

Геофизика



2024 Лекция №6

Носов Михаил Александрович

отделение геофизики, физический факультет МГУ

<http://ocean.phys.msu.ru/courses/geo/>

Элементы

геофизической

гидродинамики

**Геофизическая гидродинамика –
динамика бароклинной жидкости (газа)
в поле силы тяжести на неравномерно
прогретой, вращающейся сфере (геоиде)**

Классическая гидродинамика

**бароклинная
жидкость**

$$\rho = \rho(p, T, \dots)$$

**баротропная
жидкость**

$$\rho = \rho(p)$$



Гаспар-Гюстав Кориолис
французский математик, механик
1792-1843

$$\mathbf{F}_{\text{Кор}} = 2m[\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

**Геофизическая гидродинамика –
динамика бароклинной жидкости (газа)
в поле силы тяжести на неравномерно
прогретой, вращающейся сфере (геоиде)**

Большинство крупномасштабных течений атмосферы и гидросферы происходят в условиях баланса сил:

по вертикали:

гидростатический баланс

сила градиента давления = сила тяжести

по горизонтали:

геострофический баланс

сила градиента давления = сила Кориолиса

strophe (греч.) – вращение, поворот

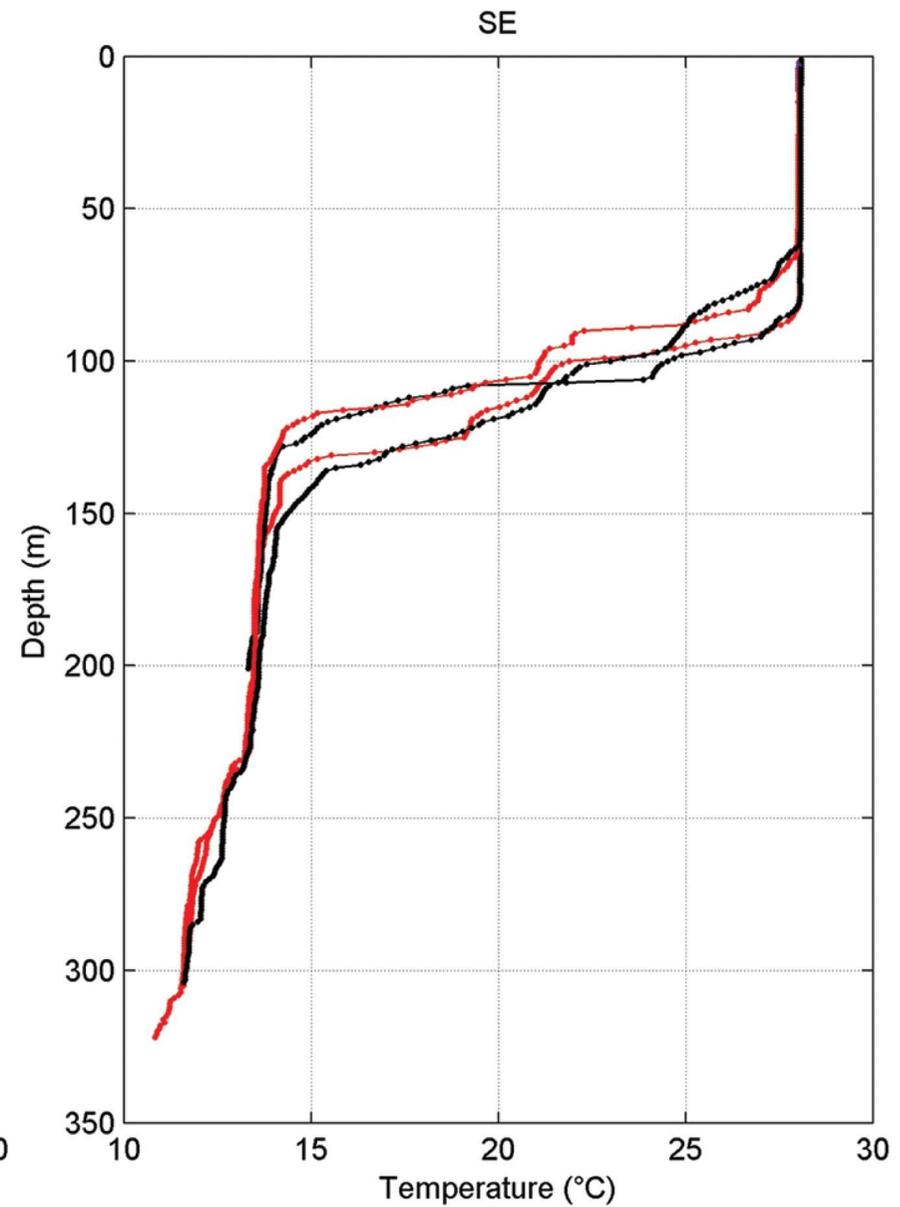
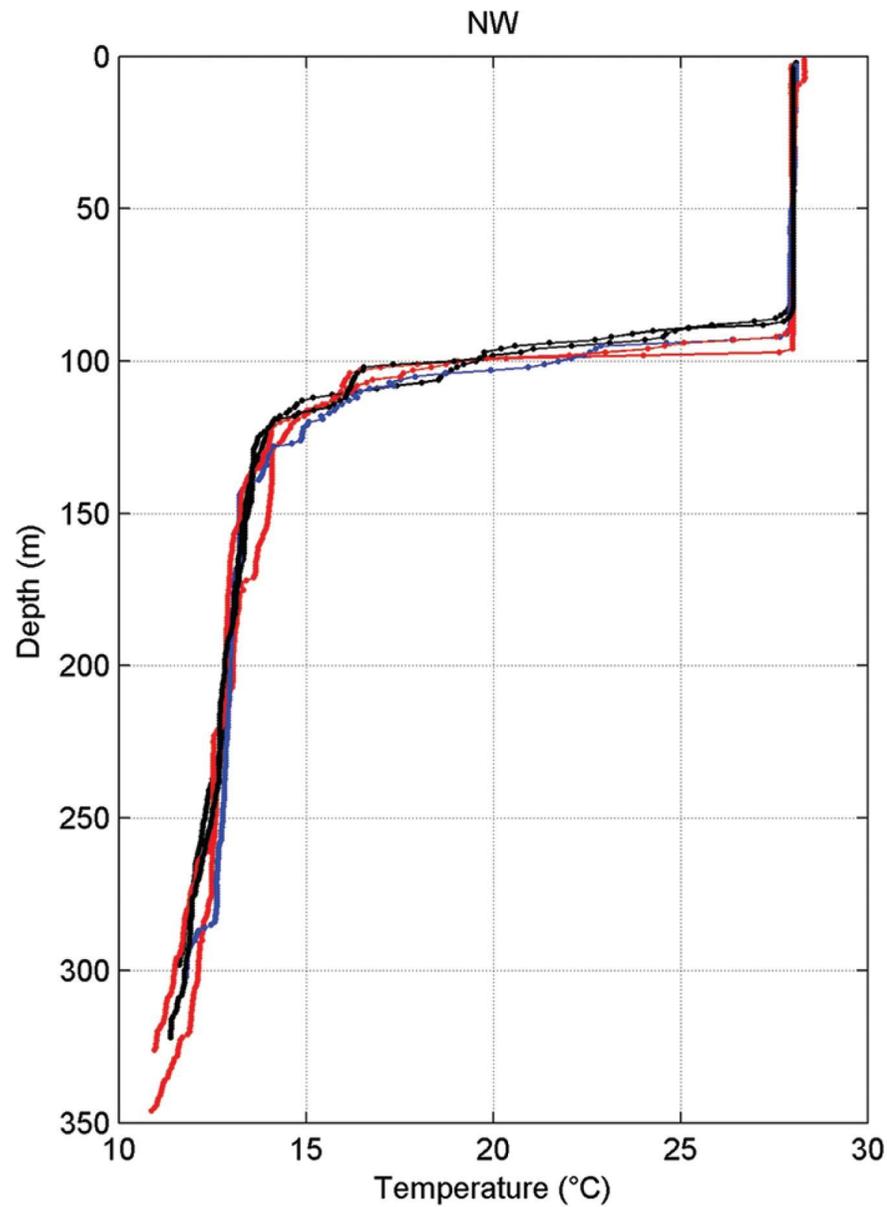
Устойчивость стратификации* и адиабатический градиент

***Стратификация –**

(лат. stratum настил слой+ facere делать)

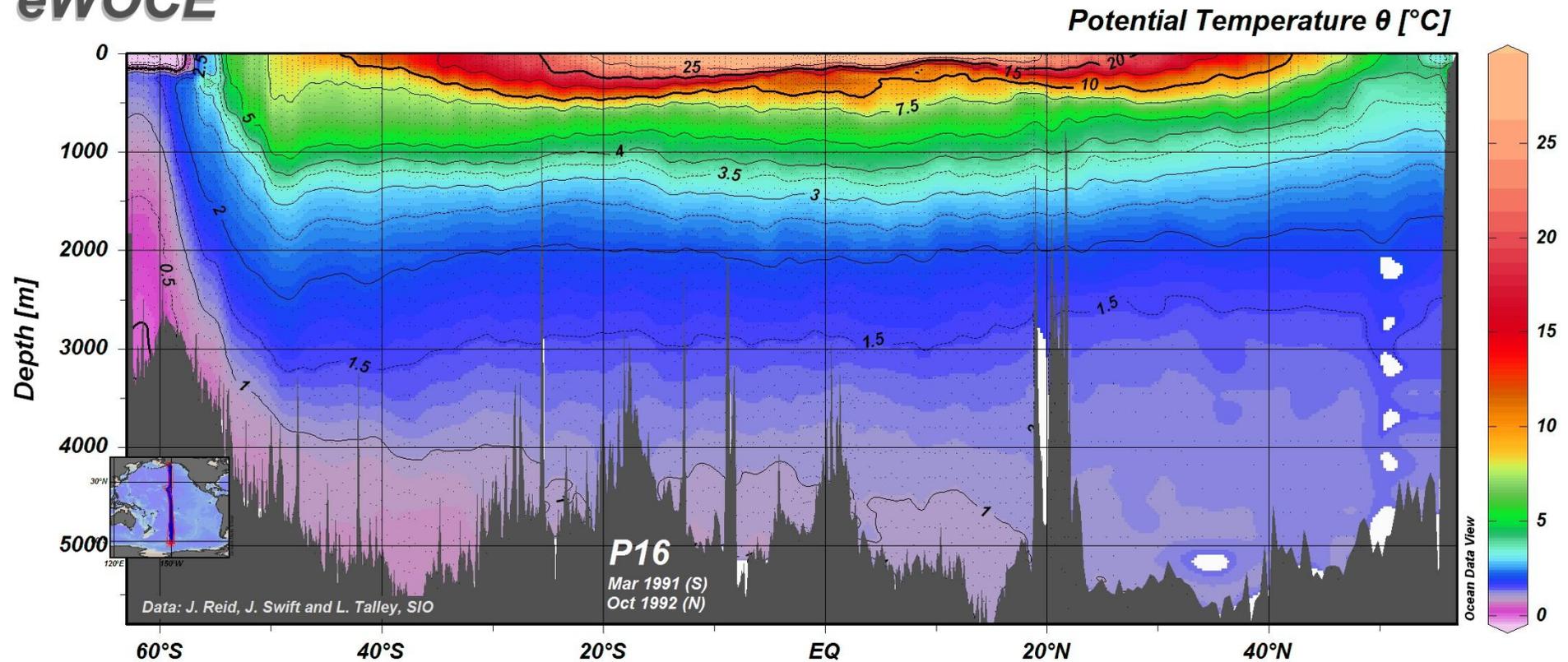
распределение по вертикали слоев воды или воздуха с различной плотностью, температурой, соленостью, etc.

Вертикальный профиль температуры в океане (примеры регистрации)



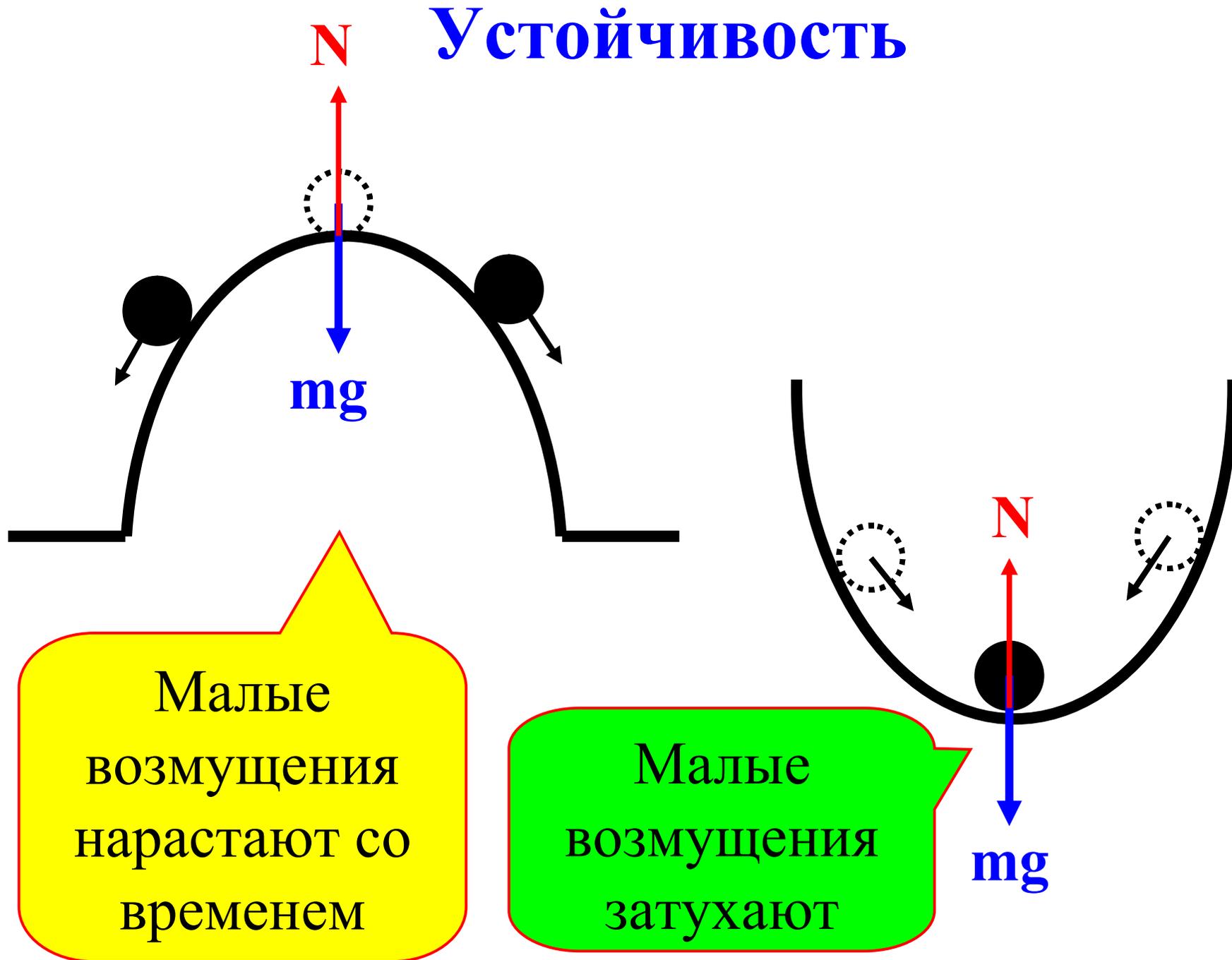
Вертикальный разрез (температура)

eWOCE



<http://www.ewoce.org>

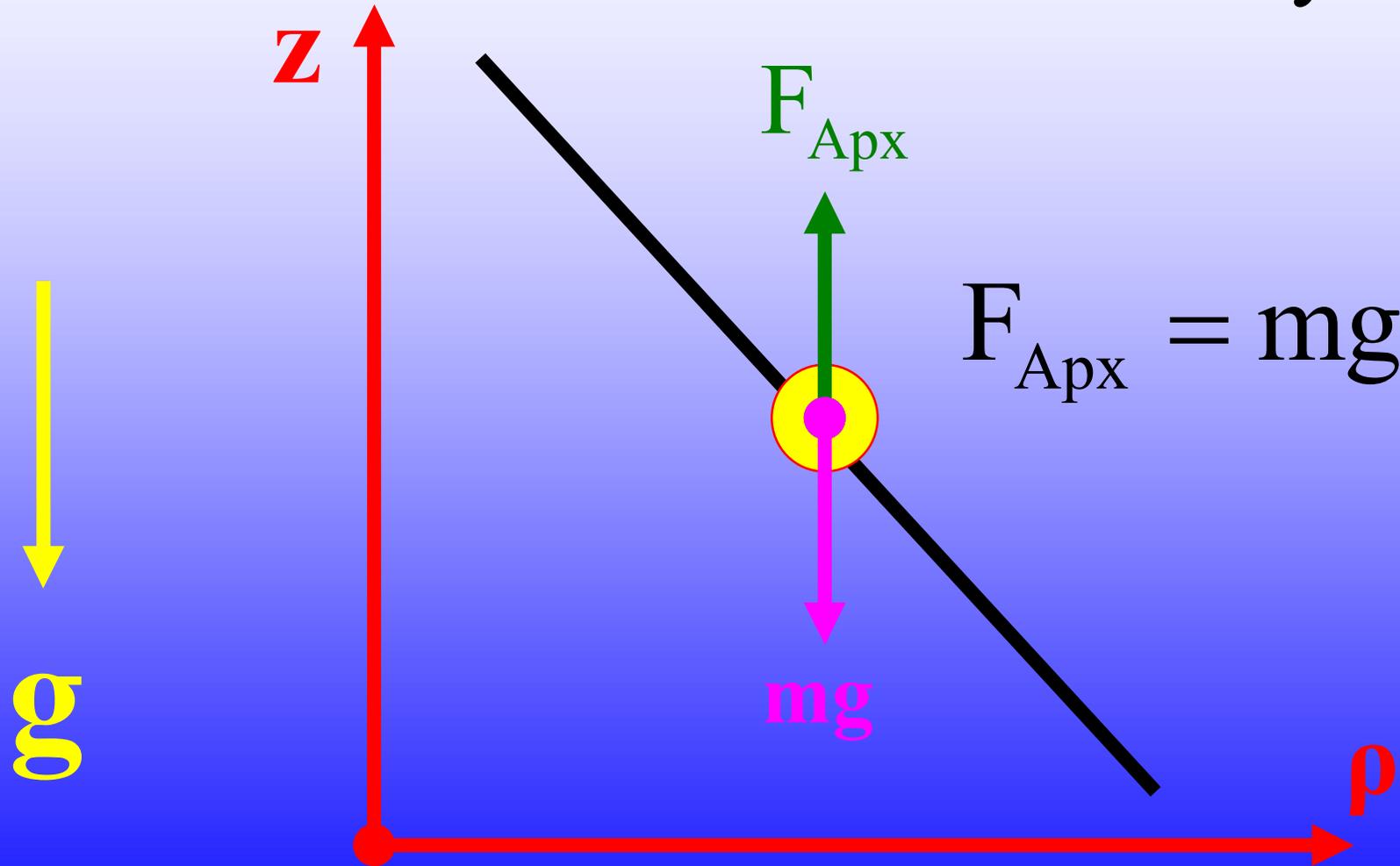
Устойчивость

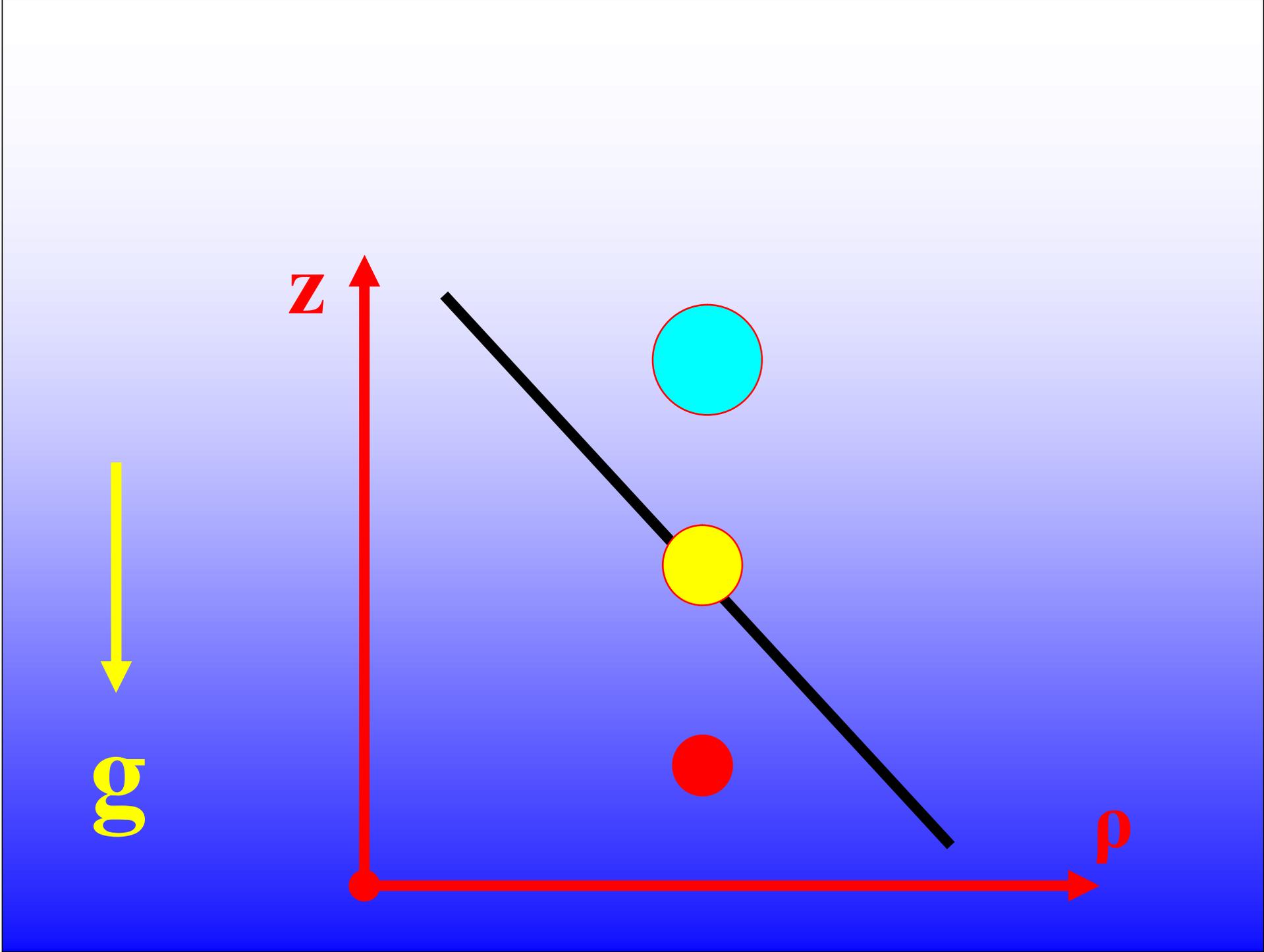


Малые
возмущения
нарастают со
временем

Малые
возмущения
затухают

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$





Уравнение движения частицы по вертикали в стратифицированной среде

$$F_{\Sigma} = F_{\text{Арх}} - mg = Vg(\rho_{\text{среды}} - \rho_{\text{частицы}})$$

$$\rho_{\text{среды}} = \rho_0 + \frac{d\rho}{dz} z$$

$$\rho_{\text{частицы}} = \rho_0 + \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s z$$

фактический градиент

адиабатический градиент

$$m \ddot{z} = Vg \left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s \right) z$$

$\rho V =$

$$\ddot{z} - \frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s \right) z = 0$$

уравнение колебаний

$$\ddot{z} - \frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s \right) z = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + N^2 z = 0$$

частота Вейселя-Брента

в океане / атмосфере

$$N \sim 10^{-4} - 10^{-1} \text{ Гц}$$

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s \right)}$$

адиабатический градиент

$$\left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s = \left(\frac{d\rho(p(z))}{dz} \right)_s = \left(\frac{d\rho}{dp} \right)_s \frac{dp}{dz} = -\frac{\rho g}{c^2}$$

$$\left(\frac{d\rho}{dp} \right)_s = \frac{1}{c^2}$$

**скорость
звука**

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

**закон
гидро-
статики**

$$\ddot{z} + N^2 z = 0 \quad N = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s \right)}$$

N – действительная величина

$$z(t) = A \cdot \sin(N \cdot t) + B \cdot \cos(N \cdot t)$$

$$\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dz} < \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s$$

**Устойчивая
стратификация**

N – мнимая величина

$$z(t) = A \cdot \exp(|N| \cdot t) + B \cdot \exp(-|N| \cdot t)$$

$$\frac{d\rho}{dz} > \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s$$

**Неустойчивая
стратификация**

Критерий устойчивости стратификации:

**соотношение фактического и
адиабатического градиентов плотности**

$$\frac{d\rho}{dz} < \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s$$

**Устойчивая
стратификация**

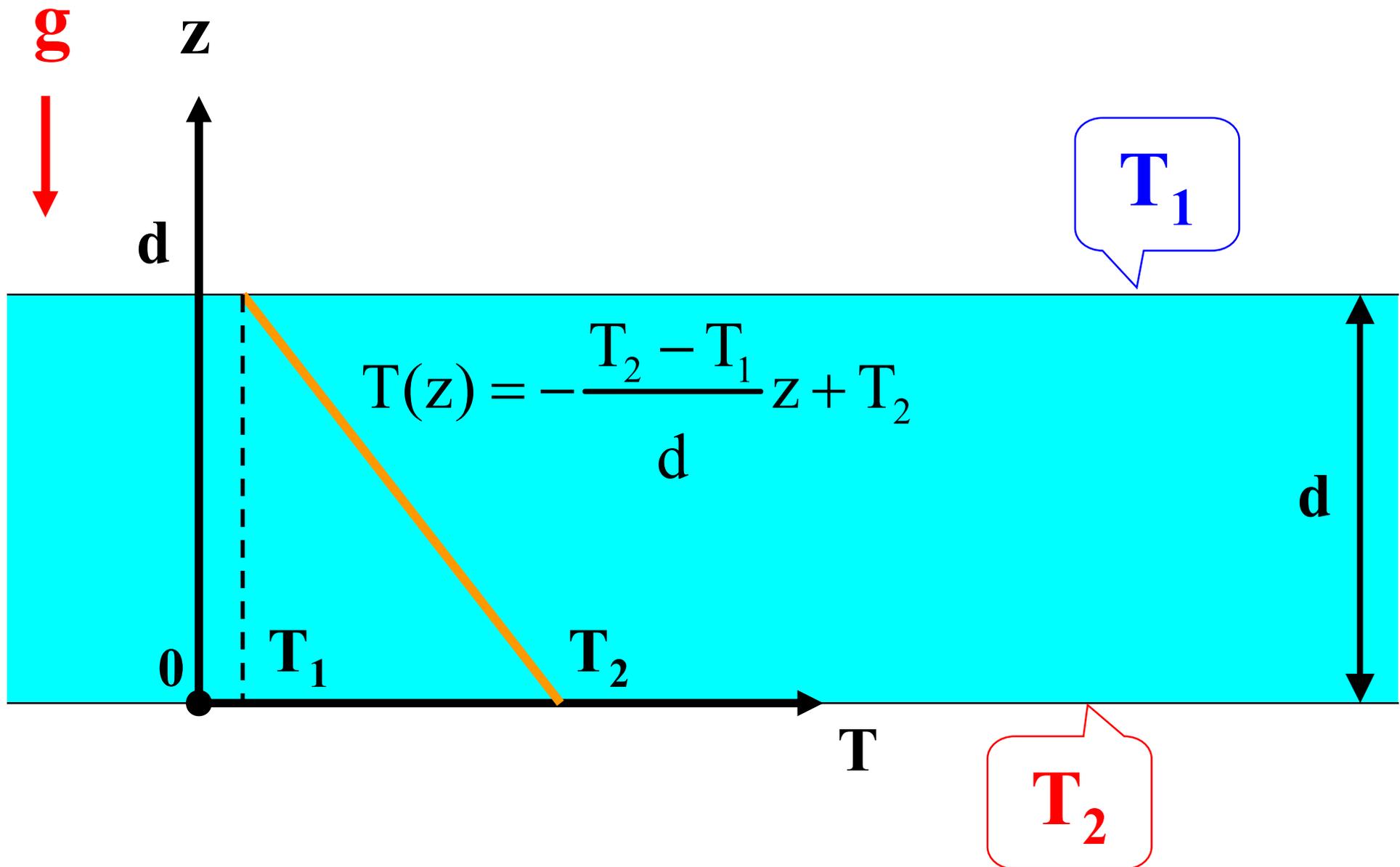
$$\frac{d\rho}{dz} > \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_s$$

**Неустойчивая
стратификация**

Термогравитационная конвекция

Конвективной неустойчивостью
называется неустойчивость в
газовой или жидкой среде,
находящейся в поле силы тяжести,
которая пронизывается потоком
тепла в направлении
противоположном вектору g

т.е. жидкость или газ подогреваются снизу



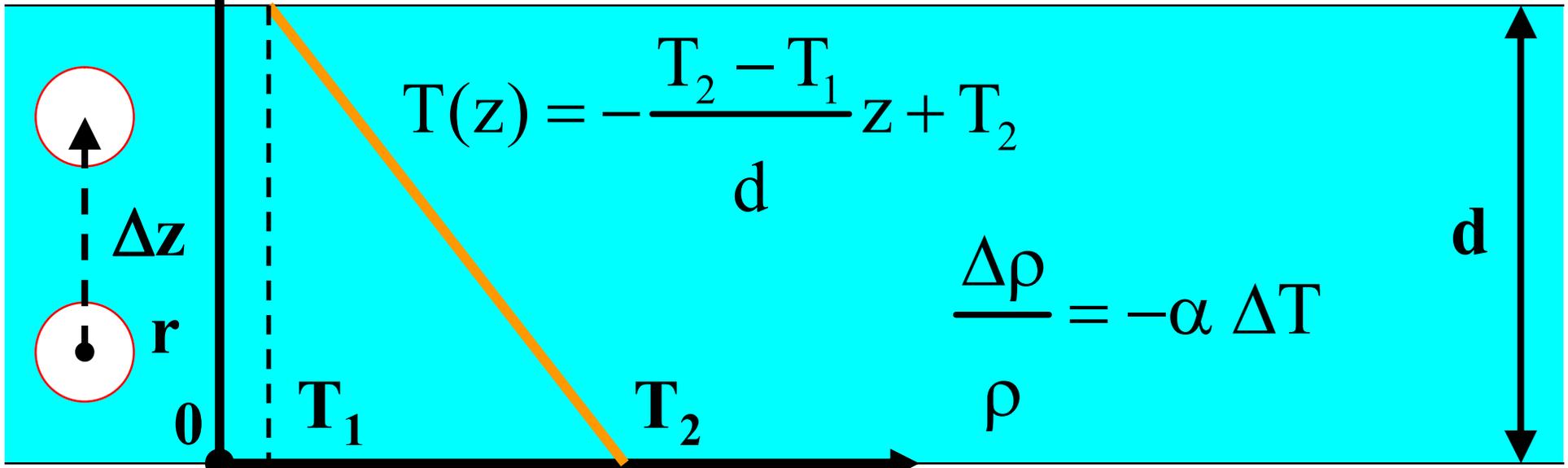
ρ - плотность; ν - вязкость; χ - температуропроводность;
 α - коэффициент объемного температурного расширения



z

d

$$\frac{|\Delta\rho|}{\rho} = \alpha \Delta T = \alpha \frac{T_2 - T_1}{d} \Delta z$$



$$T(z) = -\frac{T_2 - T_1}{d} z + T_2$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\alpha \Delta T$$



Δz



r

0

T₁

T₂

d

T

$$F_{\text{Арх}} - mg = F_{\text{Стокса}}$$

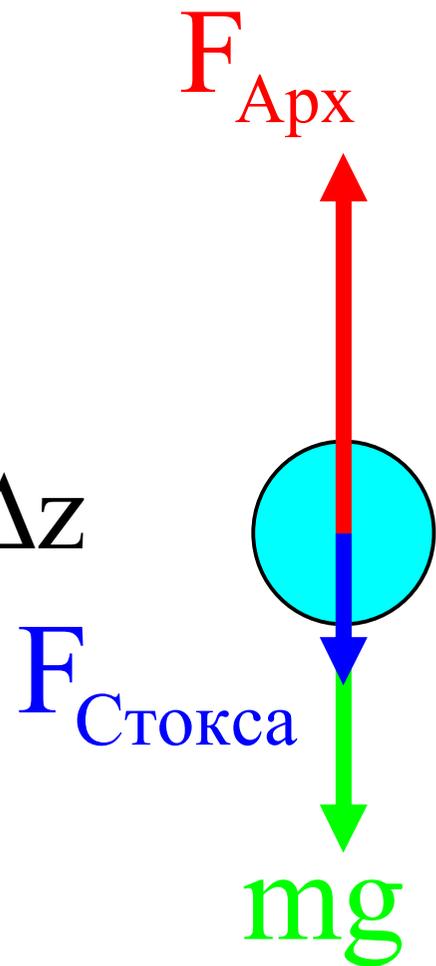
$$F_{\text{Арх}} - mg = gV \Delta\rho \sim g r^3 \Delta\rho$$

$$F_{\text{Стокса}} = 6\pi\rho\nu r U \sim \rho\nu r U$$

$$U \sim \frac{\Delta\rho g r^2}{\rho \nu} = \frac{\alpha g r^2 (T_2 - T_1)}{\nu d} \Delta z$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \alpha \frac{T_2 - T_1}{d} \Delta z$$

$$\tau_{\Delta z} \sim \frac{\Delta z}{U} = \frac{\nu d}{g \alpha (T_2 - T_1) r^2}$$



$$\tau_{\Delta z} \sim \frac{\nu d}{g \alpha (T_2 - T_1) r^2}$$

?

$$\tau_T \sim \frac{r^2}{\chi}$$

Температуро-
проводность

χ [м² / с]

$$\frac{\tau_T}{\tau_{\Delta z}} \sim \frac{g \alpha (T_2 - T_1) r^4}{\chi \nu d}$$

$r \sim d$

$$Ra = \frac{g \alpha (T_2 - T_1) d^3}{\chi \nu}$$

Число
Рэля

конвекция развивается при $Ra > Ra_{кр} \sim 10^3$

Уравнения гидродинамики

Уравнение состояния

$$\rho = \rho(p, T, \dots)$$

парциальное давление
водяного пара

воздух

$$\rho = \rho(p, T, e)$$

соленость

вода

$$\rho = \rho(p, T, s)$$

Соленость морской воды

$$S = \frac{m_{\text{примеси}}}{m_{\text{примеси}} + m_{\text{чистой воды}}} \left[\text{‰ промилле} \right]$$

PSU (Practical Salinity Unit)

Соленость – масса в граммах твердых веществ, растворенных в 1 кг воды, при условии, что карбонаты (CO_3^{2-} , HCO_3^-) превращены в оксиды, галогены (Br, I) заменены хлором, и все органические вещества сожжены при температуре 480 °C

*Точное определение $m_{\text{примеси}}$ в результате испарения, высушивания и взвешивания на практике очень сложно, т.к. некоторые вещества улетучиваются (например, хлористые соединения)

Типичная соленость:

в океане	35 ‰
в реках	до 0.5‰

Повышенная соленость наблюдается в зонах максимального испарения и минимума осадков, пониженная – в высоких широтах, где сказывается опресняющее действие талых ледниковых вод и приустьевых зонах.

Красное море - 41 ‰

Средиземное море - 39 ‰

Северный Ледовитый океан - 32‰

Балтийское море - 7‰

Азовское море - 11‰

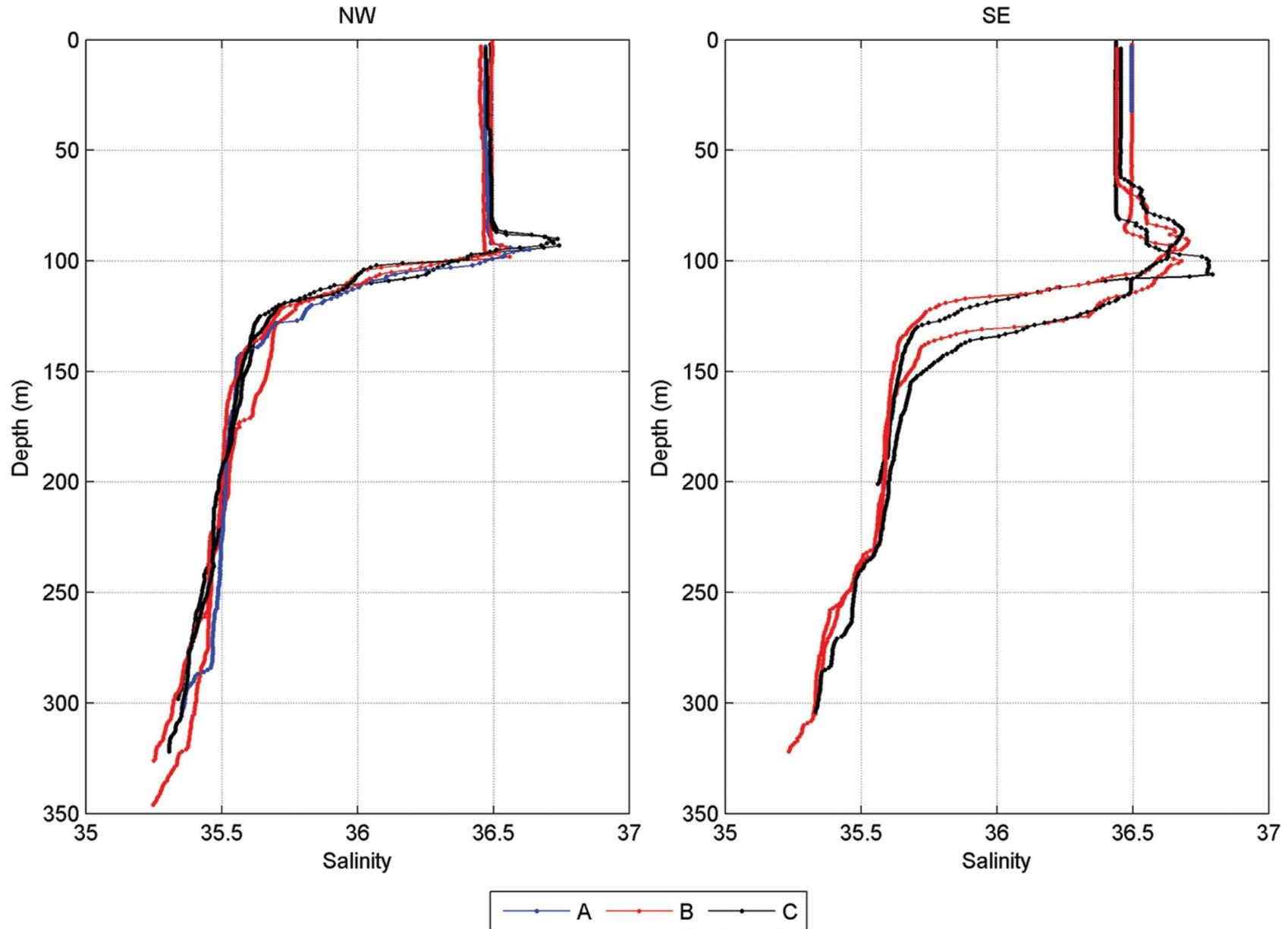
**Мертвое море
250-300 ‰**

**Общее количество
соли в Мировом
океане $\sim 4.9 \cdot 10^{19}$ кг**

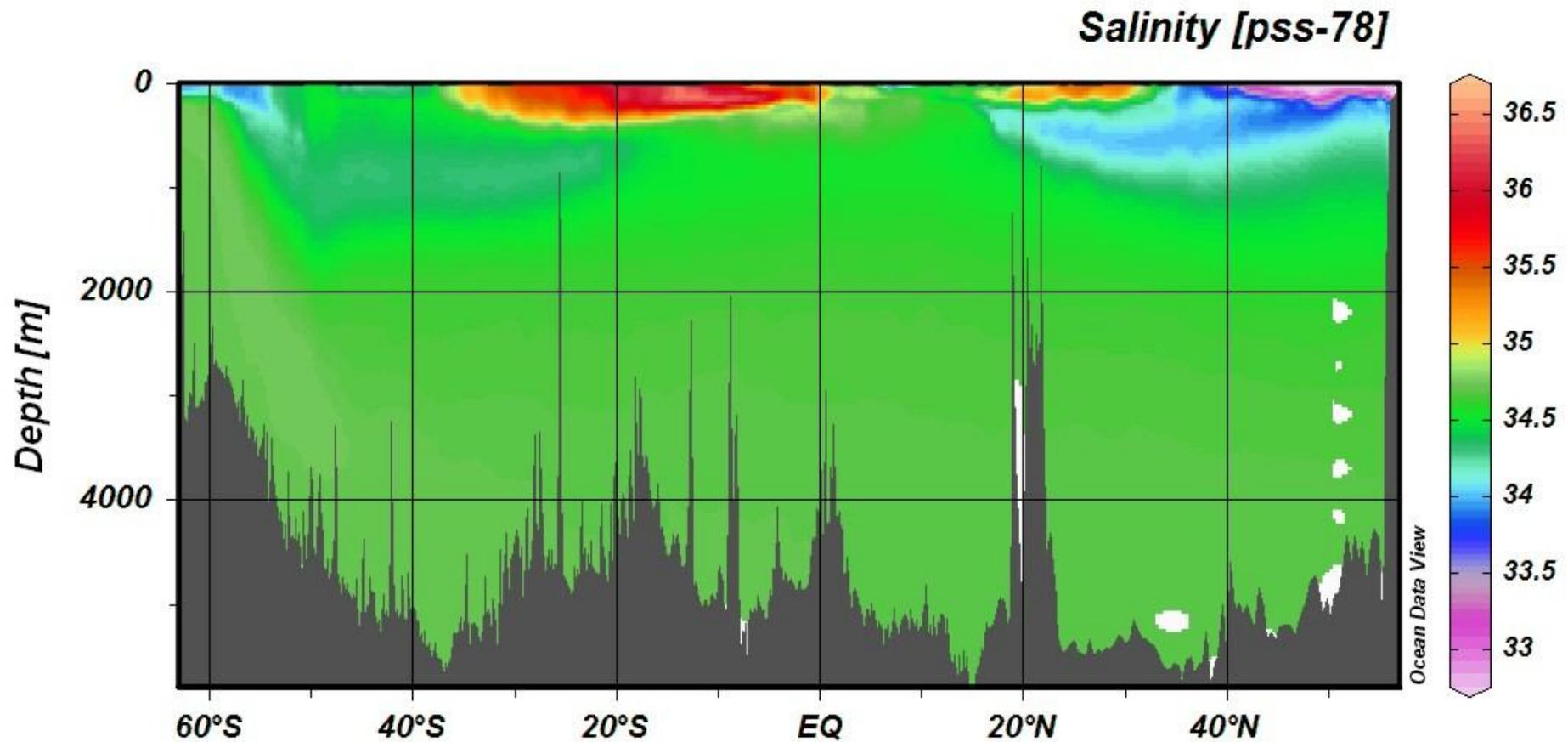
**На порядок больше
массы атмосферы!!!**

**Соль Мирового океана способна
покрыть поверхность суши
слоем ~ 150 м**

Вертикальный профиль солености в океане (примеры регистрации)



Вертикальный разрез (соленость)



<http://www.ewoce.org>

Уравнение состояния воздуха (сухого)

$$p = \frac{m}{V} \frac{R}{\mu} T$$

$$\rho = \rho(p, T)$$

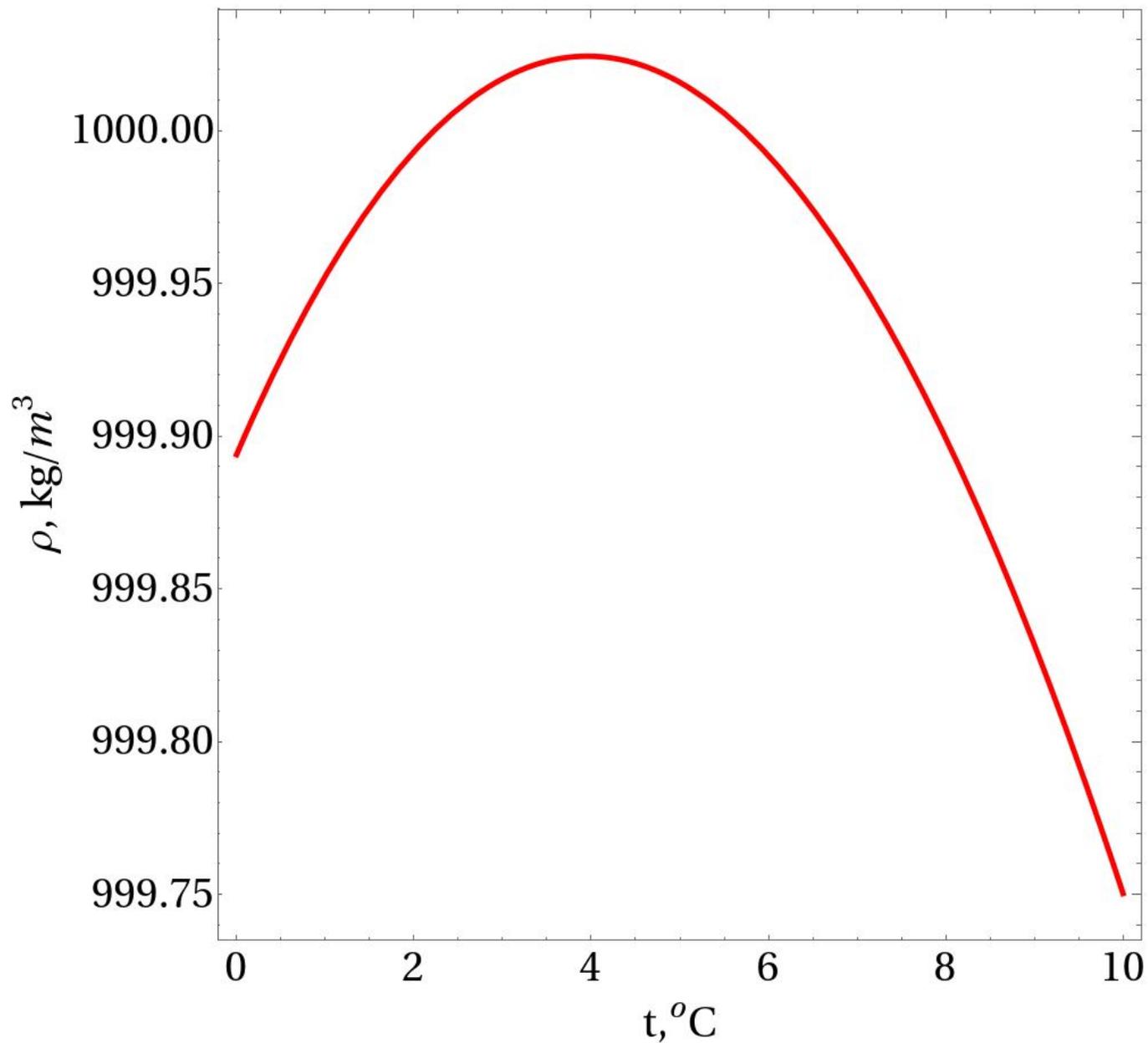
$$\rho = \frac{p\mu}{RT}$$

Уравнение состояния морской воды

$$\rho = \rho(p, T, s)$$

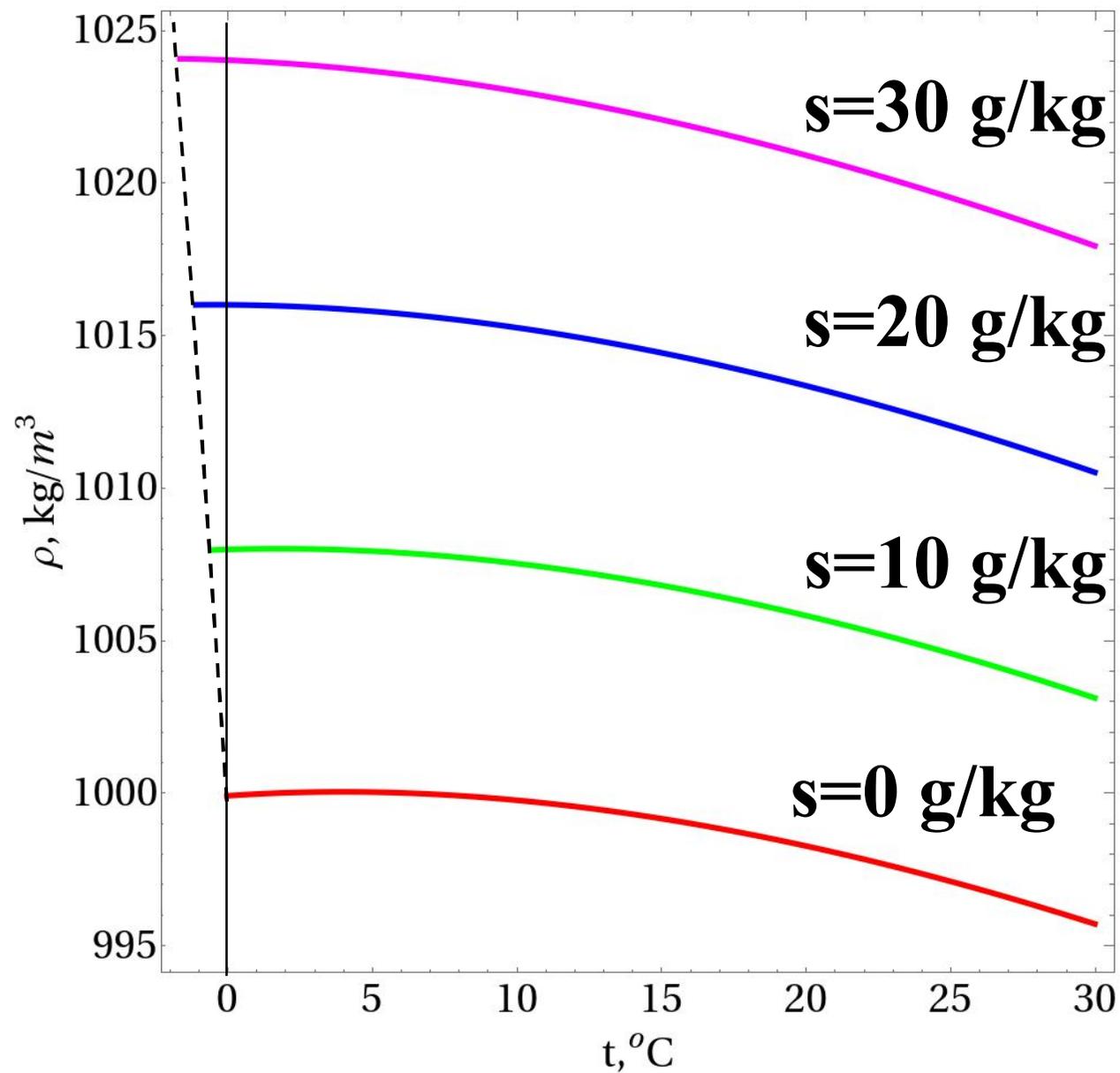
**аналитического выражения не существует,
есть только эмпирические формулы!**

- **Формула Линейкина (5 эмпирических констант)**
- **Уравнение Чена-Миллеро (48 эмпирических констант)**
- **The International Thermodynamic Equation of Seawater – 2010 (www.teos-10.org) - уравнение для потенциала Гиббса**

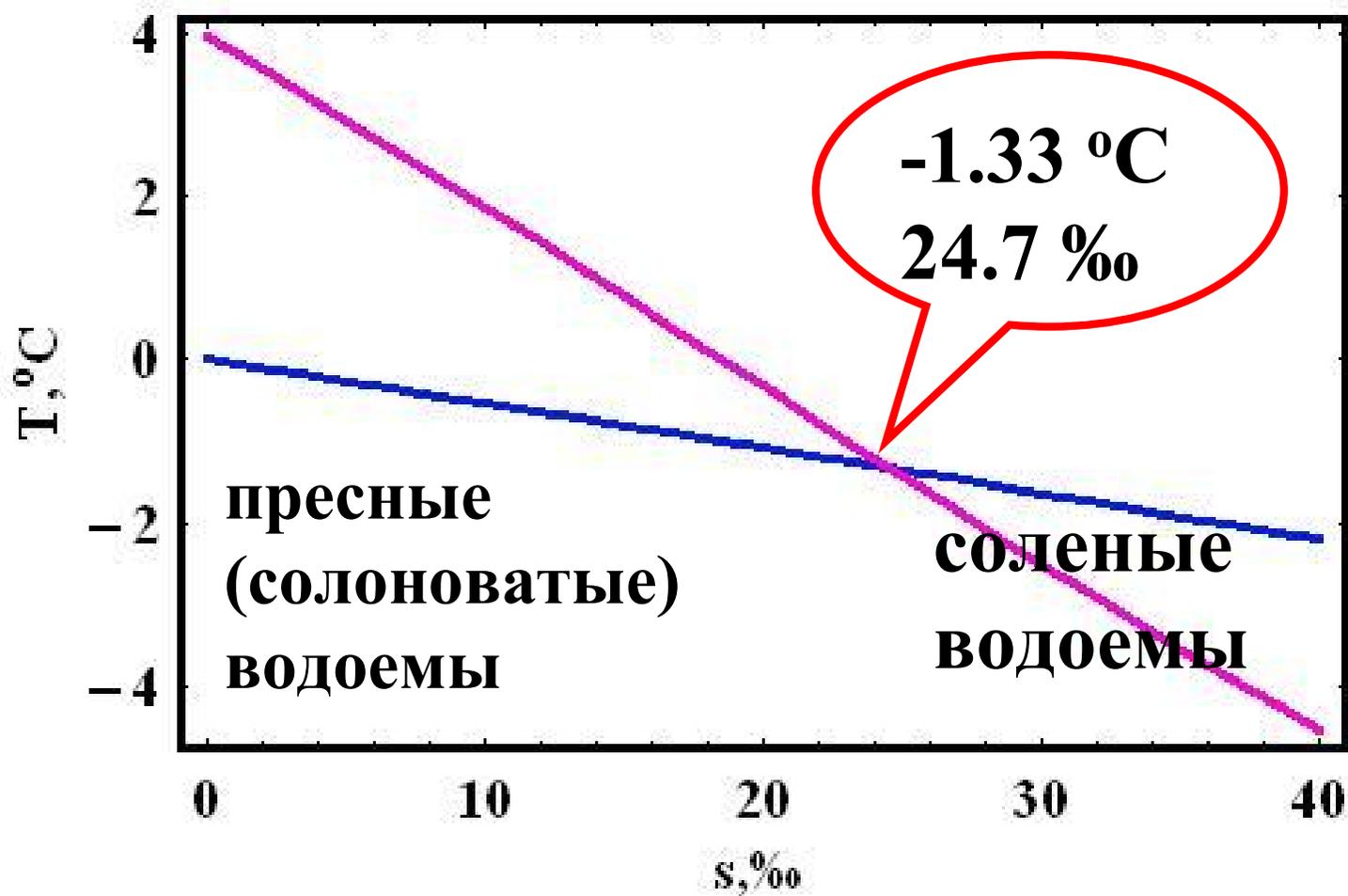


**у пресных (солонватых) вод существует
«температура максимальной плотности»**

Плотность морской воды как функция температуры и солёности

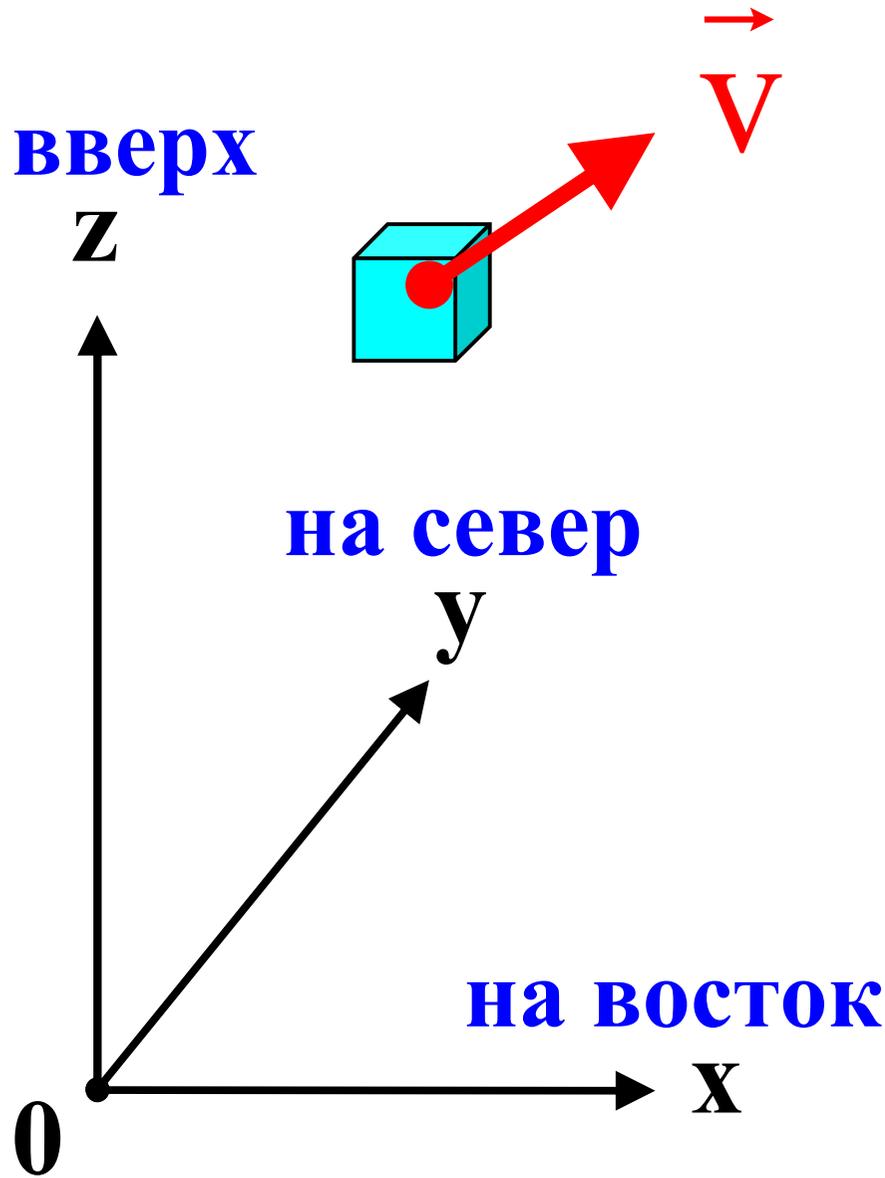


Температура заморзания и максимальной плотности как функция солености



Уникальные свойства воды

- 1. существование температуры максимальной плотности у пресных (солонатовых) вод**
- 2. плотность льда < плотности воды**
917 кг/м³ 999.8 кг/м³
- 3. высокие значения теплоемкости и теплоты фазовых переходов, широкий диапазон существования жидкой фазы**
- 4. вода – эффективный растворитель**



$$\vec{v} = (u_x, u_y, u_z)$$

$$\vec{v} \equiv (u, v, w)$$

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

$$p = p(x, y, z, t)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

ВВЕРХ

Z



на север

y

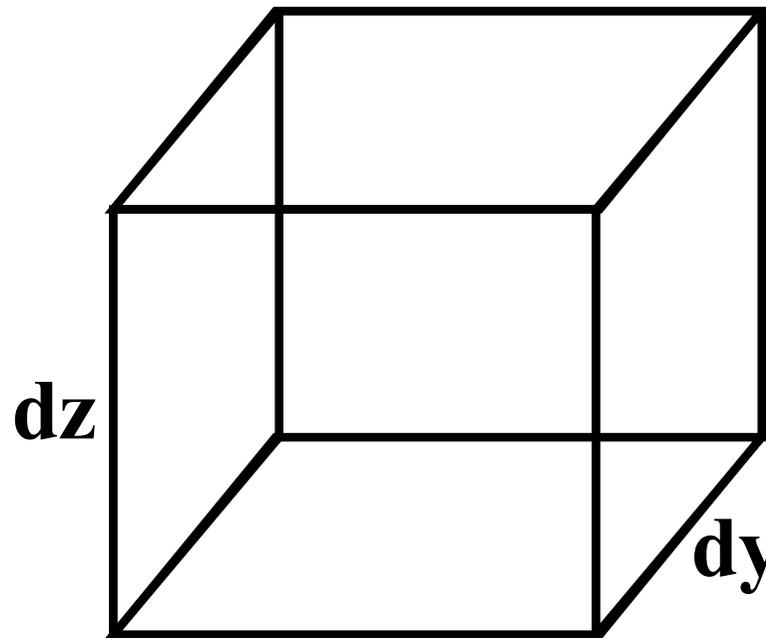


на восток

x



0



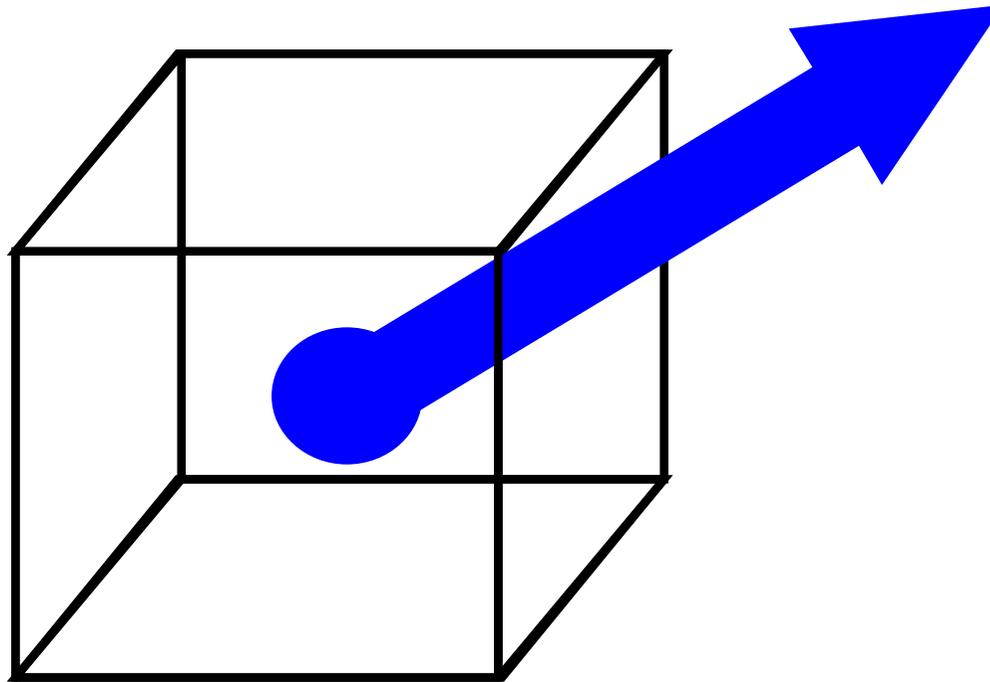
dz

dx

dy

Массовые силы

$$F_{\text{масс}} \sim dm = dx dy dz \rho$$

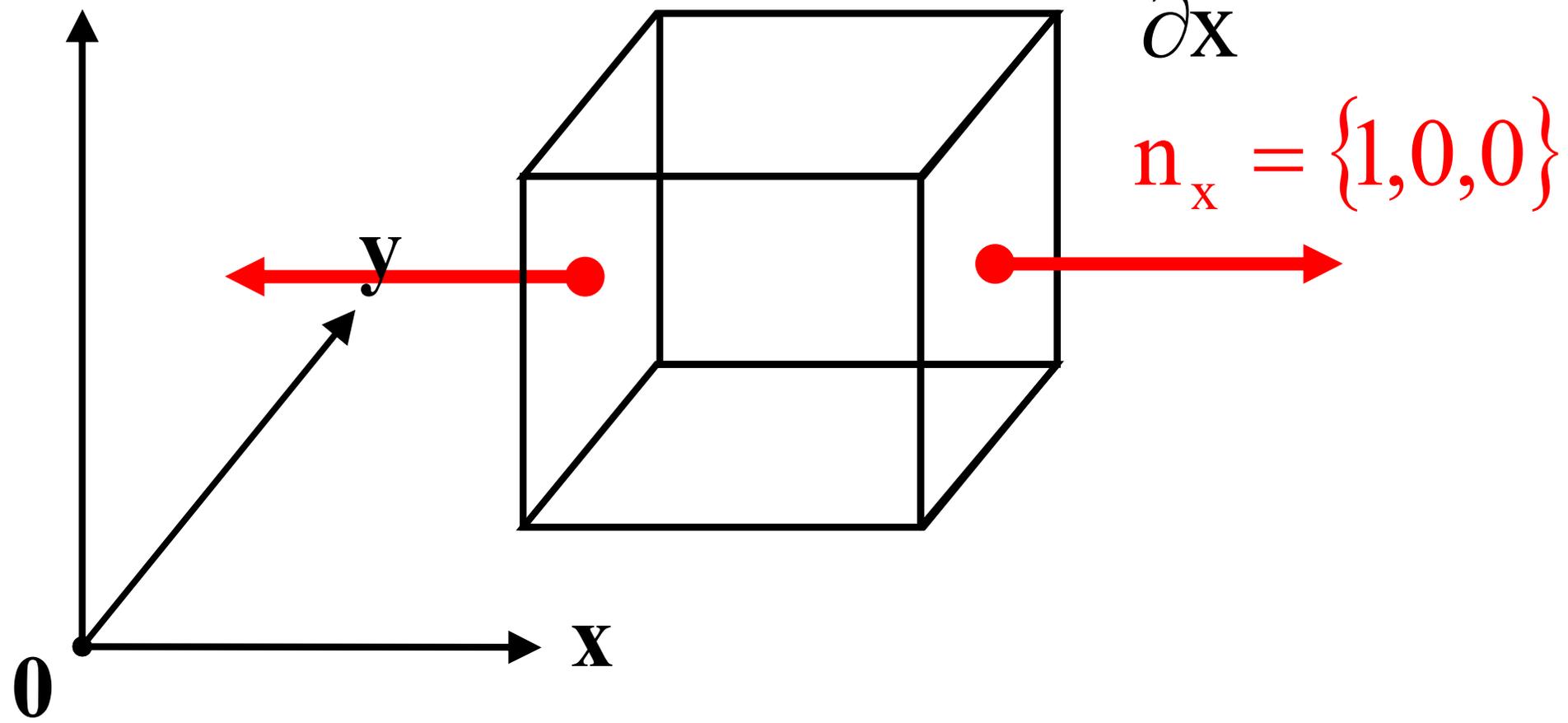


- ❑ сила притяжения (Земля, Луна, Солнце, ...)
- ❑ силы инерции (Кориолиса, центробежная)

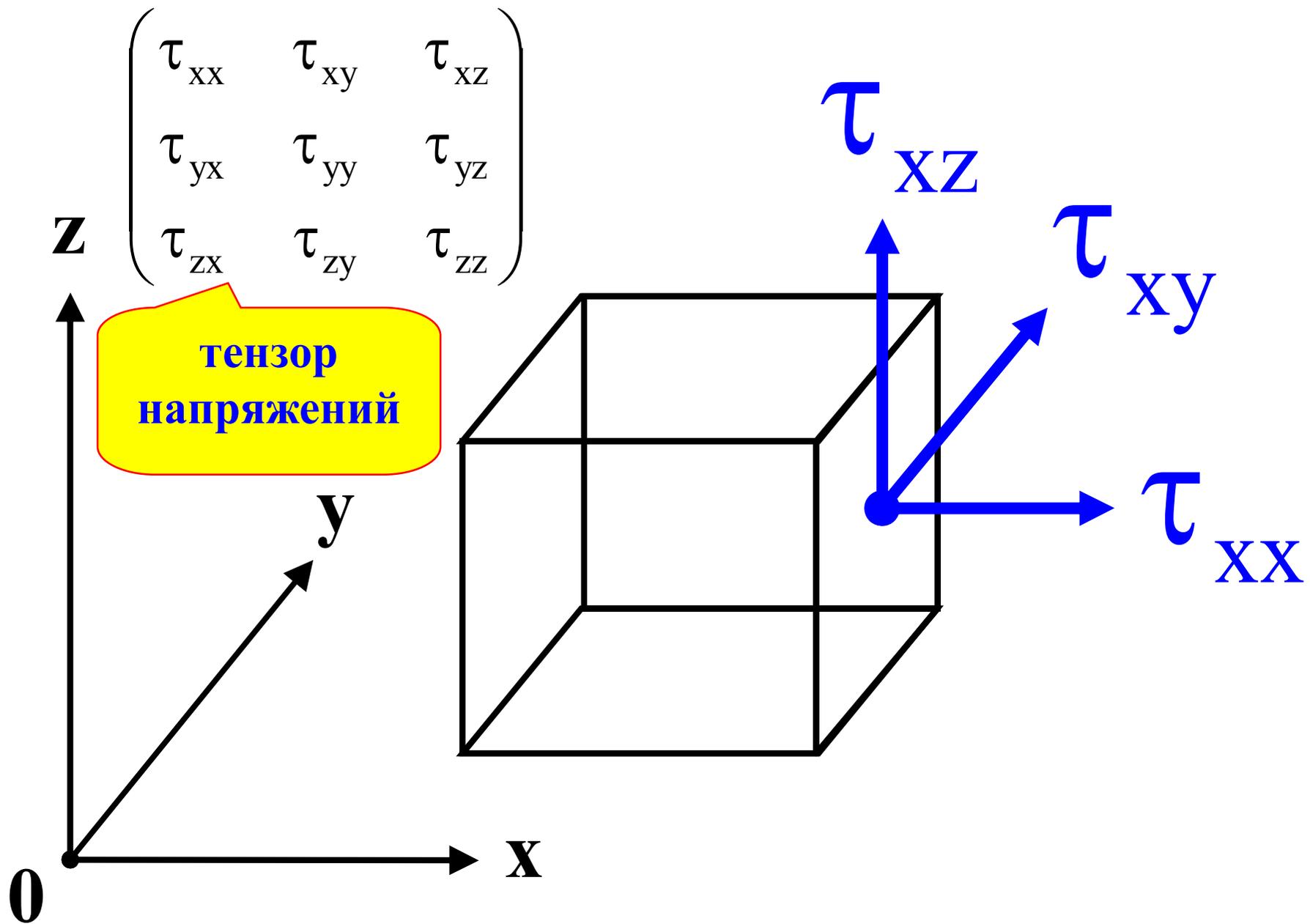
«Поверхностные» силы

$$F_{\text{поверхн}} = [\tau(x + dx) - \tau(x)] dydz$$

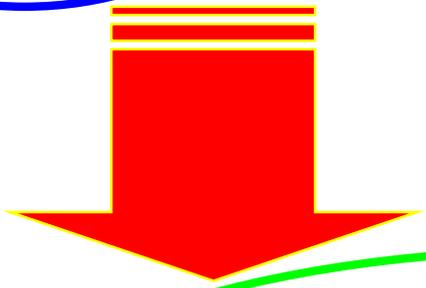
$$n'_x = \{-1, 0, 0\} \quad F_{\text{поверхн}} = \frac{\partial \tau}{\partial x} dx dy dz$$



«Поверхностные» силы



$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{масс}} + \sum \vec{F}_{\text{поверхни}}$$



$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \text{grad div } \vec{v}$$

сила тяжести

сила Кориолиса

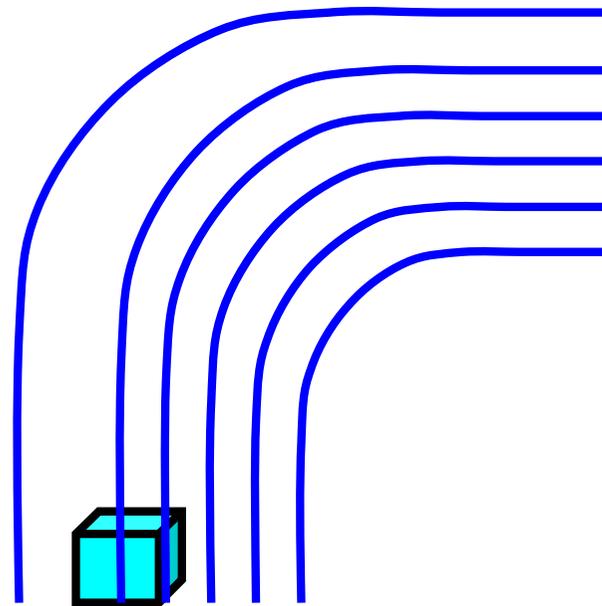
сила градиента давления

сила вязкого трения

$$\vec{v} = \vec{v}(x(t), y(t), z(t), t)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla} \right) \vec{v}$$

**полная
производная**

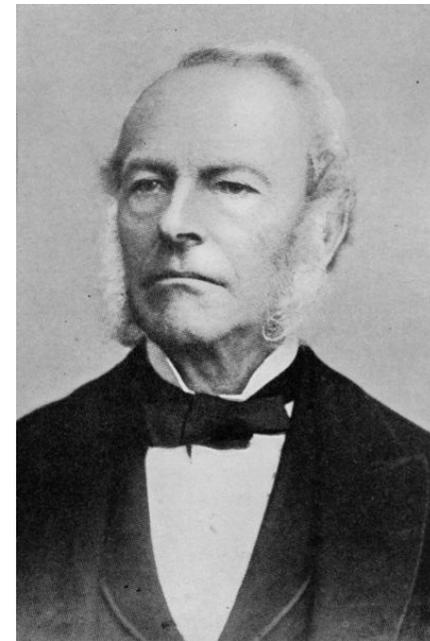


Уравнение Навье-Стокса

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \text{grad div } \vec{v}$$



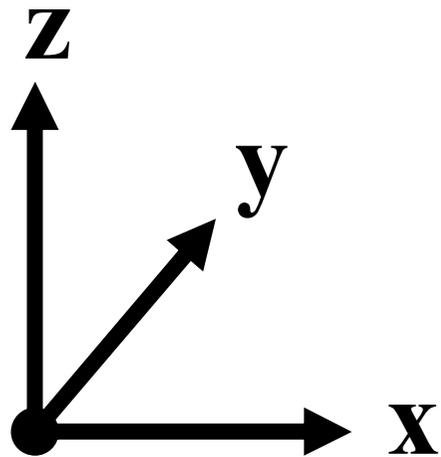
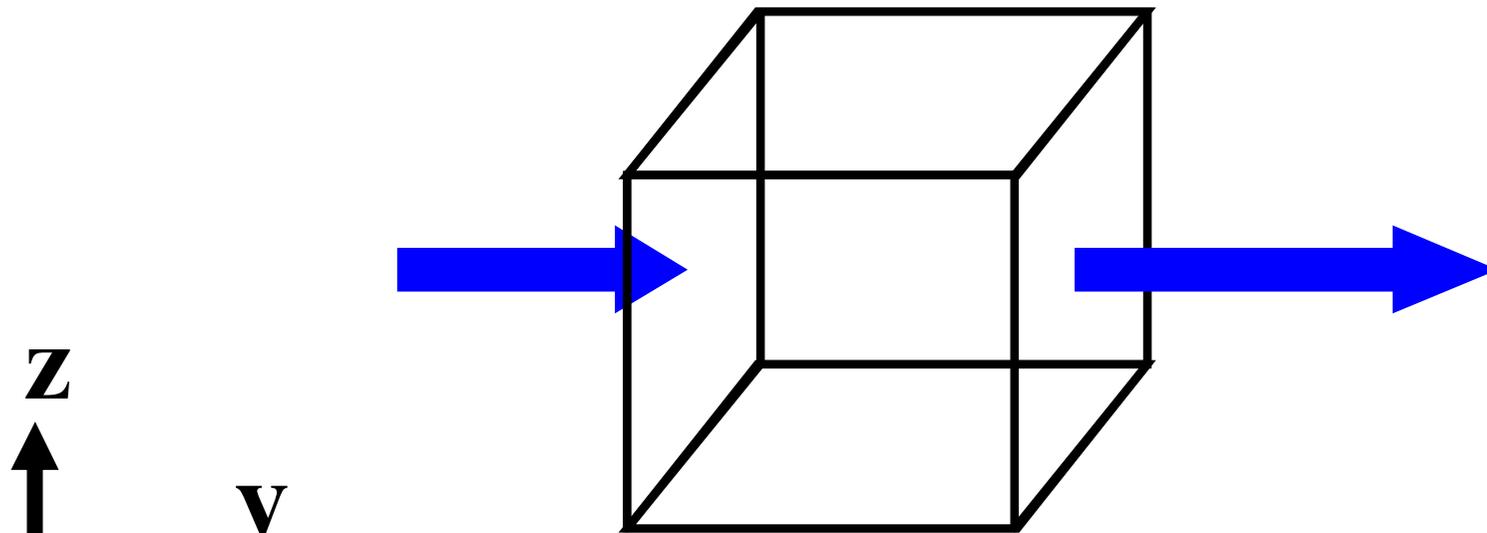
Анри Навье
1785-1836
французский
механик и инженер



Джордж Стокс
1819-1903
английский физик и
математик

Уравнение неразрывности (закон сохранения массы)

$$\rho(x)u(x)dydz$$



$$\rho(x + dx)u(x + dx)dydz$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = dx dy dz \frac{\partial \rho}{\partial t} =$$

$$= -[\rho(x + dx)u(x + dx) - \rho(x)u(x)] dy dz$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial[\rho u]}{\partial x} - \frac{\partial[\rho v]}{\partial y} - \frac{\partial[\rho w]}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho \vec{v}] = 0$$

**уравнение
неразрывности**

Система уравнений гидродинамики (аэрогидромеханики)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \text{grad div } \vec{v}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

закон сохранения
массы

2-й закон
Ньютона

уравнение
Навье-Стокса

уравнение
неразрывности

баротропность

$$\rho = \rho(p)$$

уравнение
состояния

бароклинность?

Система уравнений гидродинамики

+уравнение переноса температуры

+уравнение переноса соли/водяного пара

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})T = \chi \Delta T$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})s = \vartheta \Delta s$$

$$\rho = \rho(p, T, s)$$

**система
остается
замкнутой!!!**

$$\vec{v} = (u, v, w) \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

**Что
означает
запись?**

$$\left(\vec{v}, \vec{\nabla} \right) T = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}$$

Граничные условия на поверхностях, ограничивающих область решения задачи

условие прилипания

$$\vec{V} = 0 \text{ или } \vec{V} = \vec{V}_0$$

заданное напряжение
(поток импульса)

$$\eta \frac{\partial u}{\partial z} = \tau$$

заданное давление

$$p = p_0$$

заданный поток тепла

$$-C_p \chi \frac{\partial T}{\partial z} = Q$$

заданная температура

$$T = T_0$$

Граничные условия на поверхностях, ограничивающих область решения задачи

Поверхности могут быть **подвижными и неизвестными**, т.е. их положение определяется из решения задачи

Примеры:

- волны на поверхности воды
- течения с возможностью фазовых переходов (лед-вода, мантия-ядро Земли)
- размыв или выветривание
- etc.

Начальные условия (при $t=0$)

$$\vec{v} = \vec{v}_0(x, y, z)$$

$$p = p_0(x, y, z)$$

$$\rho = \rho_0(x, y, z)$$

$$T = T_0(x, y, z)$$

$$s = s_0(x, y, z)$$

$$\rho_0 = \rho(p_0, T_0, s_0)$$

$$\text{при } \vec{v}_0 = 0$$

$$-\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p_0 + \vec{g} = 0$$

геофизическая практика

**Проблема усвоения данных
наблюдений в численные модели**