Геофизика

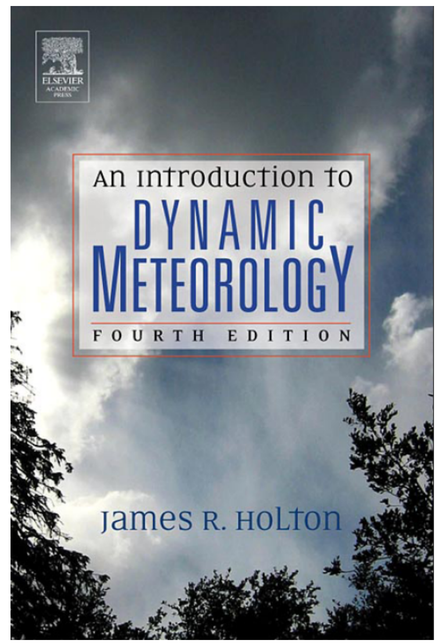
2024 Лекция № 10

Елисеев Алексей Викторович
отделение геофизики, физический факультет МГУ

http://ocean.phys.msu.ru/courses/geo/

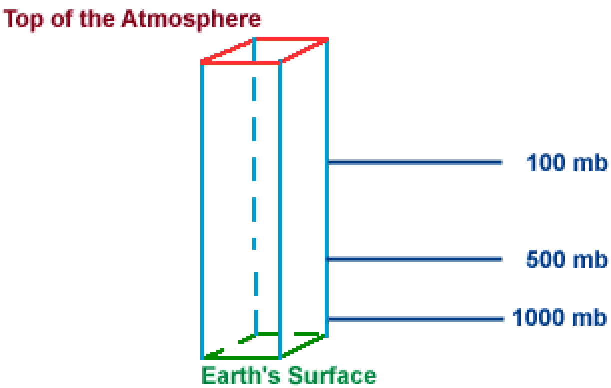
также: https://cloud.mail.ru/public/x84v/K9EfwZ8zV

Динамические процессы и циркуляция атмосферы Земли



Уравнения движения вращающейся жидкости

Координаты: (ф – широта, λ – долгота, p – давление)
или: (ф – широта, λ – долгота, z – высота)



уравнения Навье–Стокса (закон сохранения импульса)

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \mathbf{g} +$$

уравнение неразрывности (закон сохранения массы)

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \boldsymbol{\nabla} \bullet \mathbf{U} = 0$$

термодинамическое уравнение (закон сохранения энергии)

$$c_v \frac{DT}{Dt} + p\frac{D\alpha}{Dt} = J$$

материальная производная

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \bullet \boldsymbol{\nabla}$$

компоненты скорости U:

$$u \equiv r\cos\phi \frac{D\lambda}{Dt}, \quad v \equiv r\frac{D\phi}{Dt}, \quad w \equiv \frac{Dz}{Dt}$$

Упрощение уравнений динамики: гидростатика (1)

$$\frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\Omega u \cos\phi + F_{rz}$$

Масштабы величин погодных вариаций в атмосфере

горизонтальная скорость:	U ~ 10 м/с	
вертикальная скорость:	W ~1 см/с	
горизонтальный масштаб:	L ~ 10^6 м	(масштаб Кибеля–Россби)
вертикальный масштаб:	H ~ 10^4 м	
вариации давления:	δP / ρ ~ 10^3 м^2/с^2	
время:	L / U ~ 10^5 с	

z - Eq.	Dw/Dt	$-2\Omega u\cos\phi$	$-(u^2+v^2)/a$	$=$	$-\rho^{-1}\partial p/\partial z$	$-g$	$+F_{rz}$
Scales	UW/L	$f_0 U$	U^2/a		$P_0/(\rho H)$	g	$\nu W H^{-2}$
m s^{-2}	10^{-7}	10^{-3}	10^{-5}		10	10	10^{-15}

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{dp_0}{dz} \equiv -g$$

Упрощение уравнений динамики: гидростатика (2)

Однако это доказательство только для атмосферы без движений!

Если есть движения, то

$$p(x, y, z, t) = p_0(z) + p'(x, y, z, t)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t)$$

$| p' | << p_0$, $| \rho' | << \rho_0$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g = -\frac{1}{(\rho_0 + \rho')}\frac{\partial}{\partial z}\left(p_0 + p'\right) - g$$

$$\approx \frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\rho'}{\rho_0}\frac{dp_0}{dz} - \frac{\partial p'}{\partial z}\right] = -\frac{1}{\rho_0}\left[\rho' g + \frac{\partial p'}{\partial z}\right]$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} \sim \left[\frac{\delta P}{\rho_0 H}\right] \sim 10^{-1}\mathrm{m\ s}^{-2}, \qquad \frac{\rho' g}{\rho_0} \sim 10^{-1}\mathrm{m\ s}^{-2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} + \rho' g = 0$$

Упрощение уравнений динамики: геострофика (1)

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{uv\tan\phi}{a} + \frac{uw}{a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v\sin\phi - 2\Omega w\cos\phi + F_{rx}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2\tan\phi}{a} + \frac{vw}{a} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u\sin\phi + F_{ry}$$

Масштабы величин погодных вариаций в атмосфере

горизонтальная скорость:	U ~ 10 м/с	
вертикальная скорость:	W ~1 см/с	
горизонтальный масштаб:	L ~ 10^6 м	(масштаб Кибеля-Россби)
вертикальный масштаб:	H ~ 10^4 м	
вариации давления:	δP / ρ ~ 10^3 м²/с²	
время:	L / U ~ 10^5 с	

	A	B	C	D	E	F	G
$x-$Eq.	$\frac{Du}{Dt}$	$-2\Omega v\sin\phi$	$+2\Omega w\cos\phi$	$+\frac{uw}{a}$	$-\frac{uv\tan\phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$	$+F_{rx}$
$y-$Eq.	$\frac{Dv}{Dt}$	$+2\Omega u\sin\phi$		$+\frac{vw}{a}$	$+\frac{u^2\tan\phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$	$+F_{ry}$
Scales	U^2/L	f_0U	f_0W	$\frac{UW}{a}$	$\frac{U^2}{a}$	$\frac{\delta P}{\rho L}$	$\frac{\nu U}{H^2}$
(m s^{-2})	10^{-4}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-12}

Упрощение уравнений динамики: геострофика (2)

$$-fv \approx -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \qquad fu \approx -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

в векторной форме

$$\mathbf{V}_g \equiv \mathbf{i}u_g + \mathbf{j}v_g$$

$$\mathbf{V}_g \equiv \mathbf{k} \times \frac{1}{\rho f}\boldsymbol{\nabla} p$$

Упрощение уравнений динамики: квазигеострофика (1)

Масштабы величин погодных вариаций в атмосфере

горизонтальная скорость:	$U \sim 10$ м/с	
вертикальная скорость:	$W \sim 1$ см/с	
горизонтальный масштаб:	$L \sim 10^6$ м	(масштаб Кибеля–Россби)
вертикальный масштаб:	$H \sim 10^4$ м	
вариации давления:	$\delta P / \rho \sim 10^3$ м²/с²	
время:	$L / U \sim 10^5$ с	

	A	B	C	D	E	F	G
$x-$Eq.	$\frac{Du}{Dt}$	$-2\Omega v \sin\phi$	$+2\Omega w \cos\phi$	$+\frac{uw}{a}$	$-\frac{uv\tan\phi}{a}$	$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$	$+F_{rx}$
$y-$Eq.	$\frac{Dv}{Dt}$	$+2\Omega u \sin\phi$		$+\frac{vw}{a}$	$+\frac{u^2\tan\phi}{a}$	$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$	$+F_{ry}$
Scales	U^2/L	$f_0 U$	$f_0 W$	$\frac{UW}{a}$	$\frac{U^2}{a}$	$\frac{\delta P}{\rho L}$	$\frac{\nu U}{H^2}$
(m s^{-2})	10^{-4}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-12}

$$\frac{Du}{Dt} = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = f\left(v - v_g\right)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -f\left(u - u_g\right)$$

Упрощение уравнений динамики: квазигеострофика (2)

Число Кибеля–Россби

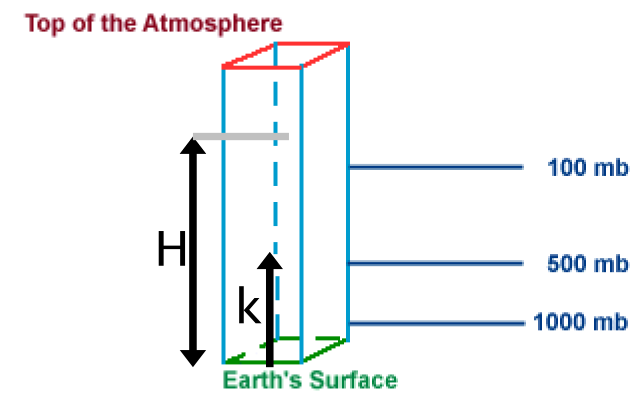
$$R_0 \equiv (U^2/L)/(f_0 U) \equiv U/(f_0 L)$$

$f_0 = 2\,\Omega \sin \phi_0$

$R_0 \sim 10^{-1}$

Уравнение гидротермодинамики: изобарические координаты

Вертикальная координата – давление p



$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} + f\mathbf{k}\times\mathbf{V} = -\boldsymbol{\nabla}_p\Phi$$

Φ = g H – геопотенциал

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}$$

вертикальная скорость: $\omega \equiv Dp/Dt$

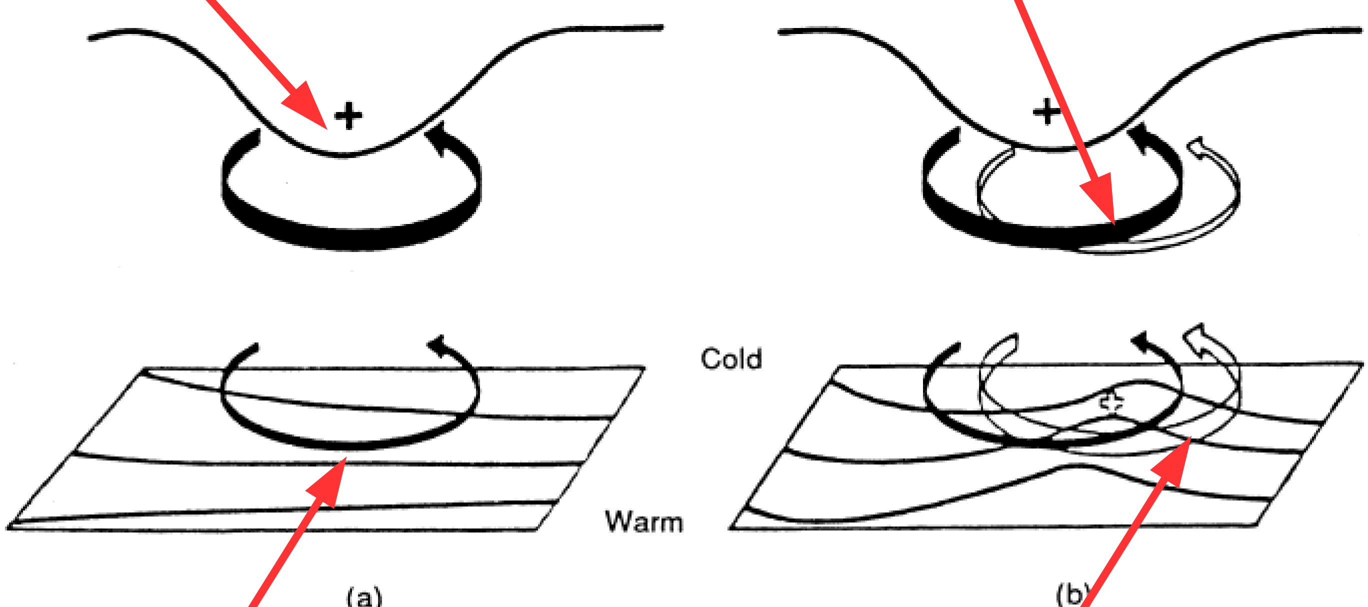
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

Геострофическое приближение: $f\,\mathbf{V}_g = \mathbf{k}\times\boldsymbol{\nabla}_p\Phi$

Бароклинная неустойчивость

1. Аномалия завихренности $\delta\zeta > 0$ в верхней тропосфере

4. Аномалия $\delta\zeta > 0$ проникает в верхнюю атмосферу и усиливает начальную аномалию.



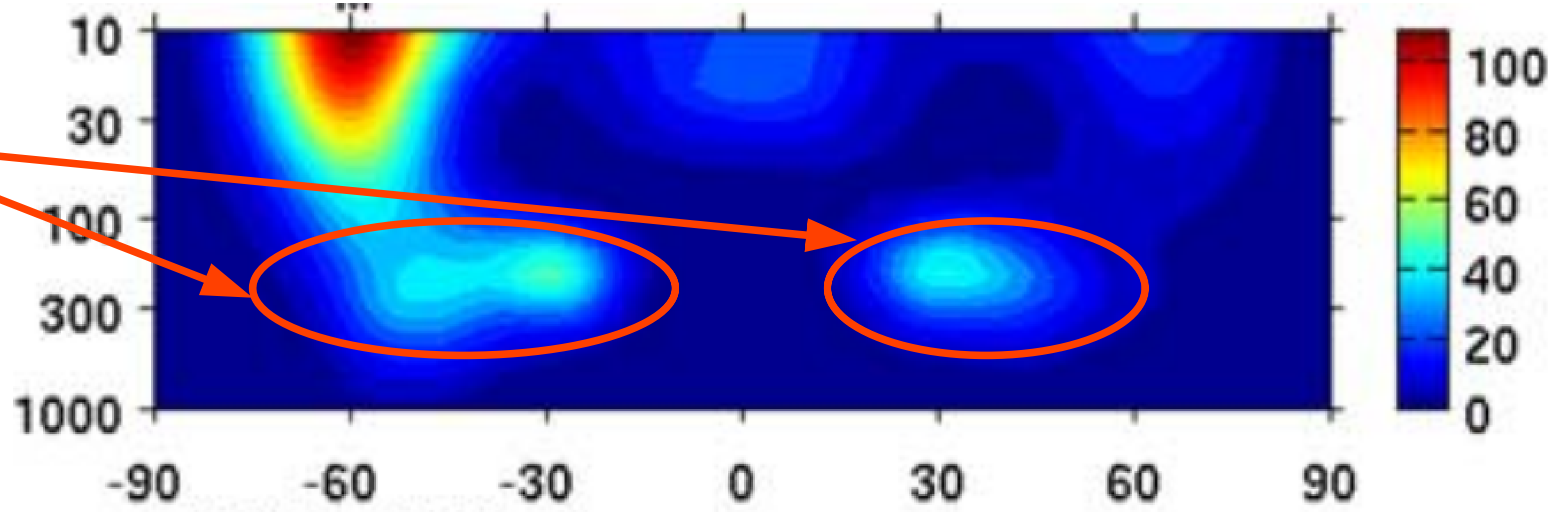
2. $\delta\zeta < 0$ в нижней тропосфере

3. Адвекция потенциальной температуры приводит к аномалии $\delta T > 0$ к востоку от начальной аномалии завихренности

Среднезональные среднегодовые величины, реанализ ERA-40 [Li et al., 2007]

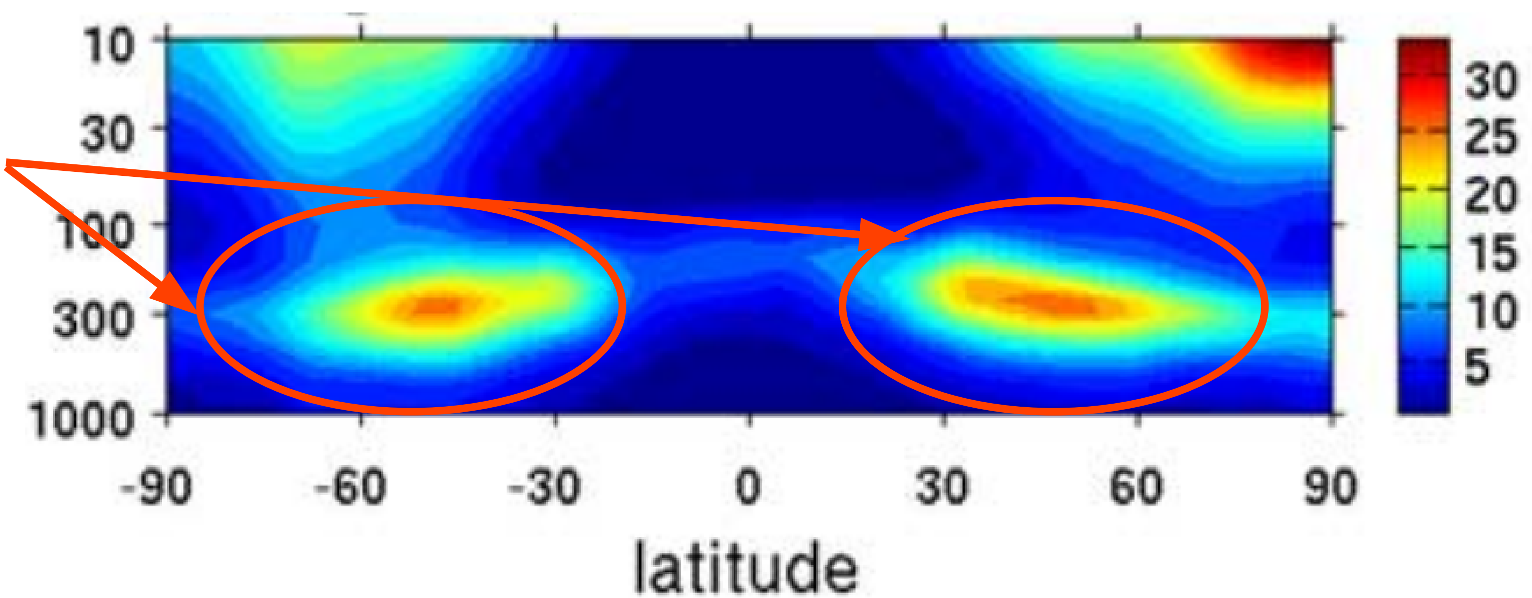
Кинетическая энергия базового (зонального потока), 10^5 Дж/(м^2·атм)

струйные течения тропосферы



Кинетическая энергия незональных возмущений (вихрей), 10^5 Дж/(м^2·атм)

шторм-треки тропосферы (преобладающие области циклонической активности)



Завихрённость

В абсолютных координатах (с учётом вращения Земли): $\boldsymbol{\omega}_a \equiv \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{U}_a$

Относительная (относительно вращающейся Земли): $\boldsymbol{\omega} \equiv \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{U}$

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

В физике атмосферы доминируют вертикальные компоненты

$$\eta \equiv \mathbf{k} \bullet (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{U}_a)$$

$$\zeta \equiv \mathbf{k} \bullet (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{U})$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \eta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f$$

$f = 2\,\Omega \sin \phi$ – планетарная завихрённость

Уравнение завихрённости

$$\frac{D_h(\zeta + f)}{Dt} = -(\zeta + f)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\frac{D_h}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$$

Для бездивергентных движений ($\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$)

$$\frac{D_h(\zeta + f)}{Dt} = (\zeta + f)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\frac{D_h}{Dt}\left(\frac{\zeta_g + f}{h}\right) = 0$$

(h – геопотенциал)

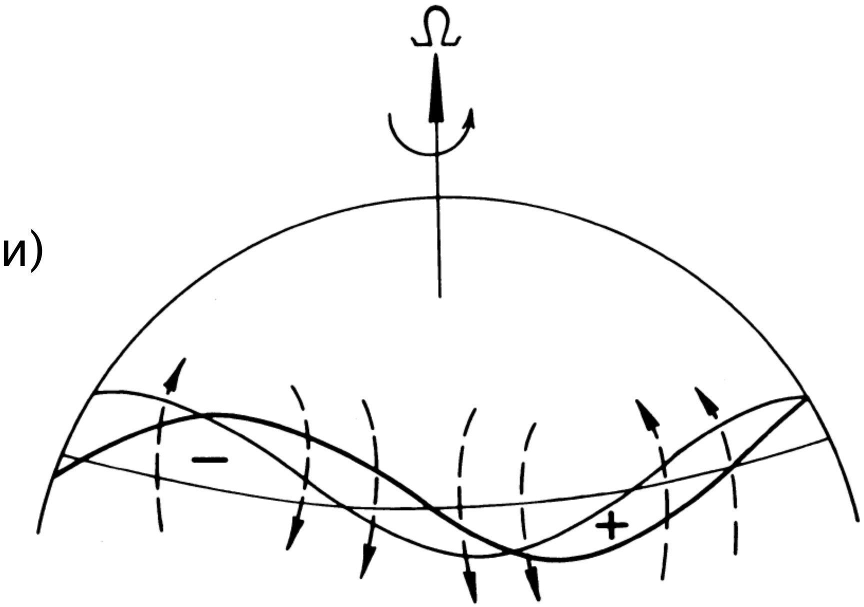
Если движения горизонтальны, то h = const и справедливо баротропное уравнение потенциальной завихрённости

$$\frac{D_h(\zeta_g + f)}{Dt} = 0$$

Волны Россби

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\zeta + \beta v = 0$$

$\beta = df / dy = a^{-1}\, df/d\phi$ (a – радиус Земли)



Если у малого объёма в начальный момент t_0

$\varsigma_{t0} = 0$,

то при смещении по широте

$$(\zeta + f)_{t_1} = f_{t_0}$$

$$\zeta_{t_1} = f_{t_0} - f_{t_1} = -\beta \delta y$$

$$\delta y = a \sin[k(x - ct)]$$

$$v = D(\delta y)/Dt = -kca \cos[k(x - ct)]$$

$$\zeta = \partial v/\partial x = k^2 ca \sin[k(x - ct)]$$

Дисперсионное соотношение:

$$c = -\beta/k^2$$

(фазовая скорость направлена на запад и зависит от волнового числа как k^2)

Линейный анализ: модель Иди (1)

[Charney, 1947: J. Meteorol., 4 (5)]:

VOL. 4, NO. 5 JOURNAL OF METEOROLOGY OCTOBER 1947

THE DYNAMICS OF LONG WAVES IN A BAROCLINIC WESTERLY CURRENT

By J. G. Charney

[Eady, 1949: Tellus, 1]:

Long Waves and Cyclone Waves

By E. T. EADY, Imperial College of Science, London

(Manuscript received 28 Febr. 1949)

Abstract

√

Линейный анализ: модель Иди (2)

Закон сохранения квазигеострофической потенциальной завихренности q:

$$\frac{Dq}{Dt} = 0$$

$$q = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + f + \frac{\partial}{\partial p}\left(m^2 p^2 \frac{\partial \psi}{\partial p} \right)$$

$$\frac{D(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \mathbf{U}_h \cdot \nabla_h(\bullet)$$

$$\mathbf{U}_h = (u, \quad v)$$

$$\nabla_h(\bullet) = \left(\frac{\partial(\bullet)}{\partial x}, \frac{\partial(\bullet)}{\partial y} \right)$$

$f = 2\ \Omega \cos \phi$ – параметр Кориолиса,

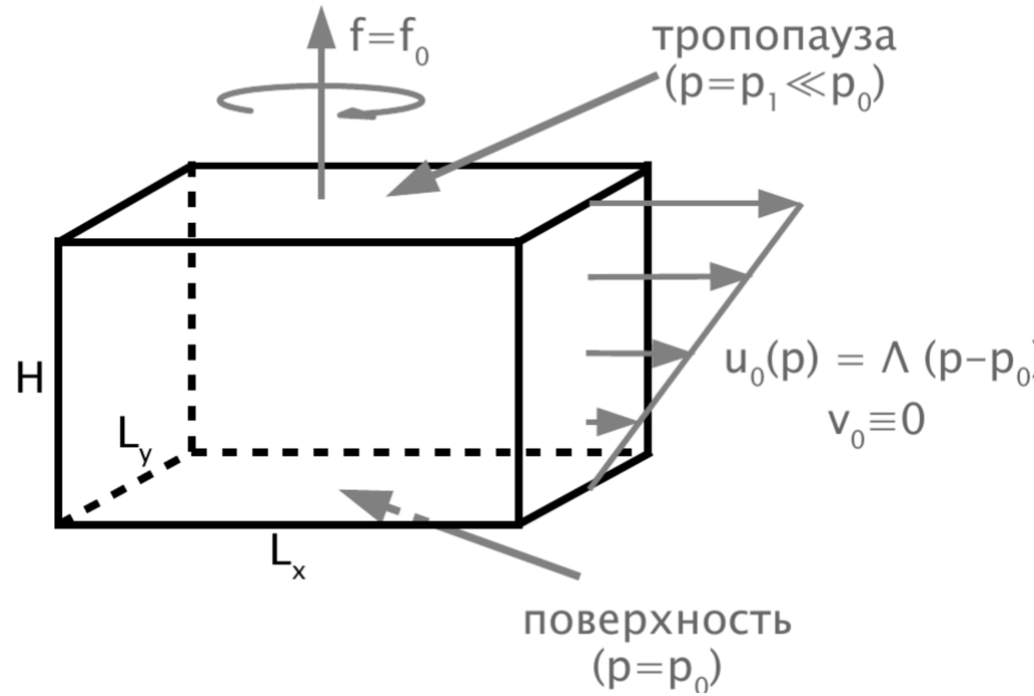
$m = L_R^{-1}$, $\quad L_R = (g\, H_0)^{1/2} / f$ – радиус деформации Россби,

ψ – функция тока ($u = -\,\partial\psi / \partial y$; $\quad v = \partial\psi / \partial x$) .

Линейный анализ: модель Иди (3)

Закон сохранения квазигеострофической потенциальной завихренности q:

$$\frac{Dq}{Dt}=0 \qquad q=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+f+\frac{\partial}{\partial p}\left(m^2 p^2\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$$



Граничные условия

$$\omega=\frac{dp}{dt}=0 \text{ при } p=p_0,\, p_1$$

Профиль зональной скорости

$$u_0(p)=\Lambda(p_0-p)$$

(Λ = const)

Дополнительно

i) Приближение f-плоскости, что позволяет считать влияние вращение не зависящим от точки пространства внутри канала, так что $f\equiv f_0$.

ii) $n^2=m^2p^2=const$.

iii) Рассматриваются только возмущения, для которых $\partial(\bullet)/\partial y=0$ (это справедливо для канала с достаточно большим меридиональным размером).

Линейный анализ: модель Иди (4)

Функция тока базового потока (F_0(p) – произвольная функция давления)

$$\psi_0 = -u_0(p)\,y + F_0(p)$$

Потенциальная завихренность базового потока

$$q_0 = \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} + n^2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial p^2} + f_0 = n^2 \frac{d^2 F_0}{dp^2} - n^2 y \frac{d^2 u_0}{dp^2} + f_0 = n^2 \frac{d^2 F_0}{dp^2} + f_0$$

Разложение

$$q = q_0 + q', \quad \psi = \psi_0 + \psi', \quad u = u_0 + u', \quad v = v', \quad \omega = \omega'$$

Приводит к

$$\frac{\partial q_0}{\partial t} + \frac{\partial q'}{\partial t} + (u_0 + u')\left(\frac{\partial q_0}{\partial x} + \frac{\partial q'}{\partial x}\right) + v'\left(\frac{\partial q_0}{\partial y} + \frac{\partial q'}{\partial y}\right) = 0$$

Линейный анализ: модель Иди (5)

С учётом стационарности базового состояния, выражения для q_0 и предположения iii)

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + (u_0 + u')\frac{\partial q'}{\partial x} + v'\frac{\partial q_0}{\partial y} = 0$$

После линеаризации

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + u_0\frac{\partial q'}{\partial x} + v'\frac{\partial q_0}{\partial y} = 0$$

$\partial q_0 / \partial y = 0$, поэтому

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + u_0\frac{\partial q'}{\partial x} = 0,$$

$$q' = \left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial p}\left(m^2 p^2 \frac{\partial\psi'}{\partial p}\right) = \frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2} + n^2\frac{\partial^2\psi'}{\partial p^2}$$

Линейный анализ: модель Иди (6)

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial q'}{\partial x} = 0 \quad ,$$

$$q' = \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial p}\left(m^2 p^2 \frac{\partial \psi'}{\partial p} \right) = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + n^2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial p^2}$$

Граничные условия

$$\omega' = 0 \text{ при } p = p_0,\, p_1$$

Решение в виде нормальной моды

$$\psi' = \Psi'(p)\exp\Big(ik_x\big(x - ct\big)\Big)$$

$$c = c_r + i\,c_i \quad ,$$

так что

$$\psi' = \Psi'(p)\, e^{k_x c_i t} e^{ik_x\left(x - c_r t\right)}$$

(скорость роста определяется k_x c_i)

Линейный анализ: модель Иди (7)

$$\psi' = \Psi'(p)\exp\left(ik_x\left(x - ct\right)\right)$$

$$q' = -k_x^{\,2}\psi' + \frac{n^2}{\Psi'(p)}\frac{d^2\Psi'}{dp^2}\psi'$$

$$\frac{\partial\psi'}{\partial t} = -ik_x c\psi',$$

$$\frac{\partial\psi'}{\partial x} = ik_x\psi'.$$

Нетривиальные решения ($\Psi(p) \neq 0$):

$$ik_x(u_0 - c)(\frac{d^2\Psi'}{dp^2} - \lambda^2\Psi'(p)) = 0$$

после деления на u_0 – с (при этом исчезает непрерывный спектр волновых решений):

$$\frac{d^2\Psi'}{dp^2} - \lambda^2\Psi'(p) = 0 \qquad \lambda^2 = k_x^{\,2} / n^2$$

Линейный анализ: модель Иди (8)

$$\frac{d^2\Psi'}{dp^2} - \lambda^2 \Psi'(p) = 0$$

справка:

sh x = ($e^x - e^{-x}$) / 2

ch x = ($e^x + e^{-x}$) / 2

$ch^2x - sh^2x = 1$

Общее решение

$$\Psi'(p) = \Psi'_1 \operatorname{ch}(\lambda p) + \Psi'_2 \operatorname{sh}(\lambda p)$$

Из термодинамического уравнения

$$gp^2 \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) + \alpha^2 c_0^2 \omega = 0$$

(g – ускорение свободного падения, Φ – геопотенциал, α – коэффициент сжимаемости атмосферы, c_0 – фазовая скорость длинных гравитационных волн) и граничных условий

$$\omega' = 0 \text{ при } p = p_0,\ p_1$$

получаем

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial p}\right) = 0$$

Линейный анализ: модель Иди (9)

С учётом геострофических соотношений на f–плоскости ($f = f_0$):

$$f_0 v = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad f_0 u = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

и определения функции тока получаем

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial \psi'}{\partial p}\right) = 0$$

Из этого можно получить (самостоятельное упражнение!)

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t \partial p} + u_0 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial p} + \frac{\partial \psi'}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y \partial p} = 0 \text{ при } p = p_0, p_1 \quad ,$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t \partial p} + u_0 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial p} + \Lambda \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \text{ при } p = p_0, p_1$$

Подставляя решение в виде нормальной моды

$$(u_0 - c)\frac{d\Psi'}{dp} + \Lambda \Psi'(p) = 0 \text{ при } p = p_0, p_1$$

Линейный анализ: модель Иди (10)

Итак,

$$\left[(u_{00}-c)\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda p_0+\Lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda p_0\right]\Psi_1{}'+\left[(u_{00}-c)\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda p_0+\Lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda p_0\right]\Psi_2{}'=0,$$

$$\left[(u_{01}-c)\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda p_1+\Lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda p_1\right]\Psi_1{}'+\left[(u_{01}-c)\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda p_1+\Lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda p_1\right]\Psi_2{}'=0.$$

$$u_{00} = u_0(p_0),\ u_{01} = u_0(p_1)$$

$\Psi_1{}' = \Psi_2{}' = 0$ – решения. Чтобы были и другие решения, необходимо

$$\left[(u_{00}-c)\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda p_0+\Lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda p_0\right]\left[(u_{01}-c)\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda p_1+\Lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda p_1\right]-$$
$$-\left[(u_{00}-c)\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda p_0+\Lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda p_0\right]\left[(u_{01}-c)\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda p_1+\Lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda p_1\right]=0$$

$$\Downarrow$$

$$c^2-c\left(u_{00}+u_{01}\right)+u_{00}u_{01}+\frac{\Lambda}{\lambda}\left(u_{01}-u_{00}\right)\mathrm{cth}\,\mu-\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)^2=0$$

$$\mu = \lambda\ (p_0 - p_1)$$

Линейный анализ: модель Иди (11)

Уравнение
$$\frac{\partial q'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial q'}{\partial x} = 0$$

и граничные условия
$$\omega' = 0 \text{ при } p = p_0, p_1$$

линейны ⇒ можно использовать и комплексно-сопряжённые к ним

$$\Downarrow$$

Если существует его решение с некоторым $c^{(1)} = c_r^{(1)} + i\, c_i^{(1)}$, то существует и решение с $c^{(2)} = c^{(1)*} = c_r^{(1)} - i\, c_i^{(1)}$.

$$\Downarrow$$

Для доказательства наличия бароклинной неусточивости достаточно показать, что есть решения с существенно комплексными c

Линейный анализ: модель Иди (12)

Дискриминант

$$D = \left(u_{01} - u_{00}\right)^2 \left[1 - \frac{4}{\mu^2}\left(\mu \operatorname{cth} \mu - 1\right)\right]$$

С учётом

$$\operatorname{cth} \mu = \tfrac{1}{2} \left[\operatorname{th} (\mu / 2) + \operatorname{cth} (\mu / 2) \right]$$

имеем

$$D = \frac{4}{\mu^2}\left(u_{01} - u_{00}\right)^2 \left[\frac{\mu}{2} - \operatorname{cth}\frac{\mu}{2}\right]\left[\frac{\mu}{2} - \operatorname{th}\frac{\mu}{2}\right]$$

Т.к. $\mu/2 \geq \operatorname{th}(\mu / 2)$, то D меняет знак при $\mu = \mu_c$:

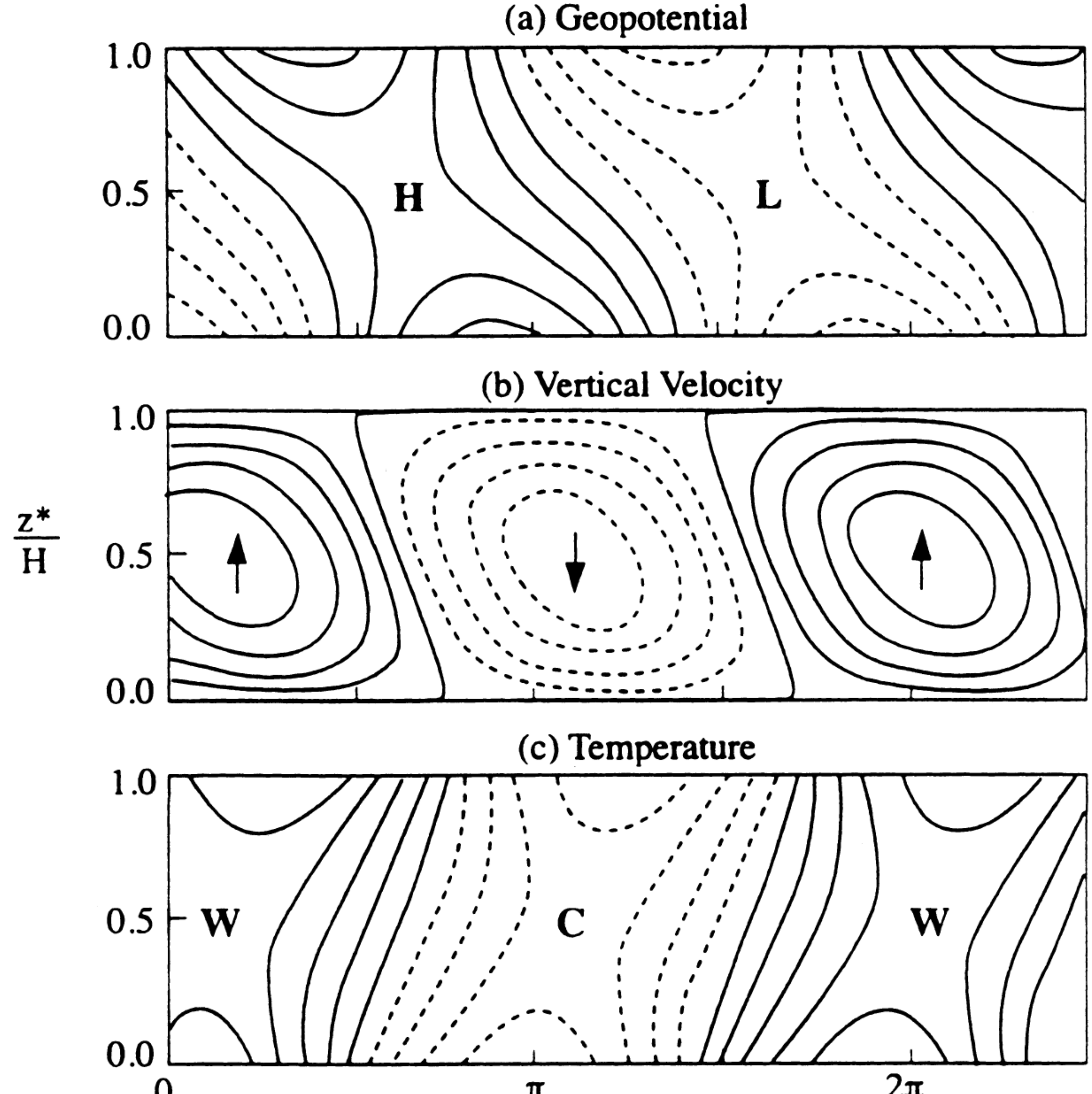
$$\mu_c/2 = \operatorname{cth}(\mu_c/2) \qquad \Rightarrow \qquad \mu_c \approx 2.4.$$

При $\mu < \mu_c$ бароклинные возмущения нарастают со временем. Скорость нарастания этих возмущений

$$k_x c_i = \frac{k_x}{\mu}\left(u_{01} - u_{00}\right)\left[\left(\frac{\mu}{2} - \operatorname{cth}\frac{\mu}{2}\right)\left(\frac{\mu}{2} - \operatorname{th}\frac{\mu}{2}\right)\right]^{1/2}$$

максимальна при $\mu = \mu_m \approx 1.75$.

Линейный анализ: модель Иди (13)



Линейный анализ: модель Иди (14)

$$\lambda_m = \mu_m / (p_0 - p_1)$$

$$k_{x,m} = \lambda_m n$$

Длина волны наиболее неустойчивой моды

$$L_m = \frac{2\pi}{k_{x,m}} = \frac{2\pi}{\lambda_m n} = \frac{2\pi}{\lambda_m mp} = \frac{2\pi}{\lambda_m p} L_R = \frac{2\pi\left(p_0 - p_1\right)}{\mu_m p} L_R$$

Для оценок $p \rightarrow ½ (p_0 + p_1)$ и

$$p_1 = p_0 / 3 \qquad \Rightarrow \qquad (p_0 - p_1) / [\ ½ (p_0 + p_1)] = 1,$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_m = (\pi / \mu_m) L_R \approx 3.6 L_R$$

Скорость роста этой моды

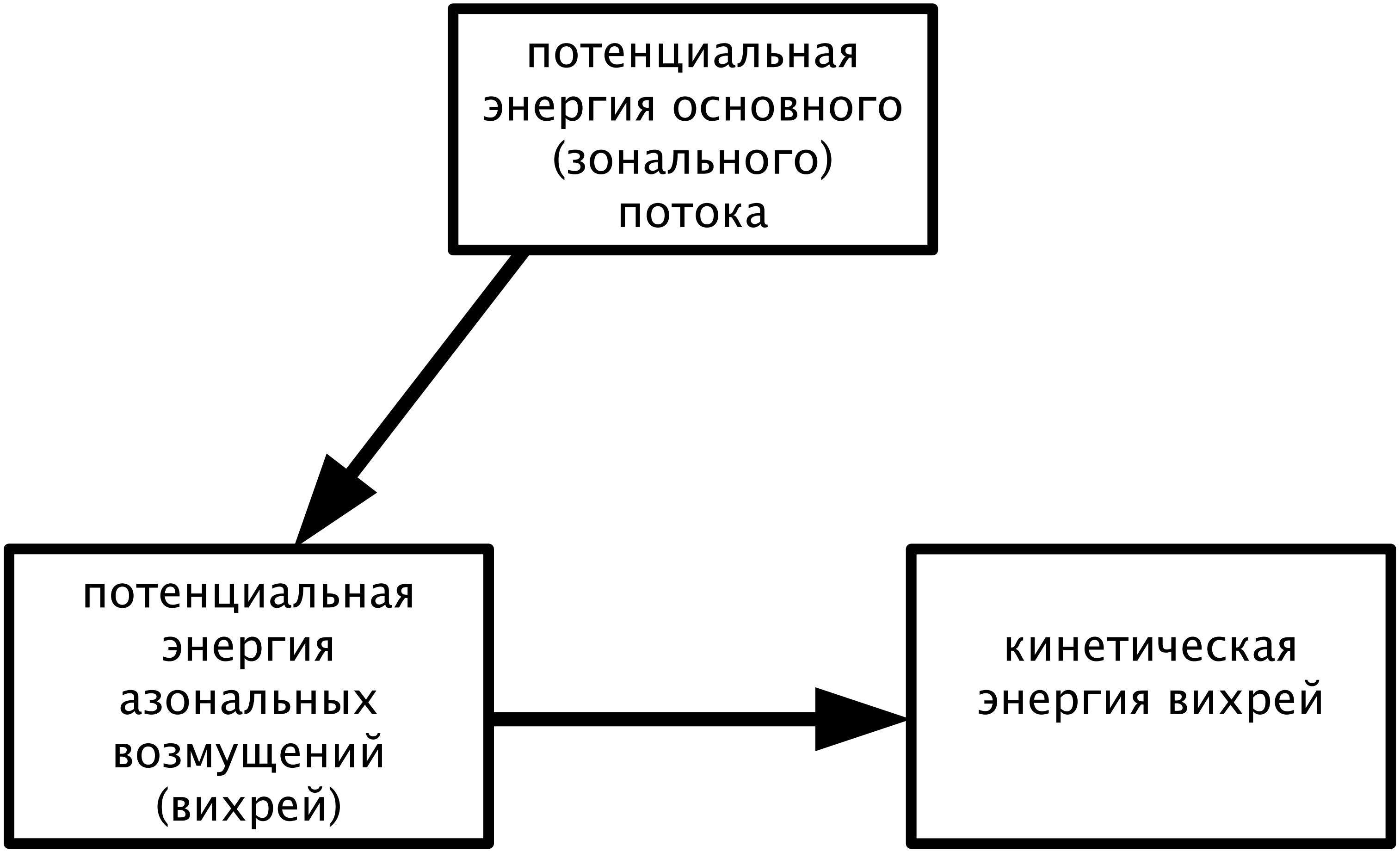
$$(k_x c_i)_m \approx 0.306 \frac{u_{01} - u_{00}}{L_R}$$

$$\tau_m = 1 / (k_x c_i)_m \approx 3.27 L_R / (u_{01} - u_{00}).$$

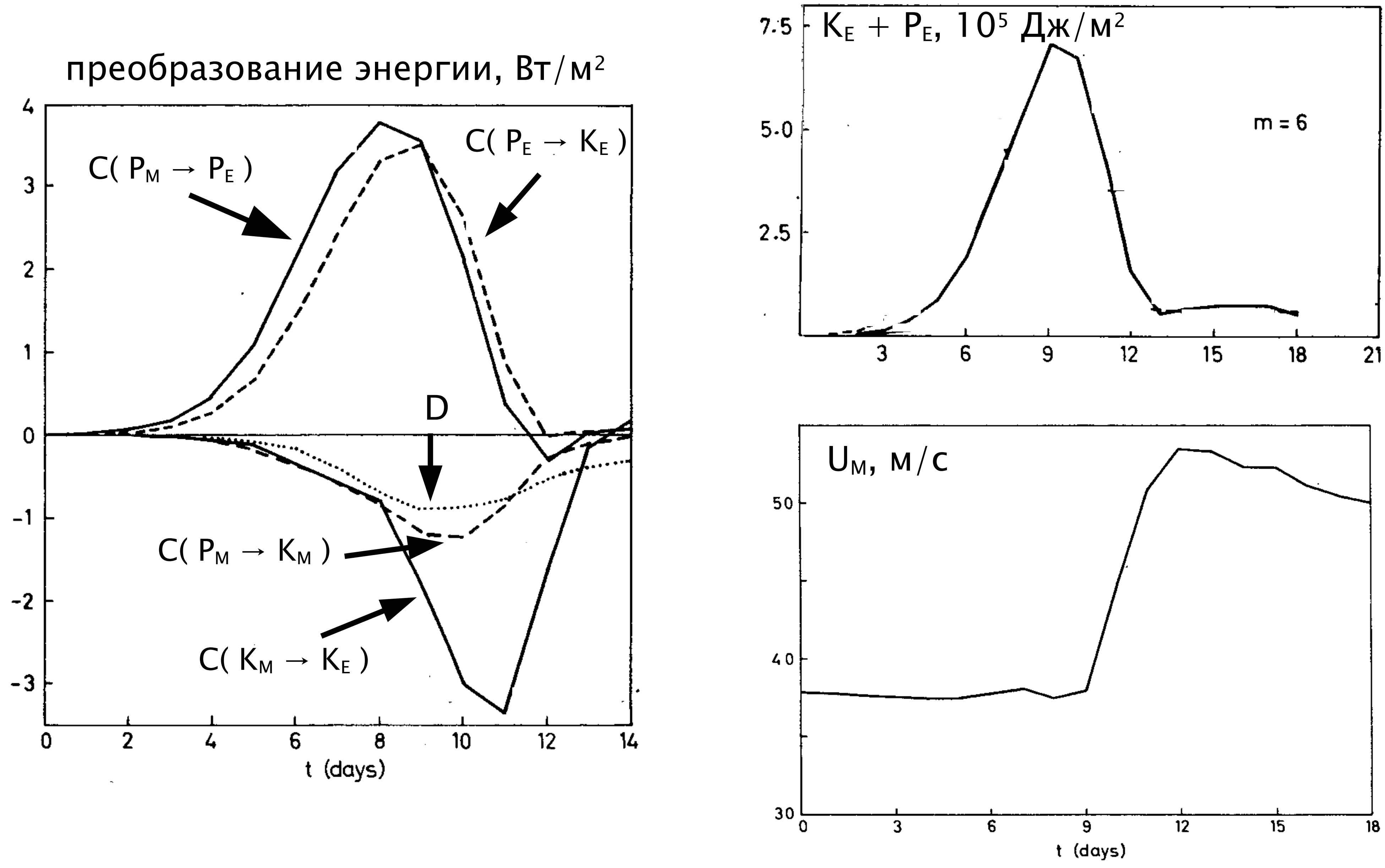
При $(u_{01} - u_{00}) = 10$ м/с

$$\tau_m = 3.8 \text{ сут.}$$

Преобразование энергии в растущей бароклинной волне

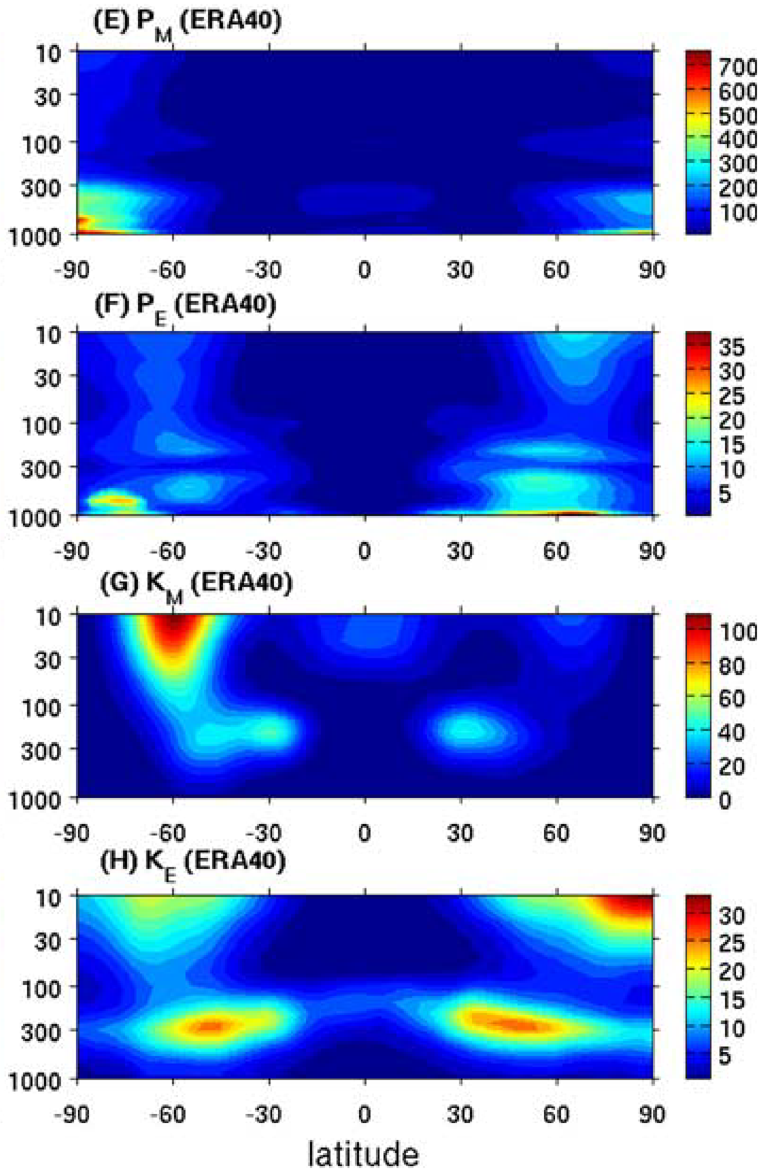


Цикл жизни бароклинных вихрей [Simmons, Hoskins, 1978]
(волна с зональным волновым числом 6;
основной поток – струйное течение с центром на 45°N)

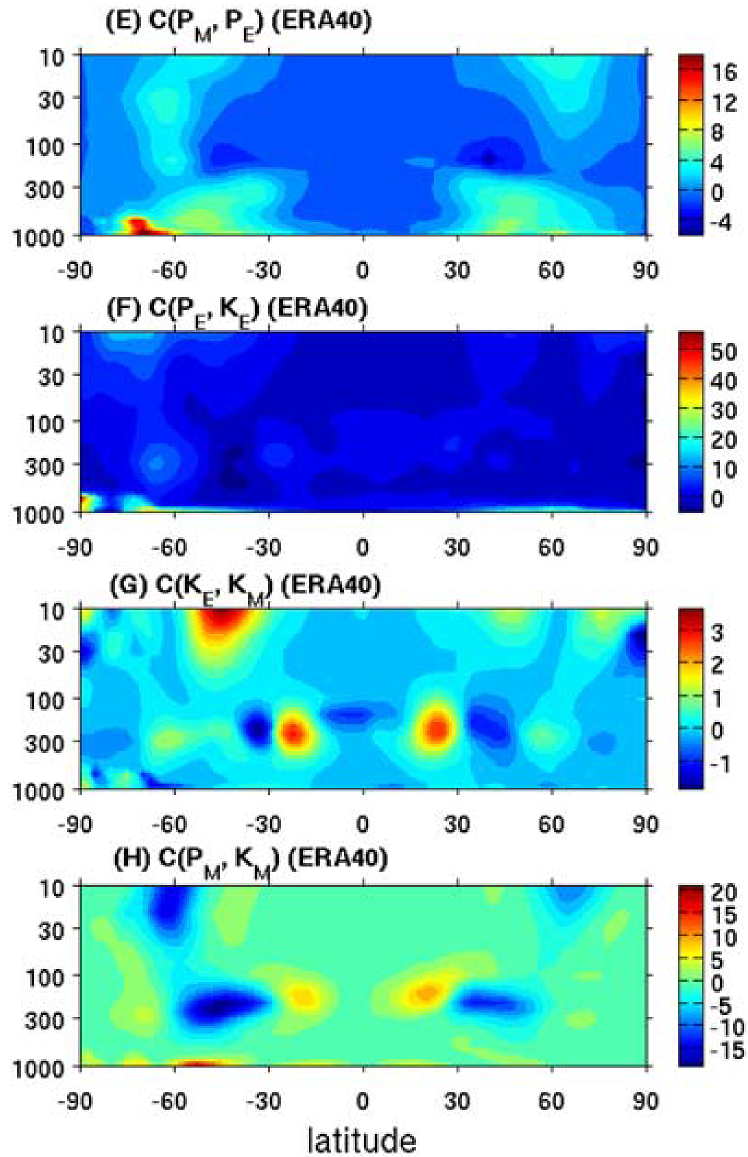


Цикл Лоренца [Li et al., 2007], среднегодовые величины (1)

Плотность энергии, 10^5 Дж/(м^2 атм)



Плотность преобразования энергии, 10^5 Вт/(м^2 атм)



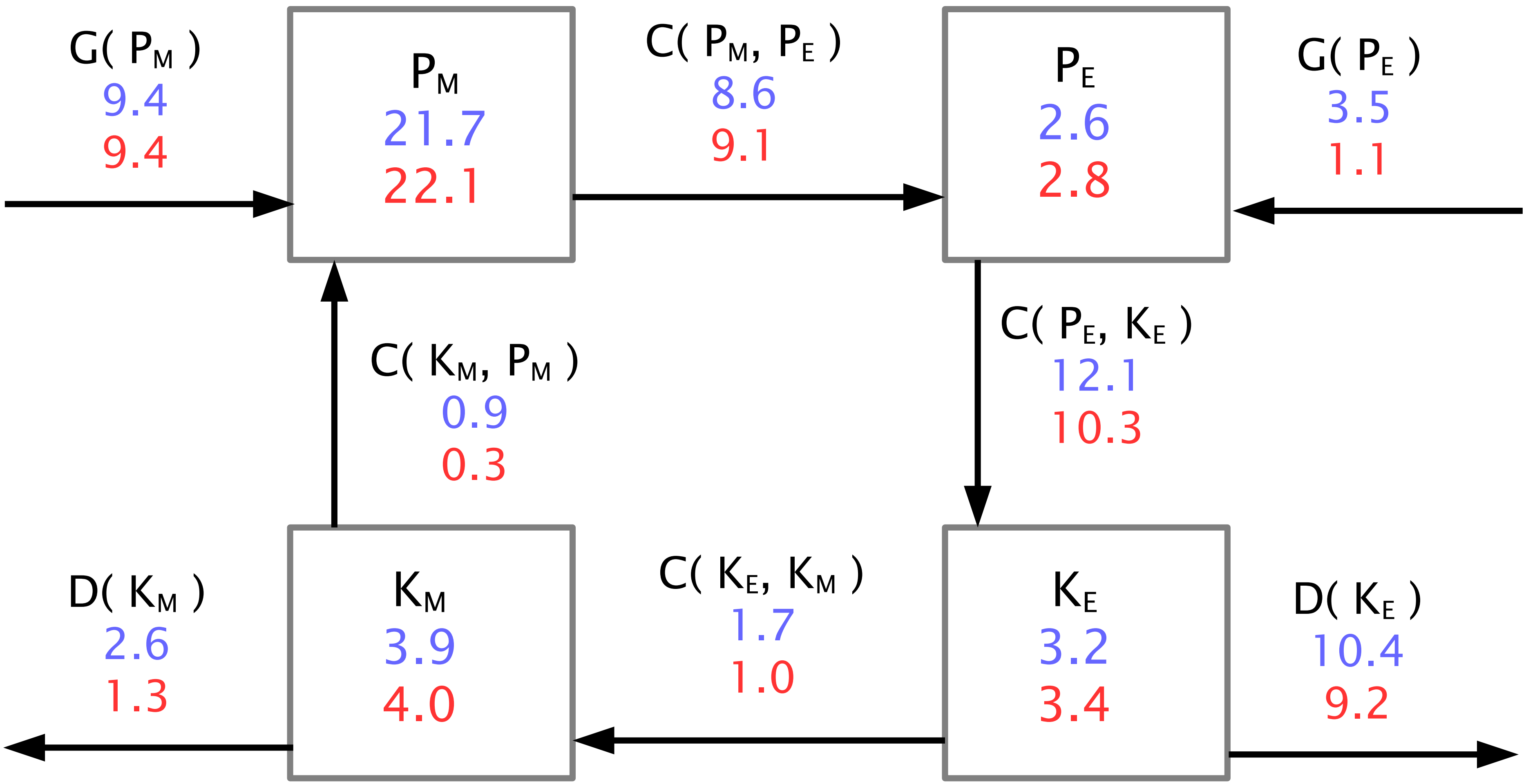
P_M – средняя (среднезональная) потенциальная энергия

P_E – вихревая (азональная) потенциальная энергия

K_M – средняя кинетическая энергия

K_E –вихревая кинетическая энергия

Цикл Лоренца [Li et al., 2007] (2)
глобальные величины по данным реанализа NCEP2 и ERA-40



энергия – 10^{20} Дж

преобразования энергии – 10^{14} Вт

Среднезональная циркуляция (1)

Вертикальная координата: $z = H_{atm} \ln(p_0 / p)$,
H_{atm} (= 8 км): $\rho_0(z) = \rho_0(0) \exp(- z / H_{atm})$

$$Du/Dt - fv + \partial\Phi/\partial x = X$$

$$Dv/Dt + fu + \partial\Phi/\partial y = Y$$

$$\partial\Phi/\partial z = H^{-1} RT$$

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \rho_0^{-1} \partial\left(\rho_0 w\right)/\partial z = 0$$

$$DT\,Dt + \left(\kappa T/H\right) w = J/c_p$$

Для любой переменной

A = $\overline{A} + A'$

$$\rho_0 \frac{DA}{Dt} = \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \bullet \boldsymbol{\nabla} + w\frac{\partial}{\partial z}\right) A + A\left[\boldsymbol{\nabla} \bullet (\rho_0 \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 w)\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 A u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_0 A v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 A w)$$

Среднезональная циркуляция (2)

$$\rho_0 \overline{\frac{DA}{Dt}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 \overline{A}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_0\left(\overline{A}\,\overline{v} + \overline{A'v'}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho_0\left(\overline{A}\,\overline{w} + \overline{A'w'}\right)\right]$$

$$\partial\,\overline{(\ )}/\partial x = 0$$

$$\overline{ab} = \overline{\left(\overline{a} + a'\right)\left(\overline{b} + b'\right)} = \overline{\overline{a}\,\overline{b}} + \overline{\overline{a}b'} + \overline{a'\overline{b}} + \overline{a'b'} = \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a'b'}$$

$$\partial\overline{v}/\partial y + \rho_0^{-1}\partial\left(\rho_0\overline{w}\right)/\partial z = 0$$

$$\rho_0 \overline{\frac{DA}{Dt}} = \frac{\overline{D}}{Dt}\left(\rho_0 \overline{A}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_0\left(\overline{A'v'}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho_0\left(\overline{A'w'}\right)\right]$$

$$\frac{\overline{D}}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \overline{v}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial}{\partial z}$$

Среднезональная циркуляция (3)

Итак,

$$\partial\overline{u}/\partial t - f_0\overline{v} = -\partial\left(\overline{u'v'}\right)/\partial y + \overline{X}$$

$$\partial\overline{T}/\partial t + N^2 H R^{-1}\overline{w} = -\partial\left(\overline{v'T'}\right)/\partial y + \overline{J}/c_p$$

Частота Брента–Вяйсяля (частота колебаний частицы воздуха в поле силы тяжести)

$$N^2 \equiv \frac{R}{H}\left(\frac{\kappa T_0}{H} + \frac{dT_0}{dz}\right)$$

Среднезональная циркуляция (3)

Итак,

влияние вихрей

$$\partial\overline{u}/\partial t - f_0\overline{v} = -\partial\left(\overline{u'v'}\right)/\partial y + \overline{X}$$

$$\partial\overline{T}/\partial t + N^2 H R^{-1}\overline{w} = -\partial\left(\overline{v'T'}\right)/\partial y + \overline{J}/c_p$$

Частота Брента–Вяйсяля (частота колебаний частицы воздуха в поле силы тяжести)

$$N^2 \equiv \frac{R}{H}\left(\frac{\kappa T_0}{H} + \frac{dT_0}{dz}\right)$$

Среднезональная циркуляция (3)

Итак,

влияние вихрей

$$\partial \overline{u}/\partial t - f_0 \overline{v} = -\partial \left(\overline{u'v'}\right)/\partial y + \overline{X}$$

$$\partial \overline{T}/\partial t + N^2 H R^{-1} \overline{w} = -\partial \left(\overline{v'T'}\right)/\partial y + \overline{J}/c_p$$

Частота Брента–Вяйсяля (частота колебаний частицы воздуха в поле силы тяжести)

$$N^2 \equiv \frac{R}{H}\left(\frac{\kappa T_0}{H} + \frac{dT_0}{dz}\right)$$

Геострофическое приближение

$$f_0 \overline{u} = -\partial \overline{\Phi}/\partial y$$

Комбинируя с уравнением гидростатики

$$f_0 \partial \overline{u}/\partial z + R H^{-1} \partial \overline{T}/\partial y = 0$$

Среднезональная циркуляция (3)

Итак,

влияние вихрей

$$\partial \overline{u}/\partial t - f_0 \overline{v} = -\partial \left(\overline{u'v'}\right)/\partial y + \overline{X}$$

$$\partial \overline{T}/\partial t + N^2 H R^{-1} \overline{w} = -\partial \left(\overline{v'T'}\right)/\partial y + \overline{J}/c_p$$

Частота Брента–Вяйсяля (частота колебаний частицы воздуха в поле силы тяжести)

$$N^2 \equiv \frac{R}{H}\left(\frac{\kappa T_0}{H} + \frac{dT_0}{dz}\right)$$

Геострофическое приближение

$$f_0 \overline{u} = -\partial \overline{\Phi}/\partial y$$

источник среднезональной циркуляции – меридиональный градиент температуры

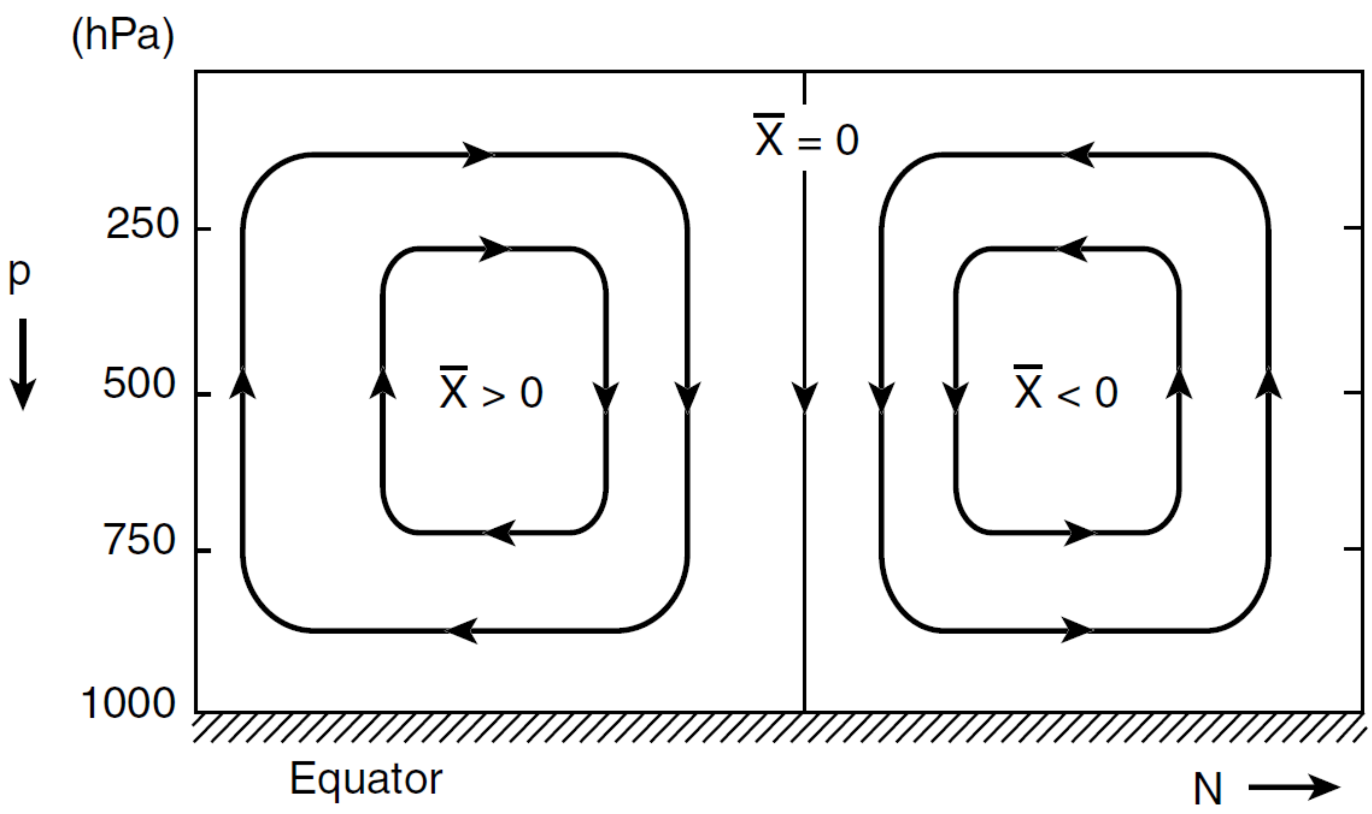
Комбинируя с уравнением гидростатики

$$f_0 \partial \overline{u}/\partial z + R H^{-1} \partial \overline{T}/\partial y = 0$$

Среднезональная циркуляция (4)

Меридиональная функция тока $\overline{\chi}$:

$$\rho_0 \overline{v} = -\frac{\partial \overline{\chi}}{\partial z}; \quad \rho_0 \overline{w} = \frac{\partial \overline{\chi}}{\partial y}$$



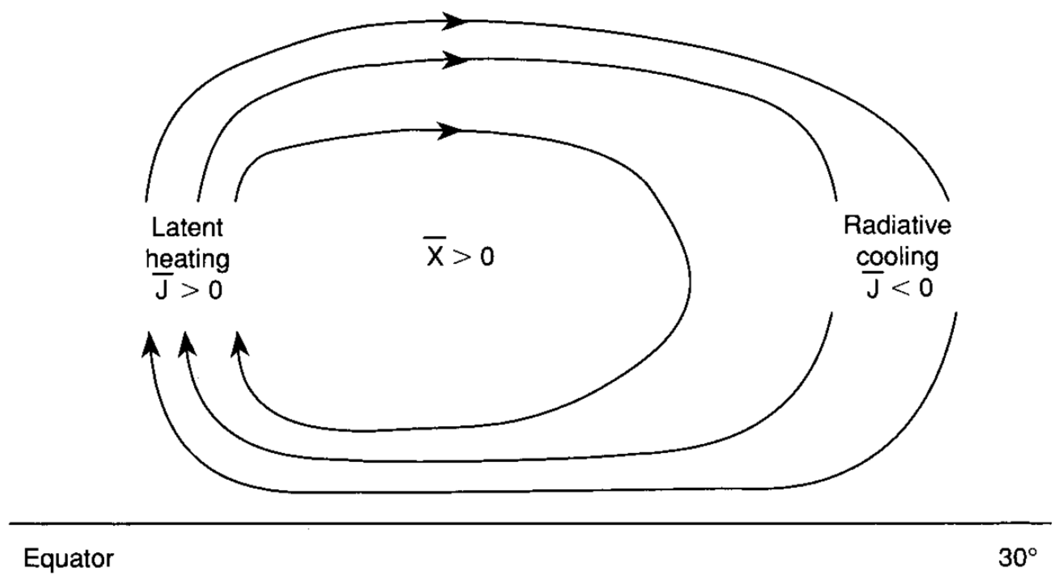
Среднезональная циркуляция: наблюдения (тропики)

$$\frac{\partial^2\overline{\chi}}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{N^2}\rho_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\overline{\chi}}{\partial z}\right) = \frac{\rho_0}{N^2}\Bigg[\overbrace{\frac{\partial}{\partial y}\Bigg(\frac{\kappa\overline{J}}{H}}^{\text{DH}} - \overbrace{\frac{R}{H}\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v'T'}\right)\Bigg)}^{\text{EHF}}$$

$$\underbrace{- f_0\Bigg(\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\left(\overline{u'v'}\right)}_{\text{EMF}} - \underbrace{\frac{\partial\overline{X}}{\partial z}\Bigg)}_{\text{DF}}\Bigg]$$

$$\overline{\chi} \propto -\boxed{\frac{\partial}{\partial y}(\text{diabatic heating})} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\text{large-scale eddy heat flux})$$

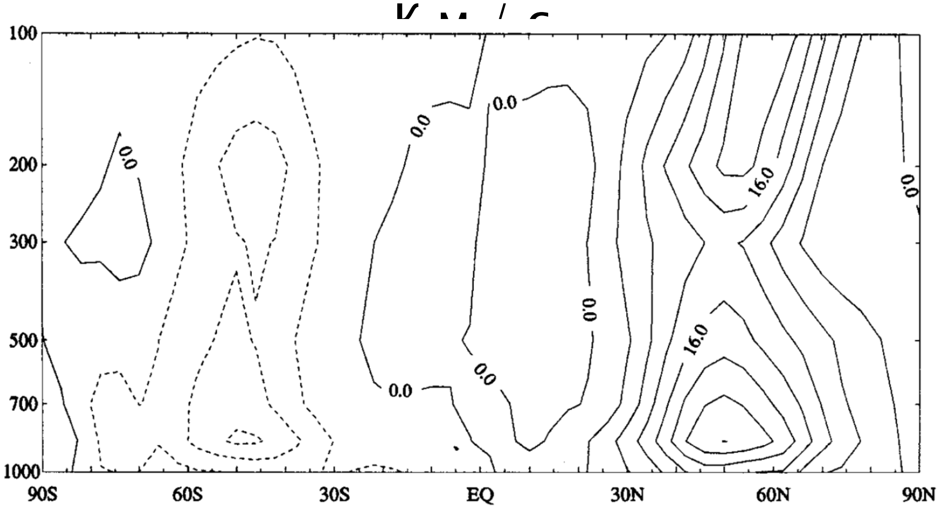
$$+ \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(\text{large-scale eddy momentum flux}) + \frac{\partial}{\partial z}(\text{zonal drag force})$$

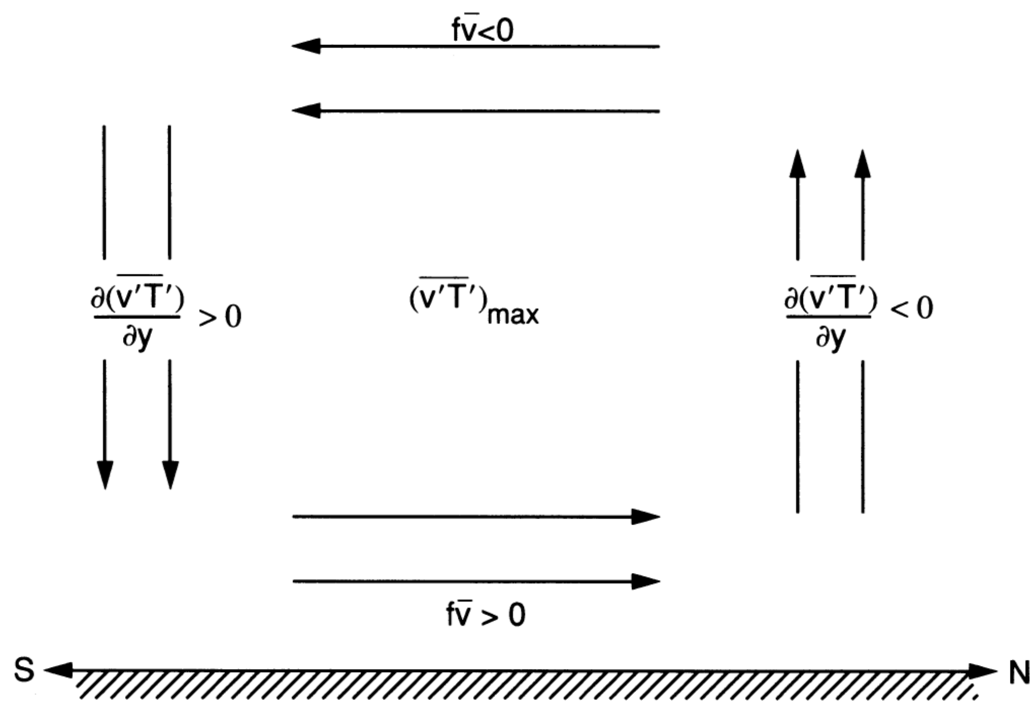


Среднезональная циркуляция: вклад потоков тепла (вне тропиков, СП)

$$\overline{\chi} \propto -\frac{\partial}{\partial y}(\text{diabatic heating}) + \underline{\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\text{large-scale eddy heat flux})}$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}(\text{large-scale eddy momentum flux}) + \frac{\partial}{\partial z}(\text{zonal drag force})$$

$\overline{v'T'}$

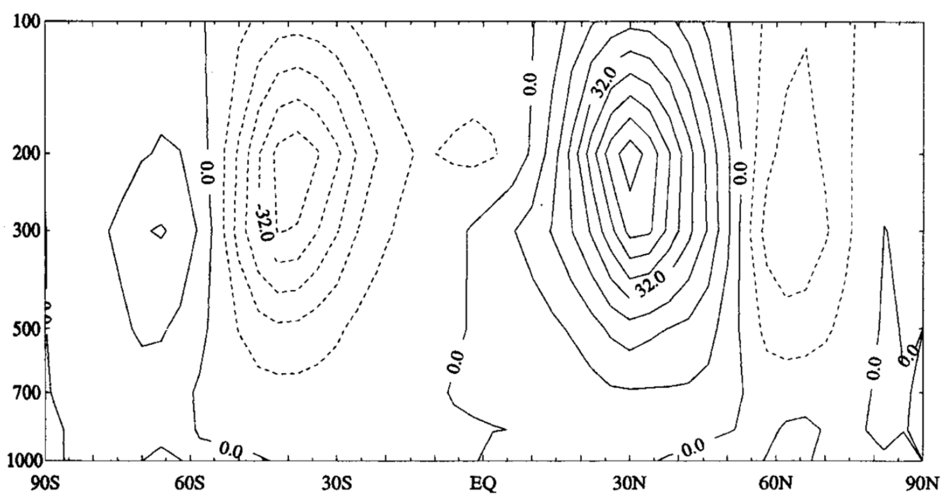


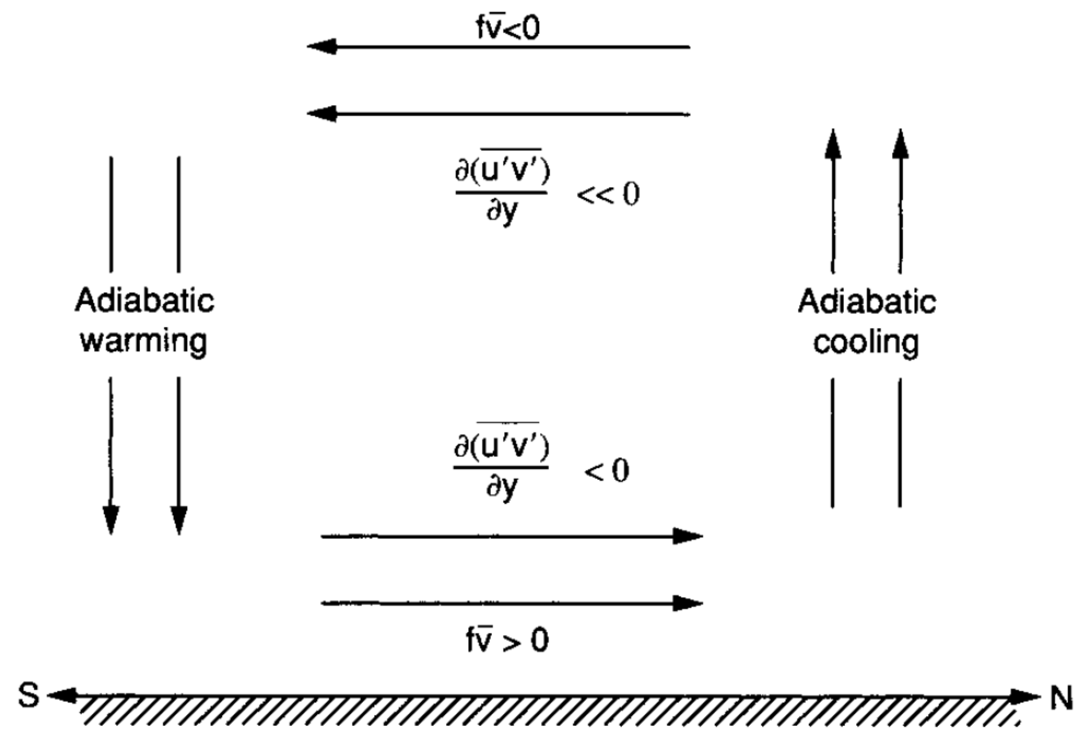


Среднезональная циркуляция: вклад потоков импульса (вне тропиков, СП)

$$\overline{\chi} \propto -\frac{\partial}{\partial y}\,(\text{diabatic heating}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,(\text{large-scale eddy heat flux})$$
$$+ \underline{\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\,(\text{large-scale eddy momentum flux})} + \frac{\partial}{\partial z}\,(\text{zonal drag force})$$

$\overline{u'v'}$, м^2/с^2





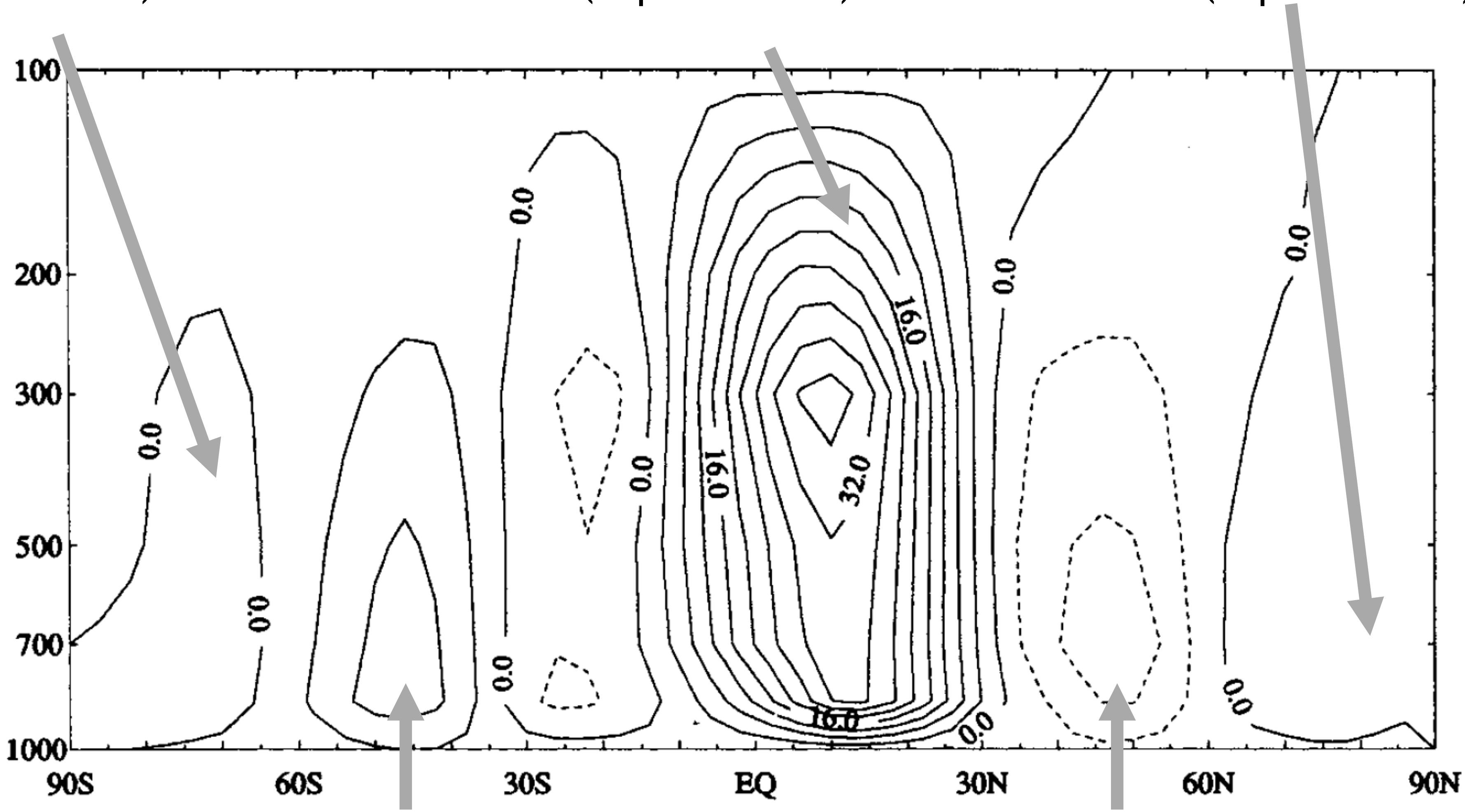
Среднезональная циркуляция: наблюдения

функция тока χ, 10^{12} кг м$^{-1}$ с$^{-1}$, зима Северного полушария

полярная ячейка (термическая)

ячейка Хэдли (термическая)

полярная ячейка (термическая)



ячейка Ферреля (вихревая, обратная)

ячейка Ферреля (вихревая, обратная)

Оценка предела предсказуемости погоды

Кинетическая энергия атмосферы $\sim 10^{21}$ Дж
(кинетическая энергия отдельных циклонов на 2 порядка меньше)

Скорость преобразования кинетической энергии в синоптических движениях
$\partial E/\partial t \sim 10^{14}$ Вт

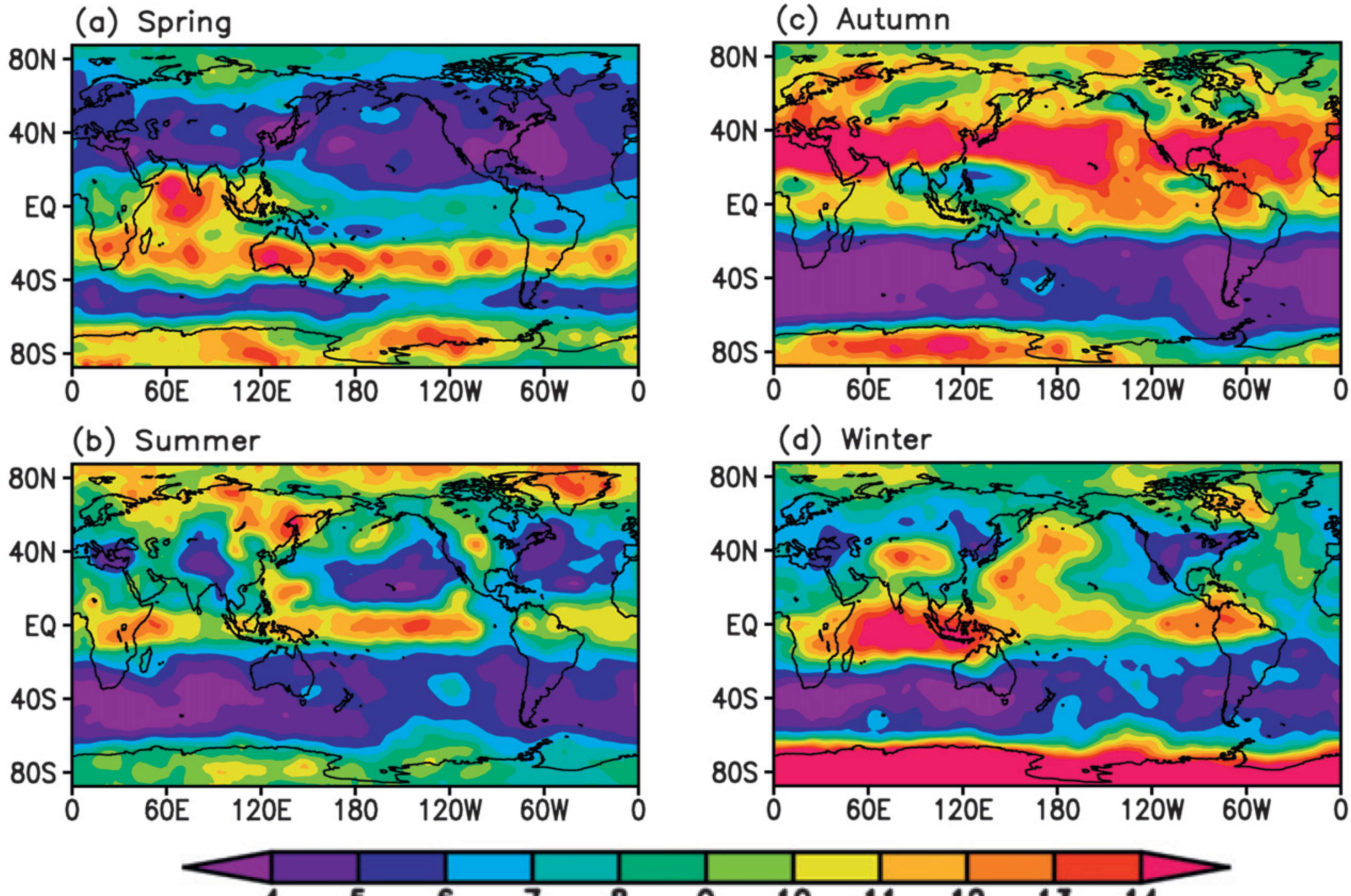
Масштаб времени, связанный с этим преобразованием

$$\tau = \left(\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial t}\right)^{-1} = 10^6 \text{ с} = 1\text{-}2 \text{ нед.}$$

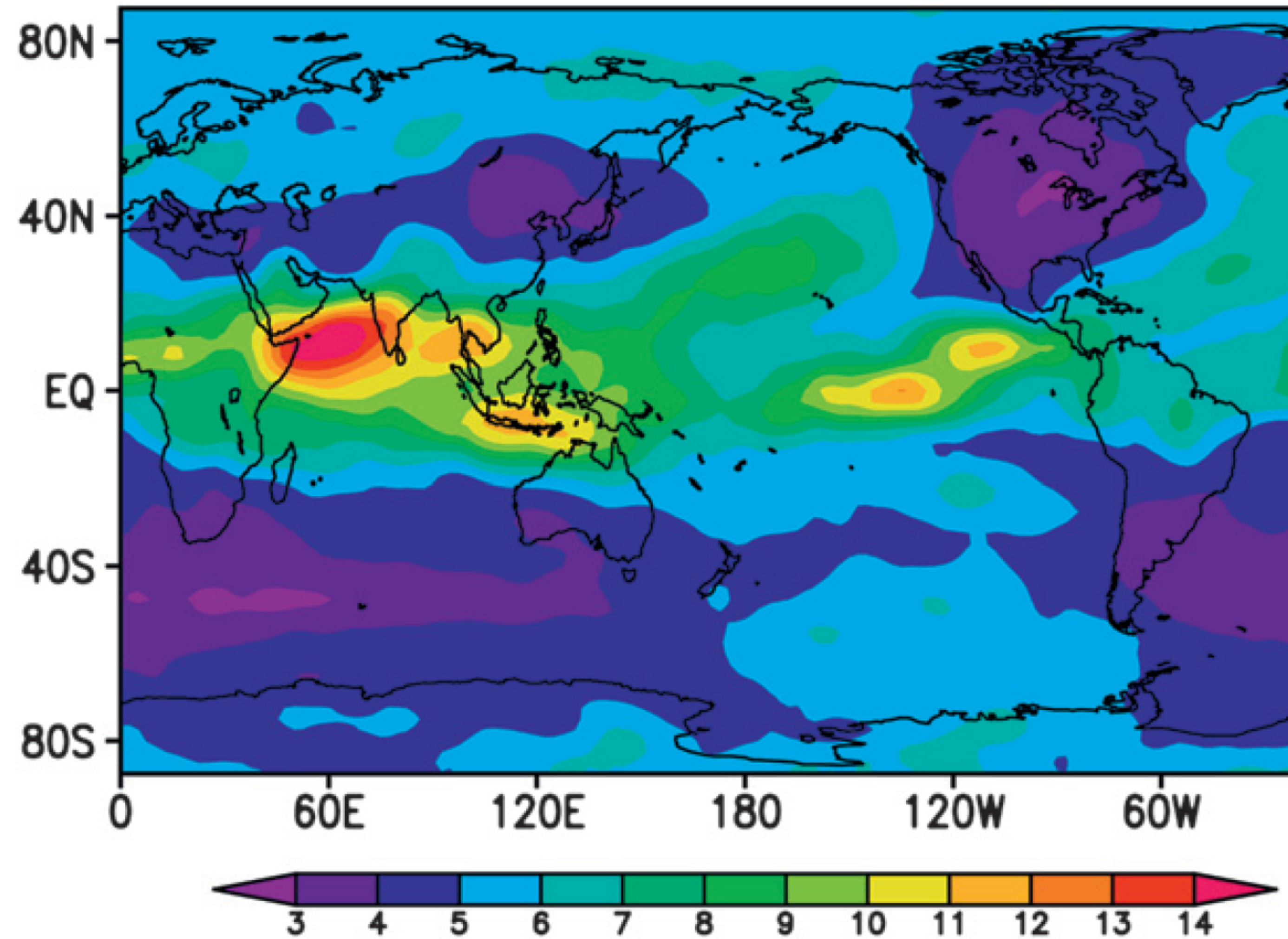
Общая масса воды в атмосфере $M_w = 1.3 \cdot 10^{16}$ кг,
среднее количество осадков на земном шаре $P_g = 2$ мм/сут $= 1.0 \cdot 10^{15}$ кг/сут.
Время пребывания воды в атмосфере Земли

$$\tau_w = M_w \,/\, P_g = 13 \text{ сут.} \approx 2 \text{ нед.}$$

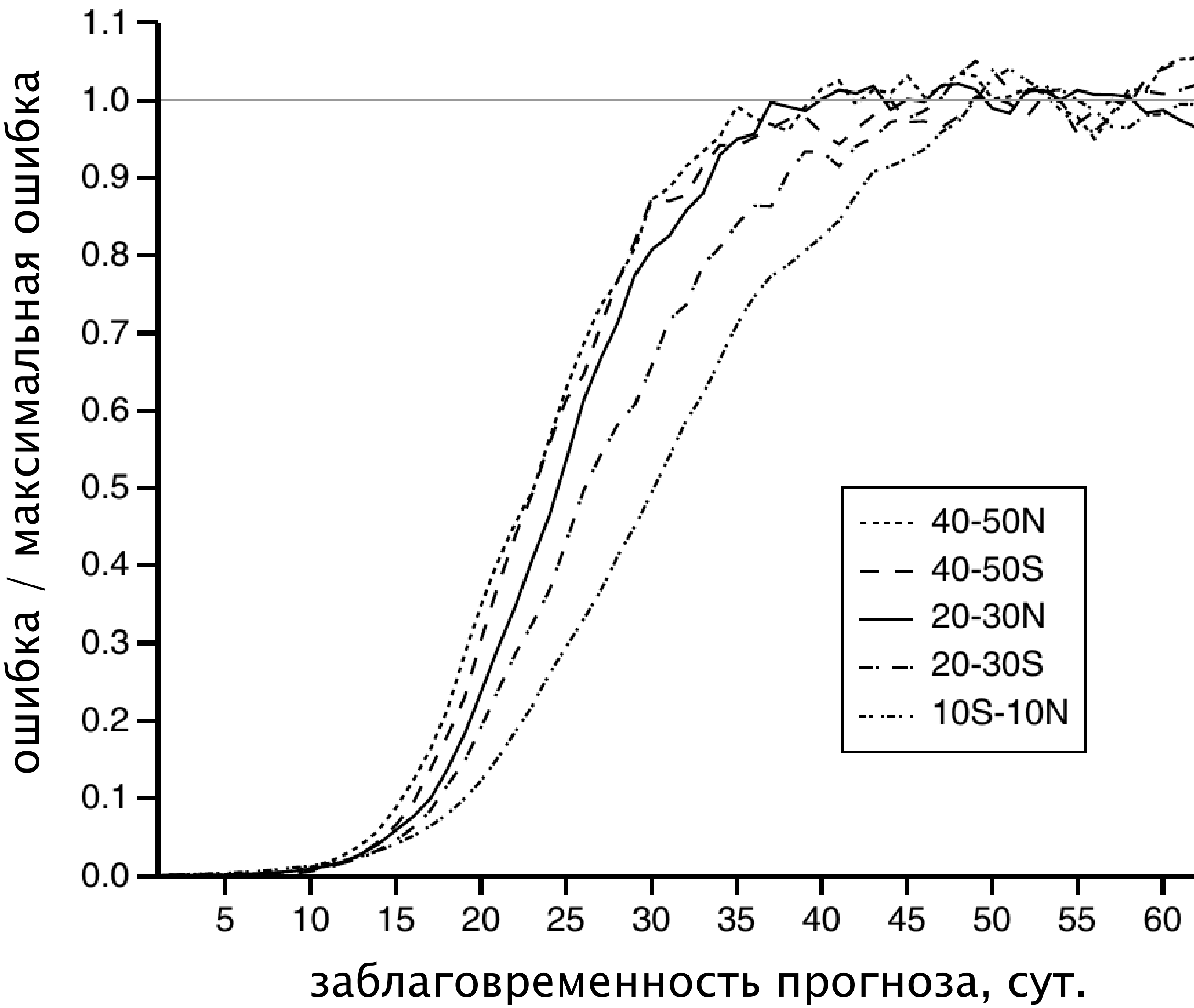
Оценка предела предсказуемости [Li, Ding, 2011]
Среднесезонная геопотенциальная высота на уровне 500 гПа



Оценка предела предсказуемости [Li, Ding, 2011]
3. Среднегодовая скорость вера на уровне 850 гПа



Насыщение ошибки прогноза в зависимости от его срока [Warner, 2011: Numerical Weather and Climate Prediction]



причина насыщения – ограничение по энергии синоптических возмущений

⇓

переход от предсказуемости 1 рода к предсказуемости 2 рода