

Геофизика 2024 Лекция № 4

<http://ocean.phys.msu.ru/courses/geo/>

Физика твердой Земли (лекция 3)



КАФЕДРА ФИЗИКИ ЗЕМЛИ
Физический факультет
МГУ им. М. В. Ломоносова

<https://earthphysics.ru/students>

О КАФЕДРЕ НАУЧНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ УЧЕБА КОНТАКТЫ

ОБЩИЕ КУРСЫ

ГЕОФИЗИКА

Курс отделения геофизики для студентов 2-го курса физического факультета.

Раздел "Физика твердой Земли"

Содержание:

- Сейсмология и строение Земли
- Очаг землетрясения и сейсмичность Земли
- Гравитационное поле и фигура Земли
- Геотермия и энергия процессов в Земле
- Магнитное поле Земли

Материалы лекций

- 1-я лекция О кафедре физики Земли
- 2-я лекция О кафедре физики Земли
- 3-я лекция
- 4-я лекция

Рекомендуемая литература:

1. Захаров В.С., Смирнов В.Б. Строение и физика Земли. Вводный курс: учебное пособие – Долгопрудный. Издательский дом «Интеллект», 2018. – 224 с.
2. Захаров В.С., Смирнов В.Б. Физика Земли: учебник. М.: ИНФРА-М, 2016. – 328 с. / Учебник для естественнонаучных факультетов
3. Жарков В.Н. Внутреннее строение Земли и планет. М.: Наука и образование, 2013. – 413 с. / Учебник для углубленного изучения предмета



Смирнов Владимир Борисович

заведующий кафедрой
физики Земли
vs60@mail.ru

Физика Земли

- Сейсмология и строение Земли
 - Основной инструмент исследования строения Земли
 - Физическая (механическая) модель Земли
- Очаг землетрясения и сейсмичность Земли
 - Землетрясение с точки зрения физики
 - Проблема прогноза землетрясений
- **Гравитационное поле и фигура Земли (продолжение)**
 - **Сила тяжести – основная движущая сила**
 - **Форма Земли**
- Геотермия и энергия процессов в Земле
 - Основная энергетика Земли
- Магнитное поле Земли
 - Магнитогидродинамика в ядре Земли
 - «Измеритель» движений литосферы в геологическом масштабе времени

На прошлой лекции

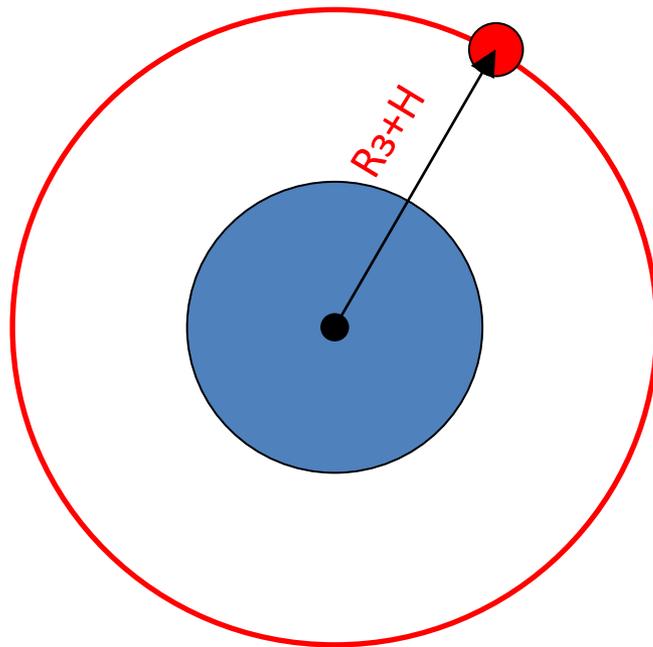
Гравитационный потенциал

Величина	Точечная масса	Распределенная масса
Сила	$\vec{F} = f \frac{Mm}{r^2} \vec{n}$	
Напряженность поля $\vec{g} = \vec{F}/m$	$\vec{g} = f \frac{M}{r^2} \vec{n}$	$\vec{g} = f \int \frac{\rho' dV'}{ \vec{r} - \vec{r}' ^2} \vec{n}$
Потенциал U $\vec{g} = -\text{grad}U$	$U = f \frac{M}{r}$	$U = f \int \frac{\rho' dV'}{ \vec{r} - \vec{r}' }$

$$f = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$$

На прошлой лекции

Орбита ИСЗ и сила тяжести



$$\frac{mV^2}{2} + mg(R_з + H) = const$$

$$mg = mV^2 / (R_з + H)$$

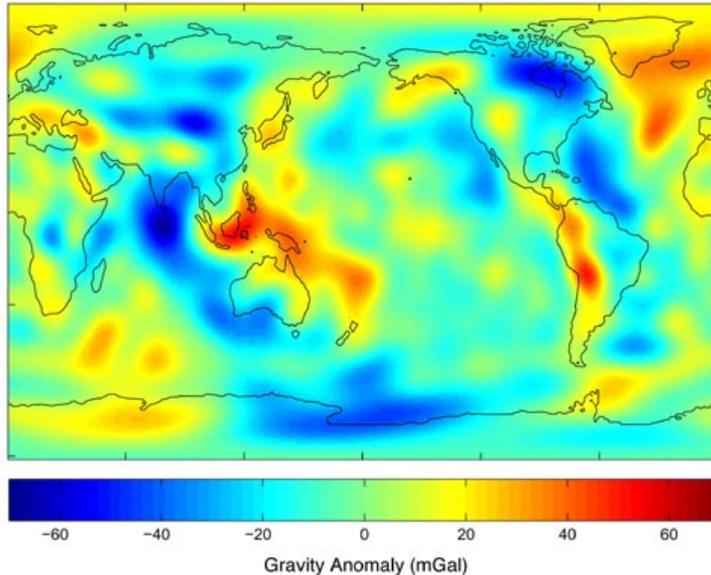
$$V = \sqrt{g(R_з + H)}$$

$$\frac{3}{2} mg(R_з + H) = const$$

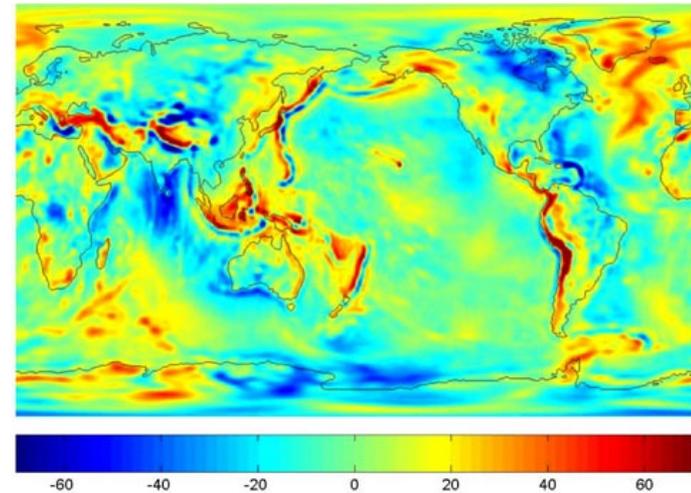
$$gH = const$$

Изменения ***H*** отражают изменения ***g***

На прошлой лекции

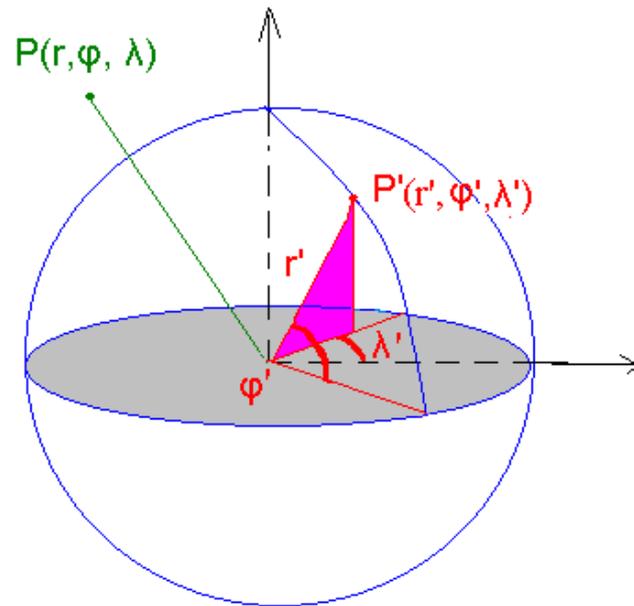


Глобальное гравитационное поле, полученное за 10 лет слежения за орбитами спутников.



Модель глобального гравитационного поля GGM02S, полученная за 1 год работы системы Gracе

Математическое описание гравитационного поля



Географическая система координат: r, φ, λ

Сферическая система координат: r, θ, λ

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Разложение потенциала по сферическим функциям

Потенциал силы тяжести: $\mathbf{W}=\mathbf{U}+\mathbf{Q}$,
где U – гравитационный потенциал,
 Q – потенциал центробежной силы.

$$Q = \frac{\Omega^2 R^2}{2} = \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

$$W(r, \theta, \lambda) = f \frac{M}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n J_n P_n^0(\cos \theta) + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_n^m(\cos \theta) [A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \sin m\lambda] \right\} + \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

Полиномы Лежандра и сферические функции: формулы

$$U = f \frac{M}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n J_n P_n^0(\cos \theta) + \dots \right\}$$

$P_0(x) = 1$	$n = 0$	$J_0 P_0(\cos \theta) = J_0$
$P_1(x) = x$	$n = 1$	$P_0(\cos \theta) = \cos \theta$; выбор начала отсчета: $J_1 = 0$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$n = 2$	$-J_2 P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1) = J_2 \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$
$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$	$n = 3$	$P_3(\cos \theta) \sim \cos^3 \theta \sim \cos 3\theta$

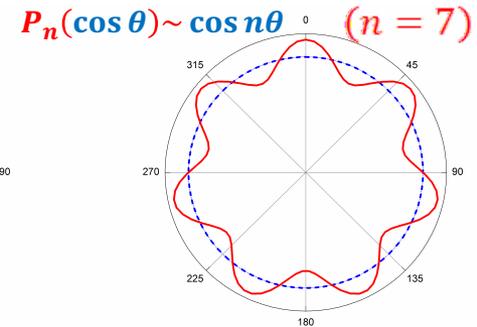
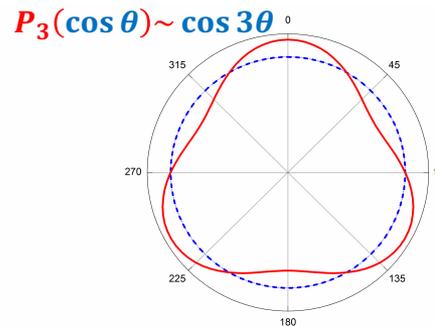
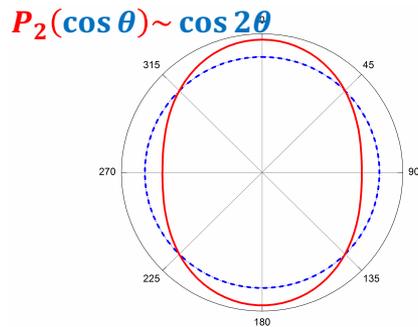
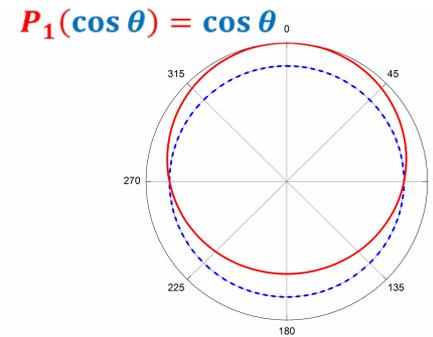
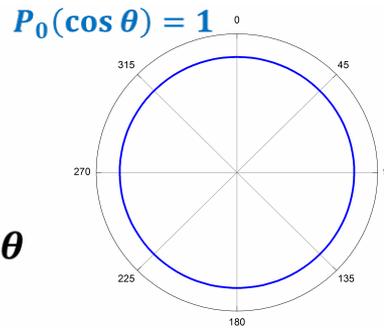
$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad \mathbf{P_n(x) \sim x^n}$$

$$\mathbf{P_{2k}(-x) = P_{2k}(x); P_{2k+1}(-x) = -P_{2k+1}(x)}$$

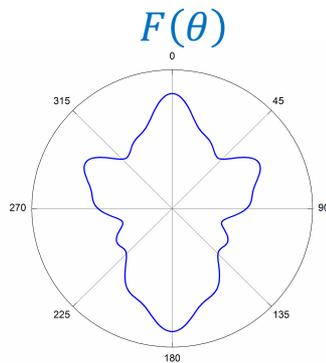
Полиномы Лежандра и сферические функции: картинки

$$P_n(x) \sim x^n$$

$$P_n(\cos \theta) \sim (\cos \theta)^n \sim \cos n\theta$$



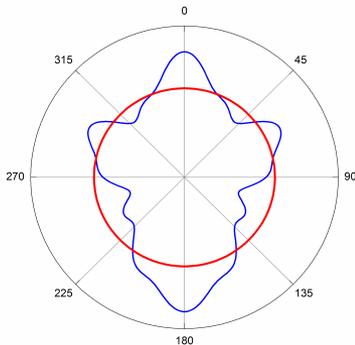
Разложение по сферическим функциям



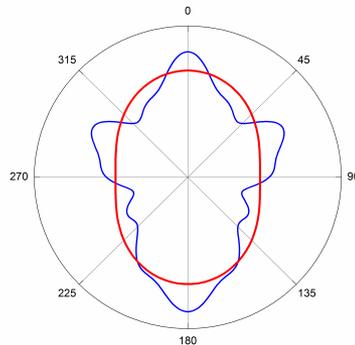
$$F(\theta) = \sum_{k=0}^n J_k P_k(\cos\theta)$$

$$J_k = \frac{1}{2}(2k + 1) \int_{-1}^1 F(\theta) P_k(x) dx \quad (x = \cos\theta)$$

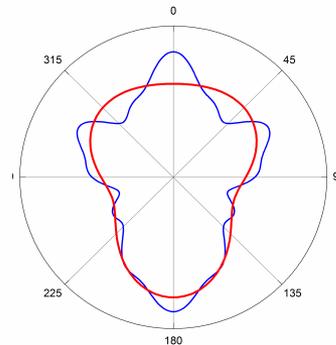
$n = 0$



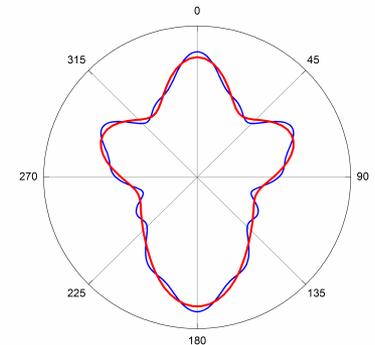
$n = 2$



$n = 3$



$n = 6$



Спектр гравитационного поля Земли

(коэффициенты разложения гравитационного потенциала по сферическим гармоникам)

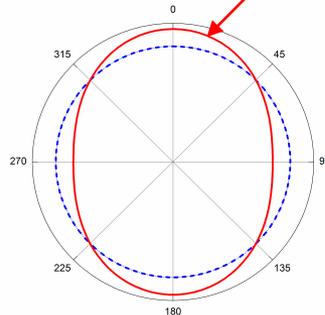
$$W(r, \theta, \lambda) = f \frac{M}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n^0(\cos\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n^m(\cos\theta) [A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \sin m\lambda] \right\} + \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

Нормальный гравитационный потенциал

$$W_0(r, \theta) = f \frac{M}{r} - f \frac{M}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2 \frac{1}{2} (1 - 3\cos^2 \theta) + \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

$$J_2 = 1.08265 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{3}{2} J_2 \approx \frac{1}{2} \Omega^2 a^2$$



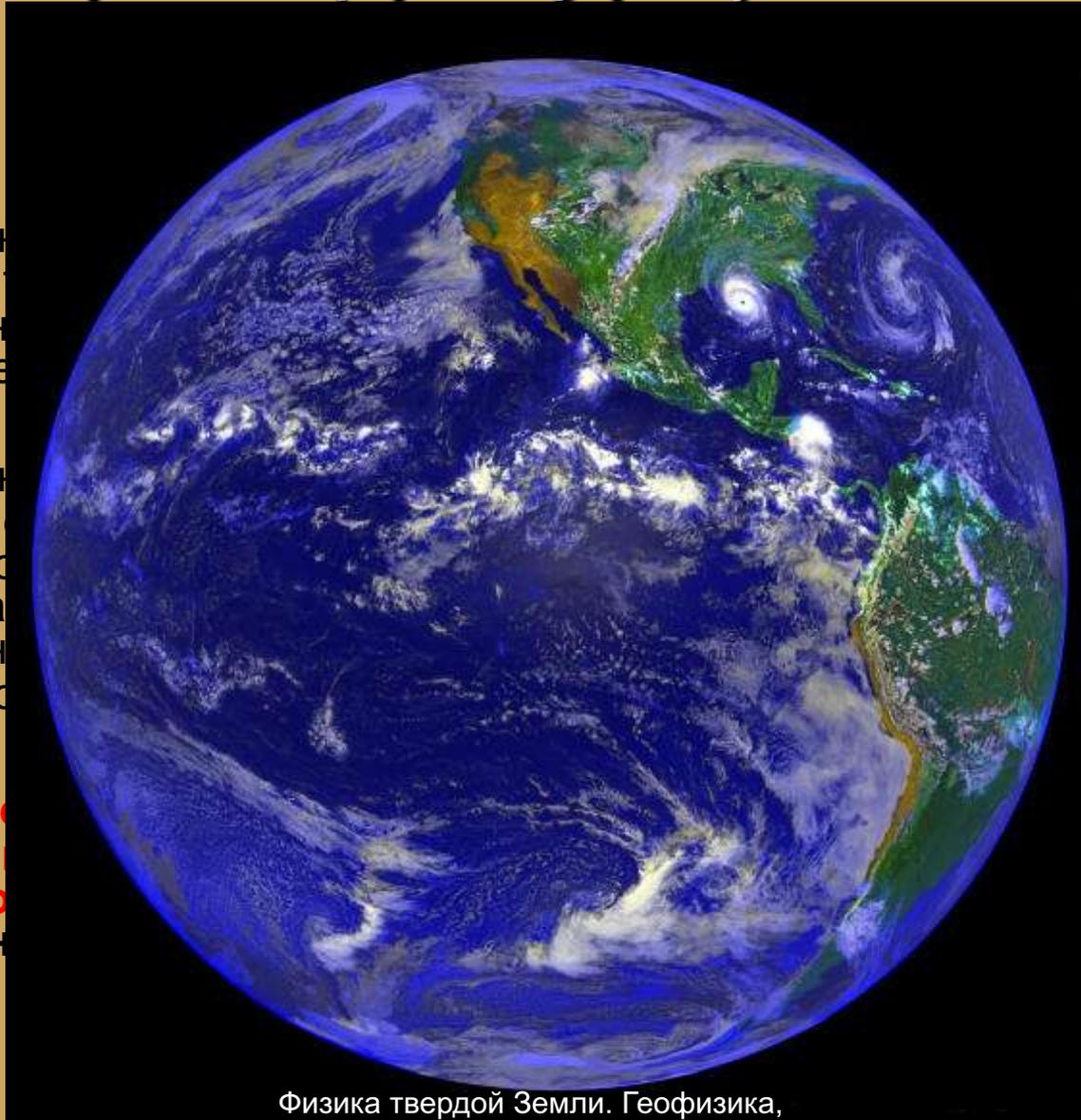
n	J _n
0	1
2	1.083*10e-3
3	-2.5*10e-6
4	-1.6*10e-6
5	-0.23*10e-6
...	...
18	-0.23*10e-6

$$A_n^m, B_n^m \sim 10^{-6}$$

Физика твердой Земли. Геофизика, физфак МГУ, 2026

Форма (фигура) Земли

- Равновесие жидкости в касательных силы тяжести
- Равновесие жидкости на поверхности **потенциала эквипотенциальной** поверхности
- **Фигура Земли эквипотенциальной** поверхности **неизменна**



$$\text{grad } W \cdot \vec{dx}$$

$$\vec{g} \cdot \vec{n}_t = 0$$

Форма (фигура) Земли

Геоид: $W = \text{const}$

- Равновесная поверхность жидкости такова, что касательная к ней компонента силы тяжести **равна нулю**
- Равновесная поверхность жидкости совпадает с поверхностью **постоянного потенциала** – эквипотенциальной поверхностью
- **Фигура Земли – геоид – это эквипотенциальная поверхность (поверхность неизменного потенциала).**

1. $\vec{g} = -\text{grad } W$

2. Касательная компонента
 $g_t = (\vec{g} \cdot \vec{n}_t) = 0$

3. Изменение W :

$$dW = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial W}{\partial x_i} dx_i = (\text{grad } W \cdot \vec{dx})$$

4. Изменение W вдоль \vec{n}_t :

$$\Delta W_t = (\text{grad } W \cdot \vec{n}_t) = -(\vec{g} \cdot \vec{n}_t) = 0$$

Нормальная фигура Земли: сфероид Клеро

- Нормальному гравитационному полю соответствует **нормальная фигура Земли**: по определению это - **эквипотенциальная поверхность нормального гравитационного потенциала**, касающаяся поверхности океана на экваторе. Уравнение этой поверхности есть уравнение сфероида, известного, как **сфероид Клеро**.

$$W_0(r, \theta) = f \frac{M}{r} - f \frac{M}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2 \frac{1}{2} (1 - 3\cos^2 \theta) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

Из условия $W_0(r, \theta) = \text{const}$ получаем:

$$r_0 = a(1 - \alpha \cos^2 \theta)$$

$$g_0 = g_e(1 + \beta \cos^2 \theta)$$

Сфероид Клеро

$$r_0 = a(1 - \alpha \cos^2 \theta)$$

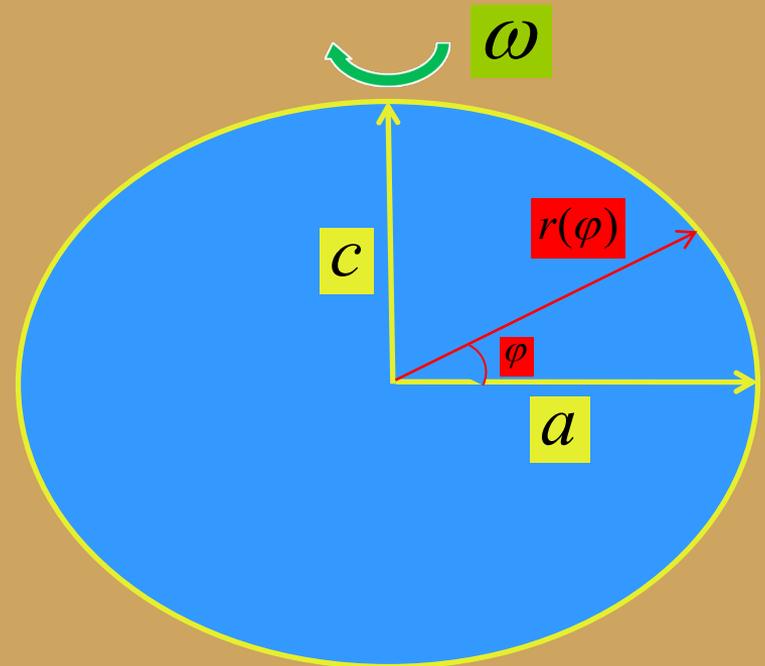
$$g_0 = g_e(1 + \beta \cos^2 \theta)$$

Знание величины

$$J_2 = 1,08265 \cdot 10^{-3}$$

в «спектре» гравитационного поля позволяет с большой точностью определить сжатие Земли:

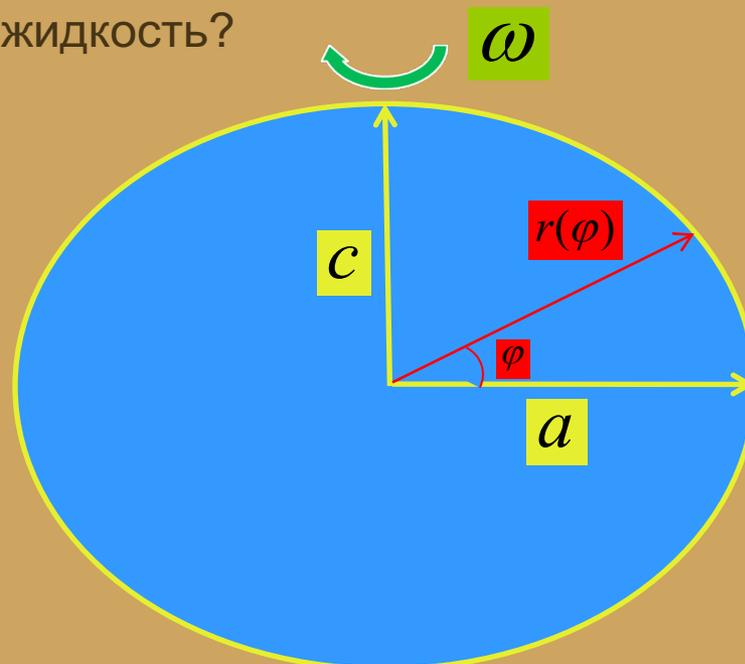
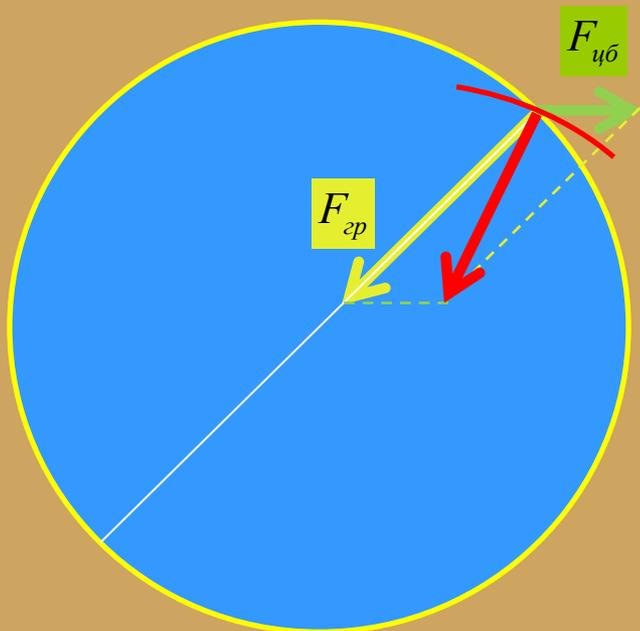
$$\alpha = \frac{3}{2} J_2 + \frac{\omega^2 a_e}{2g_e} = 1/298,256$$



$$r_0 = a(1 - \alpha \cos^2 \theta)$$

$$\alpha = \frac{a - c}{a}$$

Земля – жидкость?



Гидростатическое сжатие:

жидкость с земным профилем плотности

$$\alpha^{GC} = 1 / 299,8$$

Реальное сжатие Земли

$$\alpha^{Земля} = 1 / 298,256$$

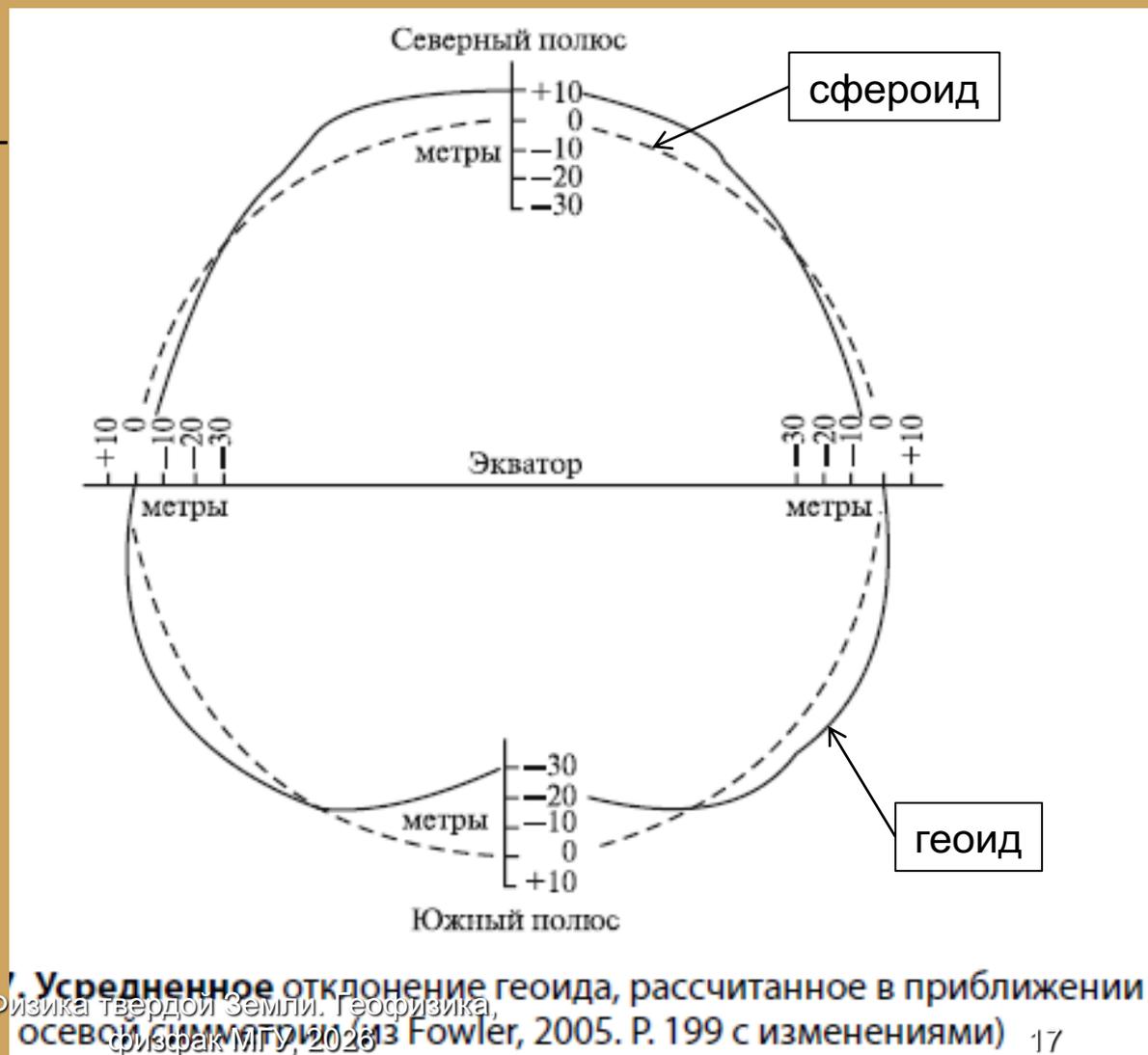
$$r = a(1 - \alpha^{GC} \sin^2 \varphi)$$

$$\alpha^{GC} = \frac{a - c}{a}$$

Сжатие Земли неотлично от сжатия жидкой планеты с земной плотностью

Фигура Земли: итог

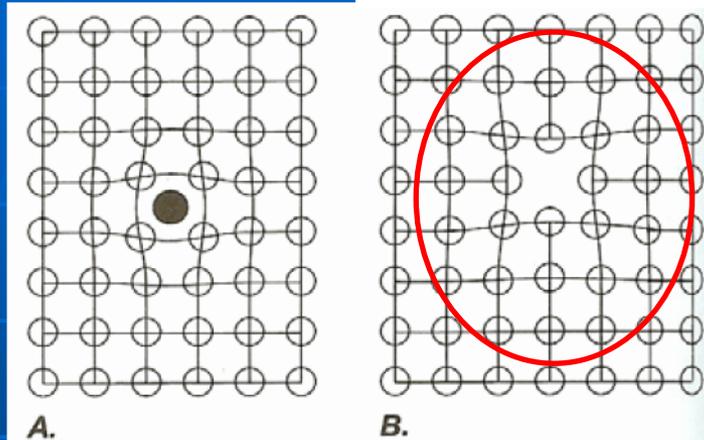
- **Геоид** (греч. geoeides, от гео - Земля и eidos - вид) – поверхность постоянного потенциала силы тяжести (эквипотенциальная поверхность)
- Совпадает с поверхностью Мирового океана
- На суше поверхность геоида является внутренней поверхностью
- **Сфероид** – аппроксимация геоида
- Сфероид совпадает с фигурой вращающейся жидкости (с земным распределением плотности)



Физика: природа вязкости кристаллов

Точечные дефекты кристаллической структуры

Дефекты по Шоттки



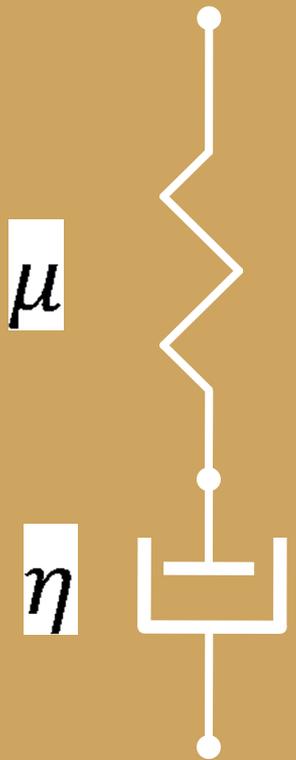
Дефектами кристалла называют всякое нарушение симметрии кристалла — идеальной периодичности кристаллической решётки. Они бывают **точечными** и **линейными** (дислокации).

Кристаллическая решетка – упругость
Дефекты решетки - вязкость

Механика:

реология вещества Земли

Тело Максвелла



$$\sigma_y \sim \mu \varepsilon_0$$

$$\sigma_B \sim \eta \dot{\varepsilon} \sim \eta \frac{\varepsilon_0}{T}$$

$$\tau = \eta / \mu$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_B = \frac{\dot{\sigma}}{\mu} + \frac{\sigma}{\eta}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} (\sigma + \tau \dot{\sigma})$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

$T \ll \tau$ - упругое тело

$T \gg \tau$ - вязкая жидкость

Аномалии гравитационного поля

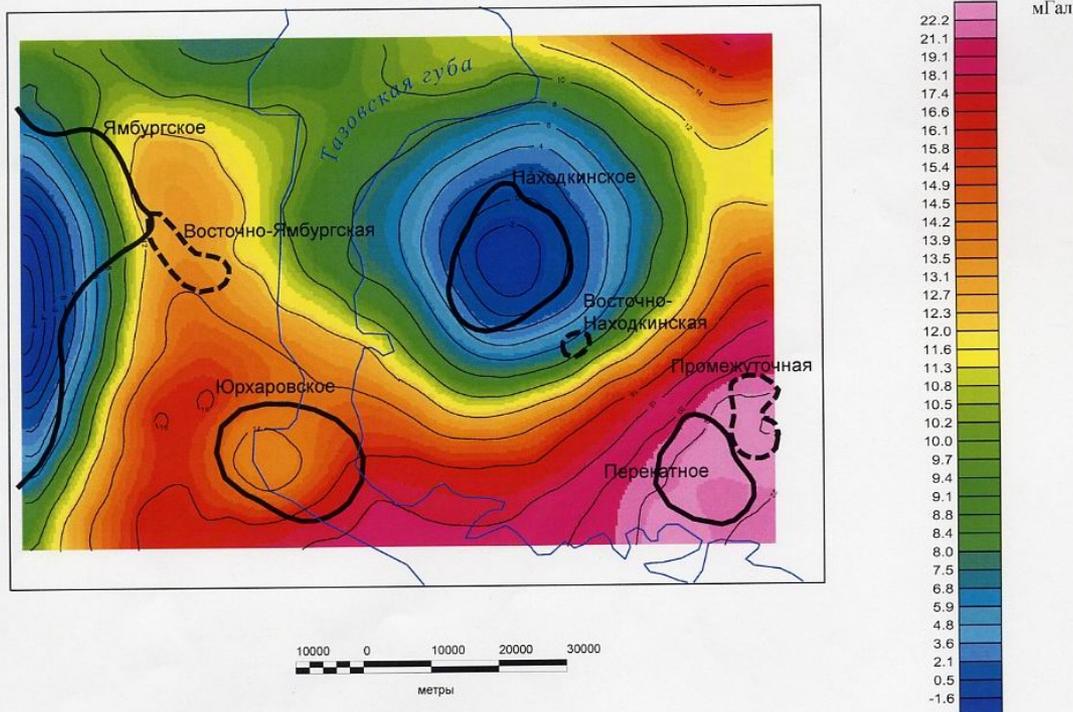
Масштаб эффекта: $|\Delta g|$ обычно не превышают 50 мгал ($g \sim 980$ гал)

Месторождение углеводородов в Сибири

Два вида
представления
аномалий

- Аномалии Δg – отклонения от нормального поля
- Аномалии эквипотенциальной поверхности - **высоты Δh геоида над сфероидом**

Б



А— по данным аэрогравиметрической съемки, ФГУ НПП "Геологоразведка", прибор МАГ-1, 2003г.
Значения приведены в редукции Фая, сечение изоаномал — 1 усл.ед.

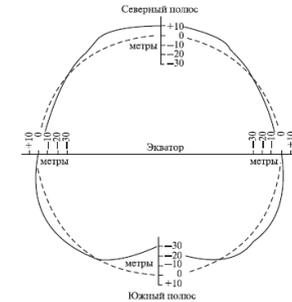
Б — по данным наземных гравиметрических измерений, СГП-9, 1995г. Значения приведены в редукции Фая, сечение изоаномал — 2 мГал.

Приведены контуры нефтегазоносных структур и их названия. Сплошная линия — месторождения, пунктирная — перспективные структуры.

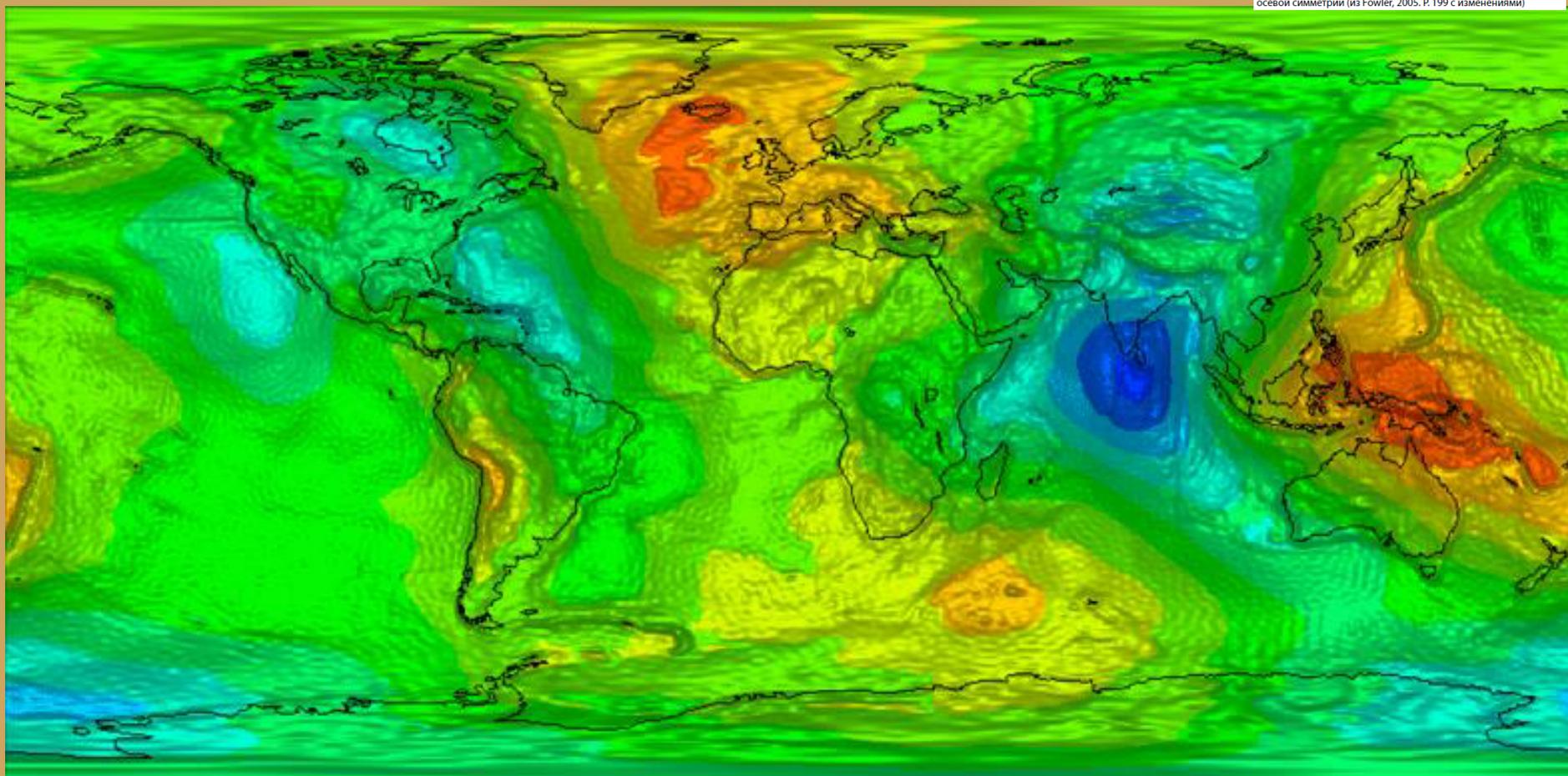
Физика твердой Земли. Геофизика,
физфрак МГУ, 2026

ГЕОИД
разрешение 25-30 км

Карта высот геоида (2010)



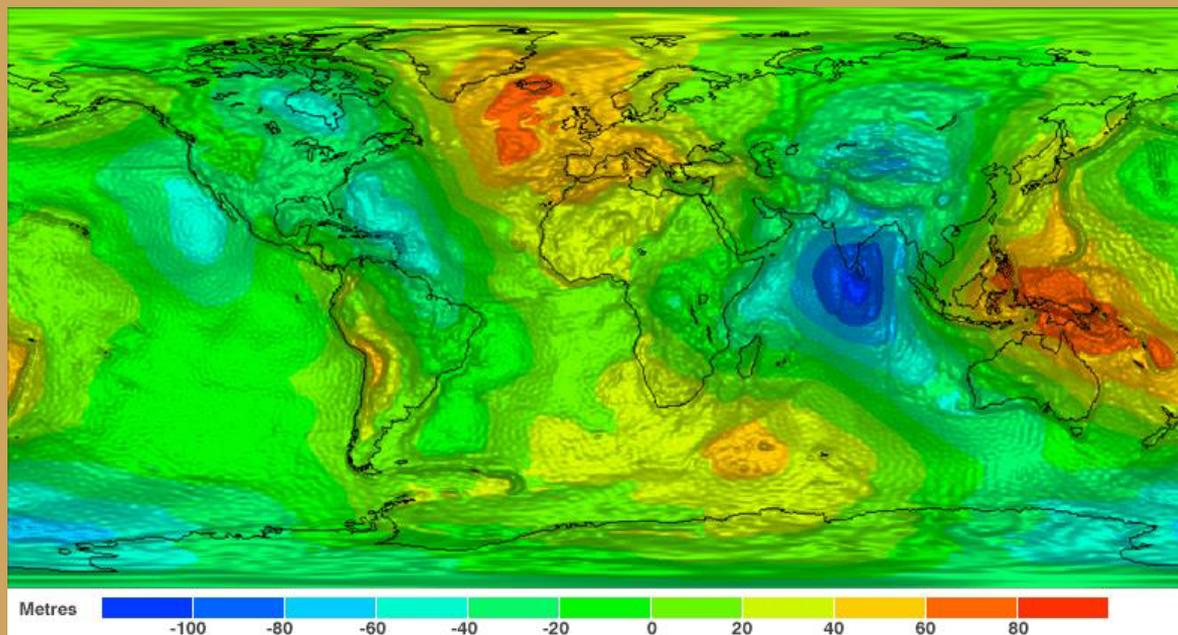
7. Среднее отклонение геоида, рассчитанное в приближении осевой симметрии (из Fowler, 2005. Р. 199 с изменениями)



Изостазия

Гравитационная аномалия

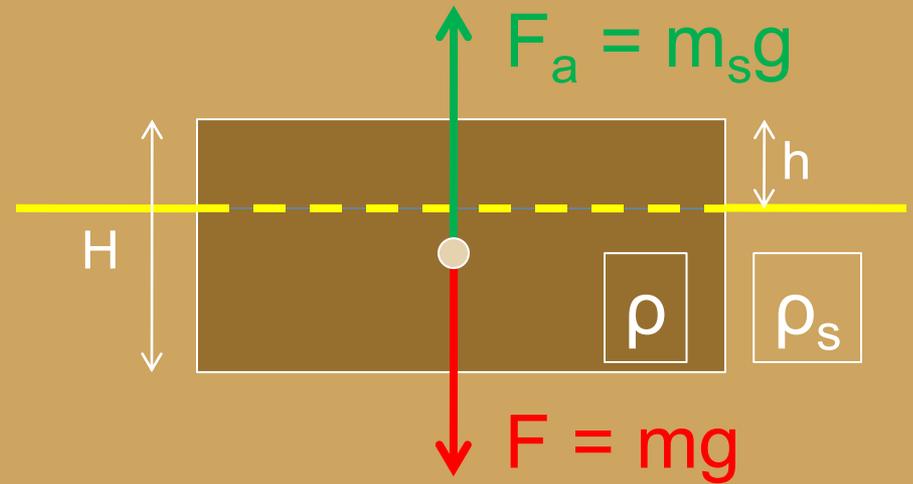
$$\Delta g = 2\pi\rho h$$



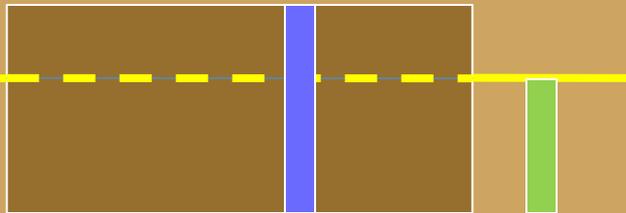
Изоааааа

Гравитационная аномалия

$$\Delta g = 2\pi\gamma\rho h$$



$$\Delta g = const \Leftrightarrow \sum \rho_i h_i = const$$



$$\rho H = \rho_s (H - h)$$

$$mg = m_s g$$

$$\frac{m}{m_s} = \frac{\rho H}{\rho_s (H - h)} = 1$$

$$h = \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s} H$$

Изостазия и формы рельефа

- Литосферные блоки «плавают» в более тяжелой астеносфере
- Астеносфера на геологических масштабах времени ведет себя как вязкая жидкость
- Высота рельефа h пропорциональна толщине коры H



$$h(x) = H \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s} \sim H(x) \rho(x)$$

Гравитационное поле и фигура Земли: Резюме

- Для описания гравитационного поля Земли удобно пользоваться скалярной функцией – **гравитационным потенциалом**
- Современные **спутниковые технологии** позволяют получить значения гравитационного поля практически в каждой точке земной поверхности
- Разложение гравитационного потенциала по **сферическим гармоникам** позволяет судить о пространственном «спектре» гравитационного поля Земли
- Амплитуды всех гармоник гравитационного поля, начиная с третьей, **значительно меньше**, чем амплитуды **нулевой и второй** гармоник
- Приближение гравитационного потенциала **нулевой и второй** гармоникой плюс **потенциал центробежной силы** определяют **нормальное гравитационное поле**

Гравитационное поле и фигура Земли: Резюме (продолжение 1)

- Под фигурой Земли понимают математическую поверхность постоянного значения потенциала силы тяжести – **эквипотенциальную поверхность**
- **Геоид** – эквипотенциальная поверхность **полного** потенциала
- **Сфероид** – эквипотенциальная поверхность потенциала **нормального** поля (нормального потенциала)

Гравитационное поле и фигура Земли: Резюме (продолжение 2)

- На региональном уровне для блоков Земной коры характерно состояние **изостазии** – состояния гидростатического равновесия плавания блоков в астеносфере
- Теория изостазии объясняет **отсутствие гравитационных аномалий над горными массивами**
- Теория изостазии объясняет обусловленность форм рельефа **толщиной блоков земной коры**

Физика Земли

- Сейсмология и строение Земли
 - Основной инструмент исследования строения Земли
 - Физическая (механическая) модель Земли
- **Очаг землетрясения и сейсмичность Земли**
 - **Землетрясение с точки зрения физики**
 - **Проблема прогноза землетрясений**
- Гравитационное поле и фигура Земли
 - Сила тяжести – основная движущая сила
 - Форма Земли
- **Геотермия и энергия процессов в Земле**
 - **Основная энергетика Земли**
- Магнитное поле Земли
 - Магнитогидродинамика в ядре Земли
 - «Измеритель» движений литосферы в геологическом масштабе времени

Тепловое поле Земли (Геотермия, англ. *geothermy*)

- Тепловой поток
- Геотермический градиент в коре и верхней мантии
- Пределы для температур в Земле
- Конвекция в мантии
- Источники тепловой энергии Земли

Тепловой поток

- **Тепловой поток** — количество тепла, проходящее через единицу площади в единицу времени:

$$q = \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t}$$

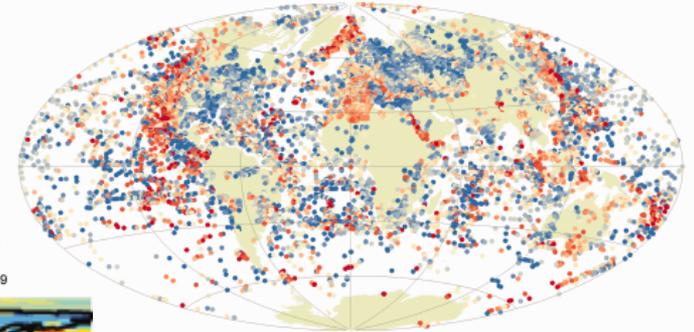
$$[q] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$$

- **Закон Фурье** связывает тепловой поток с градиентом температуры:
- $Q = -\chi \text{ grad } T = -\chi \frac{dT}{dz}$
- Для оценки теплового потока на поверхности Земли **измеряют** отдельно:
 - теплопроводность горных пород χ (**в лаборатории**)
 - градиент температуры $\frac{dT}{dz}$ (**в специальных скважинах**)

Тепловой поток на поверхности Земли

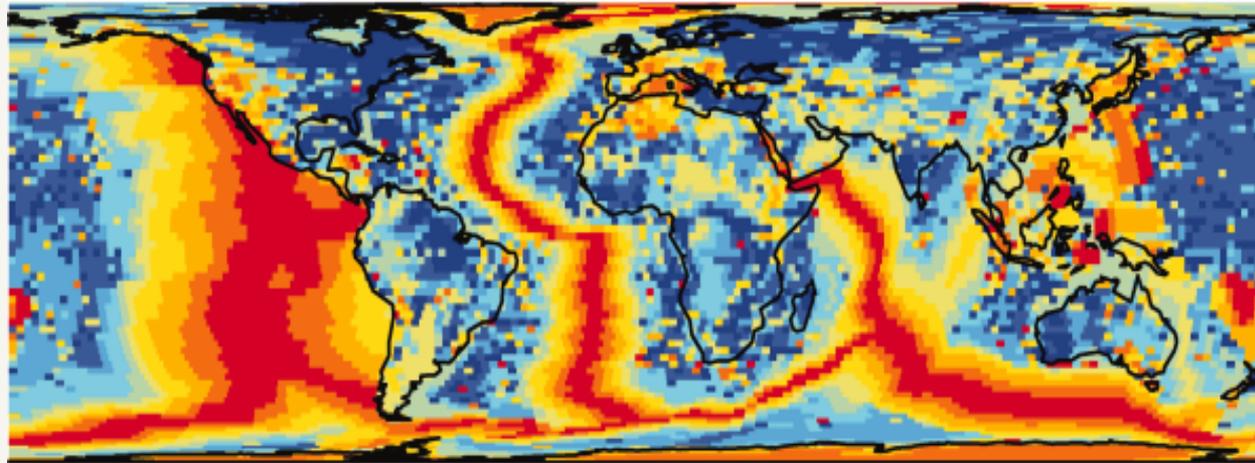
Heat Flow Data-points (mW m⁻²)

- 0 - 32
- 33 - 43
- 44 - 50
- 51 - 57
- 58 - 65
- 66 - 74
- 75 - 86
- 87 - 106
- 107 - 162
- 163 - 9999

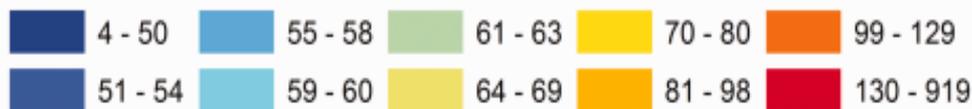


(Davies, 2013)

38 тыс. измерений
теплового потока



Final Estimate of Heat Flow (mW m⁻²) (Area-weighted Median)



Крупная
электростанция
~ 10¹⁰ Вт

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = 4.87 \cdot 10^{13} \text{ Вт}$$

	Поток, мВт/м ²	Площадь, км ²	Всего, Вт	В год, Дж
континенты	70.9	1.49E+08	1.06E+13	3.33E+20
океаны	105.4	3.61E+08	3.81E+13	1.20E+21
Всего			4.87E+13	1.53E+21

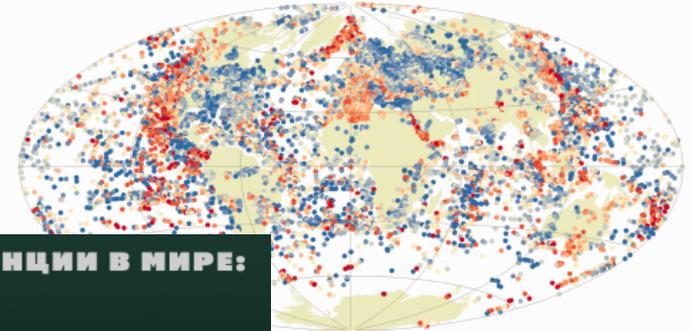
Физика твердой Земли. Геофизика,
физфак МГУ, 2026

1.53E+21

Тепловой поток на поверхности Земли

Heat Flow Data-points (mW m⁻²)

- 0 - 32
- 33 - 43
- 44 - 50
- 51 - 57
- 58 - 65
- 66 - 74
- 75 - 86
- 87 - 106



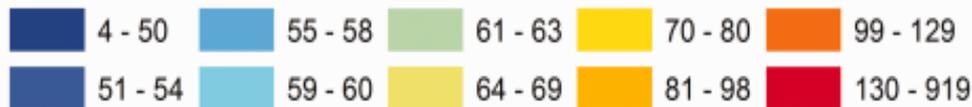
38 тыс. измерений
теплового потока

САМЫЕ КРУПНЫЕ ЭЛЕКТРОСТАНЦИИ В МИРЕ:

1. «Три ущелья» (Китай) — 22 500 МВт
2. «Итайпу» (Бразилия-Парагвай) — 14 000 МВт
3. «Силоду» (Китай) — 13 480 МВт
4. «Белу-Монти» (Бразилия) — 11 233 МВт
5. «Гури» (Венесуэла) — 10 235 МВт
6. «Удундэ» (Китай) — 10 200 МВт
7. «Джебель-Али» (ОАЭ) — 8695 МВт
8. «Тукуруи» (Бразилия) — 8370 МВт
9. «Касивадзаки-Карива» (Япония) — 7965 МВт
10. Комплекс ВЭС Ганьсу (Китай) — 7965 МВт

Крупная
электростанция
~ 10¹⁰ Вт

Final Estimate of Heat Flow (mW m⁻²) (Area-weighted Median)



$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = 4.87 \cdot 10^{13} \text{ Вт}$$

	Поток, мВт/м ²	Площадь, км ²	Всего, Вт	В год, Дж
континенты	70.9	1.49E+08	1.06E+13	3.33E+20
океаны	105.4	3.61E+08	3.81E+13	1.20E+21
Всего			4.87E+13	1.53E+21

1.53E+21

Проблема определения температуры в недрах Земли

Проблема

- Невозможно провести прямые измерения температуры на глубинах, превосходящих глубины имеющихся скважин
- Кольская сверхглубокая скважина – 12.262 км
- Радиус Земли – 6371 км



Решение

- Использовать косвенные данные – геофизические параметры, зависящие от температуры
- Скорости продольных волн зависят от температуры T и давления P :
- $v(z)=v(P(z),T(z))$
- Зависимости $v(z)$ и $P(z)$ известны из моделей Земли
- Зная
 - $v=v(z)$ – модель Земли
 - $P=P(z)$ – модель Земли
 - $v=v(P,T)$ – лабораторные исследования

Физика твердой Земли. Геофизика
можно найти $T=T(z)$
физфак МГУ, 2026

Оценки геотермического градиента: Земная кора и верхняя мантия

$$v = v(p, T)$$

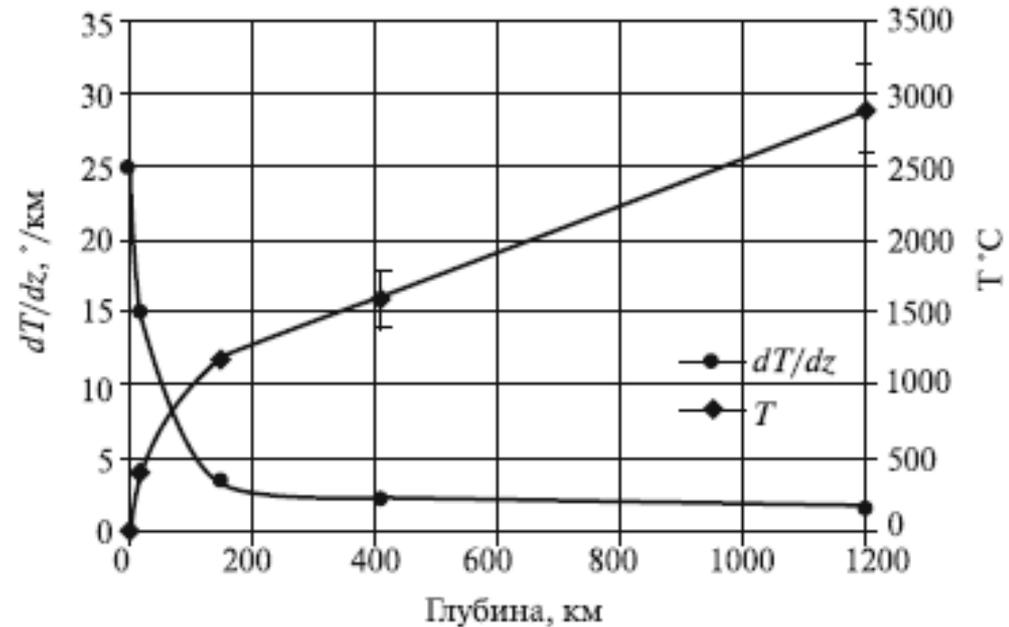
$$\frac{dv}{dz} = \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz}$$

$$dp/dz = \rho g.$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\frac{dv}{dz}}{\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p} - \rho g \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T}{\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p}$$

модель
Земли

лаборатория



Температура в Земле, полученная по методу реперных точек

z, км	T, °C	Дополнительные данные
0	10	
40	550	точка Кюри z = 60 км T = 600—700 °C
150	1200—1400	1200—1400 °C — вулканы (магма из астеносферы)
410	1600 ± 200	—
1200	2900	—

Пределы температур

- Нижний предел температуры в Земле – температура нагрева при сжатии Земли; определяется **адиабатическим градиентом**
- Верхний предел температуры в твердой мантии Земли – **температура плавления**
- Физика твердого тела **позволяет связать** теплофизические параметры со скоростями упругих волн

нагрев при сжатии

$$\frac{dT_a}{dp} = \frac{\alpha T_a}{c_p \rho}$$

гидростатика

$$dp/dz = \rho g.$$

$$\frac{dT_a}{dz} = \frac{g\alpha T_a}{c_p}$$

адиабатический градиент

Гипотеза Линдемана

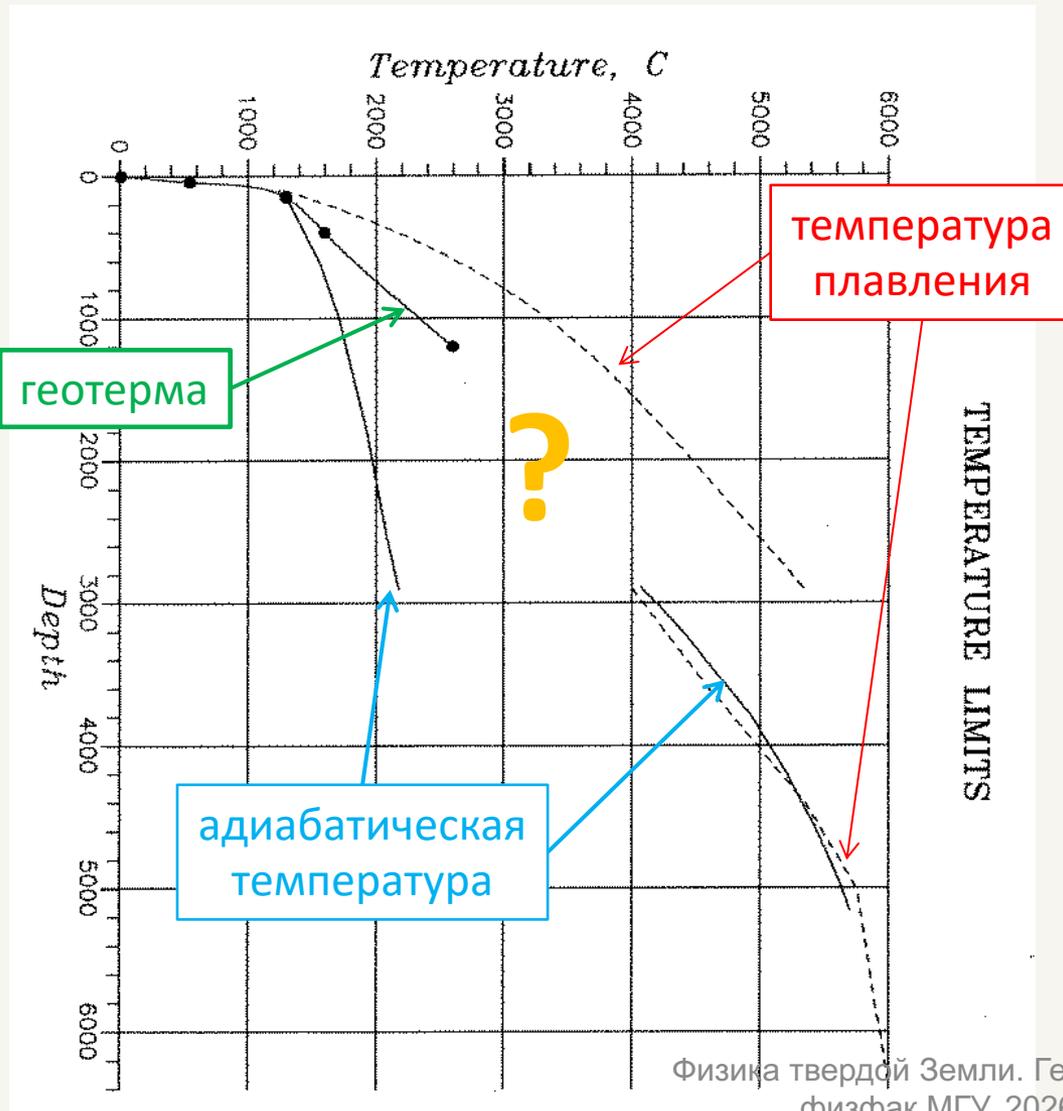
$$\frac{\zeta}{a} = \mathit{const}$$

$$\frac{T_{\text{пл}}(z_1)}{T_{\text{пл}}(z_2)} = \frac{\Phi(z_1)}{\Phi(z_2)}$$

$$\frac{\alpha(z)}{c_p(z)} = f(\rho, v_p, v_s)$$

$$\Phi(z) = v_p^2 - \frac{4}{3} v_s^2$$

Пределы температур в Земле



Уравнение теплопроводности

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\chi}{\rho c} \frac{d^2T}{dz^2} = k \frac{d^2T}{dz^2}$$

$[k] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ - коэффициент температуропроводности

Масштабы теплопроводности

ΔT – разность температур на расстоянии L

$$\frac{\Delta T}{\tau} = k \frac{\Delta T}{L^2} \Rightarrow L^2 = k\tau$$

Для Земли: $k \approx 5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$

При $\tau=4.6$ млрд лет получаем

$L \approx 300$ км

Только теплопроводность выносит тепло

с очень маленькой глубины