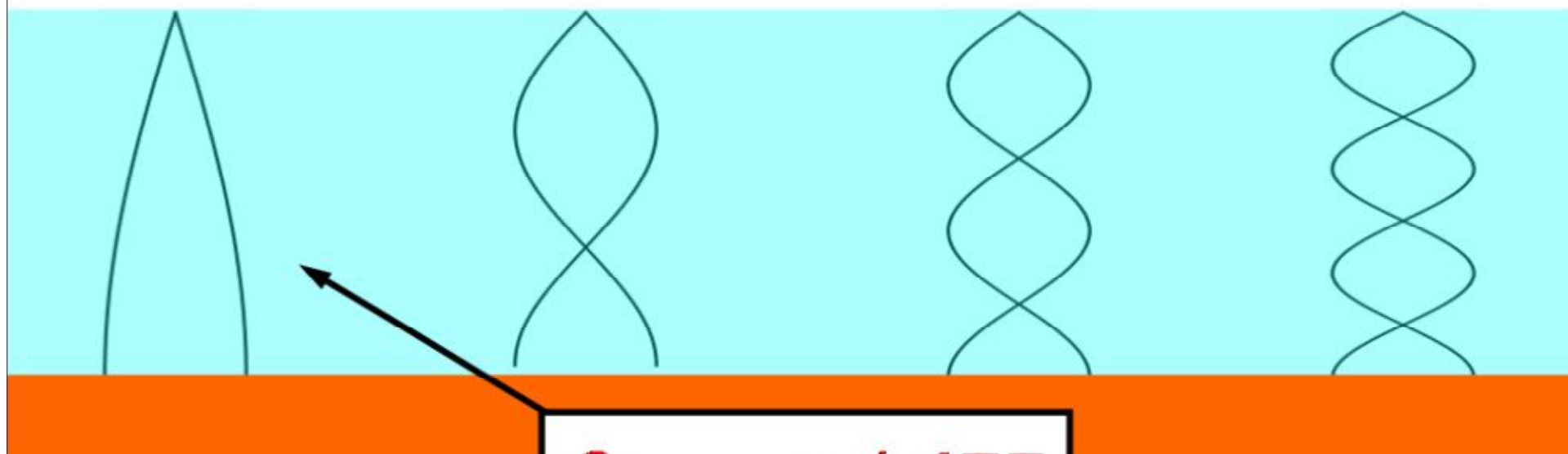
$$f_k = c(1 + 2k) / 4H, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$k = 0$

$k = 1$

$k = 2$

$k = 3$



$$f_{ac} = c / 4H$$

$$\frac{\lambda}{4} = H$$

$$\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} = H$$

$$\frac{\lambda}{4} + 2\frac{\lambda}{2} = H$$

$$\frac{\lambda}{4} + 3\frac{\lambda}{2} = H$$

1783, февраль. Калабрийская дуга.

Катастрофическое Калабрийское землетрясение.

Описаны необычные явления на море, которые можно рассматривать в качестве краткосрочных предвестников землетрясения. В первых числах февраля вблизи Мессины и в других местах у поверхности моря стала появляться в изобилии глубоководная рыбка чичирелла, обычно не покидающая дно и зарывающаяся в донный ил.

1887, февраль (март). Лигурийское море, Италия, Франция.

Сильное землетрясение, охватившее площадь 570 тыс. кв. км. На пляжах Ниццы, Сан-Ремо, Савоны находили выброшенных на берег глубоководных рыб или рыб, редких в зимний сезон.

[Соловьев и др. 1997]



Скорость звука в воде

$$c = c(T, S, p)$$

эмпирическая
зависимость

TEOS-10
www.teos-10.org

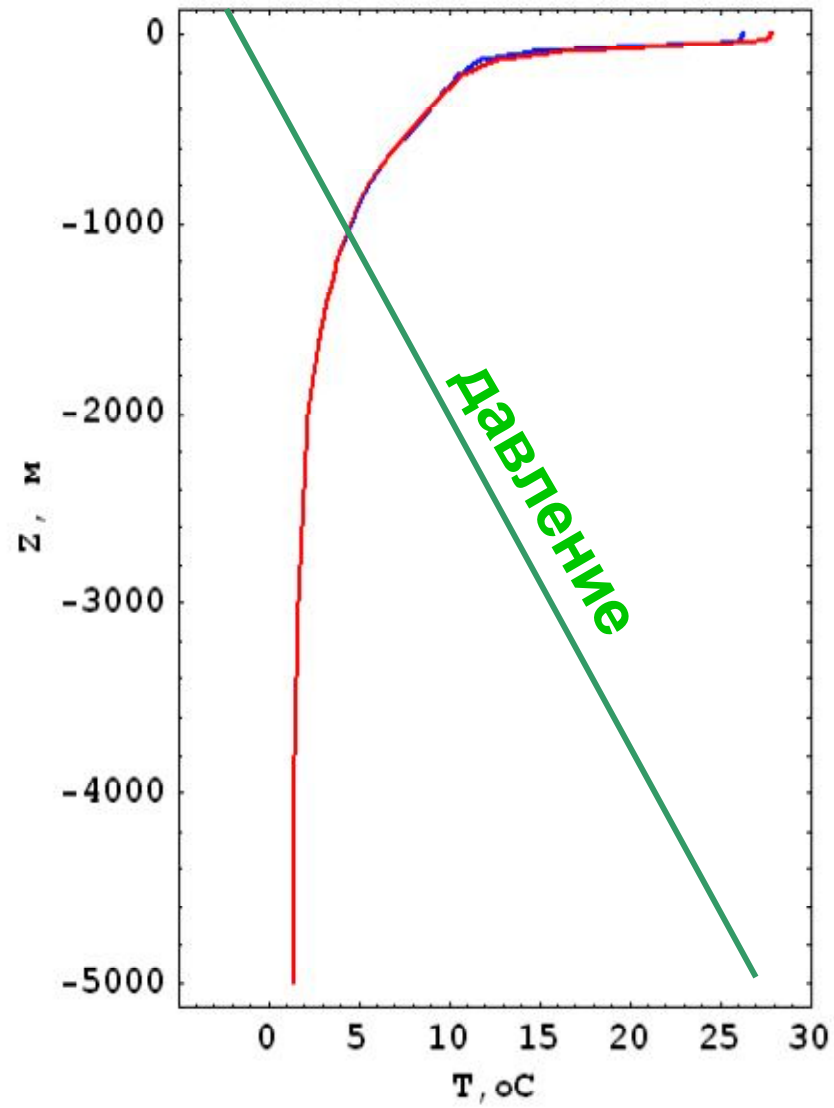
$$1480 < c < 1545 \text{ м/с}$$

$$\frac{\partial c}{\partial T} > 0$$

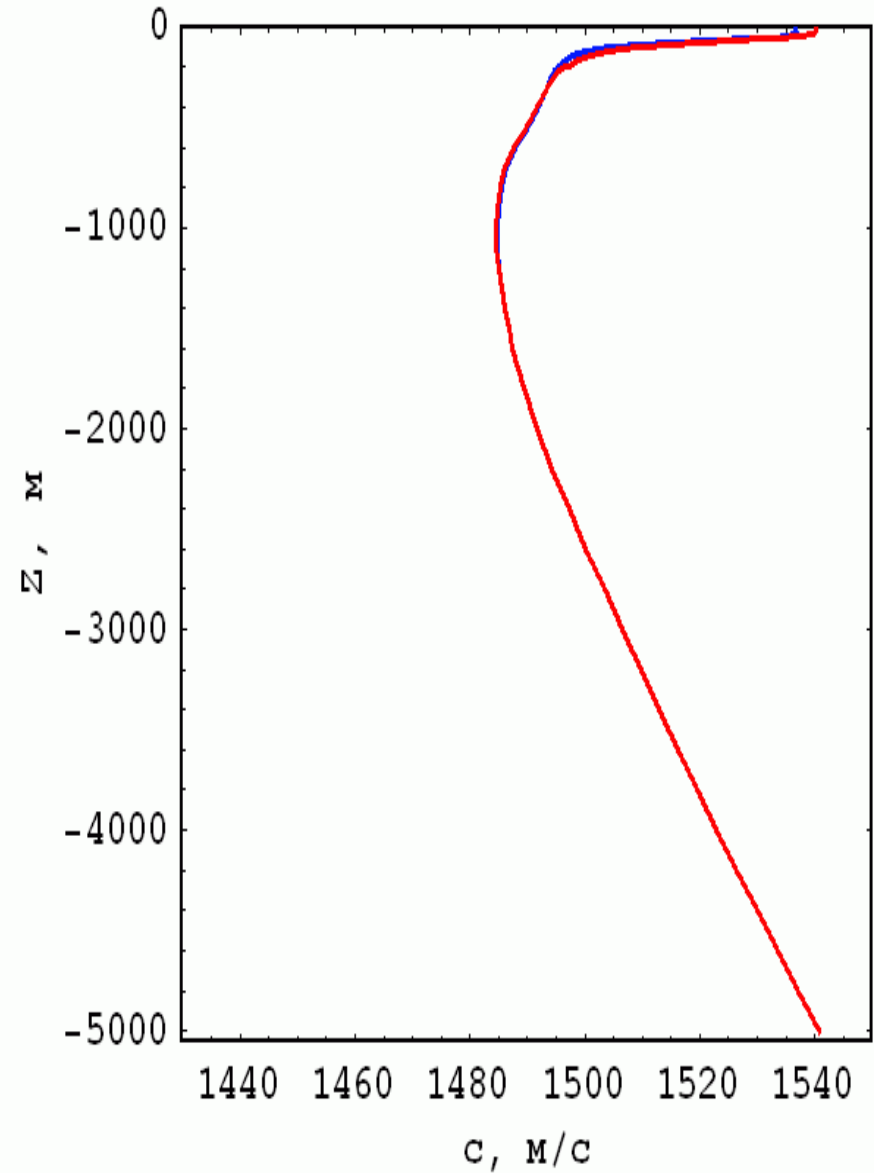
$$\frac{\partial c}{\partial p} > 0$$

Lat=10 Lon=-150

Температура

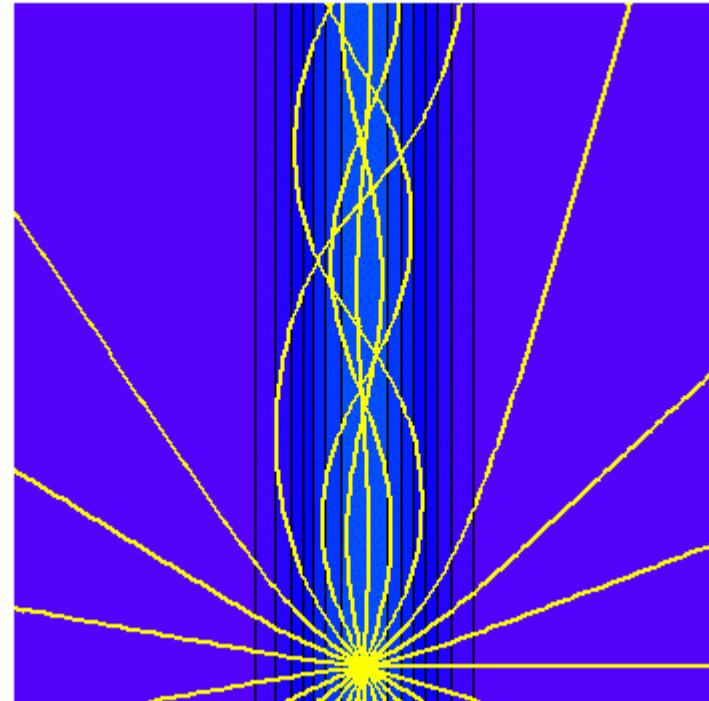
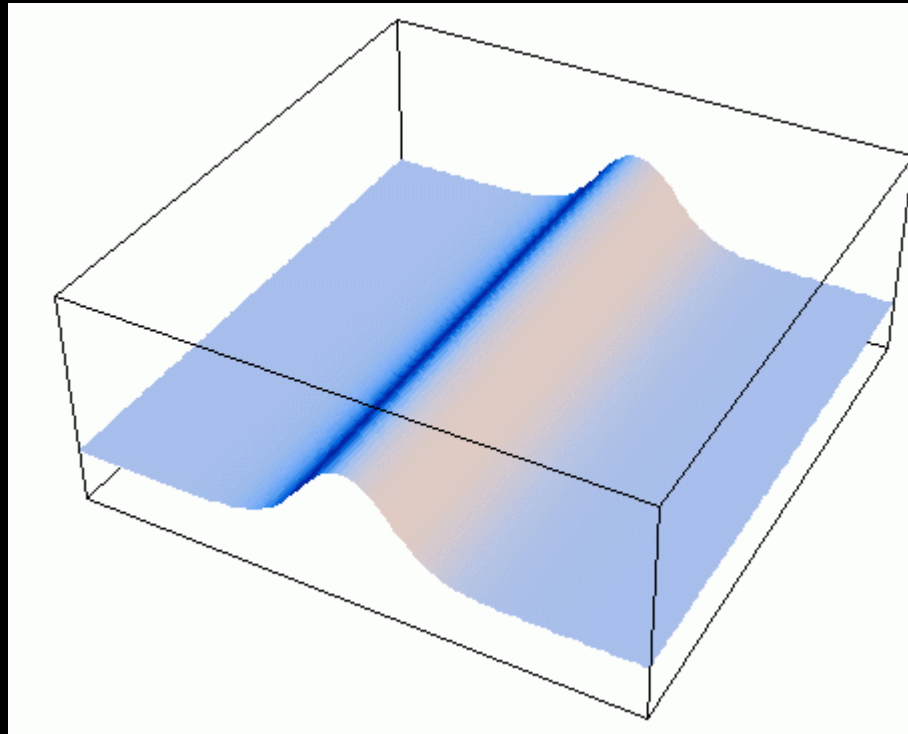


Скорость звука



Захват волн подводными хребтами

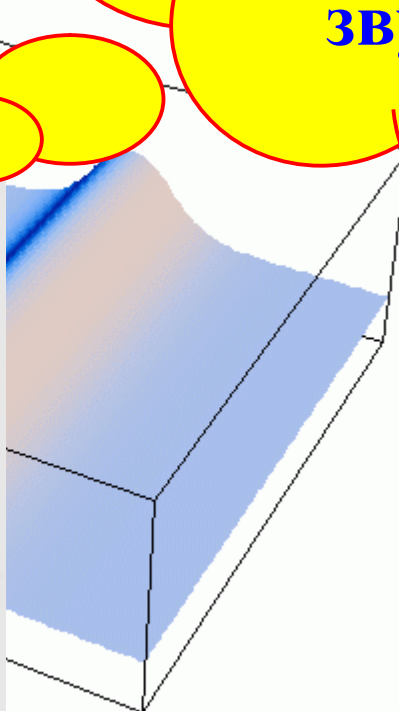
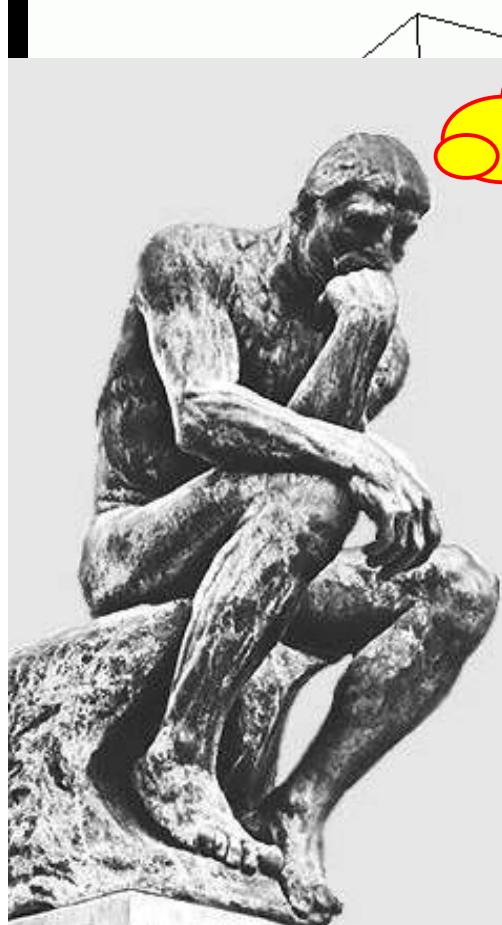
т.е. областями с пониженной скоростью распространения длинных волн



Захват волн

т.е. областям
распростран

Область с
пониженной
скоростью звука
может захватывать
звуковые волны!



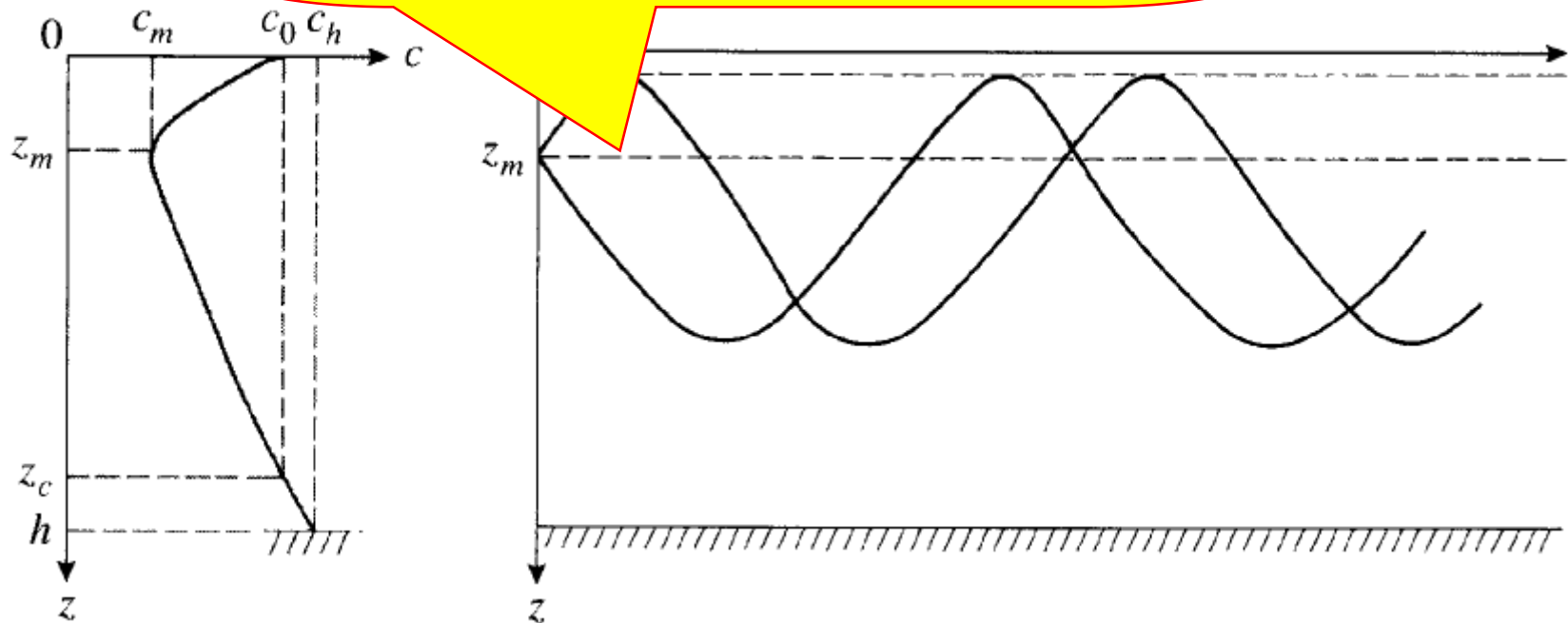
Подводный звуковой канал (ПЗК)

Deep Sound Channel

SOFAR Channel

(Sound Fixing and Ranging)

Ось ПЗК обычно лежит на
глубине ~ 1000 м



Подводный звуковой канал (ПЗК)

D
S
(S



**William Maurice
Ewing**
1906 – 1974
american geophysicist and
oceanographer

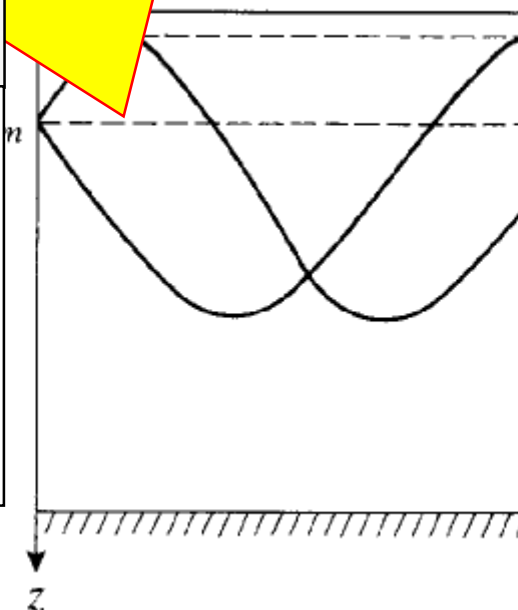


nging)

ПЗК обычно лежит на
глубине ~1000 м



**Леонид
Максимович
Бреховских**
1917-2005
выдающийся учёный в
области физики,
акустики океана,
академик АН СССР



Прикладная гидроакустика

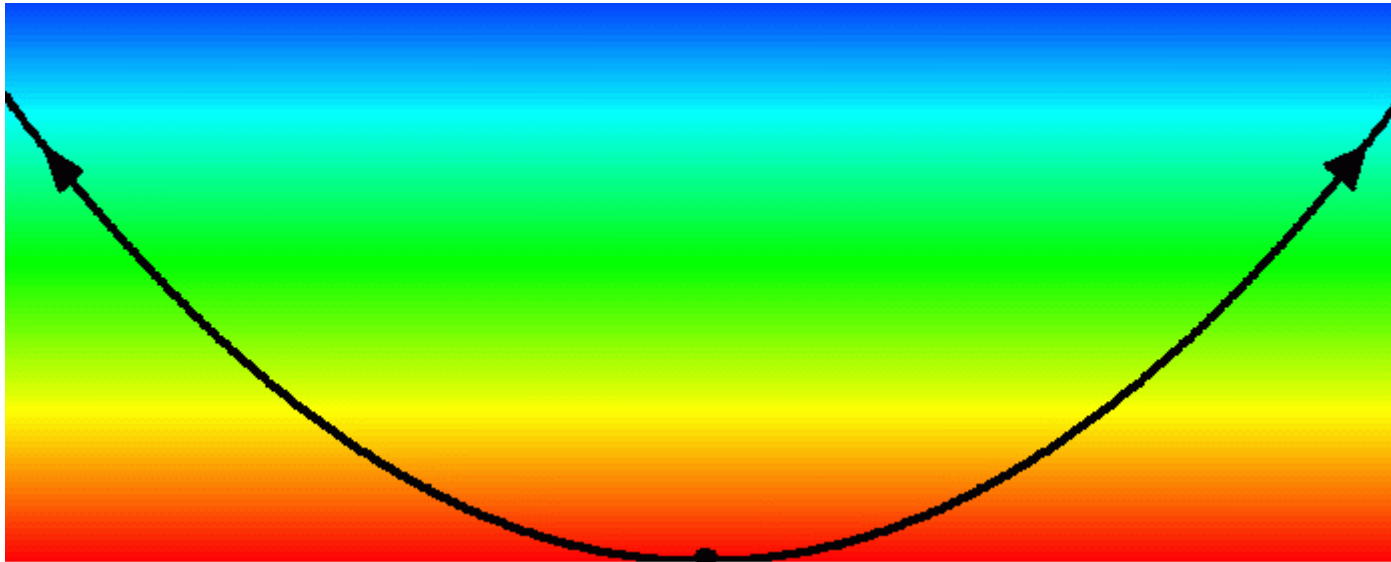
- **Акустический радар (сонар)**
- **Подводная связь (передача информации)**
- **Подводная навигация**
- **Наблюдения за погодой и климатом (регистрация шумов от ветра или осадков, акустическая термометрия)**
- **Измерение скорости течения (ADCP)**
- ...

Скорость звука в воздухе

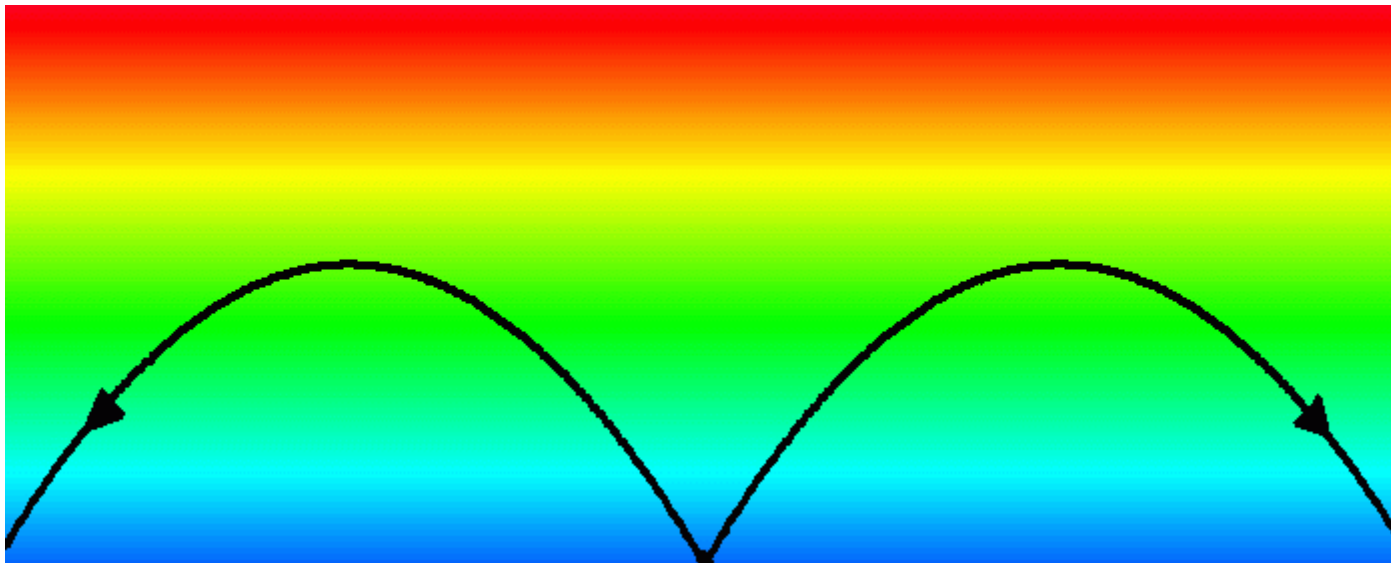
$$c \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\frac{C_p R T}{C_v \mu}} \approx 340 \text{ м / с}$$

**В атмосфере (гомосфере)
скорость звука
определяется только
температурой**

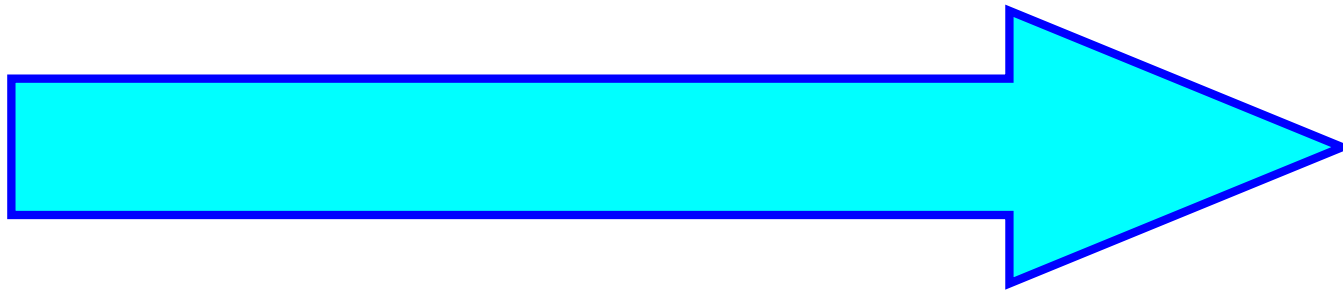
**скорость звука не
зависит от
давления**



ИСТОЧНИК



Влияние ветра на распространение звука



ИСТОЧНИК

Влияние ветра на распространение звука

