

Я $\frac{265}{198}$

М. МИЛАНКОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КЛИМАТОЛОГИЯ
И
АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
КОЛЕБАНИЙ КЛИМАТА

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО А. Х. ХРГИАНА
ПОД РЕДАКЦИЕЙ ПРОФ. С. Л. БАСТАМОВА

С ДОБАВЛЕНИЕМ А. Х. ХРГИАНА
«КЛИМАТЫ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ЭПОХ
И
ПЕРЕМЕЩЕНИЕ МАТЕРИКОВ»

це 5 р. 50 к. переплет 1 р. 50 г.



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1939 ЛЕНИНГРАД



39-1232

Редактор С. А. Каменецкий

Технический редактор О. Залышкин

Сдано в производство 5/IX. 1938 г.

Подписано к печати 25/XI 1938

Уполн. Главлита № Б-56138.

Тираж 4000 экз.

Формат бум. 60×94/16.

Уч.-авт. л. 16,07

Бум. л. 6 1/2

Печ. л.

Колич. печ. экз. в 1 печ. л. 52592.

Учетн. № 4444.

ГОНТИ №

Заказ №

Бумага Окуловской фабрики.

2-я типография ГОНТИ им. Евгения Соколовой, Ленинград, пр. Красных Командиров

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Введение	5
I. Облучение Земли без учета влияния атмосферы	
1. Солнечная постоянная. Закон облучения	7
2. Облучение Земли в данный момент времени	9
3. Суточный ход облучения	13
4. Суточные количества радиации	14
5. Годовой ход облучения Земли	16
6. Прерывность функции, изображающей суточный ход облучения. Устранение этой прерывности	21
7. Разложения в ряды	25
8. Количество радиации за произвольный отрезок времени	30
9. Количество радиации в различные астрономические времена года	32
10. Количества тепла, получаемые обоими полушариями в течение произвольного интервала времени	34
11. Неодинакая длительность астрономических времен года	36
12. Рековые вариации земной оси и элементов земной орбиты	37
13. Вспомогательные таблицы для расчета векового хода облучения Земли	39
14. Вековой ход солнечного облучения Земли	41
15. Математическая интерпретация векового хода облучения Земли	46
16. Обзор результатов раздела I	54
II. Влияние атмосферы на облучение Земли и зависимость между приходящим излучением и температурой. Математический климат Земли	
17. Основные факты	57
18. Закон Бугера-Ламберта	58
19. Математическое представление влияния атмосферы на облучение Земли	59
20. Числовые результаты	66
20а. Коэффициент прозрачности	68
21. Баланс лучистой энергии Земли	70
22. Строение атмосферы. Закон Веера	73
23. Излучение земной поверхности и изучение атмосферы	77
24. Дифференциальные уравнение процесса излучения в атмосфере	79
25. Первая основная проблема математической климатологии. Интегрирование уравнений излучения в случае устойчивого равновесия	81
26. Солярные температуры различных параллелей	84
27. Строение атмосферы в состоянии лучистого равновесия	88
28. Вопросы об устойчивости равновесия атмосферы	91
29. Влияние водяного пара на процессы излучения в атмосфере	94
30. Теплопроводность почвы	97
31. Теплообмен в почве, запаздывание температурных экстремумов	102
32. Форма суточной кривой температуры	106
33. Вторая основная проблема математической климатологии. Интегрирование уравнения излучения для нестационарного случая	108
34. Числовые результаты	115
35. Годовой оборот тепла в атмосфере	119

III. Астрономическая теория колебаний климата

Стр

122

127

130

136

148

165

175

188

193

195

36.	Обзор результатов раздела II	122
37.	Исторический обзор	127
38.	О числовом расчете вековых изменений астрономических элементов	130
39.	Числовой расчет векового хода облучения Земли	136
40.	Результаты исследований климатологов и геологов о связи векового хода облучения Земли с климатами геологических эпох	148
41.	Ход температуры, соответствующий вековому ходу облучения Земли	165
42.	Ледниковые периоды	175
43.	Обзор результатов раздела III. Заключительные выводы	188
	<i>Литература</i>	193
	Д о б а в л е н и е. А. Хргиан. Климаты геологических эпох и перемещение материков	195

ВВЕДЕНИЕ

Под климатологией обычно понимают изучение и описание среднего состояния и нормальных изменений погоды в различных местах земной поверхности. Необходимые для этого данные получаются путем статистической обработки многолетних непосредственных метеорологических наблюдений. Поэтому климатология в ее современном состоянии является чисто эмпирической наукой. Только в метеорологии мы имеем переход к теории, так как эта наука стремится объяснить явления погоды на основе законов физики и таким образом открыть зависимость между климатическими явлениями и их основными причинами.

Важнейшей причиной всех тепловых явлений на земной поверхности и в атмосфере является солнечная радиация, ее пространственное распределение, обусловленное формой земной поверхности, и ее изменения со временем, связанные с обращением Земли вокруг Солнца и вокруг своей оси. Движение Земли вызывает смену времен года, так же как и смену дня и ночи. Угол падения солнечных лучей на земную поверхность изменяется в течение суток и в течение года, а также при переходе из одной широты на другую. Вместе с ним изменяется и количество тепла, приносимого солнечными лучами какому-либо месту земной поверхности, а следовательно, и тепловое состояние этого места и прилегающего к нему слоя воздуха. Неудивительно поэтому, что этот угол наклона, выражаемый греческим словом *κλίμα* (наклонять), послужил основой для слова „климат“.

Количество солнечной радиации, ее изменения со временем, влияние атмосферы на нее и тепловые результаты этой радиации — эти основные компоненты климата Земли — доступны точному математическому исследованию, так что можно чисто *теоретически* построить схему климата, определяемого одной лишь солнечной радиацией. Такой фиктивный климат земного шара, полученный в результате чисто теоретических расчетов, игнорирующих все посторонние воздействия, называется *солярным*, или *математическим*, климатом. Эти названия указывают на происхождение понятия и на метод его изучения. Солярному климату и посвящена предлагаемая книга.

Теоретический раздел учения о климате возник очень недавно, поскольку лишь во втором десятилетии нашего века мы получили первые надежные данные измерений солнечной радиации и поскольку к этому же периоду относится установление математической связи между солнечной радиацией и температурой атмосферы.

Однако эта новая область климатологии уже добилась немаловажных успехов. Она дает возможность глубоко проникнуть в механизм тепловых явлений не только на Земле, но и на других планетах и

тем самым позволяет выйти далеко за пределы нашего непосредственного наблюдения.

Это относится не только к пространству, но и ко времени, так как к числу значительнейших достижений этой новой отрасли науки надо отнести изучение климатов геологического прошлого Земли. Именно поэтому в данной книге будет рассмотрена проблема палеоклимата.

Совершенно ясно, что в силу самой природы предмета в изложении не удалось обойтись без применения математики; но чтобы сделать результаты доступными и нематематику, в конце каждого раздела добавлено краткое резюме, в котором в простой доступной форме изложены все окончательные выводы.

Вся тема разбита на три раздела.

В первом разделе изучается и описывается солнечная радиация и ее изменения со временем, без учета влияния атмосферы. Приход солнечного тепла в данный момент определяется только взаимным положением Земли и Солнца, и дело сводится к решению геометрической задачи. Изменения количества солнечного тепла со временем зависят только от относительного движения Земли и Солнца и описание их представляет астрономическую задачу, которую мы можем разрешить с той точностью, которую нам дают методы небесной механики. Таким путем мы можем исследовать математически не только суточный и годовой ход солнечной радиации, но и ее вековой ход. В связи с этим мы можем назвать первый раздел астрономическим.

Во втором разделе изучается влияние атмосферы на солнечную радиацию и выводится зависимость между температурой и инсоляцией; в результате оказывается возможным построить схему солярного климата земного шара. Этот раздел основан на законах и теориях физики и поэтому может быть назван, в противоположность первому, физическим.

Третий раздел посвящен изучению изменений климата в отдаленном прошлом Земли, поскольку эти изменения обусловлены изменениями количества получаемой Землей солнечной энергии. Здесь будет показано, что смена климатов четвертичной эпохи с ее несколькими ледниковыми и межледниковыми периодами может быть столь полно объяснена с помощью изучения солярного климата тех времен, что можно даже построить астрономически обоснованную хронологию четвертичной эпохи.

1. ОБЛУЧЕНИЕ ЗЕМЛИ БЕЗ УЧЕТА ВЛИЯНИЯ АТМОСФЕРЫ

§ 1. Солнечная постоянная. Закон облучения. Вообразим сферу, центр которой совпадает с центром Солнца и радиус которой r достаточно велик для того, чтобы мы могли считать солнечные лучи перпендикулярными к элементу поверхности сферы. Пересечение оси вращения Солнца с этой сферой даст нам полюс, а пересечение с ней плоскости экватора Солнца — экваториальный круг сферы; положение любой точки этой последней определится с помощью гелиографической широты φ и гелиографической долготы ψ , отсчитываемой от какого-либо фиксированного начального меридиана.

Обозначим через dW количество лучистой энергии, протекающее за время dt через единицу поверхности нашей сферы; тогда за единицу времени через ту же единицу поверхности пройдет количество энергии, равное

$$J = \frac{dW}{dt}.$$

Эта величина называется потоком энергии, или *напряжением солнечной радиации*, в рассматриваемом месте.

Можно заранее предполагать, что величина J является функцией не только радиуса r , но и координат φ и ψ и времени t , так как поверхность Солнца неоднородна в различных местах и меняется с течением времени, что не может не влиять на излучение.

Однако наблюдения до сих пор не обнаружили зависимости напряжения радиации от гелиографической широты, вероятно, потому, что Земля в своем годовом движении отклоняется от плоскости солнечного экватора не больше чем на 7° гелиографической широты к северу и югу. Плоскость солнечного экватора составляет с плоскостью земной орбиты угол в $7^\circ 10'$. Установление зависимости J от времени t и гелиографической долготы ψ еще является предметом исследования. Повидимому, можно считать установленным, что Солнце является звездой переменной яркости и что интенсивность его излучения подвержена колебаниям. Но чтобы не усложнять наших дальнейших рассуждений этой недостаточно проверенной гипотезой, мы предположим, что эти, во всяком случае незначительные, колебания исключены введением средней величины напряжения солнечной радиации, вычисленной для достаточно длинного промежутка времени. Мы предполагаем таким образом, что величина солнечной радиации, падающей на поверхность нашей сферы, не зависит от времени и координат.

Опишем вокруг солнца другую сферу с радиусом a , равным среднему расстоянию Земли от Солнца или большой полуоси земной орбиты; тогда неизменный поток энергии J_0 , проходящий через единицу

этой сферической поверхности, называется *солнечной постоянной*. Эта величина выражается в тепловых единицах, так что мы можем дать такое определение: *солнечной постоянной называется то количество лучистой энергии Солнца, которое проходит в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярной к лучам и удаленной от Солнца на длину большой полуоси земной орбиты, причем предполагается, что вся энергия переходит в тепло*. За единицу времени обычно принимают 1 мин., за единицу поверхности — 1 см^2 и за единицу количества тепла — 1 кал .

Легче дать определение солнечной постоянной, чем измерить ее значение. Во втором разделе мы познакомимся с трудностями, стоящими на пути таких измерений. Несмотря на огромный затраченный труд, прошло много времени, прежде чем мы определили с достаточной точностью числовое значение этой важной постоянной; оно, повидимому, очень близко к 2 кал на 1 см^2 в 1 мин., так что для наших последующих выкладок мы примем везде округленное значение

$$J_0 = 2 \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{ мин}}. \quad (1)$$

Введение в случае необходимости небольших поправок в результаты выкладок не составляет никакого труда. Но в большинстве случаев оно не имеет никакого значения, так как при изучении количества тепла, получаемого от Солнца, важны прежде всего относительные величины, которые не изменяются. Для расчета же температур земной поверхности, зависящих от количества солнечного тепла, значение 2 кажется наиболее подходящим, так что, если мы представим себе Землю в виде гигантского актинометра, этот актинометр всегда будет давать значение солнечной постоянной, равное двум.

Легко вывести зависимость величины J от расстояния ρ . Через поверхность сферы радиуса ρ за единицу времени протекает количество тепла $4\pi\rho^2 J$, а через поверхность сферы радиуса a $4\pi a^2 J_0$. Обе эти величины равны между собой, так как в мировом пространстве не происходит никакого поглощения энергии, и мы имеем

$$\frac{dW}{dt} = J = \frac{a^2}{\rho^2} J_0.$$

Принимая за единицу измерения расстояния ρ большую полуось земной орбиты a , как это мы будем делать в дальнейшем, мы можем написать предыдущее уравнение в виде

$$\frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2}.$$

До сих пор мы принимали, что солнечные лучи падают на рассматриваемый элемент поверхности AB' перпендикулярно (рис. 1). Если же это не имеет места и нормаль к этой поверхности составляет

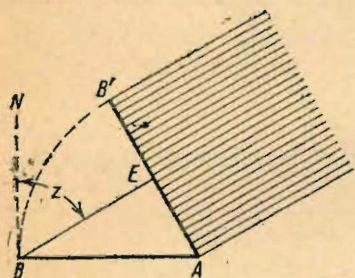


Рис. 1

с лучами угол z (угол падения), то на последнюю падает меньшее количество энергии, соответствующее пучку лучей сечения AE . Это сечение равно $AB \cos \angle BAE = AB \cos z$, и на элемент AB за единицу времени падает количество тепла, равное $J \cos z$ или $J_0 \frac{\cos z}{\rho^2}$.

Поэтому мы можем сказать: *единичная площадка, нормаль к которой составляет угол z с солнечными лучами, находящаяся на расстоянии ρ от Солнца (измеренном в радиусах земной орбиты), получает от него в единицу времени количество тепла, равное*

$$\frac{dW}{dt} = J_0 \frac{1}{\rho^2} \cos z \quad (2)$$

и называемое *облучением*, или *инсоляцией*, рассматриваемого элемента. Последнее уравнение выражает закон облучения и составляет основу дальнейших исследований.

§ 2. Облучение Земли в данный момент времени. Для того чтобы математически описать распределение облучения земной поверхности в данный момент времени, мы поступим следующим образом: возьмем некоторую точку земной поверхности M , лежащую под географической широтой φ и долготой ψ , отсчитываемой от какого-либо определенного начального меридиана. Отвлекаясь от неровностей и неправильностей земной поверхности, мы предположим, что она всюду горизонтальна. Пусть плоскость NN' представляет собой кажущийся горизонт и Z — зенит точки наблюдения M (рис. 2). Если Солнце находится в точке S небесной сферы, то угол, стягиваемый дугой ZS , представляет *зенитное расстояние* Солнца и равен углу падения солнечных лучей на земную поверхность.

Расстояние точки M от Солнца можно без большой ошибки положить равным ρ — расстоянию центра Земли от Солнца. Поэтому в точке M на земную поверхность падает количество тепла, равное

$$\frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2} \cos z, \quad (3)$$

причем z равно зенитному расстоянию Солнца, а ρ — расстоянию от этого светила до Земли в данный момент.

Для того чтобы математически рассчитать распределение солнечной энергии по земной поверхности, мы должны представить $\frac{dW}{dt}$ в функции от φ и ψ . Продолжим земную ось до ее пересечения с небесной сферой в точке N , плоскость земного экватора — до пересечения его с той же сферой по кругу небесного экватора AA' .

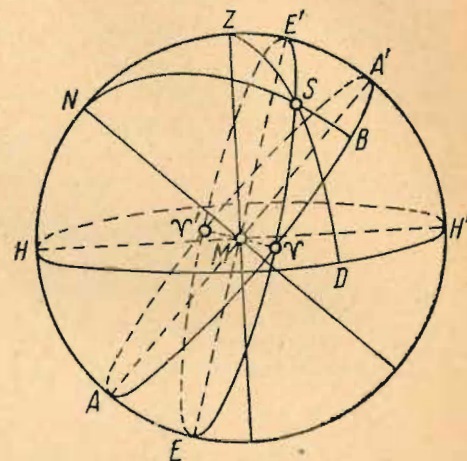


Рис. 2.

Большой круг небесной сферы $HNZH'A$, лежащий в плоскости чертежа, представляет собой меридиан данной точки M ; угловая высота полюса N над горизонтом, измеряемая дугой NH , равна географической широте места φ , и поэтому $\text{arc } NZ = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Если провести через северный небесный полюс N и через центр Солнца S большой круг NSB , то дуга BS этого круга называется *склонением* Солнца (δ), а сферический угол ZNS — *часовым углом* Солнца (ω).

В сферическом треугольнике NSZ , таким образом, будет

$$\text{arc } NS = \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \text{arc } ZS = z, \quad \text{arc } ZN = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \sphericalangle ZNS = \omega,$$

и мы имеем равенство:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega. \quad (4)$$

Следовательно:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega). \quad (5)$$

Написанное выше равенство справедливо только для положительных значений $\frac{dW}{dt}$, т. е. до тех пор, пока $z < \frac{\pi}{2}$. В тот момент, когда Солнце опускается под горизонт точки M , т. е. его зенитное расстояние становится равным $\frac{\pi}{2}$, поверхность Земли в точке M перестает получать солнечное тепло. Поэтому для всех значений переменных, которые дают $\frac{dW}{dt} < 0$, мы полагаем $\frac{dW}{dt} = 0$; функция $\frac{dW}{dt}$ оказывается, таким образом, разрывной, о чем мы не должны забывать¹⁾.

Обозначив через ω_0 часовой угол Солнца в данный момент на нулевом меридиане и считая, что долгота увеличивается с запада на восток так что

$$\omega = \omega_0 + \psi, \quad (6)$$

мы получим

$$\frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2} [\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (\omega_0 + \psi)]. \quad (7)$$

Это уравнение дает нам закон распределения облучения по земной поверхности, если считать в нем φ и ψ переменными.

Полагая

$$\omega_0 + \psi = \psi_1, \quad (8)$$

т. е. отсчитывая географическую долготу от того меридиана, в плоскости которого находится Солнце, мы получим

$$\frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \psi_1). \quad (9)$$

¹⁾ Точнее, функция $\frac{dW}{dt}$ непрерывна, а ее производные разрывны при $\cos z = 0$. Прим. перев.

Облучение достигает своего максимального значения $\frac{J_0}{\rho^2}$ в той точке земной поверхности, в которой одновременно $\cos \psi_1 = 1$ и $\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta = \cos (\varphi - \delta) = 1$.

Эта точка, в зените которой как раз находится Солнце, имеет координаты $\psi_1 = 0$, $\varphi = \delta$.

Облучение равно нулю для всех значений φ и ψ_1 , которые удовлетворяют уравнению

$$\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \psi_1 = 0$$

или

$$\cos \psi_1 = -\text{tg } \varphi \text{ tg } \delta. \quad (10)$$

Отвлекаясь от эллипсоидальной формы Земли и считая ее правильным шаром, легко видеть, что это уравнение удовлетворяется для всех точек того круга, в котором солнечные лучи касаются земного шара. Так как размеры земного шара и Солнца очень малы по сравнению с взаимным расстоянием этих тел, то мы можем считать все солнечные лучи, падающие на Землю, параллельными; тогда уравнение (10) будет уравнением большого круга, полюсом которого служит упомянутая точка $\psi_1 = 0$, $\varphi = \delta$. Этот круг отделяет полностью облучаемую половину земной поверхности от необлучаемой, и мы его можем поэтому назвать *пограничным кругом облучения*.

Плоскость этого круга является ортогональной проекцией всего облучаемого полушария на эту плоскость, и общее количество получаемого Землей облучения, которое мы обозначим через J_z , будет равно площади этого круга, умноженной на протекающий через нее поток энергии J . Обозначая через r радиус Земли, имеем

$$J_z = \frac{J_0}{\rho^2} \pi r^2. \quad (11)$$

Деля это выражение на величину поверхности земного шара $4\pi r^2$, мы получим *среднее* облучение земной поверхности:

$$J_m = \frac{1}{4} \frac{J_0}{\rho^2}. \quad (12)$$

Только когда Солнце находится в плоскости экватора, т. е. когда $\delta = 0$, пограничный круг проходит через оба земных полюса. В этот момент облучение поровну распределяется между северным и южным полушариями. Обычно же последние получают неодинаковые количества тепла. *Полное облучение* обоих этих полушарий, которое мы будем обозначать соответственно через J_n и J_s , легко вычислить.

Пусть круг $ANA'S'$ (рис. 3) представляет собой тот земной меридиан, в котором в данный момент находится Солнце; пусть N — север-

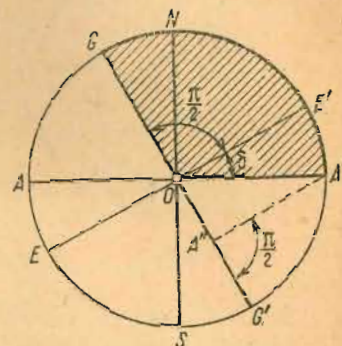


Рис. 3.

ный, а S — южный полюс Земли, AA' — линия пересечения плоскости экватора с плоскостью чертежа. Пусть солнечные лучи падают по направлению $E'E$ так, что угол $A'OE'$ равен склонению δ . Тогда диаметр GG' , перпендикулярный к EE' , будет линией пересечения пограничного круга с плоскостью чертежа. Заштрихованный сектор $GOA'E'NG$ является ортогональной проекцией облучаемой части северного полушария на плоскость чертежа. Ортогональная проекция этой части на плоскость пограничного круга состоит из полукруга, совпадающего с северной половиной пограничного круга, и полуэллипса с большой полуосью r и малой полуосью $OA'' = r \sin \delta$. Площадь этой проекции равна, следовательно,

$$\frac{\pi}{2} r^2 + \frac{\pi}{2} r^2 \sin \delta.$$

Умножая ее на величину нормального к ней потока энергии J , мы получим искомую величину облучения в северном полушарии J_n . Таким образом (помним, кроме того, что $J_n + J_s = J_0$)

$$J_n = \frac{J_0}{\rho^2} \frac{\pi}{2} r^2 (1 + \sin \delta) \quad (13)$$

и

$$J_s = \frac{J_0}{\rho^2} \frac{\pi}{2} r^2 (1 - \sin \delta). \quad (14)$$

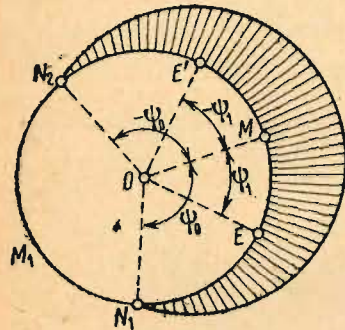


Рис. 4.

Уравнение (9) дает также распределение облучения вдоль какой-либо параллели φ , если в этом уравнении считать переменным только ψ_1 . При этом ψ_1 представляет собой тот угол, который составляет радиус-вектор рассматриваемой точки E с радиусом OM (рис. 4). M есть та точка, в меридиане которой находится в данный момент Солнце. Из (9) следует, что облучение в двух каких-либо точках параллели, симметричных относительно M , одинаково. Центральные углы ψ_0 и $-\psi_0$ точек N_1 и N_2 , в которых облучение равно нулю, получают из уравнения

$$\cos \psi_0 = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta. \quad (15)$$

Дуга $N_1M_1N_2$ нашей параллели не облучается вовсе.

В дальнейшем для нас будет очень важно понятие *среднего облучения на данной параллели* (в данный момент). Эту величину, которую мы обозначим через ω , можно вычислить следующим образом.

Площадь очень узкой полосы земной поверхности, заключенной между параллелями φ и $\varphi + \Delta\varphi$, равна $df = 2\pi r^2 \cos \varphi d\varphi$, и солнечное излучение, падающее на элемент этой полосы, заключенный между меридианами ψ и $\psi + \Delta\psi$, равно $\frac{dW}{dt} r^2 \cos \varphi d\varphi d\psi$. Полное облучение, получаемое этой полосой, равно

$$r^2 \cos \varphi d\varphi \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{dW}{dt} d\psi,$$

а среднее облучение ω можно вычислить, деля предыдущее выражение на площадь df . Таким образом

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{dW}{dt} d\psi.$$

Подставив на место $\frac{dW}{dt}$ его выражение (9) и проинтегрировав, получим

$$\omega = \frac{1}{\pi} \frac{J_0}{\rho^2} (\psi_0 \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \sin \psi_0). \quad (16)$$

Угол ψ_0 можно вычислить по формуле (15), так что величина ω зависит только от переменных во времени величин ρ и δ , т. е. от обращения Земли вокруг Солнца, но не зависит от суточного вращения Земли. То же относится, конечно, к величинам J_n и J_s .

§ 3. Суточный ход облучения. Квадратный сантиметр земной поверхности в точке, находящейся под широтой φ , получает в минуту количество тепла, равное, как было указано:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega). \quad (17)$$

Если мы желаем изучить суточный ход этой величины, то мы можем положить ρ и δ неизменными, так как их изменение в течение такого короткого интервала времени очень незначительно. Примем обозначения:

$$\frac{J_0}{\rho^2} \sin \varphi \sin \delta = A \quad \text{и} \quad \frac{J_0}{\rho^2} \cos \varphi \cos \delta = B. \quad (18)$$

Вследствие сказанного A и B — величины постоянные. Выражение для облучения единицы площади принимает вид

$$\frac{dW}{dt} = A + B \cos \omega, \quad (19)$$

в котором только часовой угол ω — переменная величина. *Суточный ход облучения*, таким образом, математически представляется простой тригонометрической функцией часового угла ω , в которой при этом ω может принимать только такие значения, которые дают $\frac{dW}{dt} > 0$, т. е. значения, заключенные между часовыми углами восхода и захода Солнца. Эти часовые углы вычисляются из уравнения

$$\cos \omega_0 = -\frac{A}{B} = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta. \quad (20)$$

Отрицательный корень $-\omega_0$ соответствует восходу, положительный $+\omega_0$ — заходу Солнца. Следовательно, уравнение (19) пригодно только для интервала $-\omega_0 < \omega < \omega_0$, а для всех остальных значений ω облучение равно нулю.

Таким образом геометрически суточный ход облучения представляется отрезком косинусоиды и отрезком прямой, совпадающей с осью абсцисс; последняя представляет облучение в тех точках, в которых косинусоида дает отрицательные значения ω . Середина интервала $(-\omega_0, +\omega_0)$ соответствует значению $\omega = 0$, т. е. моменту прохожде-

ния Солнца через меридиан, или истинному полудню. Средние значения ρ и δ за этот интервал совпадают поэтому с их значениями в истинный полдень; следовательно, эти последние могут быть подставлены в выражения для A и B .

Астрономические ежегодники, наряду с величинами ρ и δ для каждого среднего полудня центральных обсерваторий, содержат также часовые изменения этих величин, так что в случае необходимости можно принять во внимание и изменения величин A и B в течение дня.

Вследствие вращения земного шара вокруг оси небесная сфера вращается по отношению к наблюдателю в точке M с постоянной скоростью с востока на запад вокруг оси мира. Это движение называется суточным вращением небесного свода. Вследствие этого часовой угол Солнца непрерывно изменяется. Величина ω зависит также и от годового движения Солнца, о котором речь будет ниже. Однако эта зависимость может быть полностью учтена при введении *истинного солнечного времени*. Истинным солнечным временем t_w называется точное значение часового угла Солнца, выраженное в единицах времени. Обозначая интервал в $24^h = 1440^m$ через τ , имеем

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} t_w \quad (21)$$

и суточный ход облучения тогда можно представить в виде

$$\frac{dW}{dt} = A + B \cos \frac{2\pi}{\tau} t_w \quad (22)$$

Если нужно представить этот суточный ход в функции *среднего солнечного времени* t , то необходимо принять во внимание, что

$$t_w = t - E, \quad (23)$$

где E — так называемое *уравнение времени*, таблицы которого тоже приводятся в астрономических ежегодниках.

Во всех приведенных уравнениях истинное и среднее солнечное время отсчитываются, конечно, от истинного и среднего полудня.

§ 4. Суточные количества радиации. Суточным количеством радиации (суточными суммами тепла) мы назовем то количество, которое падает в течение дня на единицу облучаемой поверхности в данной точке; обозначим его через W . Вследствие уравнения (23) $\frac{dt_w}{dt} = 1 - \frac{dE}{dt}$; так как мы можем пренебречь малыми по сравнению с единицей изменениями уравнения времени, то $\frac{dt_w}{dt} = 1$. Тогда $\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dt_w} \frac{dt_w}{dt} = \frac{dW}{dt_w}$ и, принимая во внимание (21),

$$dt_w = \frac{\tau}{2\pi} d\omega.$$

Таким образом $\frac{dW}{dt} = \frac{2\pi}{\tau} \frac{dW}{d\omega}$, т. е. выражение (19) дает

$$dW = \frac{\tau}{2\pi} (A + B \cos \omega) d\omega. \quad (24)$$

Таблица 1
Суточные суммы тепла при отсутствии атмосферы
в $\frac{\text{кал}}{\text{см}^2}$ для $J_0 = 2 \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{ мин}}$

Долгота Солнца	0°	22°30'	45°	67°30'	90°	112°30'	135°	157°30'	180°	202°30'	225°	247°30'	270°	292°30'	315°	337°30'
+90°	160	436	796	1030	1110	1075	789	431	158	7	25	74	51	75	25	7
+80°	316	436	772	1014	1093	1010	777	431	312	133	150	210	181	211	151	135
+70°	461	541	834	963	1043	963	765	535	455	281	295	359	327	361	298	285
+60°	593	755	894	988	1020	983	826	648	586	47	442	507	480	447	432	432
+50°	707	832	938	1002	1022	907	929	823	698	562	581	649	624	619	570	570
+40°	799	892	958	997	1005	990	949	882	789	683	666	771	756	712	691	691
+30°	867	922	952	964	964	959	944	911	837	783	706	813	820	820	820	820
+20°	909	925	921	908	900	904	913	914	898	861	813	877	869	881	905	924
+10°	923	900	863	829	814	825	855	890	912	913	956	960	962	965	965	949
-10°	867	773	680	611	585	608	674	764	857	935	989	1019	1030	1024	998	946
-20°	799	674	560	479	450	477	555	666	789	904	994	1052	1073	1057	1008	915
-30°	707	555	426	339	306	388	422	549	698	844	973	1059	1092	1064	982	854
-40°	593	421	285	199	170	198	282	417	586	766	929	1045	1089	1050	937	775
-50°	461	277	144	70	48	70	143	274	456	664	866	1018	1078	1023	873	672
-60°	316	131	24	0	0	0	24	170	312	548	802	1024	1114	1059	809	556
-70°	160	7	0	0	0	0	0	7	158	442	814	1073	1167	1078	821	447
-80°	0	0	0	0	0	0	0	0	0	442	826	1089	1185	1095	834	447
-90°	0	0	0	0	0	0	0	0	0	442	826	1089	1185	1095	834	447
Дата 1930 мировое время	21 III	13 IV	6 V	29 V	22 VI	15 VII	8 VIII	31 VIII	23 IX	16 X	8 XI	30 XI	22 XII	13 I	4 II	26 II

Интегрируя это выражение от $-\omega_0$ до $+\omega_0$, мы получим суточное количество радиации:

$$W_\tau = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} (A + B \cos \omega) d\omega. \quad (25)$$

Проведя интегрирование и учитывая выражение (18), имеем

$$W_\tau = \frac{\tau}{\pi} \frac{J_0}{\rho^2} (\omega_0 \sin \varphi \sin \delta + \sin \omega_0 \cos \varphi \cos \delta); \quad (26)$$

при этом в силу соотношения (20)

$$\cos \omega_0 = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta. \quad (27)$$

Последние две формулы представляют суточное количество радиации для данной широты φ и склонения δ .

Для тех географических широт, где Солнце в рассматриваемый день не заходит, т. е. в случае, если формула (27) не дает действительных значений для ω_0 , надо положить $\omega_0 = \pi$ и, следовательно:

$$W_\tau = \tau \frac{J_0}{\rho^2} \sin \varphi \sin \delta. \quad (28)$$

Приводимая на стр. 15 табл. 1 дает суточные количества солнечной радиации для каждого десятого градуса широты и для 16 дней в году.

К данным этой таблицы мы вернемся позднее.

§ 5. Годовой ход облучения Земли. При изучении хода облучения Земли в течение интервалов времени, более длинных, чем день, мы уже

не можем считать ρ и δ постоянными, ибо именно их изменения обуславливают годовой ход облучения и служат причиной смены времен года. Поэтому мы должны прежде всего обратить внимание на эти изменения. В предыдущем параграфе, изучая суточный ход радиации, мы поместили Землю в центре небесной сферы, как это принято в сферической астрономии; то же самое мы сделаем и теперь. Пусть эллипс $PMAM'$ (рис. 5) представляет годовую траекторию Солнца относительно Земли, которая занимает один из фокусов эллипса T . Ближайшая к Земле точка орбиты солнца называется *перигеем*, противоположная точка A — *апогеем*.

Если Солнце в данный момент находится в точке M орбиты, то угол PTM , образуемый радиусом-вектором $TM = \rho$ с большой осью эллипса, называется *истинной аномалией* Солнца. Этот угол мы обозначим через ν , большую полуось эллипса — через a , малую полуось — через b , затем численный *эксцентриситет* эллипса — через e . Тогда

орбиты Солнца в полярных координатах примет вид

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + e \cos \nu}, \quad (29)$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (30)$$

Если все длины измерять большой полуосью земной орбиты, как ранее, то $a = 1$ и, следовательно:

$$\rho = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \nu}. \quad (31)$$

Проекция кажущегося пути Солнца из точки наблюдения M на небесную сферу называется *эклиптикой* (большой круг ESE' на рис. 2).

Этот круг образует с небесным экватором AA' сферический угол $B\Upsilon S$, называемый *наклоном эклиптики*. Этот угол, который мы будем обозначать через e , равен углу между земной осью и нормалью к плоскости ее орбиты, называемому *наклоном земной оси*.

Ось вращения Земли и плоскость земной орбиты сохраняют свое положение в пространстве неизменным (отвлекаясь от тех очень медленных и незначительных изменений, о которых речь будет позднее), так что можно считать, что круги AA' и EE' занимают одно и то же положение на небесной сфере в течение всего года. Когда Солнце находится в точках Υ и Υ' (рис. 2), то на всей Земле продолжительность дня и ночи одинакова; поэтому точки Υ и Υ' , в которых пересекаются экватор и эклиптика, называются *точками равноденствия*, а линия, их соединяющая, — *равноденственной линией*.

Точка Υ , в которой Солнце пересекает экватор, переходя из южного полушария небесной сферы в северное, называется *точкой весеннего равноденствия*, точка Υ' — *точкой осеннего равноденствия*.

Точки эклиптики σ и σ' , удаленные от равноденственных точек на 90° , называются *точками летнего* (в северном полушарии небесной сферы) и *зимнего* (в южном полушарии) *солнцестояния*.

Дуга эклиптики, заключенная между точкой весеннего равноденствия и положением Солнца на орбите в некоторый момент, называется *истинной долготой Солнца*; мы будем обозначать ее через λ .

Из сферического треугольника ΥBS (рис. 2), в котором угол при B прямой и $\arcsin \Upsilon B = i$, $\arcsin BS = \delta$, $\sphericalangle B\Upsilon S = e$, следует:

$$\sin \delta = \sin i \sin \lambda. \quad (32)$$

Время обращения Солнца по большому кругу ESE' небесной сферы называется *сидерическим*, или *звездным*, *годом*; этот интервал времени, равный, очевидно, периоду обращения Земли вокруг Солнца, мы будем обозначать через T .

Время, разделяющее два последовательные прохождения Солнца через точку весеннего равноденствия, называется *тропическим годом*. Ввиду того что точка Υ медленно изменяет свое положение, о чем мы будем подробно говорить ниже, тропический год на $20^m 23^s$ короче

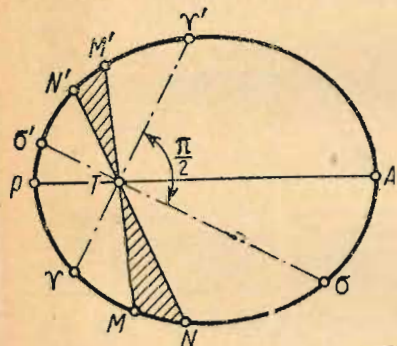


Рис. 5.

сидерического. При изучении годового хода облучения небольшая разница не будет иметь для нас никакого значения.

Если Солнце в момент весеннего равноденствия находится в своей относительной орбиты (рис. 5) и линия $\Upsilon\Upsilon'$ является денственной линией, то угол $PT\Upsilon$ называется *аномалией точки а. него равноденствия*. Мы будем обозначать его через ν_0 . Проведя прямую $\sigma\sigma'$, перпендикулярную $\Upsilon\Upsilon'$, получим точки σ и σ' летнего и зимнего солнцестояния.

Так как угол ΥTM равен истинной долготе Солнца, то

$$\nu = \nu_0 + \lambda. \quad (33)$$

Время, в течение которого Солнце проходит дугу $\Upsilon\sigma$ своей орбиты, называется *астрономической весной* северного полушария. В этот период λ изменяется от 0 до 90° и по (32) склонение увеличивается от 0° до своего максимального значения ϵ .

Во время *астрономического лета* северного полушария Солнце проходит дугу $\sigma\Upsilon'$ (между $\lambda=90^\circ$ и $\lambda=180^\circ$) и δ уменьшается от ϵ до 0°.

Во время *астрономической осени* того же полушария Солнце проходит дугу $\Upsilon'\sigma'$ (между $\lambda=180^\circ$ и $\lambda=270^\circ$) и δ изменяется от 0° до $-\epsilon$.

Наконец, во время *астрономической зимы* того же полушария Солнце проходит дугу $\sigma'\Upsilon$ (между $\lambda=270^\circ$ и $\lambda=360^\circ$) и δ возрастает от $-\epsilon$ до 0°.

Астрономические весна, лето, осень и зима южного полушария соответствуют квадрантам $\Upsilon'\sigma'$, $\sigma'\Upsilon$, $\Upsilon\sigma$ и $\sigma\Upsilon'$ пути Солнца.

Согласно второму закону Кеплера при движении Солнца его радиус-вектор в равные времена описывает равные площади, т. е. секториальная скорость $\frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\lambda}{dt}$ остается постоянной.

В течение года радиус-вектор опишет всю площадь эллипса, равную πab , так что упомянутая секториальная скорость равна

$$\frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{ab\pi}{T}.$$

Так как за единицу измерения всех величин мы принимаем a , то, имея в виду (30), получим

$$\frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\pi}{T} \sqrt{1 - e^2}. \quad (34)$$

Равенство (32) дает зависимость между λ и δ , формулы (31) и (33) устанавливают связь между λ и ρ , и, наконец, (34) выражает эти две последние величины в функции t .

С возрастанием долготы Солнца λ изменяются значения ρ и δ , следовательно, непрерывно изменяются суточные количества радиации. Числа табл. 1 дают нам наглядное представление об этих изменениях, тем более, что при ее составлении были взяты различные склонения так, что они соответствуют интервалам долготы Солнца в 22°30'. Поэтому мы прежде всего обратимся к этой таблице.

Нанесем на ось AB (рис. 6) долготы Солнца, на ось AD — географические широты и по направлению третьей оси, перпендикулярной к плоскости четырехугольника $ABCD$, — соответствующие суточные количества солнечной радиации W_t . Через концы отрезков, изображающих эти количества, проведем поверхность, форма которой дает наглядное представление о зависимости суточных количеств радиации от обеих переменных φ и λ (рис. 6).

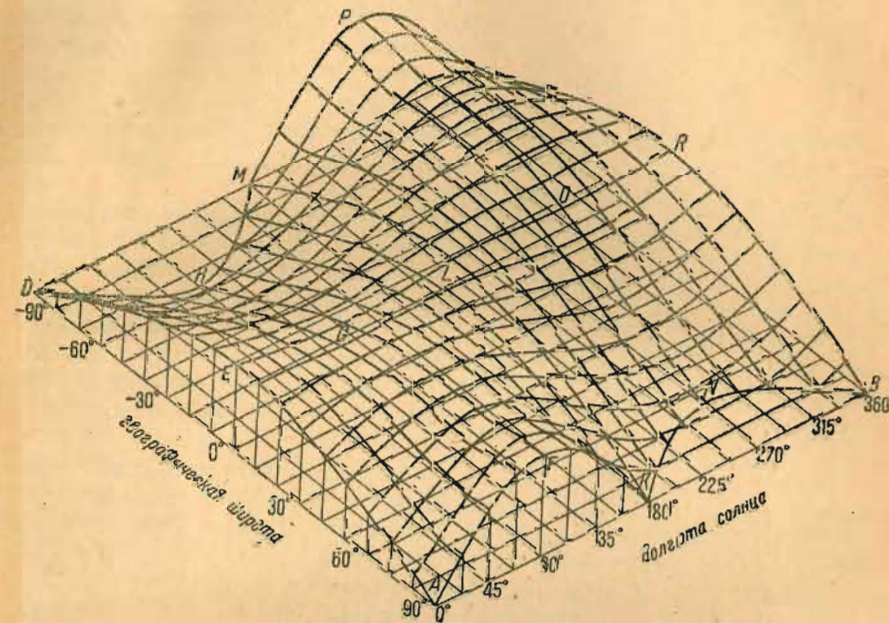


Рис. 6.

Для $\lambda=0$, т. е. в тот момент, когда Солнце находится в точке весеннего равноденствия, легко найти из (26) и (27), подставляя туда $\delta=0$ из (32), что

$$W_t = \frac{\pi}{T} \frac{J_0}{\rho^2} \cos \varphi,$$

т. е. линия AED является отрезком косинусоиды. В этот момент количество радиации, получаемой за сутки той или иной точкой земной поверхности, пропорционально косинусу широты, достигая максимума на экваторе и обращаясь в нуль на полюсах.

С возрастающей долготой Солнца эта простая закономерность усложняется: около южного полюса появляется неограниченный сегмент, размеры которого возрастают вплоть до момента летнего солнцестояния северного полушария; область максимальных количеств радиации смещается от экватора к северу и количество радиации, получаемое северным полюсом, быстро увеличивается. В околополярной зоне, где

в это время Солнце не заходит, суточное количество радиации на основании (28) и (32) равно

$$W_{\tau} = \tau \frac{J_0}{\rho^2} \sin \varphi \sin \epsilon (\sin \lambda)$$

т. е. это количество на полюсе больше, чем в других точках околополярной зоны. Таким образом на полюсе образуется вторичный максимум облучения, отделенный от основного небольшим минимумом. Соответственно, изображающая поверхность на рис. 6 имеет вблизи линии AFK небольшое углубление, в котором расположен минимум облучения, который к моменту летнего солнцестояния располагается дальше всего от полюса. 25 мая северный полюс получает больше солнечной радиации, чем какая-либо другая точка земного шара, и полярный максимум становится абсолютным максимумом, в то время как экваториальный максимум, сместившись к этому моменту до 36° с. ш., становится вторичным максимумом.

При $\lambda = 90^\circ$, т. е. в момент летнего солнцестояния северного полушария, распределение суточных количеств радиации изображается линией FGH . Северный полюс достигает максимума облучения, получая ежедневно 1110 кал, в то время как во вторичном максимуме, под широтой $43^\circ 33' 34''$, приход тепла равен 1023 кал. Минимум в северном полушарии находится под широтой $61^\circ 52' 16''$; здесь мы имеем приход тепла 1008 кал. В южном полушарии облучение быстро уменьшается к югу, обращаясь в нуль внутри южного полярного круга.

Начиная с этого момента, облучение северного полюса уменьшается, и область минимума приближается к полюсу с тем, чтобы достигнуть его в день осеннего равноденствия. 19 июля преобладание вновь переходит от полярного максимума к максимуму под 36° северной широты, причем этот последний начинает постепенно приближаться к экватору и достигает его в день осеннего равноденствия; к этому моменту неосвещенная область около южного полюса исчезает и распределение количества солнечной радиации по земной поверхности подчиняется простому закону косинуса, изображаемому кривой KLM . Косинусоида KLM , однако, не конгруэнтна с косинусоидой AED , так как величина радиуса-вектора ρ при $\lambda = 0$ и $\lambda = 180^\circ$ не одна и та же.

Затем максимум суточных количеств радиации продолжает перемещаться к югу; около северного полюса образуется, в свою очередь, неосвещенный сегмент, а количество радиации, получаемой южным полюсом, быстро увеличивается, так что здесь образуется вторичный максимум, который с 25 ноября по 17 января становится абсолютным максимумом. 17 января абсолютный максимум переходит к максимуму под 36° широты (на этот раз южной), постепенно приближаясь к экватору и достигая его к моменту весеннего равноденствия.

Минимум суточных количеств радиации в южном полушарии соответствует заметному углублению поверхности рис. 6; в момент декабрьского солнцестояния он занимает наиболее северное положение под $61^\circ 52' 16''$. К весеннему равноденствию он возвращается вновь на южный полюс.

Для $\lambda = 270^\circ$, т. е. для момента зимнего солнцестояния северного полушария, распределение суточных количеств радиации изображается кривой NOP , которая сходна с кривой HGF , но имеет заметно большие аппликаты. Суточное количество радиации достигает в этот момент на южном полюсе 1185 кал и в области вторичного максимума, под южной широтой $43^\circ 33' 34''$, 1094 кал. Объясняется это тем, что во время лета южного полушария Земля находится ближе к Солнцу, чем во время лета северного полушария. Вследствие этого летнее нагревание южного полушария сильнее, а зимнее — несколько слабее, чем нагревание северного полушария.

Линии пересечения поверхности рис. 6 с плоскостями $\varphi = \text{const}$ представляют собой волнообразные линии. При $\varphi = 0$ из (26) и (27) получаем

$$W_{\tau} = \tau \frac{J_0}{\rho^2} \cos \delta.$$

Если бы эксцентриситет земной орбиты был равен нулю, и следовательно, мы имели бы $\rho = \text{const}$, то это уравнение изображало бы волну с двумя одинаковыми максимумами при $\delta = 0$, т. е. приходящимися на моменты равноденствий, и с двумя минимумами при $\delta = \pm \epsilon$, во время солнцестояний. Эксцентricность земной орбиты приводит к тому, что оба максимума (также и оба минимума) не равны между собой и не совпадают по времени с указанными моментами. Так, например, второй максимум смещается с 23 сентября на 14 октября.

Начиная примерно с широты 15° , двойной периодичности уже не существует, и наблюдается простой годовой ход радиации с одним максимумом и одним минимумом. На полярных кругах минимум обращается в нуль; то же относится и к более высоким широтам, где в течение полярной ночи кривая радиации совпадает с осью абсцисс.

Для $\varphi = \pm 90^\circ$ (28) и (32) дают

$$W_{\tau} = \tau \frac{J_0}{\rho^2} \sin \epsilon \sin \lambda.$$

Так как значение ρ изменяется мало, то обе кривые AFK и MPC , выражаемые этим уравнением, почти не отличаются от простых синусоид; однако им не хватает половины, лежащей ниже оси абсцисс и заменяемой самой этой осью.

§ 6. Прерывность функции, изображающей суточный ход облучения. Устранение этой прерывности. Из уравнения (20) следует, что при соблюдении неравенств

$$-1 \leq \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta \leq +1 \quad (35)$$

ω_0 имеет действительное значение, т. е. Солнце в течение некоторого времени τ находится под горизонтом точки наблюдения. Склонение Солнца не может быть больше $+\epsilon$, и меньше $-\epsilon$, так что неравенства (35) удовлетворяются в течение всего года для тех широт, для которых

$$-\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right) \leq \varphi \leq +\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right). \quad (36)$$

Параллели

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \text{ и } \varphi = -\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$

(считая южные широты отрицательными) называются *полярными кругами*, а пояс земной поверхности, заключенный между ними, — *внеарктической зоной*. В этой последней Солнце восходит и заходит ежедневно.

Поверхности обоих сегментов, ограниченных полярными кругами, в любой точке которых удовлетворяется одно из неравенств:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &> \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \\ \text{либо } \varphi &< -\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right), \end{aligned} \right\} (37)$$

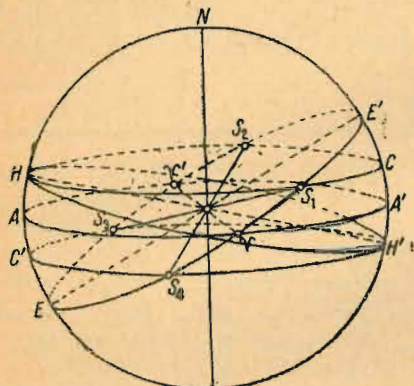


Рис. 7.

мы назовем *арктическими зонами*, распространяя термин „арктический“ и на южное полушарие. Суточный ход радиации в этих зонах существенным образом отличается от хода радиации внеарктических зон.

Чтобы сделать это положение более наглядным, взглянем на рис. 7. Пусть NN' — плоскость горизонта какой-либо точки земной поверх-

ности, широта которой удовлетворяет условиям (37), AA' — экватор, EE' — эклиптика, Γ — точка весеннего равноденствия. Пусть, далее, N — северный полюс неба, и, следовательно, дуга NN' меридиана $NNH'N$ в угловой мере равна географической широте местности φ . Проведем через точку севера H параллельный круг HS_1CS_2 , который пересечет эклиптику в точках S_1 и S_2 ; склонение последних равно $\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Как только Солнце при годовом движении достигнет точки S_1 , оно уже не будет более заходить. Так будет на всем протяжении отрезка $S_1E'S_2$ до тех пор, пока Солнце не дойдет до точки S_2 ; этот интервал времени называется *полярным днем*. Проведем затем через точку юга параллельный круг $H'S_4C'S_3$, который пересечет эклиптику в точках S_3 и S_4 . Склонение этих точек равно $\delta = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$; очевидно, что пока Солнце проходит путь S_3ES_4 , оно не появится над горизонтом. Это так называемая *полярная ночь*.

Когда Солнце находится на отрезках $S_4\Gamma S_1$ и $S_2\Gamma S_3$ своего пути, то восход и заход Солнца наблюдаются ежедневно.

Особенности арктических зон можно вывести также из уравнения (20), которое показывает, что ω_0 достигает величины π , т. е. полярный день начинается, когда

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta = 1, \quad (38)$$

и продолжается до тех пор, пока $\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta > 1$. Полярная ночь начинается тогда, когда ω_0 обращается в нуль, т. е. когда

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta = -1, \quad (39)$$

и продолжается до тех пор, пока $\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta < -1$.

Склонения точек S_1 , S_2 , S_3 и S_4 вычисляются из уравнений (38) и (39), которые можно соединить в одно:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \delta = 1.$$

Чтобы определить λ_1 , λ_2 , λ_3 и λ_4 — долготы этих точек, мы преобразуем предыдущее уравнение так:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = 1 + \operatorname{ctg}^2 \delta \text{ или } \sin^2 \delta = \cos^2 \varphi.$$

Помня (32), получаем

$$\sin^2 \lambda = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varepsilon}. \quad (40)$$

Четыре корня этого уравнения λ_1 , λ_2 , λ_3 и λ_4 , лежащие между 0 и 2π , представляют собой долготы точек S_1 , S_2 , S_3 и S_4 . При этом легко видеть, что $0 < \lambda_1 < \frac{\pi}{2}$; $\lambda_2 = \pi - \lambda_1$; $\lambda_3 = \pi + \lambda_1$; $\lambda_4 = 2\pi - \lambda_1$.

Уравнение (40), очевидно, изображает кривые DHM и KNB , вдоль которых поверхность рис. 6 пересекается с плоскостью $ABCD$.

Из (15) и (20) следует, что величины ψ_0 и ω_0 равны между собой, т. е. одновременно достигают значений π или 0. Поэтому рассматриваемая параллель в течение полярного дня освещена вся, а в течение полярной ночи целиком не видит Солнца.

Из всего сказанного ясно, что ход облучения $\frac{dW}{dt}$ для всех широт разрывный, ибо, как только Солнце исчезает под горизонтом, облучение обращается в нуль, но не может стать отрицательным. Поэтому если мы будем рассматривать ход облучения в течение любого интервала, более длинного, чем время пребывания Солнца над горизонтом, то мы должны принять во внимание, что функция $\frac{dW}{dt}$ разрывная. Это удобнее всего сделать следующим образом.

Пусть облучение как функция времени $\frac{dW}{dt}$ графически изображается кривой $abcdefghij$ (рис. 8). Эта линия составлена из гребней волн, соответствующих дневным часам, и отрезков прямых, лежащих на оси абсцисс и соответствующих ночному времени. И амплитуда и длина волн, точно так же как длины прямолинейных отрезков, изменяются от одной волны к другой, так как величины ρ и δ изменяются в течение года.

Если мы захотим вычислить количество радиации, которая падает на единицу поверхности в какой-нибудь точке за период, больший, чем одни сутки, то, учитывая разрывность функции $\frac{dW}{dt}$, мы должны будем взять сумму столько же интегралов, сколько дневных „волн“ захватит наш период в рассматриваемом месте земной поверхности.

Можно, однако, избежать этого суммирования, пользуясь величиной ω , определенной равенством (16). Эта величина только тогда

равна нулю, когда соответствующая параллель круглые сутки остается неосвещенной, чего во внearктической зоне не бывает никогда, а в арктической бывает один раз в год — во время полярной ночи. Вследствие этого величина w , как функция времени, может быть представлена непрерывной кривой $klmno$ (рис. 8).

Между обеими кривыми, изображенными на рис. 8, существует замечательная зависимость. Заштрихованная площадь одной волны def представляет собой, очевидно, количество лучистой энергии, которое получает рассматриваемая единица поверхности на широте φ в течение дня. Эту величину, которую можно вычислить с помощью равенств (26) и (27), мы обозначали W_τ , причем принимали, что величины ρ и δ , входящие в эти равенства, относятся к моменту истинного полудня рассматриваемого дня.

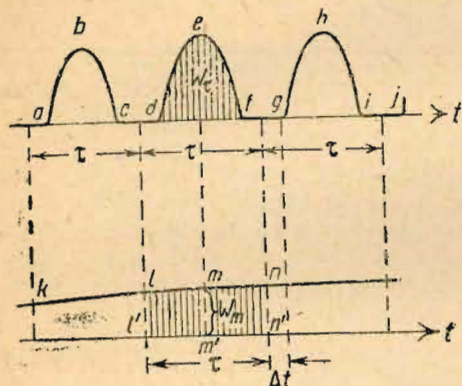


Рис. 8.

Сравнивая оба равенства (26) и (27) с равенствами (16) и (15), дающими среднее облучение w на широте φ , мы увидим, что W_τ равно интервалу времени τ , умноженному на среднее облучение w на широте φ в истинный полдень давнего дня. Последнее равно высоте той ординаты $m'm$ линии $klmno$, которая делит пополам период τ , считаемый от полуночи до полуночи. Обозначая эту ординату через w_m , имеем

$$W_\tau = \tau w_m. \quad (41)$$

Мы предполагаем, что изменения ρ и δ в течение дня так невелики, что для вычисления W_τ можно исходить из средних суточных значений. Вследствие этого площадь $l'n'nl$ (фиг. 8) можно считать равной τw_m или, на основании (41), равной W_τ . Таким образом между линиями $abcdefghij$ и $klmno$ существует связь, выражающаяся в том, что площади, ограниченные этими кривыми и соответствующими осями абсцисс и заштрихованные на рисунке, равны между собой. Эти площади захватывают интервал времени от полуночи до полуночи.

Для того чтобы вычислить количество радиации, полученное единицей поверхности за несколько дней, например, за m дней, можно, вместо того чтобы интегрировать прерывную функцию $\frac{dW}{dt}$, интегрировать в соответствующем интервале времени функцию w . Так:

$$W_m = \int_{+t_1}^{t_2+m\tau} w dt. \quad (42)$$

При этом нижний предел t должен совпадать с полуночью. Если m — не целое число или интервал $m\tau$ начинается и кончается не в полночь, то написанное уравнение не будет строго точным, и рассматри-

ваемые площади, ограниченные кривыми $abcdefghij$ и $klmno$, могут сильно отличаться друг от друга. Это различие происходит от того, что площадь, ограниченная первой кривой, выражает приход радиации в определенной точке под широтой φ , в то время как площадь, ограниченная второй кривой, выражает среднее количество радиации, получаемой единицей поверхности, расположенной на параллели φ . В величине площади второй кривой, вычисляемой с помощью интеграла

$$W = \int_{t_1}^{t_2} w dt, \quad (43)$$

нивелировано неравномерное распределение солнечной радиации вдоль параллельного круга за период времени от t_1 до t_2 .

Эта неравномерность за короткие промежутки времени, очевидно, может быть весьма значительной. Так, например, в течение полусуток одна точка параллели может получить все суточное количество радиации, в то время как другая, диаметрально противоположная, остается совершенно необлученной. С увеличением интервала $t_2 - t_1$ эти расхождения уменьшаются (относительно), но даже в течение года облучение различных точек одной и той же параллели будет не вполне одинаково; это происходит от того, что год не заключает в себе целого числа суток ($365\frac{1}{4}$). Добавочные 6 часов в одних точках приходятся на день, а в других на ночь, и в результате первые получают больше радиации, чем вторые. Кроме того, одно и то же место земной поверхности в различные годы получает различное количество радиации, так как в одном году добавочные часы придутся на день, а в другом — на ночь.

В величинах w и W все эти отклонения вдоль одной и той же параллели и для различных лет выравнены; первая из этих величин представляет *средний годовой ход облучения* единицы поверхности на широте φ — ход, в котором не сказываются суточные колебания облучения, вызываемые вращением Земли вокруг ее оси. Величина же W представляет собой *среднее количество солнечной радиации*, получаемое единицей поверхности за период от t_1 до t_2 .

§ 7. Разложения в ряды. Для того чтобы вычислить интеграл (43), необходимо выразить обе переменные w и t в функции одной и той же независимой переменной. Для этого мы воспользуемся некоторыми разложениями в ряды, которые рассмотрим здесь.

Положив для краткости

$$\operatorname{tg} \varphi = n, \quad (44)$$

$$\sin \varepsilon = k, \quad (45)$$

мы получим уравнения (16) и (15) в виде

$$w = \frac{1}{\pi} \frac{J_0}{\rho^2} \cos \varphi (n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0), \quad (46)$$

$$\cos \psi_0 = -n \operatorname{tg} \delta. \quad (47)$$

Из этих уравнений следует

$$\sin \psi_0 = \sqrt{1 - n^2 \operatorname{tg}^2 \delta} = \sqrt{\frac{1 - (1 + n^2) \sin^2 \delta}{\cos^2 \delta}},$$

т. е.

$$\cos \delta \sin \psi_0 = \sqrt{1 - (1 + n^2) \sin^2 \delta},$$

или, вследствие (32) и (45),

$$\cos \delta \sin \psi_0 = \sqrt{1 - k^2 (1 + n^2) \sin^2 \lambda}. \quad (48)$$

Это выражение при любом λ может быть разложено в ряд по биномиальной формуле, если только

$$k^2 (1 + n^2) \leq 1,$$

т. е.

$$\sin^2 \varepsilon (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \leq 1,$$

или

$$\sin^2 \varepsilon \leq \cos^2 \varphi,$$

т. е.

$$-\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \leq \varphi \leq \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right),$$

иначе говоря, если рассматриваемая параллель (широта φ) не находится в арктической зоне.

Это разложение следующее:

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin \psi_0 &= 1 - \frac{1}{2} (1 + n^2) k^2 \sin^2 \lambda - \frac{1}{2^3} (1 + n^2)^2 k^4 \sin^4 \lambda - \\ &- \frac{1}{2^4} (1 + n^2)^3 k^6 \sin^6 \lambda - \frac{5}{2^7} (1 + n^2)^4 k^8 \sin^8 \lambda - \frac{7}{2^8} (1 + n^2)^5 k^{10} \sin^{10} \lambda - \\ &- \frac{3 \cdot 7}{2^{10}} (1 + n^2)^6 k^{12} \sin^{12} \lambda - \frac{3 \cdot 11}{2^{11}} (1 + n^2)^7 k^{14} \sin^{14} \lambda - \dots \quad (49) \end{aligned}$$

Из (47) следует

$$\psi_0 = \frac{\pi}{2} + \arcsin (n \operatorname{tg} \delta). \quad (50)$$

Выражение для ψ_0 может быть развернуто в ряд Маклорена, если только

$$-1 \leq n \operatorname{tg} \varphi \leq +1,$$

т. е. если мы не имеем дела с точками арктической зоны; это мы уже приняли ранее. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \frac{\pi}{2} + n \operatorname{tg} \delta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} n^3 \operatorname{tg}^3 \delta + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{3}{5} n^5 \operatorname{tg}^5 \delta + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{5}{7} n^7 \operatorname{tg}^7 \delta + \\ &+ \frac{1}{2^7} \cdot \frac{5 \cdot 7}{9} n^9 \operatorname{tg}^9 \delta + \frac{1}{2^8} \cdot \frac{7 \cdot 9}{11} n^{11} \operatorname{tg}^{11} \delta + \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{13} n^{13} \operatorname{tg}^{13} \delta + \dots \quad (51) \end{aligned}$$

Далее, из (32) и (45) следует, что

$$\operatorname{tg} \delta = \sqrt{\frac{\sin^2 \delta}{1 - \sin^2 \delta}} = k \sin \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{1}{2}} \quad (52)$$

и

$$\psi_0 \sin \delta = \psi_0 k \sin \lambda. \quad (53)$$

Подставляя выражение для $\operatorname{tg} \delta$ из (52) в (51) и полученное таким образом выражение ψ_0 в формулу (53), имеем

$$\begin{aligned} \psi_0 \sin \delta &= \frac{\pi}{2} k \sin \lambda + n k^3 \sin^2 \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} n^3 k^4 \sin^4 \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{3}{2}} + \\ &+ \frac{1}{2^3} \cdot \frac{3}{5} n^5 k^6 \sin^6 \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{5}{2}} + \\ &+ \frac{1}{2^4} \cdot \frac{5}{7} n^7 k^8 \sin^8 \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{7}{2}} + \\ &+ \frac{1}{2^7} \cdot \frac{5 \cdot 7}{9} n^9 k^{10} \sin^{10} \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{9}{2}} + \\ &+ \frac{1}{2^8} \cdot \frac{7 \cdot 9}{11} n^{11} k^{12} \sin^{12} \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{11}{2}} + \\ &+ \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{7 \cdot 3 \cdot 11}{13} n^{13} k^{14} \sin^{14} \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{13}{2}} + \\ &+ \dots \quad (54) \end{aligned}$$

Если теперь разложить выражения в скобках по формуле бинома, выписать на основании (49) и (54) значение $n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0$,

расположив его по степеням $\sin \lambda$, и положить

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{k^2}{2} (-1 + n^2), \\ a_2 &= \frac{k^4}{8} (-1 + 2n^2) + \frac{k^4}{24} n^4, \\ a_3 &= \frac{k^6}{16} (-1 + 3n^2 + n^4) + \frac{k^6}{80} n^6, \\ a_4 &= \frac{5k^8}{128} (-1 + 4n^2 + 2n^4) + \frac{k^8}{32} n^6 + \frac{5k^8}{896} n^8, \\ a_5 &= \frac{7k^{10}}{256} (-1 + 5n^2 + \frac{10}{3} n^4 + 2n^6) + \frac{5k^{10}}{256} n^8 + \frac{7k^{10}}{2304} n^{10}, \\ a_6 &= \frac{21k^{12}}{1024} (-1 + 6n^2 + 5n^4 + 4n^6) + \frac{k^{12}}{1024} (45n^8 + 14n^{10}) + \\ &\quad + \frac{21k^{12}}{11264} n^{12}, \\ a_7 &= \frac{33k^{14}}{2048} (-1 + 7n^2 + 7n^4 + 7n^6 + 5n^8) + \\ &\quad + \frac{7k^{14}}{2048} (11n^{10} + 3n^{12}) + \frac{33k^{14}}{26624} n^{14}, \end{aligned} \right\} (55)$$

то мы получим

$$n\psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0 = 1 + \frac{\pi}{2} nk \sin \lambda + \sum_m a_m \sin^{2m} \lambda. \quad (56)$$

Напомним, что все эти выкладки относятся к точкам внеарктической зоны; в противном случае нам придется вести отдельно вычисления для полярного дня, для полярной ночи и для переходных интервалов с ежедневным восходом и заходом Солнца. Во время полярной ночи, т. е. когда долгота Солнца λ удовлетворяет неравенству $\lambda_3 < \lambda < \lambda_4$, соответствующая параллель не освещена вовсе, $\psi_0 = 0$ и все выражение (56) обращается в нуль. Во время полярного дня, для долгот Солнца $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, вся параллель освещена одновременно, т. е. $\psi_0 = \pi$, и, следовательно:

$$n\psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0 = \pi n \sin \delta = \pi nk \sin \lambda. \quad (57)$$

В промежуточные периоды, т. е. когда $0 < \lambda < \lambda_1$, $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$, $\lambda_4 < \lambda < 2\pi$, как мы видели, условие

$$-1 < n \operatorname{tg} \delta < +1 \quad (58)$$

удовлетворяется. Можно доказать, что пока удовлетворяется условие (58), разложение (56) применимо и к арктическим зонам.

Действительно, разложение (56) законно, если [см. (48) и (50)]

$$k^2 (1 + n^2) \sin^2 \lambda < 1 \quad \text{и} \quad n^2 \operatorname{tg}^2 \delta < 1. \quad (59)$$

Последнее условие тождественно с (58) и действительно выполняется в данном случае. Преобразуя его в виде

$$n^2 < \operatorname{ctg}^2 \delta, \quad 1 + n^2 < 1 + \operatorname{ctg}^2 \delta = \operatorname{cosec}^2 \delta \quad (1 + n^2) \sin^2 \delta < 1,$$

мы видим, что на основании (32) и (45) условие (59) также выполняется, и разложение в ряд допустимо.

Таким образом мы рассмотрели все возможные случаи применения суммы (56).

Для того чтобы возможно было провести интегрирование, необходимо выразить входящие в (56) степени $\sin \lambda$ через косинусы кратных углов. Для этой цели мы применяем известную формулу

$$\begin{aligned} (-1)^m 2^{2m-1} \sin^{2m} \lambda &= \cos 2m\lambda - \binom{2m}{1} \cos (2m-2)\lambda + \\ &\quad + \binom{2m}{2} \cos (2m-4)\lambda - \dots + \binom{2m}{m} \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

и, полагая для сокращения

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \cos \varphi \left[1 + \frac{1}{2^2} \binom{2}{1} a_1 + \frac{1}{2^4} \binom{4}{2} a_2 + \frac{1}{2^6} \binom{6}{3} a_3 + \frac{1}{2^8} \binom{8}{4} a_4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^{10}} \binom{10}{5} a_5 + \frac{1}{2^{12}} \binom{12}{6} a_6 + \frac{1}{2^{14}} \binom{14}{7} a_7 - \dots \right], \\ b_1 &= \frac{\cos \varphi}{2} \left[a_1 + \frac{1}{2^2} \binom{4}{1} a_2 + \frac{1}{2^4} \binom{6}{2} a_3 + \frac{1}{2^6} \binom{8}{3} a_4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^8} \binom{10}{4} a_5 + \frac{1}{2^{10}} \binom{12}{5} a_6 + \frac{1}{2^{12}} \binom{14}{6} a_7 + \dots \right], \\ b_2 &= \frac{\cos \varphi}{2^3} \left[a_2 + \frac{1}{2^2} \binom{6}{1} a_3 + \frac{1}{2^4} \binom{8}{2} a_4 + \frac{1}{2^6} \binom{10}{3} a_5 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^8} \binom{12}{4} a_6 + \frac{1}{2^{10}} \binom{14}{5} a_7 + \dots \right], \\ b_3 &= \frac{\cos \varphi}{2^5} \left[a_3 + \frac{1}{2^2} \binom{8}{1} a_4 + \frac{1}{2^4} \binom{10}{2} a_5 + \frac{1}{2^6} \binom{12}{3} a_6 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^8} \binom{14}{4} a_7 + \dots \right], \\ b_4 &= \frac{\cos \varphi}{2^7} \left[a_4 + \frac{1}{2^2} \binom{10}{1} a_5 + \frac{1}{2^4} \binom{12}{2} a_6 + \frac{1}{2^6} \binom{14}{3} a_7 + \dots \right], \\ b_5 &= \frac{\cos \varphi}{2^9} \left[a_5 + \frac{1}{2^2} \binom{12}{1} a_6 + \frac{1}{2^4} \binom{14}{2} a_7 + \dots \right], \\ b_6 &= \frac{\cos \varphi}{2^{11}} \left[a_6 + \frac{1}{2^2} \binom{14}{1} a_7 + \dots \right], \\ b_7 &= \frac{\cos \varphi}{2^{13}} [a_7 + \dots], \end{aligned} \right\} (60)$$

получаем:

$$\begin{aligned} \cos \psi (n\psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0) &= b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda - \\ &\quad - b_1 \cos 2\lambda + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + b_4 \cos 8\lambda - \dots \end{aligned} \quad (61)$$

Значения коэффициентов b_0, b_1, b_2, \dots приведены в табл. 2 через каждые 5° широты до 75° широты включительно, причем для наклона эклиптики принято его современное значение

$$\varepsilon = 23^\circ 27' 30''.$$

Таблица 2
Числовые значения коэффициентов b_0, b_1, b_2, \dots

φ°	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
0	+0,9591	-0,0413	-0,0004	-0,0000				
5	+0,9558	-0,0407	-0,0004	-0,0000				
10	+0,9458	-0,0393	-0,0004	-0,0000				
15	+0,9293	-0,0369	-0,0004	-0,0000				
20	+0,9065	-0,034	-0,0003	-0,0000				
25	+0,8777	-0,0289	-0,0002	-0,0000				
30	+0,8429	-0,0232	-0,0001	+0,0000				
35	+0,8028	-0,0163	+0,0001	+0,0000				
40	+0,7577	-0,0081	+0,0002	+0,0000				
45	+0,7084	+0,0018	+0,0005	+0,0000				
50	+0,6558	+0,0133	+0,0009	+0,0000				
55	+0,6014	+0,0236	+0,0014	+0,0001	+0,0000			
60	+0,5455	+0,0477	+0,0024	+0,0002	+0,0000			
65	+0,4932	+0,0746	+0,0045	+0,0005	+0,0001	+0,0000		
70	+0,4540	+0,1223	+0,0123	+0,0024	+0,0005	+0,0002	+0,0000	
75	+0,5161	+0,3312	+0,1029	+0,0382	+0,0111	+0,0013	+0,0003	+0,0000

Как видно из табл. 2, ряд (61) очень быстро сходится.

§ 8. Количество радиации за произвольный отрезок времени. Согласно формулам (46) и (61) величина w , изображающая средний годовой ход облучения на широте φ , может быть представлена в виде ряда:

$$w = \frac{J_0}{\pi \rho^2} \left(b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \lambda \sin \varepsilon - b_1 \cos 2\lambda + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + b_4 \cos 8\lambda - + \dots \right). \quad (62)$$

Это выражение применимо во внеарктической зоне для всех долгот солнца λ , в арктической — только в периоды ежедневного восхода и захода солнца.

Для полярного дня это выражение на основании (46), (57), (44) и (45) мы должны заменить через

$$w = \frac{J_0}{\rho^2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda. \quad (63)$$

Величина w представляет собой среднее облучение в единицу времени. Вследствие этого количество радиации, которое получит единица поверхности на широте φ за интервал времени от t_1 до t_2 , будет равно

$$W = \int_{t_1}^{t_2} w dt,$$

причем, как это уже было показано, неравномерная освещенность различных точек параллели φ сглаживается. В это равенство мы должны подставить полученное ранее значение w из (62) или (63).

Если ввести вместо t переменную λ , т. е. вычислить количество радиации, получаемое единицей поверхности за время, в течение

которого Солнце пройдет отрезок своего пути от λ' до λ'' , то написанный выше интеграл значительно упростится. Мы получим

$$W = \int_{\lambda'}^{\lambda''} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda,$$

причем производная $\frac{dt}{d\lambda}$, деленная на знаменатель ρ^2 выражений (62) и (63), обращается в постоянную.

Действительно, в результате (34)

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{dt}{d\lambda} = \frac{T}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}},$$

и мы получаем для W следующие выражения:

$$W = \frac{T}{2\pi^2} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} \left(b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda - b_1 \cos 2\lambda + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + \dots \right) d\lambda,$$

$$W = \frac{T}{2\pi} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \sin \varphi \sin \varepsilon \int_{\lambda'}^{\lambda''} \sin \lambda d\lambda.$$

Интегрируя по λ , получим

$$W = \frac{T}{2\pi^2} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left[b_0 (\lambda'' - \lambda') - \frac{\pi}{2} \sin \varepsilon \sin \varphi (\cos \lambda'' - \cos \lambda') - \frac{b_1}{2} (\sin 2\lambda'' - \sin 2\lambda') + \frac{b_2}{4} (\sin 4\lambda'' - \sin 4\lambda') - + \dots \right] \quad (64)$$

и

$$W = \frac{T}{2\pi} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \sin \varphi \sin \varepsilon (\cos \lambda' - \cos \lambda''). \quad (65)$$

Выражение (65) применимо к полярному дню, выражение (64) — к остальным случаям.

Как мы видели из табл. 2, ряд (64) сходится очень быстро лишь для низких и средних широт; только для широт, больших 75° , необходимо было бы взять значительное число членов этого ряда. Но под этими широтами период с нормальной сменой дня и ночи так короток, что соответствующее количество получаемой радиации можно вычислить с помощью суточных сумм $W_{\text{с}}^{\text{д}}$.

Оба выражения (64) и (65) не изменятся, если мы заменим

$$\varphi \text{ на } -\varphi, \quad \lambda' \text{ на } \lambda' + \pi, \quad \lambda'' \text{ на } \lambda'' + \pi;$$

отсюда следует, что количество радиации, получаемое широтой φ за время, когда Солнце проходит дугу $\lambda' - \lambda''$ эклиптики, равно количеству радиации, получаемому широтой $-\varphi$ за время прохождения Солнцем дуги от $\lambda' + \pi$ до $\lambda'' + \pi$.

Если MN (рис. 5) представляет отрезок дуги $\lambda' - \lambda''$, то $M'N'$ является диаметрально противоположным отрезком $(\lambda' + \pi) - (\lambda'' + \pi)$.

Это положение справедливо для любой широты; отсюда следует, что в то время как Солнце описывает какой-либо отрезок своего годового пути MN , северное полушарие получает столько же радиации, сколько получает южное полушарие при прохождении Солнцем диаметрально противоположного отрезка $M'N'$ (см. рис. 5 на стр. 16).

Необходимо обратить внимание на то, что температурные условия обоих полушарий будут различны, несмотря на равенство вышеуказанных количеств радиации, так как при прочих равных условиях время, в течение которого Солнце проходит дуги MN и $M'N'$, согласно второму закону Кеплера будет неодинаково.

§ 9. Количества радиации в различные астрономические времена года. Для нас особенно интересны те количества радиации, которые получает какая-либо параллель в течение астрономических времен года.

Обозначим через W_I , W_{II} , W_{III} и W_{IV} количества радиации, которые получает единица площади под широтой φ в северном полушарии во время астрономических весны, лета, осени и зимы, и через

$$\overline{W}_I, \overline{W}_{II}, \overline{W}_{III} \text{ и } \overline{W}_{IV},$$

соответствующие количества для той же широты южного полушария во время астрономических весны, лета, осени и зимы северного полушария. Вследствие сказанного выше

$$W_I = \overline{W}_{III}, \quad W_{II} = \overline{W}_{IV}, \quad W_{III} = \overline{W}_I, \quad W_{IV} = \overline{W}_{II}. \quad (66)$$

Ход вычисления величины W_I будет различным в зависимости от того, принадлежит ли рассматриваемая широта к внеарктической зоне или к арктической. В первом случае мы должны подставить в формулу (64) $\lambda' = 0$, $\lambda'' = \frac{\pi}{2}$; тогда получим

$$W_I = \frac{T}{4\pi} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} (b_0 + \sin \varphi \sin \epsilon). \quad (67)$$

Во втором случае мы должны разбить сезон (астрономическую весну) на два периода с помощью корней уравнения (40). Для периода ежедневной смены дня и ночи можно тогда применить уравнение (64), а для полярного дня — уравнение (65). Облучение за период полярной ночи равно нулю. Таким образом мы получаем

$$W_I = \frac{T}{2\pi^2} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left(b_0 \lambda_1 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon \cos \lambda_1 - \frac{b_1}{2} \sin 2\lambda_1 + \right. \\ \left. + \frac{b_2}{4} \sin 4\lambda_1 - \frac{b_3}{6} \sin 6\lambda_1 + \dots - \dots \right). \quad (68)$$

Совершенно такие же выражения мы получим при вычислении величины W_{II} ($\lambda' = \frac{\pi}{2}$, $\lambda'' = \pi$); поэтому

$$W_{II} = W_I. \quad (69)$$

Значение W_{III} мы получим, подставляя $\lambda' = \pi$, $\lambda'' = \frac{3}{2}\pi$. Для внеарктической зоны оно равно

$$W_{III} = \frac{T}{4\pi} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} (b_0 - \sin \varphi \sin \epsilon), \quad (70)$$

и для арктической зоны равно

$$W_{III} = \frac{T}{2\pi^2} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left(b_0 \lambda_1 - \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon \cos \lambda_1 - \right. \\ \left. - \frac{b_1}{2} \sin 2\lambda_1 + \frac{b_2}{4} \sin 4\lambda_1 - \frac{b_3}{6} \sin 6\lambda_1 + \dots \right). \quad (71)$$

Эти же самые выражения получаются при вычислении значения W_{IV} ($\lambda' = \frac{3}{2}\pi$, $\lambda'' = 2\pi$); таким образом

$$W_{IV} = W_{III}, \quad (72)$$

и, как это легко видеть,

$$\overline{W}_{II} = \overline{W}_I, \quad \overline{W}_{IV} = \overline{W}_{III}. \quad (73)$$

Равенства (69), (70), (73) показывают, что количества радиации, получаемые во время астрономических весны и лета, одинаковы, так же как и количества радиации, получаемые во время осени и зимы (астрономических).

С помощью равенств (66), (69), (72) и (73) все восемь величин: W_I , W_{II} , W_{III} , W_{IV} , \overline{W}_I , \overline{W}_{II} , \overline{W}_{III} , \overline{W}_{IV} , могут быть выражены только через две величины из них; за таковые мы примем

$$W_s = 2W_I, \quad W_w = 2W_{III}. \quad (74)$$

Первая из этих величин представляет количество радиации, получаемое какой-либо широтой φ северного полушария в течение летнего полугодия (включающего весну и лето), а вторая — то же количество за зимнее полугодие (т. е. осень и зиму).

Обозначая те же величины для южного полушария, соответственно для его летнего и зимнего полугодий, через \overline{W}_s и \overline{W}_w , имеем

$$W_s = 2\overline{W}_{III} \text{ и } W_w = 2\overline{W}_I,$$

т. е.

$$\overline{W}_s = W_s \text{ и } \overline{W}_w = W_w. \quad (75)$$

Любая широта южного полушария получает за свое летнее полугодие столько же радиации, сколько та же широта северного полушария в течение своего летнего полугодия; то же относится и к зимним полугодиям.

Вычисление величин W_s и W_w ведется следующим образом: из (67) — (75) следует для всех широт:

$$W_s - W_w = \frac{T}{\pi} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \sin \varphi \sin \epsilon, \quad (76)$$

$$W_s + W_w = \frac{T}{\pi} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} b_0 \quad (77)$$

и

$$W_s + W_w = \frac{T}{\pi^2} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left(2b_0 \lambda_1 + \pi \sin \varphi \sin \epsilon \cos \lambda_1 - \right. \\ \left. - b_1 \sin 2\lambda_1 + \frac{b_2}{2} \sin 4\lambda_1 - \frac{b_3}{3} \sin 6\lambda_1 + \dots - \dots \right), \quad (78)$$

причем последнее уравнение относится к арктической зоне, а предпоследнее — к внеарктической.

Величина

$$W_T = W_s + W_w \quad (79)$$

представляет собой годовую сумму радиации.

Для обоих полюсов вследствие (40) $\lambda_1 = 0$ и

$$W_w = 0, \quad W_s = W_T = \frac{T}{\pi} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \sin \epsilon. \quad (80)$$

В табл. 3 даны полугодовые и годовые суммы радиации в калориях для различных широт. Каждый квадратный сантиметр, находящийся под определенной широтой, получает в течение летнего или зимнего полугодия указанное в табл. 3 количество радиации. График зависимости полугодовых сумм радиации от широты будет дан ниже (рис. 12).

Таблица 3
Количества солнечной радиации,
получаемые верхней границей
атмосферы

в $\frac{\text{кал}}{\text{см}^2}$ для $J_0 = 2 \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \cdot \text{мин}}$

Географическая широта	Летнее полугодие	Зимнее полугодие	Полный год
0°	160 580	160 580	321 160
5°	165 860	154 240	320 100
10°	169 950	146 800	316 750
15°	172 860	138 360	311 220
20°	174 570	128 980	303 550
25°	175 130	118 780	293 910
30°	174 450	107 800	282 250
35°	172 650	96 190	268 840
40°	169 710	84 030	253 740
45°	165 760	71 500	237 260
50°	160 860	58 740	219 600
55°	155 300	46 100	201 400
60°	149 080	33 620	182 700
65°	143 000	22 180	165 180
70°	138 700	13 440	152 140
75°	136 150	7 380	143 530
80°	134 520	3 240	137 760
85°	133 590	740	134 330
90°	133 300	0	133 300

Таблица 4
Количества солнечной радиации,
получаемые верхней границей
атмосферы (в канонических единицах:
 $J_0 = 1, T = 100\,000$)

Географическая широта	Летнее полугодие	Зимнее полугодие	Полный год
0°	15 266	15 266	30 532
5°	15 768	14 663	30 431
10°	16 156	13 956	30 112
15°	16 433	13 153	29 586
20°	16 596	12 262	28 858
25°	16 649	11 292	27 941
30°	16 584	10 248	26 832
35°	16 413	9 144	25 557
40°	16 134	7 988	24 122
45°	15 758	6 797	22 555
50°	15 292	5 581	20 876
55°	14 764	4 383	19 147
60°	14 172	3 196	17 368
65°	13 594	2 109	15 703
70°	13 186	1 278	14 464
75°	12 943	702	13 645
80°	12 788	308	13 096
85°	12 700	70	12 770
90°	12 672	0	12 672

При изучении вековых изменений количества радиации нам будет удобнее пользоваться так называемыми каноническими единицами. Соответствующие значения получаются, если положить в формулах (75)–(79) $J_0 = 1, T = 100\,000$; их мы найдем в табл. 4.

§ 10. Количества тепла, получаемые обоими полушариями в течение произвольного интервала времени. Если обозначить через dN

и dS количества тепла, получаемые северным и южным полушариями за время dt , то, принимая во внимание (13) и (14) получим,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2} \frac{\pi}{2} r^2 (1 + \sin \delta)$$

и

$$\frac{dS}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2} \frac{\pi}{2} r^2 (1 - \sin \delta).$$

В то время как Солнце в годовом движении проходит дугу от долготы λ' до долготы λ'' , северное и южное полушария получают соответственно

$$N = \int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{dN}{dt} \frac{dt}{d\lambda} d\lambda, \quad S = \int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{dS}{dt} \frac{dt}{d\lambda} d\lambda.$$

На основании (70), (32), (34) следует, что

$$N = \frac{T}{4} \frac{J_0 r^2}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} (1 + \sin \epsilon \sin \lambda) d\lambda,$$

$$S = \frac{T}{4} \frac{J_0 r^2}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} (1 - \sin \epsilon \sin \lambda) d\lambda,$$

и после интегрирования:

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{T}{4} \frac{J_0 r^2}{\sqrt{1-e^2}} [(\lambda'' - \lambda') - \sin \epsilon (\cos \lambda'' - \cos \lambda')], \\ S &= \frac{T}{4} \frac{J_0 r^2}{\sqrt{1-e^2}} [(\lambda'' - \lambda') + \sin \epsilon (\cos \lambda'' - \cos \lambda')]. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Весь земной шар за то же время получает количество тепла, равное

$$N + S = \frac{T}{2} \frac{J_0 r^2}{\sqrt{1-e^2}} (\lambda'' - \lambda'), \quad (82)$$

пропорциональное приращению долготы $\lambda'' - \lambda'$, в частности одинаковое для всех астрономических сезонов.

Обозначая через N_s и N_w количества тепла, которые получает северное полушарие в течение своего лета (λ от 0 до π) и своей зимы (λ от π до 2π), а через S_s и S_w — летнее и зимнее количества тепла, получаемые южным полушарием, мы легко найдем на основании (81), что

$$\left. \begin{aligned} N_s &= S_s = \frac{T}{4} \frac{J_0 r^2}{\sqrt{1-e^2}} (\pi + 2 \sin \epsilon), \\ N_w &= S_w = \frac{T}{4} \frac{J_0 r^2}{\sqrt{1-e^2}} (\pi - 2 \sin \epsilon). \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Отношение этих двух величин равно

$$\frac{N_s}{N_w} = \frac{S_s}{S_w} = \frac{\pi + 2 \sin \epsilon}{\pi - 2 \sin \epsilon}. \quad (84)$$

Из (82) следует, что в течение года земной шар получает количество тепла, равное $\frac{TJ_0r^2\pi}{\sqrt{1-e^2}}$.

Если мы это выражение разделим на $4\pi r^2$ (величину земной поверхности) и на время T , то получим *среднее годовое облучение земного шара, рассчитанное на единицу времени и на единицу поверхности*, J_m^T ; оно равно

$$J_m^T = \frac{J_0}{4\sqrt{1-e^2}}.$$

Очень часто считают само собой очевидным, что среднее облучение Земли равно среднему облучению J_m при среднем годовом расстоянии от Солнца $\rho=1$. Эта последняя величина в соответствии с (12) равна $\frac{J_0}{4}$ и была бы равна действительной средней J_m^T только в случае очень малого эксцентриситета.

§ 11. Неодинаковая длительность астрономических времен года. Астрономические времена года (сезоны) — это те интервалы времени, в течение которых Солнце в своем относительном движении проходит квадранты $\Upsilon\sigma$, $\sigma\Upsilon'$, $\Upsilon'\sigma'$ и $\sigma'\Upsilon$ (рис. 5). Так как площади секторов, соответствующих этим квадрантам, неодинаковы, а радиус-вектор Солнца описывает в равные промежутки времени равные площади, то, очевидно, что продолжительность времен года будет различной. Только в том случае, если равноденственная линия совпадает с большой осью PA относительной орбиты Солнца, продолжительность весны равна продолжительности зимы и лето длится столько же, сколько и осень. Если эти обе линии взаимно перпендикулярны, то длительности весны и лета равны, так же как длительности осени и зимы.

Здесь мы выведем формулы для продолжительности астрономического летнего (весна + лето) и зимнего (осень + зима) полугодий.

Обозначим эти величины соответственно через T_s и T_w для северного полушария и через \bar{T}_s и \bar{T}_w для южного; тогда, очевидно:

$$T_s + T_w = T, \quad (86)$$

$$\bar{T}_s = T_w, \quad \bar{T}_w = T_s, \quad (87)$$

так что собственно нам нужно определить только одну из указанных выше величин.

Пусть площадь всего эллипса $PMAM'P$ (рис. 5) равна F и площадь сектора $\Upsilon\sigma\Upsilon' = F_s$; тогда согласно второму закону Кеплера

$$T_s = \frac{F_s}{F} T;$$

далее:

$$F_s = \frac{1}{2} \int_{\nu_0}^{\nu_0+\pi} \rho^2 d\nu, \quad F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\nu,$$

где ν_0 означает аномалию точки весеннего равноденствия, и вследствие (29)

$$\rho^2 = \frac{b^4}{a^2} (1 + e \cos \nu)^{-2}.$$

Эксцентриситет земной орбиты e очень мал, так что, разлагая выражение в скобках по формуле бинома, можно отбросить все члены с e в степени выше первой. Тогда

$$T_s = \frac{\int_{\nu_0}^{\nu_0+\pi} (1 - 2e \cos \nu) d\nu}{\int_0^{2\pi} (1 - 2e \cos \nu) d\nu} T,$$

т. е.

$$T_s = \frac{T}{2} \left(1 + \frac{4e}{\pi} \sin \nu_0 \right), \quad (88)$$

и

$$T_w = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{4e}{\pi} \sin \nu_0 \right),$$

$$T_s - T_w = T \frac{4e}{\pi} \sin \nu_0. \quad (89)$$

В настоящее время $e = 0,01675$, а $T = 365,2422$ дня, и аномалия точки весеннего равноденствия равна $78^\circ 16'$; подставляя эти значения, получим $T_s = 186$ дн. 10 час. и $T_w = 178$ дн. 20 час., т. е. северное полушарие имеет лето, на 7 дн. 14 час. более длинное, чем зима, а южное, наоборот, зиму на 7 дн. и 14 час. более длинную, чем лето. Так как оба полушария в соответствующие полугодия получают одинаковое количество тепла, то, следовательно, в северном полушарии средний приход тепла за день летом меньше, чем в южном, а зимой, наоборот, больше.

§ 12. Вековые вариации земной оси и элементов земной орбиты. Небесная механика показывает, что как положение и форма орбиты Земли, так и ориентировка оси вращения Земли в мировом пространстве испытывают в течение веков медленные изменения. Совершенно ясно, что эти изменения должны влиять и на облучение Земли Солнцем.

Если бы Земля притягивалась только одним Солнцем, то по законам классической (но не релятивистской) механики ее орбита представляла бы в системе координат, связанной с Солнцем, неизменный и неподвижный эллипс; но благодаря притяжению других планет путь Земли вокруг Солнца является сложной кривой двойной кривизны, форму которой легче всего изучить, пользуясь введенным Эйлером и Лагранжем методом вариации постоянных и считая элементы земной орбиты, определяющие ее форму и положение, переменными, зависящими от времени. Вычислением этих изменений занимается теория возмущений.

Возмущения бывают двух родов: *периодические*, происходящие в чрезвычайно узких пределах, и *вековые*. Первые не оказывают почти никакого влияния на облучение Земли и поэтому для нас не представляет интереса. Что же касается вековых возмущений, то небесная механика показывает, что величина больших полуосей планетных орбит остается неизменной; следовательно, по третьему закону Кеп-

лера неизменна не только длина большой полуоси земной орбиты a , которую мы приняли за единицу, но и продолжительность времени обращения Земли вокруг Солнца T .

Наравне с вековыми возмущениями элементов земной орбиты для нас очень важны и колебания земной оси вращения. Причина этих колебаний заключается в следующем: если бы Земля представляла однородный или составленный из концентрических слоев шар, то сила притяжения Солнца и Луны, о которых только и может идти речь в этом случае, была бы всегда приложена к центру Земли, и ориентировка земной оси в пространстве была бы неизменной. В действительности же земной шар сплюснут, и равнодействующая сил притяжения не проходит через центр Земли, а дает составляющий момент, заставляющий земную ось поворачиваться так, что она медленно опи- сывает в пространстве конус. Это явление, рассматриваемое с гео- центрической точки зрения, назы- вается *прецессией*, или *предварением равноденствий*.

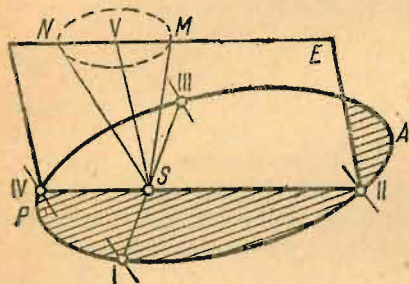


Рис. 9.

здесь S — центр Солнца и эллипс $PIAIII$ — земная орбита (относи- тельная траектория движения Земли вокруг Солнца).

Если провести через центр Солнца перпендикуляр SV к плоскости земной орбиты, направленный в северное полушарие небесной сферы, и линию, параллельную земной оси SN , то угол VSN будет равен углу наклона земной оси или ε — углу наклона эклиптики.

Плоскость, проходящая через две линии SV и SN , перпендикулярна к плоскости земной орбиты и пересекается с ней вдоль прямой $II-IV$. Легко видеть, что Земля проходит точки $II-IV$ в моменты летнего и зимнего солнцестояний, а точки $I-III$ пересечения земной орбиты с прямой $I-III$, перпендикулярной к $II-IV$, — в моменты равно- денствий.

Кардинальные точки I, II, III и IV делят орбиту Земли на четыре части, проходимые ею в течение астрономических весны, лета, осени и зимы. Отрезок $I-II-III$ соответствует северному зимнему T_w . Этим неравновеликим секторам соответствуют полугодия неодинаковой продолжительности.

Положение четырех кардинальных точек можно определить с по- мощью угла $IIISP$, где P — ближайшая к Солнцу точка земной орбиты, так называемый перигелий. Угол $IIISP$, который мы обозначим через Π , называется *долготой перигелия* по отношению к точке весеннего равно-

денствия, так как в момент этого последнего Солнце проектируется на небесную сферу в направлении IS . Если Земля находится в точке P , то говорят, что Солнце находится в этот момент в перигее. Угол $ASIII$, заключенный между прямыми PS и IS , представляет собой аномалию точки весеннего равноденствия v_0 ; из рис. 9 ясно, что

$$v_0 = 180^\circ - \Pi. \quad (90)$$

Равенства (88), (89) можно написать в такой форме:

$$T_s = \frac{1}{2} T \left(1 + \frac{4e}{\pi} \sin \Pi \right), \quad T_w = \frac{1}{2} T \left(1 - \frac{4e}{\pi} \sin \Pi \right), \quad (91)$$

$$T_s - T_w = T \frac{4e}{\pi} \sin \Pi. \quad (92)$$

Вследствие предварения равноденствий прямая SN , параллельная земной оси, описывает в течение примерно 26 000 лет круговой конус NSM . Осью этого конуса служит прямая SV и угол при вер- шине равен 2ε .

Вследствие такого движения земной оси плоскость E вращается вокруг прямой SV , и кардинальные точки движутся по земной орбите по направлению часовой стрелки. Если бы эллипс земной орбиты был неизменным, то эти точки описали бы его в 26 000 лет. Но вслед- ствие возмущающего влияния планет большая ось земной орбиты вращается навстречу кардинальным точкам, и последние заканчивают свой оборот от перигелия до перигелия в 21 000 лет. За этот период (величину которого надо рассматривать как приблизительную) угол Π увеличится на 360° .

Благодаря упомянутым возмущениям изменяется и форма земной орбиты и эксцентриситет e испытывает неправильные колебания со средним периодом около 92 000 лет; величина большой полуоси орбиты Земли при этом остается, как было уже указано, постоянной. Кроме того, плоскость земной орбиты тоже испытывает колебания в пространстве, так что ось вращения Земли наклоняется то больше, то меньше к этой плоскости. Вместе с этой плоскостью изменяется и ориентировка прямой SV в пространстве и конус NSM теряет свою неизменность и неподвижность. Все это влечет за собой колебания наклона эклиптики ε со средним периодом около 40 000 лет.

Положение земной орбиты и земной оси по отношению к Солнцу вполне определяется элементами Π, e, ε ; именно вековые возмущения этих элементов определяют вековой ход солнечной радиации.

§ 13. Вспомогательные таблицы для расчета векового хода облучения Земли. Если мы пожелаем вычислить те изменения в облу- чении Земли, которые имеют причиной изменения астрономических элементов Π, e, ε , то нам придется только обратиться к формулам предыдущих параграфов, так как все эти формулы дают выражения величин W_s, W_w, W_T, T_s, T_w в виде простых функций от величин Π, e , испытывающих вековые возмущения. Таким образом влияние этих переменных можно учесть непосредственно.

Несколько сложнее вычисление тех колебаний количества лучистой энергии, которые зависят от изменений наклона эклиптики ε , потому

что на основании формул (45), (55) и (60) наклон эклиптики входит в выражение коэффициентов b_0, b_1, b_2, \dots при разложении в ряды.

Однако колебания ϵ происходят в чрезвычайно узких границах, так что мы можем считать, что связанные с ними колебания величин $b_0, b_1, b_2, \dots, W_s, \dots$ пропорциональны производным $\frac{\partial b_0}{\partial \epsilon}, \frac{\partial b_1}{\partial \epsilon}, \dots, \frac{\partial W_s}{\partial \epsilon}$. Обозначая через $\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2, \dots, \Delta W_s, \Delta W_w$ приращения величин $b_0, b_1, b_2, \dots, W_s$ и W_w , которые соответствуют увеличению ϵ на 1° дуги, мы можем написать

$$\Delta b_0 = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{\partial b_0}{\partial \epsilon}, \quad \Delta b_1 = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{\partial b_1}{\partial \epsilon}, \quad \dots,$$

$$\Delta W_s = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{\partial W_s}{\partial \epsilon}, \quad \Delta W_w = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{\partial W_w}{\partial \epsilon}.$$

Таким образом, чтобы вычислить значения $b_0, b_1, b_2, \dots, W_s$ и W_w для определенного значения $\epsilon = \epsilon_0 + \Delta \epsilon$ (которое на $\Delta \epsilon$ отличается от современного наклона эклиптики $\epsilon_0 = 23^\circ 27' 30''$), надо к значениям $b_0, b_1, \dots, W_s, W_w$ из табл. 2 или 4 прибавить соответственно произведения $\Delta b_0 \Delta \epsilon, \Delta b_1 \Delta \epsilon, \dots$ или $\Delta W_s \Delta \epsilon$ и $\Delta W_w \Delta \epsilon$.

Ход вычисления величин $\Delta b_0, \Delta b_1, \dots, \Delta W_s$ и ΔW_w следующий: дифференцируя выражения (60) по ϵ , деля скобки на $\sin \epsilon$, умножая все члены в скобках на k и принимая во внимание на основании (55), что

$$\frac{\partial a_1}{\partial \epsilon} = \frac{\partial a_1}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \epsilon} = 2 \frac{a_1}{k} \cos \epsilon, \quad \frac{\partial a_2}{\partial \epsilon} = \frac{4a_2}{k} \cos \epsilon, \quad \dots,$$

имеем

$$\frac{\partial b_0}{\partial \epsilon} = \frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \epsilon} \left[a_1 + \frac{4}{2^4} \binom{4}{2} a_2 + \frac{6}{2^6} \binom{6}{3} a_3 + \frac{8}{2^8} \binom{8}{4} a_4 + \frac{10}{2^{10}} \binom{10}{5} a_5 + \dots \right],$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial \epsilon} = \frac{\cos \varphi}{2 \operatorname{tg} \epsilon} \left[2a_1 + \frac{4}{2^2} \binom{4}{1} a_2 + \frac{6}{2^4} \binom{6}{2} a_3 + \frac{8}{2^6} \binom{8}{3} a_4 + \frac{10}{2^8} \binom{10}{4} a_5 + \dots \right],$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial \epsilon} = \frac{\cos \varphi}{2^3 \operatorname{tg} \epsilon} \left[4a_2 + \frac{6}{2^2} \binom{6}{1} a_3 + \frac{8}{2^4} \binom{8}{2} a_4 + \frac{10}{2^6} \binom{10}{3} a_5 + \frac{12}{2^8} \binom{12}{4} a_6 + \dots \right].$$

Величины $\frac{\partial W_s}{\partial \epsilon}$ и $\frac{\partial W_w}{\partial \epsilon}$ мы найдем, дифференцируя равенства (76) — (79) по ϵ . Тогда

$$\frac{\partial W_s}{\partial \epsilon} - \frac{\partial W_w}{\partial \epsilon} = \frac{T}{\pi} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \sin \varphi \cos \epsilon.$$

Это равенство справедливо при любой φ . Далее:

$$\frac{\partial W_s}{\partial \epsilon} + \frac{\partial W_w}{\partial \epsilon} = \frac{T}{\pi} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial b_0}{\partial \epsilon},$$

$$\frac{\partial W_s}{\partial \epsilon} + \frac{\partial W_w}{\partial \epsilon} = \frac{T}{\pi^2} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ 2 \frac{\partial b_0}{\partial \epsilon} \lambda_1 + 2b_0 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \epsilon} + \pi \sin \varphi \cos \epsilon \cos \lambda_1 - \right.$$

$$\left. - \pi \sin \varphi \sin \epsilon \sin \lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \epsilon} + \left(- \frac{\partial b_1}{\partial \epsilon} \sin 2\lambda_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial b_2}{\partial \epsilon} \sin 4\lambda_1 - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3} \frac{\partial b_3}{\partial \epsilon} \sin 6\lambda_1 + \dots \right) + 2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \epsilon} \left(- b_1 \cos 2\lambda_1 + b_2 \cos 4\lambda_1 - \right.$$

$$\left. - b_3 \cos 6\lambda_1 + \dots \right) \left. \right\}.$$

Последнее равенство справедливо для арктических зон. При этом λ_1 определяется по формуле (40), т. е.

$$\sin \lambda_1 = \frac{\cos \varphi}{\sin \epsilon},$$

а $\frac{\partial \lambda_1}{\partial \epsilon}$ определяется из соотношения

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \epsilon} = - \frac{1}{\cos \lambda_1} \cdot \cos \varphi \frac{\cos \epsilon}{\sin^2 \epsilon}.$$

Таким путем вычислены приращения величин b_0, b_1, \dots, W_s и W_w при увеличении наклона эклиптики на 1° , приведенные в табл. 5 и 6.

В дальнейшем нам понадобится сравнить между собой изменения количества лучистой энергии, вызываемые колебаниями астрономических элементов ϵ, e, Π , каждым отдельно. Для этого удобнее вычислить прирост в процентах величин W_s, W_w и W_T при увеличении наклона эклиптики на 1° дуги; эти данные приведены в табл. 7.

Просматривая табл. 6 и 7, мы можем сделать несколько важных выводов.

Колебания наклона эклиптики сказываются неодинаково под различными широтами. Увеличение ϵ несколько уменьшает годовое количество тепла W_T , получаемое экваториальной зоной, и заметно увеличивает приход тепла в полярных областях. Граница между этими областями прироста и уменьшения годовых сумм солнечной радиации лежит на широте 44° .

Иначе ведут себя полугодовые суммы солнечной радиации. Летние суммы с увеличением наклона эклиптики уменьшаются только до 11° широты; в более высоких широтах они увеличиваются. Зимние же суммы всюду уменьшаются при увеличении наклона эклиптики.

Относительное изменение летних сумм больше всего на полюсе, а зимних сумм под широтой 66° , где уменьшение W_w при увеличении ϵ на 1° достигает 5,86%.

§ 14. Вековой ход солнечного облучения Земли. Формулы предыдущего параграфа дают численное выражение векового хода солнечного облучения Земли. Нагляднее всего интоляционные условия на земной поверхности за какой-либо год прошлого или будущего изображаются годовым ходом облучения под различными широтами за рассматриваемый год.

Для того чтобы проследить за изменениями годового хода на протяжении тысячелетий, следовало бы математически рассчитать этот годовой ход для ряда подходящим образом выбранных лет и для нескольких широт. Но это потребовало бы огромных вычислений. В то же время главнейшие черты векового хода облучения мы можем проследить, вычислив изменения летних и зимних сумм радиации W_s и W_w для нескольких определенных широт, а также вычислив изменения длительности соответствующих полугодий T_s и T_w с течением времени.

Из формул (76) — (80) следует, что значения W_s, W_w и W_T являются функциями только от двух подверженных вековым изменениям величин,



Величины

Географическая широта	при увеличении наклона эклиптики на 1° изменяются на:						
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
0°	-0,00339	-0,00346	-0,00007				
5°	-0,00335	-0,00341	-0,00007				
10°	-0,00323	-0,00330	-0,00007				
15°	-0,00302	-0,00308	-0,00006				
20°	-0,00274	-0,00278	-0,00005				
25°	-0,00235	-0,00239	-0,00004				
30°	-0,00189	-0,00191	-0,00002				
35°	-0,00129	-0,00128	+0,00002				
40°	-0,00060	-0,00056	+0,00005				
45°	+0,00023	+0,00031	+0,00009	+0,00001	+0,00001		
50°	+0,00127	+0,00142	+0,00017	+0,00001	+0,00001		
55°	+0,00255	+0,00280	+0,00027	+0,00003	+0,00003		
60°	+0,00426	+0,00469	+0,00047	+0,00005	+0,00005		
65°	+0,00687	+0,00772	+0,00100	+0,00017	+0,00017		
70°	+0,01260	+0,01538	+0,00357	+0,00100	+0,00024	+0,00004	+0,00001
75°	+0,05705	+0,08748	+0,04429	+0,01851	+0,00571	+0,00122	+0,00016

именно e и ε , при этом эксцентриситет входит только в виде множителя $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$.

Принимая во внимание, что за рассматриваемые периоды отдаленного прошлого e колебалось в пределах от 0,0051 до 0,0475, мы видим, что величины W_s , W_w и W_T в результате таких изменений e могли быть или на 0,013% меньше или на 0,099% больше их современного значения. Эти колебания так незначительны, что мы можем считать изменения W_s , W_w и W_T зависящими только от изменений наклона эклиптики.

Таблица 6

Географическая широта	Содержащиеся в табл. 4 величины		
	W_s	W_w	W_T
	при увеличении наклона эклиптики на 1° изменяются на:		
0°	- 54	- 54	- 108
5°	- 31	- 75	- 106
10°	- 7	- 96	- 103
15°	+ 18	- 114	- 96
20°	+ 44	- 131	- 87
25°	+ 70	- 145	- 75
30°	+ 97	- 157	- 60
35°	+ 125	- 167	- 41
40°	+ 154	- 173	- 19
45°	+ 184	- 177	+ 7
50°	+ 215	- 175	+ 40
55°	+ 249	- 168	+ 81
60°	+ 288	- 153	+ 136
65°	+ 340	- 121	+ 219
70°	+ 420	- 59	+ 361
75°	+ 461	- 30	+ 431
90°	+ 509		+ 509

Таблица 7

Географическая широта	Увеличение наклона эклиптики на 1° изменяет величины		
	W_s	W_w	W_T
	в процентах		
0°	-0,35	-0,35	-0,35
5°	-0,20	-0,52	-0,35
10°	-0,04	-0,69	-0,34
15°	+0,11	-0,87	-0,33
20°	+0,26	-1,07	-0,30
25°	+0,42	-1,29	-0,27
30°	+0,59	-1,54	-0,22
35°	+0,78	-1,83	-0,16
40°	+0,96	-2,17	-0,08
45°	+1,17	-2,60	+0,03
50°	+1,41	-3,14	+0,19
55°	+1,69	-3,84	+0,42
60°	+2,04	-4,78	+0,78
65°	+2,51	-5,77	+1,39
70°	+3,18	-4,62	+2,49
75°	+3,57	-4,31	+3,17
90°	+4,02		+4,02

Из табл. 6 и 7 мы уже видели, как сказывается колебание этого последнего элемента на значениях W_s , W_w и W_T и для различных широт. Увеличение наклона эклиптики уменьшает годовую сумму радиации в экваториальной зоне и увеличивает ее в полярных зонах, т. е. сглаживает различия между экватором и полюсами.

Можно вычислить, что при наклоне около 54° это различие исчезнет вовсе, т. е. годовые суммы радиации на экваторе и на полюсе будут одинаковы. Уменьшение наклона эклиптики ведет к обратным результатам, усиливая климатические различия на земной поверхности; эти различия будут наиболее резкими при $\varepsilon = 0$, ибо тогда оба полюса в течение всего года останутся неосвещенными.

В отношении величин W_s и W_w мы можем заметить еще следующее: исключая экваториальный пояс между 11° с. ш. и 11° ю. ш., где отсутствует различие между летом и зимой, увеличение наклона эклиптики везде связано с увеличением летнего нагревания и уменьшением зимнего. Иначе говоря, увеличение e усиливает разницу между зимой и летом, уменьшение e — смягчает ее. При $e=0$ мы вообще не имели бы времен года.

Резюмируя, мы можем сказать, что *увеличение наклона эклиптики ослабляет географические и усиливает сезонные* (зависящие от времени года) *различия в облучении Солнцем земной поверхности*. Из (75) следует, что изменения e сказываются одинаково на обоих полушариях Земли, т. е. вышеуказанные различия усиливаются или ослабляются одновременно по обе стороны от экватора.

Изменения наклона эклиптики имеют довольно правильный колебательный характер с средним периодом колебания около 40 000 лет. В течение этого периода географические различия достигают один раз максимума (при наименьшем наклоне эклиптики), причем сезонные различия в это время достигают своего минимума, и один раз, через 20 000 лет, — минимума (при наибольшем наклоне), когда сезонные различия имеют максимум. Эти явления повторялись бы периодически, если бы на них не накладывалось влияние изменений других астрономических элементов.

В самом деле, годовой ход облучения определяется не только суммами тепла W_s и W_w , но и продолжительностью астрономических сезонов T_s и T_w в течение которых Земля получает указанные количества радиации. Продолжительность астрономических лета и зимы является функцией остальных двух элементов земной орбиты — эксцентриситета e и долготы перигелия Π , как это следует из формулы (91). Оба элемента входят в эти последние в виде одного и того же слагаемого

$$\frac{4T}{\pi} e \sin \Pi = T_s - T_w,$$

пропорционального разности продолжительностей обоих сезонов.

Вследствие изменчивости обоих элементов e и Π эта разность является функцией времени; функциональную зависимость можно определить, исходя из следующих соображений.

Долгота перигелия Π примерно за 21 000 лет увеличивается почти равномерно на 360° , так как перигелий за это время с почти равномерной скоростью описывает полный круг и величина $\sin \Pi$ за это время проходит (двукратно) все значения между -1 и $+1$.

Величина e также испытывает колебания, но с периодом в 92 000 лет и с значительно меньшей амплитудой, оставаясь всегда заключенной между 0 и 0,0677.

Изменения значения $T_s - T_w$ зависят от обоих упомянутых факторов; но влияние первого из них значительно сильнее, так что величина $T_s - T_w$ колеблется около некоторого среднего значения с периодом в 21 000 лет, причем амплитуда этих колебаний через каждые 46 000 лет попеременно увеличивается и уменьшается.

Теперь мы рассмотрим зависимость векового хода облучения от описанных выше изменений Π и e .

Исключая случай $e=0$, не имеющий места на протяжении рассматриваемого нами геологического периода (см. раздел III), $T_s - T_w$ обращается в нуль только при $\Pi=0$ и при $\Pi=180^\circ$. При увеличении Π от 0 до 90° летнее полугодие северного полушария удлиняется за счет зимнего полугодия и (отвлекаясь от изменений наклона эклиптики) одно и то же количество радиации W_s распределяется на все больший интервал времени, т. е. среднее по времени напряжение солнечной радиации уменьшается от года к году. Зима, наоборот, в это время укорачивается и среднее напряжение радиации зимой увеличивается.

В момент когда $\Pi=90^\circ$, продолжительность летнего полугодия близка к максимуму (полного совпадения нет вследствие изменчивости e), и среднее облучение уменьшается летом до минимума, увеличиваясь зимой до максимума. Таким образом *противоположность времен года в это время сглаживается сильнее всего. Это верно, однако, только для северного полушария*. В южном полушарии укорачивается летнее полугодие (совпадающее с зимним полугодием северного полушария), в то время как количество радиации, получаемой южным полушарием за это короткое лето, равно тому количеству, которое получает северное полушарие за свое лето, более продолжительное. Поэтому в южном полушарии в это время лето короткое и жаркое, зима же продолжительная и холодная. *В момент когда сезонные различия в северном полушарии слабее всего, в южном они проявляются с максимальной резкостью*.

При $\Pi=180^\circ$ астрономические сезоны T_s и T_w имеют равную продолжительность, и оба полушария находятся в одинаковом положении.

При $\Pi=270^\circ$ длина северного лета минимальная, и противоположность между летом и зимой там наиболее резка. В южном полушарии мы имеем в это время обратную картину — длинное холодное лето и короткую теплую зиму.

При $\Pi=360^\circ$, $T_s = T_w$, оба полушария находятся в совершенно одинаковых условиях, и весь цикл описанных явлений начинается снова с той небольшой разницей, что вследствие колебания e сезонные различия следующих 21 000 лет не совпадают с различиями за предыдущие 21 000 лет; но в течение 46 000 лет, на протяжении которых e растет, различия заметно обостряются и соответственно смягчаются, испытывая обратные изменения при уменьшении e в следующие 46 000 лет.

Описанные колебания солнечной радиации, связанные с изменением величины $e \sin \Pi$, накладываются на те ее колебания, которые вызваны непостоянством наклона эклиптики e . Как мы уже видели, эти последние имеют иной период и сказываются одинаково в обоих полушариях, но различно под различными широтами.

При сложении всех этих слагающих векового хода облучения, конечно, затушевывается простой и правильный характер каждой из них.

§ 15. Математическая интерпретация векового хода облучения Земли. Из предыдущего изложения мы уже видели, что вековой ход облучения Земли очень сложен: он неодинаков для различных широт и различен для северного и южного полушарий. Выведем здесь математические выражения и формулы (исходя из найденных ранее), которые позволят изучить вековой ход облучения. Числовые расчеты и их результаты составляют предмет раздела III.

Для любой географической широты φ и любого момента прошедшего или будущего мы можем найти величины W_s и W_w , поскольку законы небесной механики позволяют нам вычислить значения e , Π и ϵ для этого момента. Таким образом величины W_s и W_w можно представить в функции времени.

Но для тепловых явлений на земной поверхности определяющим являются не только количества радиации W_s и W_w , но и продолжительность астрономических сезонов T_s и T_w , в течение которых Земля получает указанные количества радиации. Величины же T_s и T_w имеют свой собственный вековой ход. Поэтому, для того чтобы сравнить количества полученной широтой φ за любой год геологического прошлого солнечной радиации с современными суммами радиации, естественно пойти по следующему пути. Вычисляя для рассматриваемого года, так же как и для нашего времени, частное

$$w_s = \frac{W_s}{T_s}, \quad w_w = \frac{W_w}{T_w},$$

мы получим, очевидно, среднее напряжение солнечной радиации для соответствующего астрономического полугодия на рассматриваемой широте.

Сравнение величин w_s и w_w даст нам ответ на поставленную задачу. При этом, как легко заметить, не было речи о продолжительности времен года.

Числовые значения w_s и w_w найти очень легко. Поскольку e всегда остается малым числом, принимая во внимание (91), можем разложить в биномиальный ряд выражения

$$\frac{1}{T_s} = \frac{2}{T} \left(1 + \frac{4e}{\pi} \sin \Pi\right)^{-1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{T_w} = \frac{2}{T} \left(1 - \frac{4e}{\pi} \sin \Pi\right)^{-1}$$

и опустить члены с высшими степенями e ; тогда получим

$$w_s = \frac{2}{T} \left(1 - \frac{4e}{\pi} \sin \Pi\right) W_s, \quad w_w = \frac{2}{T} \left(1 + \frac{4e}{\pi} \sin \Pi\right) W_w.$$

Эти выражения справедливы только для северного полушария. Так как южное лето совпадает с северной зимой, мы имеем

$$\bar{w}_s = \frac{2}{T} \left(1 + \frac{4e}{\pi} \sin \Pi\right) W_s, \quad \bar{w}_w = \frac{2}{T} \left(1 - \frac{4e}{\pi} \sin \Pi\right) W_w.$$

Величины $\frac{W_s}{T}$ и $\frac{W_w}{T}$, выраженные в канонических единицах, для $\epsilon_0 = 23^\circ 27' 30''$ приведены в табл. 4.

При ином наклоне эклиптики, равном $\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon$ и отличающемся от современного значения ϵ_0 на $\Delta\epsilon$ (в дуговых градусах), мы получим

соответствующие величины $\frac{W_s}{T}$ и $\frac{W_w}{T}$, прибавляя к величинам табл. 4 (которые мы будем обозначать далее через W_s^0 и W_w^0) произведения $\Delta W_s \cdot \Delta\epsilon$ или $\Delta W_w \cdot \Delta\epsilon$, причем значения ΔW_s и ΔW_w следует брать из табл. 6.

Таким образом будем иметь

$$w_s = 2 \left(1 - \frac{4e}{\pi} \sin \Pi\right) (W_s^0 + \Delta W_s \Delta\epsilon).$$

Умножая и опуская малые члены $\frac{8e}{\pi} \sin \Pi \Delta W_s \Delta\epsilon$ и $\frac{8e}{\pi} \sin \Pi \Delta W_w \Delta\epsilon$, имеем:

$$\left. \begin{aligned} w_s &= 2 \left(W_s^0 + \Delta W_s \Delta\epsilon - \frac{4}{\pi} W_s^0 e \sin \Pi \right), \\ w_w &= 2 \left(W_w^0 + \Delta W_w \Delta\epsilon + \frac{4}{\pi} W_w^0 e \sin \Pi \right), \\ \bar{w}_s &= 2 \left(W_s^0 + \Delta W_s \Delta\epsilon + \frac{4}{\pi} W_s^0 e \sin \Pi \right), \\ \bar{w}_w &= 2 \left(W_w^0 + \Delta W_w \Delta\epsilon - \frac{4}{\pi} W_w^0 e \sin \Pi \right). \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Эти формулы дают нам наглядное представление о вековом ходе получаемой Землей солнечной радиации, который мы рассматривали выше. Прежде всего из них видно, что изменения наклона эклиптики сказываются одинаково в обоих полушариях. Изменения продолжительности астрономических полугодий, разность которых согласно (92) пропорциональна $e \sin \Pi$, оказывают в обоих полушариях противоположное влияние. Изменения w_s и w_w представляют сложение двух периодических составляющих: колебания $\Delta\epsilon$ (с периодом 40 000 лет) и колебания величины $e \sin \Pi$, имеющей двойной период, — период колебаний e в 92 000 лет и период колебаний $\sin \Pi$ в 21 000 лет.

Изменение наклона эклиптики сказывается под различными широтами неодинаково. Табл. 7 позволяет выяснить, где влияние этого фактора преобладает над изменением продолжительности времен года.

Если мы первое из выражений (93) перепишем в виде

$$w_s = 2W_s^0 \left(1 + \frac{\Delta W_s}{W_s^0} \Delta\epsilon - \frac{4}{\pi} e \sin \Pi\right),$$

то увидим, что преобладание члена с $\Delta\epsilon$ или с $\frac{4}{\pi} e \sin \Pi$ зависит от коэффициентов $\frac{\Delta W_s}{W_s^0}$ и $\frac{\Delta W_w}{W_w^0}$.

В табл. 7 даны значения $\frac{100\Delta W_s}{W_s^0}$ и $\frac{100\Delta W_w}{W_w^0}$ для различных широт. С помощью ее легко убедиться, что для низких широт большее значение имеет член $\frac{4}{\pi} e \sin \Pi$, для более высоких широт преобладает член с $\Delta\epsilon$. Для летних сумм радиации граница между этими двумя областями лежит примерно под 68° широты, для зимних — под 48° .

Хотя в величинах w_s и w_w и проявляются основные черты векового хода облучения, но они дают очень небольшое и неточное пред-

ставление об этом ходе. Для того чтобы изучить вековой ход облучения, необходимо не только знать, было ли среднее облучение больше или меньше современного в течение астрономического полугодия, но надо знать и продолжительность этого полугодия; а эта продолжительность не находит себе соответствующего выражения в величинах w_s и w_w . Для наглядности приведем следующий пример.

Для следующих возможных комбинаций астрономических элементов

$$e = 21^\circ 58' \quad \Pi = 270^\circ \quad e = 0,0606$$

$$e = 24^\circ 36' \quad \Pi = 90^\circ \quad e = 0,0606$$

и для северной широты 66° мы по приведенным выше формулам получим одинаковое среднее облучение зимою w_w ; но в первом случае зимнее полугодие на 28 дней длиннее, чем во втором.

Ясно, что условия облучения в том и другом случае совершенно различны, хотя w_w в обоих случаях одно и то же. В этом примере мы взяли крайние возможные значения наклона эклиптики, а также широту, на которой влияние этого наклона сказывается сильнее всего. Но все же этот пример показывает, что w_s и w_w очень мало надежные средние, плохо характеризующие изменяющиеся условия облучения Земли. Поэтому мы должны искать другой путь изучения векового хода облучения.

Для этого рассмотрим годовой ход облучения Земли в наше время (табл. 1). Из этой таблицы мы видим прежде всего, что облучение в момент весеннего и осеннего равноденствий, т. е. при долготе Солнца соответственно в 0 и в 180° , — неодинаково. Суточное количество получаемой Землей радиации в день весеннего равноденствия на $1,4\%$ больше, чем при осеннем равноденствии. Это происходит от того, что квадраты расстояний Земли от Солнца в эти моменты относятся между собой, как 1:1,014; пропорционально этому уменьшается осенью солнечная радиация.

Вариации астрономических элементов могут значительно увеличить эту разницу, небольшую в наше время. Если, например, при максимальном эксцентриситете $e = 0,0677$ точка весеннего равноденствия совпадает с положением перигелия, то указанное отношение будет равно $(1 - 0,0677)^2 : (1 + 0,0677)^2 = 1 : 1,312$, т. е. в эту эпоху в день весеннего равноденствия Земля получит на $31,2\%$ больше радиации, чем в день осеннего равноденствия.

Это различие в облучении в дни равноденствия приводит еще к одной аномалии. Так, в обоих приведенных примерах последним дням астрономической зимы соответствуют большие суммы радиации, чем последним дням астрономического лета.

Мы уже говорили о неодинаковой и, кроме того, переменной длительности астрономических времен года. В наше время летнее полугодие длиннее зимнего на 7 дн. 14 час.; вариации астрономических элементов могут увеличить эту разность до 31 дня 20 час.

Из всего сказанного следует, что деление года на астрономические полугодия основано на длине дня, а не на интенсивности облучения. Год делится не на интервалы с более сильным или более слабым облучением, а на два неравных интервала, не имеющих внутренней связи

с облучением. Кроме того, и длины этих интервалов варьируют, так же как и различия в облучении у концов интервалов. Благодаря этому астрономическое подразделение года не позволяет нам глубже изучить вековой ход облучения.

Можно избежать всех этих неудобств, разбив год на два равных полугодия, одно из которых охватывает все дни, когда суммы солнечной радиации под данной широтой больше, чем суммы солнечной радиации в любой день в течение всего другого полугодия. Такие два интервала времени можно назвать *калорическими полугодиями*, ибо их начало и конец определяются количеством калорий тепла, получаемых от Солнца данной широтой. Полугодие, охватывающее 182,5 дня с наибольшими суммами тепла, мы назовем *калорическим летним полугодием*, другое же — *калорическим зимним полугодием*.

Мы упоминали о том, что сидерический (звездный) год имеет неизменную длину; то же относится и к тропическому году, если отбросить крайне малые изменения, несущественные при изучении векового хода облучения. Таким образом *длина калорических полугодий постоянна*.

Понятие калорического полугодия позволяет нам детально проследить ход облучения Земли. Определив моменты начала и конца каждого полугодия, можно вычислить количества солнечной радиации Q_s и Q_w , получаемые Землей за время калорических полугодий под заданной широтой.

Проделав эти вычисления как для нашего времени, так и для любого года отдаленного геологического прошлого, мы можем непосредственно сравнить полученные величины, поскольку они относятся к интервалам времени равной продолжительности.

Определение калорических полугодий и вычисление соответствующих сумм радиации проводится следующим образом.

На основании формул (41) и (62) суточная сумма радиации, получаемая широтой φ при долготе Солнца λ , равна

$$W_s = \frac{\tau J_0}{\pi r^2} \left(b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda - b_1 \cos 2\lambda + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda \right). \quad (94)$$

Мы оборвали ряд, выражающий W_s , на члене b_3 , так как для всех географических широт, к которым мы применим наш вывод, b_4 исчезающе мало.

По формулам (31), (33) и (90) величина ρ в выражении (94) определяется соотношением

$$\rho = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos(\Pi - \lambda)}.$$

Эксцентриситет e земной орбиты всегда настолько мал, что мы можем пренебречь его квадратом по сравнению с единицей и положить

$$\rho = \frac{1}{1 - e \cos(\Pi - \lambda)}, \quad (95)$$

и, далее, отбрасывая величину $e^2 \cos^2(\Pi - \lambda)$,

$$\frac{1}{\rho^2} = 1 - 2e \cos(\Pi - \lambda).$$

Тогда выражение (94) принимает вид

$$W_{\tau} = \frac{\pi J_0}{\pi} [1 - 2e \cos(\Pi - \lambda)] \left(b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \lambda \sin \epsilon - b_1 \cos 2\lambda + \right. \\ \left. + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda \right). \quad (96)$$

Оно справедливо во внеарктической зоне при любых долготах Солнца λ , в арктических же — только при таких долготах, которые соответствуют ежедневному восходу и заходу Солнца. Мы скоро увидим, что при решении данной проблемы последнее обстоятельство как раз имеет место.

Обозначим через λ_1 и λ_2 долготы Солнца соответственно в моменты начала летнего и зимнего калорических полугодий. Тогда по определению λ_1 и λ_2 должны давать равные значения W_{τ} при подстановке их в формулу (96). Таким образом получим

$$[1 - 2e \cos(\Pi - \lambda_1)] \left(b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon \sin \lambda_1 - b_1 \cos 2\lambda_1 + \right. \\ \left. + b_2 \cos 4\lambda_1 - b_3 \cos 6\lambda_1 \right) = \\ = [1 - 2e \cos(\Pi - \lambda_2)] \left(b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon \sin \lambda_2 - b_1 \cos 2\lambda_2 + \right. \\ \left. + b_2 \cos 4\lambda_2 - b_3 \cos 6\lambda_2 \right). \quad (97)$$

Второе условие, которому должны удовлетворять калорические полугодия, заключается в том, что начала обоих полугодий должны быть отделены друг от друга в точности полугодием промежуток времени $\frac{T}{2}$. Чтобы выразить это условие математически, поступим так. Напишем на основании (34)

$$dt = \frac{T}{2} \frac{\rho^2}{\pi} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-e^2}},$$

и из (95)

$$\rho^2 = [1 - e \cos(\Pi - \lambda)]^{-2}.$$

Разлагая это последнее выражение по формуле бинома и опуская высшие степени e , имеем

$$dt = \frac{T}{2\pi} [1 + 2e \cos(\Pi - \lambda)] d\lambda.$$

Время, в течение которого Солнце пройдет отрезок своего пути от λ_1 до λ_2 , должно быть, как указано, равно $\frac{T}{2}$. Следовательно:

$$\frac{T}{2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dt = \frac{T}{2\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [1 + 2e \cos(\Pi - \lambda)] d\lambda;$$

интегрируя, мы получим

$$\pi = \lambda_2 - \lambda_1 - 2e \sin(\Pi - \lambda_2) + 2e \sin(\Pi - \lambda_1). \quad (98)$$

Из уравнений (97) и (98) мы найдем λ_1 и λ_2 . Сделаем подстановку:

$$\lambda_1 = \lambda', \quad \lambda_2 = \pi - \lambda''. \quad (99)$$

Уравнение (98) примет вид

$$\lambda' + \lambda'' = 2e [\sin(\Pi - \lambda') + \sin(\Pi + \lambda'')], \quad (100)$$

и уравнение (97) примет вид:

$$[1 - 2e \cos(\Pi - \lambda')] \left(b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon \sin \lambda' - b_1 \cos 2\lambda' + \right. \\ \left. + b_2 \cos 4\lambda' - b_3 \cos 6\lambda' \right) = \\ = [1 + 2e \cos(\Pi + \lambda'')] \left(b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon \sin \lambda'' - b_1 \cos 2\lambda'' + \right. \\ \left. + b_2 \cos 4\lambda'' - b_3 \cos 6\lambda'' \right). \quad (101)$$

При вычислении неизвестных λ' и λ'' мы должны принять во внимание, что вследствие (100) $\lim_{e=0} (\lambda' + \lambda'') = 0$, а из (101) следует, что $\lim_{e=0} (\lambda' - \lambda'') = 0$.

Это значит, что при очень малом e (как это всегда имеет место) λ' и λ'' также очень малы.

Отсюда мы выводим, что λ' и λ'' всегда мало отличаются от 0 и 180°, а следовательно, что эти долготы для всех рассматриваемых географических широт относятся к периодам с ежедневным заходом и восходом Солнца.

Вследствие малости дуг λ' и λ'' их синусы можно заменить самой дугой, а косинусы $2\lambda'$, $4\lambda'$, $6\lambda'$, $2\lambda''$, $4\lambda''$, $6\lambda''$ можно заменить через единицу. Тогда мы получим из (100)

$$\lambda' + \lambda'' = 2e [2 \sin \Pi - (\lambda' - \lambda'') \cos \Pi], \quad (102)$$

а вместо (101) будем иметь

$$(1 - 2e \cos \Pi - 2e \lambda' \sin \Pi) \left(\lambda' + 2 \frac{b_0 - b_1 + b_2 - b_3}{\pi \sin \varphi \sin \epsilon} \right) = \\ = (1 + 2e \cos \Pi - 2e \lambda'' \sin \Pi) \left(\lambda'' + 2 \frac{b_0 - b_1 + b_2 - b_3}{\pi \sin \varphi \sin \epsilon} \right). \quad (103)$$

Полагая ради краткости

$$h = 2 \frac{b_0 - b_1 + b_2 - b_3}{\pi \sin \varphi \sin \epsilon} \quad (104)$$

и принимая во внимание, что в написанных выражениях члены $e\lambda'$ и $e\lambda''$ могут быть опущены как члены более высокого порядка малости, мы найдем из (102) и (103)

$$\left. \begin{aligned} \lambda' + \lambda'' &= 4e \sin \Pi, \\ \lambda' - \lambda'' &= 4eh \cos \Pi. \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Вводя вспомогательную величину ξ такую, что

$$\operatorname{tg} \xi = h, \quad (106)$$

имеем из (105)

$$\lambda' = 2e \frac{\sin(\Pi + \xi)}{\cos \xi}, \quad \lambda'' = 2e \frac{\sin(\Pi - \xi)}{\cos \xi}. \quad (107)$$

Для палеоклиматических проблем особенно интересны периоды, когда $\Pi = 0, 90, 180$ или 270° . Для этих случаев λ' и λ'' принимают следующие значения:

$$\left. \begin{array}{l} \Pi = 0^\circ \quad \lambda' = 2eh \quad \lambda'' = -2eh \\ \Pi = 90^\circ \quad \lambda' = 2e \quad \lambda'' = 2e \\ \Pi = 180^\circ \quad \lambda' = -2eh \quad \lambda'' = 2eh \\ \Pi = 270^\circ \quad \lambda' = -2e \quad \lambda'' = -2e \end{array} \right\}. \quad (108)$$

Из (107), (104) и (106) следует, что величины λ' и λ'' являются функциями не только трех переменных астрономических элементов e, ϵ, Π , но также и функциями географической широты φ . Поэтому калорические полугодия начинаются под различными широтами не строго в один и тот же момент. Так, например, в 1923 г. начало калорического летнего полугодия под 15° северной широты пришлось на 20 марта в 0 час. 20 мин. и двигалось по направлению к полюсу, которого достигло 23 марта в 0 час. 40 мин. Отсюда оно перешло скачком на южный полюс и перемещалось далее к экватору, чтобы прийти до южной широты 15° 24 марта в 22 часа 40 мин.

В экваториальной зоне, понятно, мы не имеем зимних и летних полугодий. В случае же когда долгота перигелия Π равна 90 или 270° , начало калорических полугодий, как видно из (108), связано только с величиной эксцентриситета земной орбиты e и приходится на всем земном шаре на один и тот же момент.

Найдя числовые значения λ' и λ'' , легко будет вычислить суммы радиации, получаемые Землей в течение калорических полугодий.

Отрезку пути Солнца

от 0 до π	соответствует количеству тепла W_s
„ π „ 2π	„ „ „ „ W_w
„ $\lambda_1 = \lambda'$ до $\lambda_2 = \pi - \lambda''$	„ „ „ „ Q_s
„ $\lambda_2 = \pi - \lambda''$ до $2\pi + \lambda_1 = 2\pi + \lambda'$	„ „ „ „ Q_w

Обозначая W , определяемое формулой (64), как функцию границ интервала λ', λ'' через $W(\lambda', \lambda'')$, имеем

$$\begin{aligned} Q_s &= W_s - W(0, \lambda') - W(\pi - \lambda'', \pi), \\ Q_w &= W_w + W(0, \lambda') + W(\pi - \lambda'', \pi). \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$K = W(0, \lambda') + W(\pi - \lambda'', \pi), \quad (109)$$

получаем

$$\left. \begin{array}{l} Q_s = W_s - K, \\ Q_w = W_w + K. \end{array} \right\} \quad (110)$$

Величину K можно вычислить с помощью формулы (64), которая в данном случае справедлива для всех широт. Мы находим

$$\begin{aligned} K &= \frac{T}{2\pi^2} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left[b_0(\lambda' + \lambda'') + \pi \sin \varphi \sin \epsilon - \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon (\cos \lambda' + \right. \\ &\quad \left. + \cos \lambda'') - \frac{b_1}{2} (\sin 2\lambda' + \sin 2\lambda'') + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_2}{4} (\sin 4\lambda' + \sin 4\lambda'') - \frac{b_3}{6} (\sin 6\lambda' + \sin 6\lambda'') \right]. \quad (111) \end{aligned}$$

Это выражение можно значительно упростить, если заменить, как это мы уже делали при вычислении λ' и λ'' , синус дуг $2\lambda', 2\lambda'', 4\lambda', 4\lambda''$ самими дугами и косинус λ' и λ'' — единицей. Тогда мы имеем

$$K = \frac{T}{2\pi^2} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} (b_0 - b_1 + b_2 - b_3) (\lambda' + \lambda''),$$

т. е., имея в виду (105):

$$K = \frac{2(b_0 - b_1 + b_2 - b_3) T J_0}{\pi^2 \sqrt{1-e^2}} e \sin \Pi. \quad (112)$$

Это равенство может служить для вычисления K . Полагая

$$\frac{2(b_0 - b_1 + b_2 - b_3) T J_0}{\pi^2 \sqrt{1-e^2}} = m, \quad (113)$$

получим

$$K = m e \sin \Pi. \quad (114)$$

Пользуясь каноническими единицами, мы должны подставить в (113) $J_0 = 1, T = 100\,000$; тогда, как уже было показано, в тех же единицах:

$$W_s = W_s^\circ + \Delta W_s \Delta \epsilon,$$

$$W_w = W_w^\circ + \Delta W_w \Delta \epsilon,$$

причем значения W_s° и W_w° приведены в табл. 4, а значения ΔW_s и ΔW_w в табл. 7. Окончательно мы получаем

$$\left. \begin{array}{l} Q_s = W_s^\circ + \Delta W_s \Delta \epsilon - m e \sin \Pi, \\ Q_w = W_w^\circ + \Delta W_w \Delta \epsilon + m e \sin \Pi. \end{array} \right\} \quad (115)$$

Эти уравнения изображают вековой ход величин Q_s и Q_w ; они аналогичны по форме уравнениям (93), но дают более правильное представление о влиянии астрономических элементов на суммы радиации.

Коэффициент m , входящий в (115), не зависит от вековых колебаний наклона эклиптики, в чем можно убедиться из табл. 5. Это следует также из уравнения (62), которое при $\lambda = 0$ дает независимое от e значение w , так что $\frac{\partial w}{\partial e} = 0$, т. е. $\frac{\partial}{\partial e} (b_0 - b_1 + b_2 - \dots) = 0$.

Изменения величины m (так же как и величин W_s и W_w) в связи с вековыми вариациями эксцентриситета e так невелики, что мы можем пренебречь ими. Поэтому мы можем считать m независимой от времени.

Приводим таблицу числовых значений m для тех широт, которые мы будем рассматривать далее, в разделе III:

φ°	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75°
m	19 580	19 050	18 370	17 560	16 610	15 530	14 330	13 030	11 640	10 130	8 570	6 920	5 060

Все наши выводы справедливы только для северного полушария. Для того чтобы применить их к южному, необходимо везде у членов с $e \sin \Pi$ переменить знак.

Для нашего времени мы имеем

$$\left. \begin{aligned} Q_s^\circ &= W_s^\circ - m e_0 \sin \Pi_0, \\ Q_w^\circ &= W_w^\circ + m e_0 \sin \Pi_0, \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

где e_0 и Π_0 — и современные значения эксцентриситета и долготы перигелия земной орбиты.

Найдя с помощью формул (115) и (116) величины Q_s и Q_w как для настоящего времени, так и для рассматриваемого года отдаленного геологического прошлого, можно сравнить условия облучения для обоих лет путем вычисления той географической широты φ_s , для которой значения Q_s и Q_w в настоящее время равны значениям этих величин на взятой нами широте φ в рассматриваемую геологическую эпоху.

Таким образом изменение условий облучения можно представить с помощью фиктивного изменения широты $\varphi_s - \varphi$.

§ 16. Обзор результатов раздела I. Если исключить незначительные короткопериодические колебания, количество испускаемой Солнцем лучистой энергии можно считать неизменным и независимым от времени. Поэтому можно принять, что напряжение солнечной радиации, отнесенное к среднему расстоянию Земли от Солнца, постоянно. Численное значение этой величины, лишь недавно определенное с достаточной точностью, называется солнечной постоянной; оно равно приблизительно 2 кал на 1 см² в 1 мин. Это округленное значение и положено в основу всех проводимых ниже расчетов. С усовершенствованием техники измерений за последние годы мы получаем все более точные числовые значения солнечной постоянной, которые как будто все ближе подходят к принятому нами округленному числу; небольшие отклонения от последнего в случае необходимости легко принять во внимание.

Игнорируя поглощение лучистой энергии в атмосфере или рассматривая только те количества лучистой энергии, которые получает ее верхняя граница, мы можем свести распределение солнечной радиации по земной поверхности к чисто геометрической задаче.

Рассматривая любую точку земной поверхности и называя количество лучистой энергии, получаемое 1 см² земной поверхности в 1 мин., облучением (или инсоляцией), мы показали в § 1, что эта величина пропорциональна косинусу угла падения солнечных лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния Земли от Солнца. Предполагая поверхность Земли горизонтальной, легко видеть, что угол падения равен зенитному расстоянию Солнца.

В § 2 показано, как на основании простого закона облучение меняется в данный момент от одного места земной поверхности к другому.

Вследствие вращения Земли облучение в любой точке земного шара имеет суточный ход. Этот последний, как мы видели в § 3, может быть очень просто представлен математически с помощью тригонометрических функций, причем необходимо принять во внимание только положительные значения облучения, соответствующие дневной дуге пути Солнца. Ночью величина облучения обращается в нуль.

Количество тепла, получаемое в течение дня единицей площади земной поверхности, называется *суточной суммой радиации*. Способ вычисления этой последней дан в § 4. В табл. 1 этого параграфа приведены суточные суммы радиации для каждого десятого градуса широты и для 16 дн. года. С помощью интерполяции легко вычислить суточные суммы радиации для любого дня и любой широты.

Табл. 1, и еще лучше рис. 6, наглядно геометрически представляющий числовые данные табл. 1, позволяют изучить все главные характерные черты годового хода облучения Земли, т. е. тех изменений в притоке солнечной радиации в той или иной точке земной поверхности, которые вызваны годовым оборотом Земли вокруг Солнца. Свойства этого хода подробно разобраны в описании рис. 6.

При аналитическом представлении годового хода облучения встречаются некоторые затруднения. Так как для каждой точки земной поверхности после захода Солнца облучение обращается в нуль и остается равным нулю до самого солнечного восхода, то оно является прерывной функцией времени. Прерывность эту можно исключить, рассматривая среднее облучение для всей параллели. Этот вопрос разобран несколько подробнее, так как встречающиеся в литературе решения заключают в себе некоторые ошибки. Влияние прерывности нашей функции в частности необходимо исключить при вычислении сумм солнечного тепла, получаемых какой-либо широтой в течение произвольного интервала времени. Этим вопросам посвящены § 5—8.

Особый интерес представляют количества тепла, получаемые той или иной широтой в течение астрономических сезонов. Эти количества вычислены в § 9 и приведены в табл. 3; на рис. 12 они представлены графически, а в табл. 4 даны в канонических единицах, т. е. в таких, когда за единицу лучистой энергии принята солнечная постоянная, за единицу времени — год, и полученные значения умножены на 100 000. Эти единицы будут использованы в дальнейшем при изучении векового хода облучения Земли.

Рассматривая каждое полушарие как целое и пользуясь выводами § 10, мы очень легко сможем вычислить количество тепла, получаемого полушарием в течение любого интервала в пределах года.

Наряду с количествами тепла, получаемыми различными широтами или целым полушарием в течение астрономических времен года, нам необходимо также знать и продолжительность этих времен года. В § 11 показано, как можно вычислить длину этих последних, а также выяснено, почему эти времена года имеют неравную продолжительность. По этой причине оба полушария находятся в неодинаковых условиях облучения, несмотря на то, что они за соответствующие сезоны получают равные количества радиации.

Кроме суточного и годового хода, облучение Земли имеет еще и вековой ход. В § 12 показано, что земная орбита не является неизменным эллипсом. Плоскость земной орбиты, форма и положение кривой, описываемой Землей в пространстве, испытывают медленные изменения под влиянием взаимного притяжения Земли и остальных планет. Кроме этого, благодаря прецессии, точки равноденствий и солнцестояний тоже перемещаются по земной орбите. Вследствие этого три астрономических элемента — долгота перигелия Π (т. е. гелиоцентрически измеренное в дуговой мере расстояние перигелия от точки весеннего равноденствия), величина эксцентриситета e земной орбиты и наклон эклиптики ϵ — подвержены вековым колебаниям, обусловливающим и вековой ход облучения Земли.

Влияние изменений отдельных астрономических элементов разобрано в § 13, а в дополнительном § 14 в наглядной форме описан в главных чертах вековой ход облучения. В § 15 указано, как можно выразить математически вековой ход. Это можно сделать двумя различными способами: можно рассматривать то количество тепла, которое данная географическая широта получала в каком-либо году отдаленного прошлого в течение летнего и зимнего астрономических полугодий. Вычислив продолжительность обоих полугодий, мы простым делением найдем среднее облучение летом и зимой. Зная это последнее для нашего времени, мы сразу увидим, было ли в рассмотренном году облучение в среднем более или менее интенсивным, чем в наше время. Все вычисления легко провести с помощью вспомогательных табл. 6 и 7, а главнейшие черты векового хода облучения можно предугадать непосредственно по виду формулы (93).

Однако полученные таким путем данные неудовлетворительны, так как относятся к неравным интервалам времени: продолжительность астрономических времен года испытывает с веками сильные колебания. От этого недостатка свободен другой метод расчета: мы делим рассматриваемый год геологического прошлого и современный год на два интервала с равной продолжительностью так, чтобы во все дни одного полугодия суточные суммы радиации были больше, чем суточные суммы любого дня другого полугодия. Эти интервалы времени мы называли соответственно летним и зимним калорическими полугодиями. Их продолжительность остается с веками неизменной, поскольку длина сидерического и тропического годов не испытывает никаких вековых вариаций.

Вычисляя те суммы радиации, которые рассматриваемая широта получала в течение летнего и зимнего калорических полугодий, в каком-нибудь году геологического прошлого, мы можем непосредственно сравнить их с такими же современными суммами, потому что они относятся к интервалам времени одинаковой длины.

Вывод математических выражений, позволяющих определить моменты начала обоих калорических полугодий, так же как и соответствующие количества тепла, довольно сложен, но окончательные формулы (115) так же просты, как и (93); они представляют собой выражение истинного векового хода облучения.

Числовой расчет векового хода будет приведен в разделе III в связи с изучением явления ледниковых периодов.

II. ВЛИЯНИЕ АТМОСФЕРЫ НА ОБЛУЧЕНИЕ ЗЕМЛИ И ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ПРИХОДЯЩИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ И ТЕМПЕРАТУРОЙ. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КЛИМАТ ЗЕМЛИ.

§ 17. Основные факты. Когда солнечные лучи вступают в земную атмосферу, энергия, которую они несут с собой, испытывает разнообразнейшие превращения. Вследствие возрастания плотности от верхней границы атмосферы до земной поверхности лучи отклоняются от своего первоначального направления, приближаясь к вертикали. Это явление называется *рефракцией*. При вертикальном падении лучей она отсутствует; при зенитном расстоянии Солнца в 30, 60 и 90° рефракция равна в среднем соответственно 33", 1'40" и 34'54". На этот угол увеличивается благодаря рефракции кажущаяся высота Солнца над горизонтом. Как легко видеть из приведенных цифр, это явление не оказывает никакого влияния на облучение земной поверхности и может быть исключено из дальнейших наших рассуждений.

Несравненно важнее для нас тот факт, что часть лучистой энергии, попадающей в атмосферу, рассеивается ее частицами во все стороны, другая часть переходит в энергию самих молекул, и лишь остаток доходит до земной поверхности в виде *прямой солнечной радиации*. В результате этих явлений, из которых первое называется *диффузным рассеянием*, а второе — *поглощением*, каждая молекула воздуха становится источником двух излучений: а) рассеянной солнечной радиации и б) невидимого атмосферного теплового излучения, обусловленного температурой воздуха. И то и другое распространяется от молекулы в различных направлениях, чтобы в конце концов либо достигнуть земной поверхности, либо уйти обратно в мировое пространство. Оба эти вида радиации могут, в свою очередь, подвергаться поглощению и рассеянию, так же как солнечные лучи.

В результате поверхность Земли получает три рода лучистой энергии: прямую солнечную радиацию, рассеянную и атмосферную радиацию. Часть лучистой энергии отражается земной поверхностью обратно, вновь испытывая в атмосфере поглощение и рассеяние; остальное количество расходуется на нагревание твердой или жидкой оболочки Земли и на испарение. Поверхность Земли является, в свою очередь, источником земного теплового излучения, которое уходит в мировое пространство, испытывая по пути уже известное нам влияние атмосферы.

Если в атмосфере есть облака, то падающая на них радиация отчасти отражается, отчасти проходит сквозь них и отчасти поглощается, чтобы опять дать начало тепловому излучению облаков.

§ 18. Закон Бугера-Ламберта. При математическом изучении превращений лучистой энергии в атмосфере обычно мы будем считать рассматриваемый участок земной поверхности плоским, так же как атмосферу над ним — состоящей из параллельных земной поверхности горизонтальных бесконечно тонких слоев. Мы будем считать также, что каждый из таких слоев однороден, т. е. что плотность и другие интересующие нас свойства атмосферы являются функциями только одного расстояния x от земной поверхности.

Доходящая до земной поверхности лучистая энергия неоднородна, так как состоит из лучей с разными длинами волн. Влияние атмосферы неодинаково сказывается на лучах различных длин волн, так что не только интенсивность, но и состав солнечного луча изменяется от одной точки его траектории к другой при прохождении сквозь атмосферу. Но все же при указанных выше допущениях при данном угле падения z , который принимается равным зенитному расстоянию Солнца, напряжение солнечной радиации является функцией одного x , которую мы можем обозначить через $J'(x)$. Функциональную зависимость можно определить, исходя из следующих соображений.

Солнечный луч, проходя через слой атмосферы толщиной dx на высоте x , ослабляется благодаря поглощению и рассеянию. Поскольку мы рассматриваем поглощающую среду в этом слое как однородную, мы можем принять, что это ослабление пропорционально напряжению радиации и пропорционально длине пути луча в этом слое. Путь этот равен $\sec z dx$, и мы можем написать

$$dJ'(x) = -iJ'(x) \sec z dx,$$

где i — величина, зависящая от свойств данного слоя атмосферы. Обе части нашего равенства положительны, так как с увеличением x напряжение радиации увеличивается.

Это уравнение выражает закон Бугера-Ламберта, который лежит в основе всей теории поглощения света. Первоначально этот закон был установлен только для видимой части солнечной радиации; но поскольку нет никакого принципиального различия между видимой и невидимой радиацией, можно применить это уравнение ко всему потоку лучистой энергии Солнца.

Величина i в силу сделанных допущений является функцией x , которую мы обозначим через $i(x)$; согласно сказанному выше, ее следует считать независимой от z . Мы имеем, таким образом:

$$\frac{dJ'(x)}{J'(x)} = -i(x) \sec z dx.$$

Считая z постоянным вдоль всего луча, мы сразу можем проинтегрировать это уравнение. Пусть высота атмосферы, способной оказывать свое влияние на луч, равна $x = h$; обозначая напряжение радиации на этой высоте через $J'(h)$, получаем

$$\ln \frac{J'(x)}{J'(h)} = -\sec z \int_h^x i(x) dx$$

или

$$J'(x) = J'(h) e^{-\sec z \int_h^x i(x) dx} \quad (1)$$

Напряжение солнечной радиации у самой земной поверхности равно, таким образом:

$$J'(0) = J'(h) e^{-\sec z \int_0^h i(x) dx}$$

Величину

$$p = e^{-\int_0^h i(x) dx} \quad (2)$$

мы назовем коэффициентом прозрачности атмосферы. Окончательно мы находим равенство

$$J'(0) = J'(h) p^{\sec z}, \quad (3)$$

из которого ясен физический смысл величины p : при положении Солнца в зените, т. е. при $z = 0$, до земной поверхности доходит солнечная радиация, равная $J'(h) \cdot p$. Следовательно, p есть правильная дробь, определяющая часть солнечной радиации, которая доходит до земной поверхности при $z = 0$.

§ 19. Математическое представление влияния атмосферы на облучение Земли. Мы переходим теперь к математическому описанию влияния атмосферы на условия облучения на земной поверхности. Прежде всего мы предположим, что атмосфера безоблачна, так что солнечные лучи испытывают в ней только рассеяние и поглощение. Так как толщина атмосферы h незначительна по сравнению с расстоянием от Земли до Солнца ρ , то мы можем считать, что $J'(h)$ — напряжение радиации на верхней границе атмосферы — равно

$$J'(h) = \frac{J_0}{\rho^2}, \quad (4)$$

где ρ измеряется в радиусах земной орбиты. Тогда то же напряжение на земной поверхности вследствие (3) равно

$$J'(0) = \frac{J_0}{\rho^2} p^{\sec z}. \quad (5)$$

Солнечные лучи составляют с нормалью к земной поверхности, принимаемой за горизонтальную, угол z (равный зенитному расстоянию Солнца), так что единица площади этой последней за единицу времени получает количество прямой радиации $\frac{\partial w'}{\partial t}$, равное в силу вышесказанного

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = \frac{J_0}{\rho^2} p^{\sec z} \cos z. \quad (6)$$

При $p = 1$, т. е. при абсолютно прозрачной атмосфере, это равенство тождественно с равенством (3) раздела I. Там же было показано, что

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \psi_1, \quad (7)$$

где ψ_1 — географическая долгота места, отсчитываемая от меридиана, в котором в данный момент находится Солнце. Таким образом уравнения (6) и (7) выражают закон распределения радиации по земной поверхности. Поскольку $p < 1$ и z может лежать только в первом квадранте, облучение достигает максимума там, где $z = 0$, т. е. там, где Солнце находится в зените. Облучение равно нулю во всех тех точках земной поверхности, где $z = \frac{\pi}{2}$, т. е. где удовлетворяется уравнение (10) раздела I.

Все это справедливо лишь постольку, поскольку не принимается во внимание рефракция. Вследствие рефракции граница освещенной части земной поверхности отодвигается на $34'54''$ в сторону неосвещенной части, так что в каждый данный момент прямым солнечным лучам доступно $50,5\%$ земной поверхности.

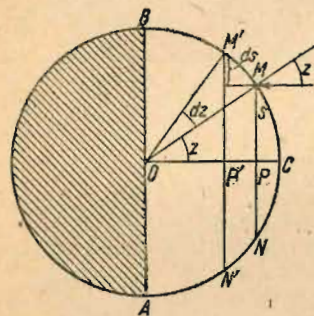


Рис. 10.

Перейдем теперь к определению полного количества прямой солнечной радиации J_t' , которое получает земная поверхность без учета рефракции.

Пусть ABC (рис. 10) представляет собой освещенное полушарие, причем в точке C солнечные лучи падают на земную поверхность отвесно. Соединяя любую точку освещенного полушария M с центром O радиусом OM, мы увидим, что последний составляет с прямой OC угол z , равный зенитному расстоянию Солнца в точке M. Вращая OM вокруг OC, мы заставим точку M описать на земной поверхности круг, во всех точках

которого Солнце имеет одно и то же зенитное расстояние z . Увеличивая z на dz , мы получим на земной поверхности другой бесконечно близкий круг.

Все точки пояса, заключенного между этими кругами и имеющего поверхность df , получают количество радиации, определенное уравнением (5). Умножая $J'(0)$ на df_1 , проекцию df на плоскость, перпендикулярную к лучам, мы найдем количество тепла, получаемое в единицу времени указанным поясом. Положим $PM = s$, $P'M' = s + ds$; тогда $df_1 = 2\pi s ds$, так что элемент df получает в единицу времени количество энергии, равное $J'(0) 2\pi s ds$. Но $s = r \sin z$, $ds = r \cos z dz$, и общее количество тепла, получаемого освещенным полушарием в единицу времени, равно

$$J_t' = 2\pi r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\sec z} \sin z \cos z dz. \quad (8)$$

Для вычисления интеграла, стоящего в правой части, можно воспользоваться механическими квадратурами.

Сравнивая полученное выражение с тем, которое мы имели, не

принимая в расчет атмосферу, мы увидим, что отношение этих величин равно

$$x = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\sec z} \sin z \cos z dz. \quad (9)$$

Здесь мы приводим числовые значения x при различных коэффициентах прозрачности:

p	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
x	0,435	0,550	0,680	0,830	1,000

Среднее облучение на широте φ (с учетом влияния атмосферы), которое мы обозначим через w' , очевидно, равно

$$w' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{dW'}{dt} d\psi, \quad (10)$$

где $\frac{dW'}{dt}$ дается выражением (5) и φ_0 — уравнением (10) раздела I. Для вычисления этой величины можно также воспользоваться механическими квадратурами.

Суточная сумма радиации на широте φ , которую мы в данном случае обозначим через W_τ' , равна

$$W_\tau' = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} \frac{dW'}{dt} d\omega, \quad (11)$$

где ω_0 можно найти из уравнения (20) раздела I. Эта величина вычисляется тоже с помощью механических квадратур. Между величинами w' и W_τ' существует такое же соотношение, как между величинами w и W_τ . Вычислив поэтому несколько значений W_τ' , равномерно распределенных в течение года, нанеся на график в виде абсцисс время от начала года до полудней соответствующих дней и в виде ординат — величины $\frac{W_\tau'}{\tau}$, мы получим график w' в виде функции времени, т. е. кривую годового хода облучения. Площадь этой кривой, заключенная между ординатами t_1 и t_2 , т. е. интеграл

$$W' = \int_{t_1}^{t_2} w' dt, \quad (12)$$

представляет собой среднее облучение широты φ в течение интервала времени $(t_2 - t_1)$. Эту величину легко определить при помощи планиметра или по правилу Симпсона.

Для того чтобы вычислить количество радиации, получаемой данным местом в течение астрономических сезонов, т. е. для определения величин W_I' , W_{II}' , W_{III}' , W_{IV}' или W_s' и W_w' , удобнее принять λ за

независимую переменную, так как в этом случае, принимая во внимание (10),

$$W' = \int_{\lambda'}^{\lambda''} w' \frac{dt}{d\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda \frac{dt}{d\lambda} \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{dw'}{dt} d\psi_1.$$

Из (6) следует:

$$W' = \frac{J_0}{2\pi} \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda \frac{1}{\rho^2} \frac{dt}{d\lambda} \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} p^{\sec z} \cos z d\psi_1,$$

и из формулы (34) раздела I:

$$W' = \frac{T}{2\pi^2} \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} p^{\sec z} \cos z d\psi_1, \quad (13)$$

где z дано формулой (7).

До сих пор мы не принимали во внимание облаков. Однако облака наблюдаются в атмосфере так часто и в таком количестве, что в среднем более половины неба оказывается закрытой облаками. Вследствие того что облака обладают большой отражательной способностью, значительная часть лучистой энергии Солнца отражается обратно в мировое пространство, выпадая таким образом из теплового баланса Земли. Для того чтобы в наших вычислениях учесть влияние облачности на облучение земной поверхности, приходится пользоваться средним значением облачности, так как колебания облачности во времени и пространстве не могут быть охвачены теорией. Различия в высоте облаков, подчиненные более правильным закономерностям, можно не принимать во внимание. Мы впоследствии увидим, что тепловое состояние атмосферы и земной поверхности мало зависит от той высоты, на которой происходит отражение отдельных частей солнечной радиации, и что нагревание атмосферы идет, главным образом, за счет земного излучения. Поэтому можно предположить, что отражение происходит на верхней границе атмосферы, т. е. что теряемая таким образом часть солнечного тепла должна быть вычтена из величины $J'(h)$, данной равенством (4).

Совершенно так же обстоит дело с той частью солнечной радиации, которая возвращается в мировое пространство благодаря рассеянию в атмосфере и отражению у земной поверхности: не совершая большой ошибки, мы можем величину этих потерь вычесть из общего количества радиации до вступления лучей Солнца в атмосферу.

Не представляло бы особенных трудностей принять во внимание и отражение от облаков, имеющих заданную высоту, и реальное отражение, происходящее у самой земной поверхности; можно было бы также допустить, что рассеяние света происходит вдоль всей траектории солнечного луча в атмосфере, но этим мы только бесполезно усложнили бы все вычисления. Мы примем, таким образом, что из всей попадающей на верхнюю границу атмосферы солнечной радиации часть A отражается облаками, частицами воздуха и земной поверхностью обратно в мировое пространство, т. е. примем, что в атмосферу проникает всего

$$J''(h) = (1 - A) \frac{J_0}{\rho^2}. \quad (14)$$

Величину A мы назовем *отражательной способностью Земли вместе с атмосферой*.

Между прочим, в нее входит только та часть рассеянной радиации, которая возвращается в мировое пространство; остальная часть, ослабляемая по дороге поглощением, достигает вместе с прямой солнечной радиацией поверхности Земли, где и поглощается нацело, поскольку мы уже приняли во внимание отражение от земной поверхности.

Мы увидим, что для объяснения тепловых явлений на земной поверхности будет иметь значение только сумма прямой и рассеянной радиации, поглощаемой этой поверхностью. Поэтому нет надобности отделять друг от друга оба вида радиации; достаточно определить их общее ослабление при поглощении в атмосфере.

Обозначим через $J''(x)$ напряжение прямой и рассеянной радиации Солнца на высоте x . В элементарном слое толщиной dx на этой высоте будет поглощена определенная часть солнечной радиации; мы можем, как прежде, считать ее пропорциональной напряжению последней и длине пути луча в этом слое. В то время, как прямая радиация проходит этот слой, составляя с вертикалью угол z , лучи рассеянной радиации идут во всех направлениях, имея самые разнообразные углы падения. Тем не менее, вследствие слабости диффузной радиации по сравнению с прямой, мы можем за среднюю длину пути всех лучей принять $\sec z dx$. Тогда

$$dJ''(x) = a_1(x) J''(x) \sec z dx,$$

где $a_1(x)$ — поглощательная способность рассматриваемого слоя при вертикальном падении лучей. Полученное уравнение аналогично дифференциальному уравнению для $J'(x)$, и интегрирование его между границами x и h дает

$$J''(x) = J''(h) e^{-\sec z \int_x^h a_1(x) dx} \quad (15)$$

На земную поверхность падает и ею поглощается количество тепла, равное

$$J''(0) = J''(h) e^{-\sec z \int_0^h a_1(x) dx} \quad (16)$$

Величину

$$p_a = e^{-\int_0^h a_1(x) dx} \quad (17)$$

мы назовем *коэффициентом прозрачности атмосферы для прямой и рассеянной радиации*. Мы имеем

$$J''(0) = J''(h) p_a^{\sec z}. \quad (18)$$

Когда Солнце находится в зените, $J''(0) = J''(h) p_a$, т. е. число p_a дает меру ослабления в атмосфере солнечной радиации при ее вертикальном падении. Величина $1 - p_a$ называется *коэффициентом поглощения солнечной радиации*.

Таблица 8
Суточные суммы тепла при различных коэффициентах прозрачности атмосферы

лица 8
ных коэффициентах прозрачности атмосферы

$$J_0 = 2 \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{ мин}}$$

Коэффициент прозрачности $p = 0,6$								
Долгота Солнца	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
+90°		131	308	129				
+80°	6	163	319	161	5			
+70°	48	241	360	239	47			
+60°	124	322	419	318	122	10		10
+50°	208	388	464	384	205	60	20	60
+40°	291	429	492	434	287	134	77	135
+30°	361	467	496	463	356	220	157	222
+20°	416	473	479	468	410	302	244	305
+10°	450	458	441	453	443	377	333	381
0°	461	420	383	416	454	435	409	440
-10°	450	364	312	360	443	475	471	479
-20°	416	291	229	288	410	490	512	495
-30°	361	212	147	210	356	485	530	490
-40°	291	129	72	128	287	455	525	459
-50°	208	58	19	57	205	403	496	407
-60°	124	10		10	122	333	447	337
-70°	48				47	250	385	258
-80°	6				5	169	340	171
-90°						135	329	137
Коэффициент прозрачности $p = 0,7$								
Долгота Солнца	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
+90°		224	454	222				
+80°	13	251	456	249	13			
+70°	82	334	481	331	81			
+60°	179	421	536	416	177	23	1	24
+50°	280	492	580	487	276	94	38	95
+40°	374	545	605	540	369	188	114	190
+30°	454	573	606	567	447	290	216	292
+20°	514	578	586	573	506	386	319	390
+10°	550	559	540	554	543	470	421	474
0°	563	516	476	511	555	535	508	540
-10°	550	453	394	449	543	580	577	586
-20°	514	372	299	368	506	600	625	606
-30°	454	279	202	276	447	594	647	600
-40°	374	181	106	179	369	565	646	571
-50°	280	91	35	90	276	510	620	515
-60°	179	23	1	22	177	436	572	440
-70°	82				81	347	514	350
-80°	13				13	261	487	263
-90°						233	484	235
Дата 1930 мировое время	21 марта	6 мая	22 июня	8 августа	23 сентября	8 ноября	22 декабря	4 февраля

Географическая широта

Географическая широта

Коэффициент прозрачности $p = 0,8$								
Долгота Солнца	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
+90°		360	634	357				
+80°	30	376	627	372	30			
+70°	132	477	624	442	130	1		1
+60°	250	536	670	531	247	45	5	45
+50°	367	609	707	603	361	140	66	141
+40°	470	661	730	655	463	255	169	257
+30°	556	689	728	682	548	371	286	374
+20°	620	690	699	683	611	477	405	482
+10°	659	669	649	663	650	572	519	577
0°	672	621	577	615	663	645	616	651
-10°	659	551	486	546	650	694	693	701
-20°	620	460	380	456	611	716	747	722
-30°	556	358	268	354	548	715	777	722
-40°	470	246	158	243	463	686	779	692
-50°	367	135	62	134	361	631	755	638
-60°	250	43	4	43	247	556	715	561
-70°	132	1		1	130	463	666	468
-80°					390	669	669	393
-90°	30				374	676	676	377
Коэффициент прозрачности $p = 0,9$								
Долгота Солнца	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
+90°		548	852	542				
+80°	69	544	838	539	68			
+70°	205	589	798	583	202	5		5
+60°	343	670	824	663	338	82	16	83
+50°	469	740	854	733	463	206	110	207
+40°	579	790	867	782	571	338	236	341
+30°	671	815	857	807	661	467	373	472
+20°	737	813	824	805	727	583	506	589
+10°	778	787	767	779	767	685	629	691
0°	792	736	689	729	780	763	735	771
-10°	778	660	589	654	767	816	819	824
-20°	737	562	474	556	727	844	879	852
-30°	671	450	350	446	661	845	915	854
-40°	579	326	221	323	571	819	926	827
-50°	469	198	103	196	463	768	911	775
-60°	343	79	15	78	338	695	880	702
-70°	205	5		4	202	611	852	617
-80°					564	894	894	570
-90°	69				568	910	910	573
Дата 1930 мировое время	21 марта	6 мая	22 июня	8 августа	23 сентября	8 ноября	22 декабря	4 февраля

Из (14) и (18) следует, что:

$$J''(0) = (1 - A) \frac{J_0}{\rho^2} p_a^{\sec z} \quad (19)$$

Эти лучи составляют (поскольку мы игнорируем рефракцию) угол z с нормалью к земной поверхности. Вследствие этого единица земной поверхности за единицу времени поглощает определенное количество прямой и рассеянной радиации, которое мы обозначим через $\frac{dW''}{dt}$ и которое равно

$$\frac{dW''}{dt} = (1 - A) \frac{J_0}{\rho^2} p_a^{\sec z} \cos z. \quad (20)$$

Сравнение равенств (6) и (20) показывает, что все расчеты прямой солнечной радиации при безоблачном небе могут быть применены к вычислению прямой и рассеянной радиации, поглощаемой земной поверхностью, если на место солнечной постоянной подставить величину $J_0(1 - A)$ и коэффициенту прозрачности придать значение p_a .

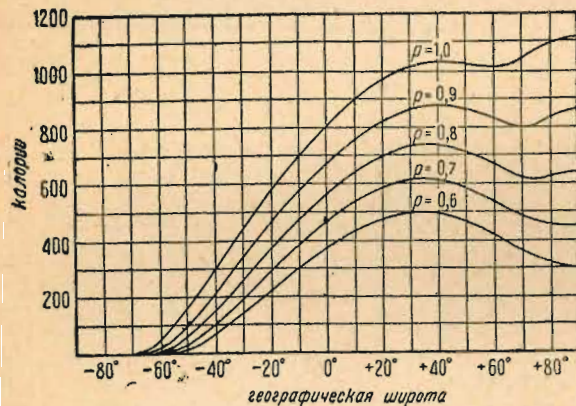


Рис. 11. Суммы тепла в момент летнего солнцестояния при различных значениях коэффициента прозрачности p .

широты и для значений коэффициента прозрачности $p = 0,6, 0,7, 0,8$ и $0,9$ для восьми дней года. Для тех же дней мы можем найти сведения в табл. 1, где положено $p = 1$ и, таким образом, исключено влияние атмосферы.

По табл. 1 и 8 с помощью интерполяции можно вычислить суточную сумму радиации для любой широты, любого дня года, а также для какого угодно значения коэффициента прозрачности, лежащего между $0,6$ и $1,0$.

График на рис. 11, составленный по данным табл. 8, наглядно показывает, как велико влияние атмосферы на облучение земной поверхности. На нем нанесены суточные суммы радиации, получаемые различными широтами в день летнего солнцестояния, дополненные по табл. 1 суточными суммами для случая $p = 1$.

Из рис. 11 ясно видна роль атмосферного поглощения в различных широтах. При наличии атмосферы с увеличением зенитного расстояния Солнца облучение уменьшается не только вследствие увеличения

и рассеянной радиации, поглощаемой земной поверхностью, если на место солнечной постоянной подставить величину $J_0(1 - A)$ и коэффициенту прозрачности придать значение p_a .

§ 20. Числовые результаты. Для того чтобы дать общее представление о влиянии атмосферы на инсоляционные условия Земли, в табл. 8 (стр. 64—65) приведены суточные суммы тепла для каждого десятого градуса

угла падения, но и вследствие увеличения длины пути луча в атмосфере. Связанное с этим ослабление радиации тем заметнее, чем меньше коэффициент прозрачности. При малых p влияние географической широты сказывается более резко, и тепловые условия более высоких широт становятся менее благоприятными. Мы говорили ранее, что при отсутствии атмосферы в момент солнцестояния полюс получает большее количество тепла; при $p = 0,9$ это явление уже не наблюдается. При коэффициенте прозрачности $p = 0,7$ полюс получает даже во время солнцестояния меньше тепла, чем любая другая широта соответствующего полушария. Для $0,7 \leq p \leq 0,9$ в этот момент над полюсом наблюдается еще вторичный максимум получаемого количества тепла; для $p \leq 0,7$ минимум облучения остается постоянным на полюсе.

Табл. 9 дает суммы тепла, получаемые различными широтами в течение летнего и зимнего полугодий и в течение всего года для зна-

Таблица 9
Сумма радиации, достигающей нижней границы атмосферы при различных коэффициентах прозрачности атмосферы

в $\frac{\text{кал}}{\text{см}^2}$ при $J_0 = 2 \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{ мин}}$

Географическая широта	$p = 0,6$			$p = 0,8$		
	Летнее полугодие	Зимнее полугодие	Весь год	Летнее полугодие	Зимнее полугодие	Весь год
0°	78 050	78 050	156 100	115 500	115 500	231 000
10°	84 150	68 480	152 630	123 070	103 610	226 680
20°	86 150	55 960	142 110	126 230	87 940	214 170
30°	84 360	41 760	126 120	125 070	69 530	194 600
40°	78 470	27 140	105 610	118 970	49 750	168 720
50°	68 900	14 100	83 000	108 660	29 980	138 640
60°	56 700	5 150	61 850	94 990	13 360	108 350
70°	42 600	1 050	43 650	79 000	4 000	83 000
80°	30 720	0	30 720	67 110	320	67 430
90°	25 980		25 980	62 480		62 480
	$p = 0,7$			$p = 0,9$		
0°	95 930	95 930	191 860	136 750	136 750	273 500
10°	102 880	82 200	188 080	145 060	123 910	268 970
20°	105 510	71 000	176 510	149 060	106 870	255 920
30°	103 720	54 800	158 520	148 320	87 100	235 420
40°	97 720	37 240	134 960	142 640	64 900	207 540
50°	87 620	21 040	108 660	132 540	42 080	174 720
60°	74 260	8 420	82 680	119 390	26 830	140 220
70°	59 010	2 210	61 220	104 350	7 350	111 500
80°	46 180	110	46 290	95 300	1 050	96 350
90°	41 230		41 230	92 670		92 670

чений $p = 0,6, 0,7, 0,8$ и $0,9$. Данные этой таблицы представлены графически на рис. 12, на котором нанесены также кривые для $p = 1,0$, построенные по данным табл. 2. Влияние атмосферы и здесь сказывается совершенно отчетливо. Количество радиации, пропускаемое атмосферой до земной поверхности, с уменьшением коэффициента прозрачности быстро уменьшается к полюсу. При $p = 0,6$ полюс получает всего $\frac{1}{5}$ того годового количества тепла, которое достигает верхней границы атмосферы на полюсе.

Было бы ошибкой считать, что параллельно с такой сильной убылью к полюсу получаемых сумм радиации идет столь же значительное понижение температуры. Чем больше ослабляет атмосфера лучистую энергию Солнца, тем больше тепла накапливается в результате поглощения в ней самой и этим достигается известная компенсация потерь тепла.

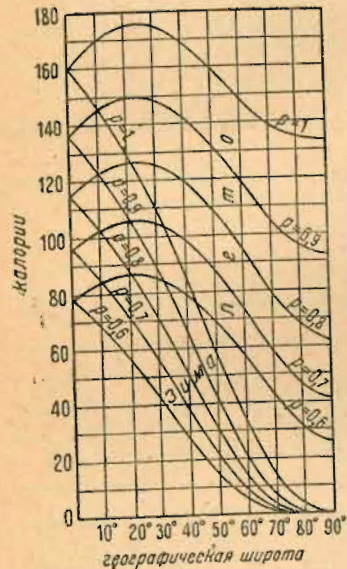


Рис. 12. Полугодиевые суммы радиации при различных значениях коэффициента прозрачности p .

В следующих табличках (табл. 8а и 8б) приведены, по работе Перль, суточные суммы тепла для восьми широт на 15-е число каждого месяца, а также полученные интерполяцией суммы тепла для тех восьми дней года, которые фигурируют в табл. 8. Далее, с помощью табл. 8 были вычислены для этих восьми дней средние коэффициенты прозрачности, приведенные в табл. 8в. В нижней строке этой таблицы внесены средние коэффициенты прозрачности для всего земного шара (северного полушария), вычисленные с учетом площади каждой широтной зоны, т. е. величины

$$p = \frac{\int p \cos \varphi d\varphi}{\int \cos \varphi d\varphi}$$

¹⁾ Дополнение переводчика.

Таблица 8а

Суточные суммы тепла в $\frac{\text{кал}}{\text{см}^2}$ на 15-е число каждого месяца

φ°	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
0	480	512	530	518	500	485	490	520	550	547	507	475
15	425	480	545	575	575	567	570	567	540	485	427	400
30	297	380	482	565	617	625	610	567	490	400	312	270
45	152	245	367	495	582	625	605	537	415	285	180	130
50	112	175	310	460	550	585	570	490	350	215	117	55
60	77	155	240	420	560	627	602	477	295	140	47	3
75	0	7	85	280	515	637	595	397	155	32	0	0
90	0	0	0	155	482	667	610	305	27	0	0	0

Таблица 8б

Суточные суммы тепла через 45° долготы солнца

φ°	4/II	21/III	6/IV	22/VI	6/VIII	23/IX	8/XI	22/XII
0	500	526	506	484	510	552	518	476
15	462	560	577	569	570	527	439	400
30	351	518	605	624	583	468	332	271
45	205	421	561	627	563	385	196	130
50	171	373	532	584	517	314	135	51
60	128	309	534	627	520	250	69	0
75	0	157	456	640	468	116	0	0
90	0	25	398	673	432	0	0	0

Таблица 8в

Средние коэффициенты прозрачности

φ°	4/II	21/III	6/V	22/VI	8/VIII	22/IX	8/XI	22/XII	Ср. год.
0	0,660	0,663	0,690	0,708	0,699	0,697	0,684	0,669	0,684
15	0,730	0,727	0,709	0,706	0,707	0,702	0,711	0,733	0,716
30	0,772	0,762	0,729	0,715	0,714	0,721	0,752	0,779	0,743
45	0,808	0,803	0,737	0,708	0,743	0,770	0,803	0,823	0,774
50	0,845	0,807	0,734	0,703	0,736	0,745	0,789	0,746	0,763
60	—	0,853	0,798	0,768	0,790	0,803	0,865	—	(0,813)
75	—	0,920	0,828	0,807	0,839	0,866	—	—	—
90	—	—	(0,820)	(0,816)	(0,840)	—	—	—	—
Ср. . . .	0,736	0,735	0,732	0,720	0,730	0,738	0,745	0,744	0,735

Наименьшая средняя прозрачность наблюдается, конечно, на экваторе (благодаря значительной влажности атмосферы), где она падает до 0,66 в феврале. К северу прозрачность заметно увеличивается, доходя в полярных странах до 0,92 даже в среднем выводе. Под всеми широтами прозрачность имеет резкий годовой ход, наиболее резкий, повидимому, в умеренных широтах с их ясно выраженными сезонами. Наиболее постоянна прозрачность под широтой 15°. Максимум прозрачности приходится везде почти на зиму, минимум — на лето. Данные для экватора, вероятно, слишком немногочисленны, для того чтобы выяснить довольно сложный ход радиации и прозрачности при двойной смене времен года.

Средняя годовая прозрачность атмосферы для всего земного шара оказывается равной 0,735, т. е. значительно выше того, что принимал, например, Траберт (0,6).

Нет никакого сомнения, что более детальная обработка уже имеющихся актинометрических материалов позволит доказать зависимость прозрачности атмосферы не только от географической широты, но и от деталей общей циркуляции атмосферы, от различной степени континентальности климата и т. д., а также, что эти уточненные актинометрические данные позволят и дальше углубить решение проблемы солнечных климатов.

§ 21. Баланс лучистой энергии Земли. Если в один и тот же день измерить напряжение прямой солнечной радиации J при двух различных зенитных расстояниях Солнца z_1 и z_2 , равное, согласно формуле (3),

$$J'(0, z_1) = \frac{J_0}{\rho^2} p^{\sec z_1}, \quad J'(0, z_2) = \frac{J_0}{\rho^2} p^{\sec z_2},$$

то можно было бы из этих двух уравнений определить обе неизвестных величины J_0 и p — солнечную постоянную и коэффициент прозрачности. Практическое осуществление этой идеи, однако, сталкивается с огромными трудностями. Прежде всего солнечная радиация состоит из лучей различной длины волны, каждому из которых соответствует свой коэффициент прозрачности, так что все написанные выше уравнения не являются строго точными. Далее, оптические свойства атмосферы вследствие изменения содержания в ней водяного пара очень непостоянны; кроме того, и самые измерения напряжения солнечной радиации неизбежно связаны с многочисленными ошибками. Неудивительно поэтому, что более старые определения солнечной постоянной давали очень противоречивые результаты. Только в последнее время удалось в значительной степени преодолеть трудности определения этой величины и получить надежные значения солнечной постоянной. Мы позаимствуем из новейшей подробной и критической сводки Бернхеймера¹⁾ (к которой отсылаем читателя, интересующегося деталями вопроса) следующие данные: 1244 дня наблюдений между 1912 и 1920 гг. дают среднее значение солнечной постоянной, равное $1,946 \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{мин}}$. Это число,

¹⁾ Bernheimer, *Strahlung und Temperatur der Sonne*, Handbuch d. Astrophysik, т. IV, Berlin 1929.

тем не менее, нельзя считать окончательным; очень вероятно, что в дальнейшем придется его немного увеличить, подойдя, таким образом, очень близко к значению 2 кал.

Как мы уже говорили, в основу наших вычислений положено округленное значение $J_0 = 2 \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{мин}}$, которое обычно употребляется в метеорологии. Такая точность нам тем более достаточна, что среднее значение прозрачности земной атмосферы нам известно лишь очень приблизительно.

Величина коэффициента прозрачности p сильно колеблется со временем и от места к месту. Исследования Смитсоновского института, проведенные недавно, дают для Вашингтона, лежащего на высоте 10 м над уровнем моря, среднюю величину p около 0,7, а для Маунт-Вильсон на высоте 1790 м — немного больше 0,8; на Маунт-Уитней в Калифорнии на высоте 4420 м коэффициент прозрачности нередко достигает 0,90. Влажные низины дают вновь очень низкие значения p . Среднее значение p для всего земного шара вычислить очень трудно; Траберт оценивает его в 0,6.

Отражательная способность A Земли вместе с атмосферой также может быть оценена лишь грубо приблизительно. В связи с этим Аббот и Фоуль пытались установить баланс лучистой энергии Земли следующим образом. По данным Аррениуса средняя облачность на земном шаре равна 52%, из которых на низкие облака (лежащие ниже уровня Маунт-Вильсон 1790 м) падает 21% и на высокие — 31%. Рассматривая любой достаточно длинный интервал времени, например, „средний год“, можно считать, что в течение 48% продолжительности этого интервала небо безоблачно, в течение 21% времени небо покрыто низкими облаками и в остальные 31% времени оно покрыто высокими облаками. В течение безоблачного времени 21,5% солнечной радиации поглощаются (в том числе 12% селективно), 9,5% отражаются в мировое пространство, так что земной поверхности достигают лишь 69% в виде прямой (50%) и рассеянной (19%) радиации. Это составляет $0,48 \cdot 69 = 33\%$ годовой суммы радиации. Так как средняя отражательная способность земной поверхности может быть положена равной 0,08 (для водной поверхности она равна 0,06, для пустынь и снежного покрова 0,15), то из этих 33% обратно отражаются 2,6%; из них, однако, благодаря поглощению в атмосфере в мировое пространство уходят лишь 2,3%. В течение периода низкой облачности до уровня облаков доходят 85% солнечной радиации, т. е. $0,21 \cdot 85 = 17,9\%$ ее годового количества. Считая отражательную способность облаков равной 0,65, мы найдем, что обратно отражаются всего $0,65 \cdot 17,9 = 11,6\%$, из которых лишь 11% уходят в мировое пространство. В то время когда имеются высокие облака, до них доходят 90% солнечной радиации, т. е. $0,31 \cdot 90 = 28\%$ годовой суммы радиации. Из них $0,65 \cdot 28 = 18,2\%$ отражаются обратно, причем 17,7% возвращаются в мировое пространство. Благодаря диффузному отражению в мировое пространство возвращаются во время безоблачного периода 9,5%, т. е. $0,48 \cdot 9,5 = 4,5\%$, при низких облаках 4%, т. е. $0,21 \cdot 4 = 0,8\%$, и при высоких облаках 3%, т. е. $0,31 \cdot 3 = 0,9\%$ годовой суммы радиации,

получаемой Землей от Солнца. Таким образом атмосфера в целом диффузно отражает в пространство около 60%. В итоге мы имеем следующее отражение, достигающее мирового пространства: от земной поверхности 2,30%, от нижней облачности 110%, от верхней 17,70% и от атмосферы 60%. В сумме это составляет 370%.

Следовательно, мы должны положить $A = 0,37$. Траберт считает, однако, что облака и атмосфера одни отражают в пространство 40% всей солнечной радиации. Его баланс следующий: на границе атмосферы 1 см² получает за день около 720 кал. Из них облака отражают около 160 кал, на диффузное отражение идет 130 кал и поглощается в атмосфере 140 кал, остающиеся 290 кал достигают земной поверхности в виде прямой (160 кал) и рассеянной (130 кал) радиации.

Прибавляя к 40%, отражаемым облаками и атмосферой, согласно приведенным расчетам еще 2,30%, отраженных от земной поверхности, мы получим значение $A = 0,423$. Как среднее из обоих результатов мы примем

$$A = 0,40.$$

В дальнейшем это число окажется весьма подходящим.

Что касается численного значения коэффициента прозрачности p_a земной атмосферы для прямой и рассеянной радиации, то мы видим, что по Траберту из всего количества солнечной радиации, получаемой освещенным полушарием, в атмосфере поглощается около 19,40%. Из баланса лучистой энергии Аббота и Фоуля для этой величины мы получим значение 220%, полагая, что облака пропускают в виде диффузного излучения $\frac{1}{3}$ и поглощают $\frac{2}{3}$ той части радиации Солнца, которая ими не отражается в мировое пространство. Для вычисления величины p_a мы округляем оба эти числа до 200%. Тогда вычисление проводится следующим образом.

В соответствии с принятой нами величиной A в атмосферу освещенного полушария проникает 60% всей приходящей солнечной радиации. Атмосферой поглощается 20% последней, т. е. $\frac{20}{0,60} = 33,30%$ проникающей в нее радиации. Около 67% последней доходят до земной поверхности в виде прямой и рассеянной солнечной радиации; следовательно, поскольку мы принимаем во внимание все освещенное полушарие, следует положить

$$p_a = 0,67.$$

Если мы взглянем на табличку на стр. 61, то увидим, что этому проценту приходящей радиации соответствует коэффициент прозрачности $p_a = 0,79$ (при вертикальном падении лучей) или, округленно:

$$p_a = 0,80.$$

Следовательно, рассматривая количество радиации, получаемое земной поверхностью под определенной широтой, мы должны положить в ось u наших вычислений полученное значение коэффициента прозрачности.

Особенно важен коэффициент прозрачности атмосферы для теплового излучения земной поверхности, который мы обозначим через p'_a . По

исследованиям Аббота и Фоуля, даже при безоблачном небе, только 10% земного излучения уходят в мировое пространство. Поскольку облака совершенно не пропускают этого излучения, а средняя облачность равна около 52%, то при средних условиях следует положить

$$p'_a = 0,05.$$

Земное излучение поглощается главным образом водяным паром и в меньшей степени углекислотой и сухим воздухом. Однако более или менее удовлетворительно выразить в числах участие этих трех газов в явлении поглощения до сих пор не удалось.

§ 22. Строение атмосферы. Закон Беера. До сих пор мы не касались вопроса о математической форме функции $a_1(x)$, ибо имели дело

только с определенным интегралом $\int_0^h a_1(x) dx$. В дальнейшем нам

будет необходимо знать выражение этой функции. Для этого мы должны прежде всего ответить на вопрос, как изменяются плотность и состав земной атмосферы с высотой x .

Земная атмосфера является смесью различных газов и водяного пара. Эти газы находятся под действием притяжения Земли и, кроме того, подчиняются закону Дальтона, по которому парциальное давление какого-либо газа в атмосфере не зависит от присутствия других газов; поэтому каждый газ мы можем рассматривать отдельно. Некоторые особенности водяного пара мы рассмотрим далее.

Предположим сначала, что абсолютно неподвижная земная атмосфера состоит из одного газа, для которого справедливо уравнение состояния

$$pv = R\theta.$$

Здесь v означает объем единицы массы, p — давление газа, θ — абсолютную температуру газа и R — так называемую газовую постоянную, зависящую от природы рассматриваемого газа. Обозначая через $\rho(x)$ плотность, т. е. массу единицы объема, на высоте x , на основании сказанного выше получаем равенство

$$p(x) = R\theta(x)\rho(x). \quad (21)$$

Удельный вес воздуха на высоте x равен

$$\sigma(x) = g(x) \cdot \rho(x), \quad (22)$$

где $g(x)$ означает ускорение силы тяжести на той же высоте x . Обозначая величину этого ускорения на земной поверхности через g и отбрасывая чрезвычайно малое притяжение самой атмосферы, мы получим по закону Ньютона

$$\frac{g(x)}{g} = \frac{r^2}{(r+x)^2},$$

где r — радиус Земли. Таким образом

$$\sigma(x) = \frac{r^2 \cdot g \cdot \rho(x)}{(r+x)^2}, \quad (23)$$

Если мы поднимаемся по вертикали на dx , то давление газа увеличится на

$$dp(x) = -\sigma(x) dx, \quad (24)$$

ибо по мере поднятия давление на единицу площади уменьшается постольку, поскольку уменьшается вес давящего столба газа. Дифференцируя (21), мы получаем

$$dp(x) = R\rho(x) d\theta(x) + R\theta(x) d\rho(x),$$

т. е., имея в виду (23) и (24),

$$R\rho(x) d\theta(x) + R\theta(x) d\rho(x) = -\frac{r^2}{(r+x)^2} g\rho(x) dx. \quad (25)$$

Это уравнение устанавливает связь между температурой и плотностью атмосферы и высотой x . Так как высота практически заметной атмосферы очень мала по сравнению с размерами Земли, т. е. число $\frac{x}{r}$ по сравнению с единицей может быть опущено, то мы можем придать уравнению (25) более простой вид:

$$R\rho(x) d\theta(x) + R\theta(x) d\rho(x) = -g\rho(x) dx. \quad (26)$$

Если бы мы имели еще одно уравнение между величинами $\theta(x)$, $\rho(x)$ и x , то мы могли бы определить математическую форму функций $\theta(x)$ и $\rho(x)$. Ниже мы выведем это недостающее уравнение, но уже здесь найдем функцию $\rho(x)$, если ограничимся самыми нижними слоями атмосферы или не будем принимать во внимание изменения температуры с высотой. Тогда можно считать $\theta(x)$ постоянной, т. е. $d\theta(x) = 0$, $\theta(x) = \theta$ и, далее:

$$R\theta d\rho(x) = -g\rho(x) dx. \quad (27)$$

Вводя обозначение

$$\frac{R\theta}{g} = H, \quad (28)$$

мы получим

$$\frac{d\rho(x)}{\rho(x)} = -\frac{dx}{H}.$$

Обозначая плотность воздуха у земной поверхности, т. е. при $x = 0$, через ρ_0 и интегрируя последнее уравнение, найдем

$$\rho(x) = \rho_0 e^{-\frac{x}{H}}. \quad (29)$$

Это уравнение выражает закон убывания плотности изотермической атмосферы с высотой x . Легко видеть, что такая атмосфера должна простирается в бесконечность. Если желательно применять формулу (29) к высотам, для которых температура уже не может считаться постоянной, то можно отчасти компенсировать возникающую ошибку, подставляя в (28) среднее значение температуры θ на нашей вертикали до рассматриваемой высоты.

Любопытно физическое значение величины H . Для ее определения вычислим массу всего столба воздуха, находящегося над единицей

земной поверхности; получим

$$M = \int_0^{\infty} \rho(x) dx = \rho_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{H}} dx, \quad (30)$$

т. е.

$$M = \rho_0 H.$$

Итак, H представляет высоту, которую имела бы наша атмосфера, сжатая везде до плотности ρ_0 . Эта величина называется высотой однородной атмосферы или виртуальной высотой атмосферы.

Выражая давление $p(0)$ на земной поверхности через вес g единицы массы и обозначая его через $\rho_0 g$, измеряя газовую постоянную в тех же единицах и обозначая ее через R_0 , т. е. полагая

$$p(0) = \rho_0 g, \quad R = R_0 g, \quad (31)$$

мы получим из (21)

$$\rho_0 = R_0 \theta_0 \rho_0,$$

а также взамен (28) — новое, чаще всего употребляемое, выражение для H :

$$H = R_0 \theta_0. \quad (32)$$

Выведенные соотношения справедливы для каждого газа атмосферы в отдельности. Обозначая плотность этих газов у земной поверхности через ρ_1, ρ_2, \dots и соответствующие высоты однородных атмосфер через H_1, H_2, \dots , мы найдем, что плотность атмосферы, состоящей из этих газов:

$$\rho(x) = \rho_1 e^{-\frac{x}{H_1}} + \rho_2 e^{-\frac{x}{H_2}} + \rho_3 e^{-\frac{x}{H_3}} + \dots \quad (33)$$

Ввиду того что величины H_1, H_2, \dots различны, плотности отдельных газов убывают с высотой различно, так что на различных высотах состав смеси газов неодинаков¹⁾.

Земная атмосфера в нижних слоях состоит преимущественно из кислорода и азота. Постоянные R_0 обоих этих газов довольно близки друг к другу, так что по формуле (32) их виртуальные высоты H можно считать одинаковыми. Тогда мы получаем в формуле (33) справа только два числа, в которых можно положить $H_1 = H_2 = H$. Кроме того, $\rho_1 + \rho_2 = \rho_0$ — плотность сухого воздуха у земной поверхности, так что для сухого воздуха уравнение (29) удовлетворяется достаточно точно.

До сих пор мы обходили молчаливо присутствие водяного пара в атмосфере. Содержание влаги в воздухе чрезвычайно изменчиво, но в среднем давление водяного пара p_e подчиняется закону

$$\frac{p_e(x)}{p_e(0)} = \left[\frac{p(x)}{p(0)} \right]^3,$$

где p , как прежде, — давление воздуха.

¹⁾ Это справедливо при отсутствии перемешивания воздуха, которое, по последним исследованиям играет очень большую роль. В настоящее время следует считать установленным, что по меньшей мере до высоты в 20 км состав воздуха остается неизменным. Прим. ред.

В изотермической атмосфере давление ненасыщенного водяного пара с достаточной точностью пропорционально его плотности $\rho'(x)$, так что

$$\rho'(x) = \rho'_0 \left[\frac{p(x)}{p(0)} \right]^3,$$

где ρ'_0 означает плотность водяного пара у земной поверхности. При постоянной Θ из формул (21) и (29) следует:

$$\frac{p(x)}{p(0)} = \frac{\rho(x)}{\rho(0)} = e^{-\frac{x}{H}},$$

и мы получаем уравнение, представляющее убывание плотности водяного пара с высотой

$$\rho'(x) = \rho'_0 e^{-\frac{3x}{H}}.$$

Здесь H означает высоту однородной атмосферы для воздуха. Полагая

$$H' = \frac{H}{3}, \quad (34)$$

мы найдем

$$\rho'(x) = \rho'_0 e^{-\frac{x}{H'}}, \quad (35)$$

т. е. уравнение того же вида, как (29). Надо только помнить, что в (35) H' вовсе не означает виртуальную высоту атмосферы водяного пара. Эта последняя величина много больше, чем H' , так что оказывается, что количество водяного пара убывает с высотой гораздо скорее, чем это следует из теории идеальных газов.

Из (35) и (33) следует, что последнее уравнение справедливо для всех газов атмосферы, в том числе и для водяного пара (принимая во внимание предыдущее замечание).

После того как мы математически выразили плотность и состав атмосферы в функции высоты x , можно перейти к определению функции $a_1(x)$. При этом естественно предположить, что в определенном слое солнечная радиация поглощается тем сильнее, чем плотнее этот слой, т. е. считать, что $a_1(x)$ пропорциональна плотности $\rho(x)$:

$$a_1(x) = k_1 \rho(x), \quad (36)$$

где k_1 — постоянная величина, которую мы назовем коэффициентом поглощения атмосферы для солнечной радиации.

Равенство (36) выражает собой так называемый закон Бейера, который мы, однако, должны рассматривать как приближенный. Лаплас с успехом применил этот закон в своей теории рефракции; с некоторым преобразованием используем его и мы. Ввиду того что различные газы атмосферы неодинаково поглощают солнечную радиацию, правильнее для каждого газа ввести свой коэффициент поглощения. Таким образом мы получим

$$a_1(x) = a_1 e^{-\frac{x}{H_1}} + a_2 e^{-\frac{x}{H_2}} + \dots, \quad (37)$$

где a_1, a_2, \dots означают новые постоянные.

Коэффициент прозрачности атмосферы выразится теперь на основании (17) так:

$$p = e^{-a_1 H_1 - a_2 H_2 - \dots} \quad (38)$$

§ 23. Излучение земной поверхности и излучение атмосферы. Единица земной поверхности в единицу времени получает определенное количество прямой и рассеянной солнечной радиации $W(0, t)$, зависящее от времени и выражаемое формулой

$$W(0, t) = (1 - A) \frac{J_0}{\rho^2} p_a^{\sec^2 z} \cos z. \quad (39)$$

Если бы атмосферы не было, то земная поверхность получала бы количество тепла, равное

$$W_1(t) = \frac{J_0}{\rho^2} \cos z; \quad (40)$$

следовательно:

$$W(0, t) = (1 - A) W_1(t) p_a^{\sec^2 z}. \quad (41)$$

Вся эта радиация нацело поглощается земной поверхностью, так как все явления отражения учтены в коэффициенте A .

Кроме солнечной радиации, Земля получает еще тепловое излучение атмосферы, которое можно определить следующим образом. Рассмотрим тонкий горизонтальный слой атмосферы S_x , ограниченный плоскостями x и $x + dx$, т. е. имеющий толщину dx . Обозначим его абсолютную температуру через $\Theta(x, t)$. Этот слой S_x будет испускать сквозь обе граничные плоскости тепловое излучение, зависящее от температур слоя. Величину этого излучения мы обозначим через $\epsilon(x, t)$. Зависимость излучения от температуры $\Theta(x, t)$ может быть установлена на основании законов Стефана и Кирхгофа.

По закону Стефана абсолютно черное тело, имеющее абсолютную температуру Θ , испускает в единицу времени с единицы поверхности количество лучистой энергии, равное

$$E = \sigma \Theta^4, \quad (42)$$

где σ — некоторая постоянная. До сих пор экспериментальные определения этой величины дают довольно сильно расходящиеся результаты. В основу наших вычислений мы положим значение

$$\sigma = 0,76 \cdot 10^{-10}, \quad (43)$$

которое на 70% меньше, чем результаты последних определений¹⁾, но кажется наиболее подходящим потому, что атмосферу нельзя считать совершенным излучателем и что это обстоятельство недостаточно учитывается соответствующими поправками к закону Стефана, о которых мы будем говорить далее.

Уравнение (42) справедливо только для абсолютно черного тела, т. е. только для тела, которое имеет поглощательную способность, равную единице; в противном случае излучение рассматриваемого тела можно вычислить на основании закона Кирхгофа. Последний гласит,

¹⁾ А. Ангстрем (1931) принимает величину $\sigma = 0,818 \cdot 10^{-10}$ как наиболее надежную. Прим. перев.

что лучеиспускательная способность любого тела по отношению к лучам определенной длины волны равна его лучепоглощательной способности по отношению к этим же лучам, умноженной на соответствующую лучеиспускательную способность абсолютно черного тела. Считая, что этот закон справедлив не только для монохроматического, но и для сложного излучения, мы можем написать для излучения $\epsilon(x, t) dx$ нашего слоя атмосферы S_x выражение

$$\epsilon(x, t) dx = a_2(x) \sigma \Theta^4(x, t) dx, \quad (44)$$

где $a_2(x) dx$ — поглощательная способность слоя S_x для теплового излучения атмосферы, которую необходимо отличать от $a_1(x)$ — поглощательной способности для солнечной радиации.

Излучение отдельных слоев атмосферы складывается в одно общее излучение, направленное и к земной поверхности и в мировое пространство. Определим часть этого излучения, направленную к Земле. Обозначим напряженность излучения, направленного к земной поверхности на высоте x , в момент t , через $O(x, t)$. На верхней границе атмосферы это излучение исчезает, и мы имеем

$$O(h, t) = 0. \quad (45)$$

Оно принимает на земной поверхности, т. е. при $x=0$, значение $O(0, t)$, которое мы назовем величиной *атмосферного*, или *обратного*, излучения. Так как земная поверхность испускает тепловое излучение очень сходного состава, то по смыслу закона Кирхгофа мы можем принять, что атмосферное излучение поглощается земной поверхностью нацело.

Кроме того количества тепла, которое земная поверхность получает в виде лучистой энергии $W(0, t) + O(0, t)$, она получает еще тепло от верхних слоев почвы путем *теплопроводности*. Мы обозначим через Q_p приток тепла из почвы за единицу времени к единице поверхности, считая его положительным, когда поток тепла течет снизу вверх. К величине Q_p мы вернемся впоследствии.

В результате единица земной поверхности получает за единицу времени количество тепла $W(0, t) + O(0, t) + Q_p$; на ней поэтому должна установиться такая температура T_p , при которой приток тепла будет равен его расходу, т. е. при которой излучение E земной поверхности будет равно указанной сумме $W + O + Q_p$. Земная поверхность испускает только тепловое излучение; обозначая через a'_p ее поглощательную способность для такого излучения, на основании законов Стефана и Кирхгофа мы можем выразить ее излучение через

$$E = a'_p \sigma \Theta_p^4. \quad (46)$$

Мы имеем, таким образом:

$$E = W(0, t) + O(0, t) + Q_p. \quad (47)$$

Это уравнение представляет собой важное граничное условие при решении задачи математического описания тепловых явлений в атмосфере и в почве.

§ 24. Дифференциальное уравнение процесса излучения в атмосфере. Нашим дальнейшим шагом в изучении механизма тепловых явлений в атмосфере будет составление дифференциальных уравнений процесса излучения в атмосфере. Для того чтобы составить эти уравнения, предположим, что атмосфера имеет высоту h и что ее состав является пока произвольной функцией высоты x , так что $a_1(x)$ и $a_2(x)$ будут пока произвольными функциями x , о которых мы предположим только, что они непрерывны. Возьмем снова элементарный слой S_x , ограниченный горизонтальными плоскостями x и $x + \Delta x$. Сквозь этот слой проходят прямая и рассеянная радиации Солнца, тепловое излучение атмосферы $O(x, t)$, направленное к земной поверхности, а также тепловое излучение, идущее в мировое пространство. Обозначим величину последнего на высоте x через $U(x, t)$; оно складывается из теплового излучения земной поверхности и теплового излучения атмосферы, направленного в мировое пространство.

У земной поверхности второе слагаемое обращается в нуль, и мы имеем

$$U(0, t) = E.$$

Определим степень поглощения слоем S_x всех этих видов лучистой энергии на высоте x . Поглощение солнечной радиации, обозначенной нами через $W(x, t)$ и равной

$$W(x, t) = J''(x) \cos z, \quad (49)$$

равно

$$dW(x, t) = dJ''(x) \cos z;$$

но

$$dJ''(x) = a_1(x) J''(x) \sec z dx;$$

следовательно:

$$dW(x, t) = a_1(x) J''(x) dx,$$

$$dW(x, t) = a_1(x) W(x, t) \sec z dx. \quad (50)$$

Из излучений $O(x, t)$ и $U(x, t)$ в слое S_x поглощаются соответственно $a_2(x) O(x, t) dx$ и $a_2(x) U(x, t) dx$, так как мы обозначили поглощательную способность этого слоя для теплового излучения через $a_2(x)$. Слой S_x излучает через обе свои пограничные плоскости количество энергии, равное $\epsilon(x, t) dx$, так что в нем в единицу времени на единицу площади сечения остается избыток энергии, равный

$$dQ = [a_1(x) W(x, t) \sec z + a_2(x) O(x, t) + a_2(x) U(x, t) - 2\epsilon(x, t)] dx, \quad (51)$$

который идет на повышение температуры рассматриваемого слоя атмосферы, поскольку мы здесь не принимаем во внимание другие пути превращения энергии.

Измеренную в градусах Цельсия температуру слоя S_x в момент t мы обозначим через $\vartheta(x, t)$. Тогда

$$\Theta(x, t) = 273 + \vartheta(x, t). \quad (52)$$

То количество тепла, которое возникло из избытка энергии, повысит в единицу времени температуру слоя на $\frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t}$. Таким образом мы

можем написать равенство

$$dQ = c_p x \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} dx, \quad (53)$$

в котором c означает *теплоемкость единицы массы воздуха при постоянном объеме*, так как мы не принимаем во внимание механическую работу. Мы примем, что это повышение температуры не нарушит равновесия атмосферы и не вызовет никаких движений воздуха (к этому вопросу мы еще вернемся далее). Из (51) и (53) следует:

$$2\varepsilon(x, t) + c_p(x) \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} = a_1(x) W(x, t) \sec z + \\ + a_2(x) O(x, t) + a_2(x) U(x, t). \quad (54)$$

Другие два дифференциальных уравнения мы получим на основании следующего рассуждения. Излучение $O(x, t)$, проходя через слой S_x , ослабляется на $a_2(x) O(x, t) dx$; на эту величину, следовательно, функция $O(x, t)$ возрастает при прохождении слоя толщиной dx в направлении положительного x . Кроме того, это излучение, пройдя через слой S_x , увеличивается на $\varepsilon(x, t)$ — величину собственного излучения этого слоя по направлению к Земле, т. е. в направлении возрастающих x убывает на эту величину. Следовательно

$$\frac{\partial O(x, t)}{\partial x} = a_2(x) O(x, t) - \varepsilon(x, t). \quad (55)$$

Когда излучение Земли $U(x, t)$ проходит через слой S_x , оно ослабляется на $a_2(x) U(x, t) dx$ и увеличивается на $\varepsilon(x, t) dx$; откуда

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = -a_2(x) U(x, t) + \varepsilon(x, t). \quad (56)$$

Вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} O(x, t) + U(x, t) &= Y(x, t), \\ O(x, t) - U(x, t) &= Z(x, t), \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

мы получим путем сложения и вычитания уравнений (55) и (56) новые уравнения:

$$\frac{\partial Y(x, t)}{\partial x} = a_2(x) Z(x, t), \quad (58)$$

$$\frac{\partial Z(x, t)}{\partial x} = a_2(x) Y(x, t) - 2\varepsilon(x, t). \quad (59)$$

Из (50), (54) и (57) следует:

$$2\varepsilon(x, t) + c_p(x) \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} + a_2(x) Y(x, t); \quad (60)$$

(58)—(60) дают нам три искоемых уравнения процессов излучения в атмосфере; при этом аналитическая связь между $\varepsilon(x, t)$ и $\vartheta(x, t)$ устанавливается уравнениями (44) и (52). Уравнение (60) можно заменить другим, получающимся из (59) и (60):

$$\frac{\partial Z(x, t)}{\partial x} = c_p(x) \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial W(x, t)}{\partial x}. \quad (61)$$

При интегрировании этих дифференциальных уравнений в частных производных необходимо, чтобы были удовлетворены все граничные

условия. Из (41), (47), (48) и (57) следует:

$$Z(0, t) = -Q_p - (1 - A) W_1(t) p_a^{s_0 z}, \quad (62)$$

и из (45) и (57):

$$Y(h, t) + Z(h, t) = 0. \quad (63)$$

§ 25. Первая основная проблема математической климатологии. Интегрирование уравнений излучения в случае устойчивого лучистого равновесия.

Выведенные выше дифференциальные уравнения интегрируются особенно просто, если величины излучений не зависят от времени, т. е. наблюдается состояние устойчивого равновесия. Строго говоря, такой случай в действительности невозможен, так как облучение любой точки земного шара постоянно изменяется вследствие вращения Земли вокруг своей оси и движения по орбите. Но для того чтобы вычислить средние годовые температуры той или иной параллели, можно принять, что облучение этой параллели постоянно равно неизменному среднему годовому облучению

$$W_m = \frac{W_T}{T}. \quad (64)$$

Так как солнечные лучи претерпевают отражения от облаков от молекул воздуха и от земной поверхности, как это мы видели выше, то часть их энергии возвращается в мировое пространство, а для теплового баланса Земли имеет значение лишь величина

$$W(h) = (1 - A) W_m. \quad (65)$$

В течение дня и в течение года лучи радиации (64) падают на верхнюю границу атмосферы под самыми разнообразными углами падения z . Мы положим

$$z = 0 \quad (66)$$

и дадим поэтому коэффициенту прозрачности p_a значение

$$p_a = \frac{W_T^2}{W_T}, \quad (67)$$

равное отношению количества радиации, дошедшей до земной поверхности, к количеству радиации на границе атмосферы.

При условии, что поток солнечного тепла постоянен, атмосфера, очевидно, должна прийти в состояние температурного равновесия, так что мы можем положить

$$\frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (68)$$

Таким образом в дифференциальных уравнениях процесса излучения мы должны теперь считать ϑ , Y , Z , ε функциями одного x . То же самое относится к величине $W(x, t)$. Уравнение (50) примет теперь вид

$$dW(x) = a_1(x) W(x) dx, \quad (69)$$

и интегрирование его между пределами x и h дает

$$W(x) = W(h) e^{-\int_x^h a_1(x) dx} = (1-A) W_m e^{-\int_x^h a_1(x) dx}. \quad (70)$$

Далее, принимая во внимание уравнение (17):

$$W(0) = (1-A) W_m p_a. \quad (71)$$

Уравнения (58), (61) и (60) в этом случае принимают вид:

$$\frac{dY(x)}{dx} = a_2(x) Z(x), \quad (72)$$

$$\frac{dZ(x)}{dx} = -\frac{dW(x)}{dx}, \quad (73)$$

$$2e(x) = \frac{dW(x)}{dx} + a_2(x) Y(x). \quad (74)$$

Что же касается граничных условий, то мы должны принять во внимание, что годовой приток тепла, идущий из земных недр к земной поверхности, исчезающе мал по сравнению с теплом, приносимым последней солнечными лучами; поэтому можно положить

$$Q_p = 0. \quad (75)$$

Вместо граничных условий (62) и (63) мы получаем следующие:

$$Z(0) = -(1-A) W_m p_a \quad (76)$$

$$Y(h) + Z(h) = 0. \quad (77)$$

При интегрировании уравнения (73) вследствие (76) постоянная интегрирования обращается в нуль, и мы имеем

$$Z(x) = -W(x), \quad (78)$$

т. к., принимая во внимание (65) и (77)

$$Y(h) = -Z(h) = (1-A) W_m. \quad (79)$$

Уравнения (45), (57) и (79) дают

$$U(h) = (1-A) W_m. \quad (80)$$

Смысл последнего уравнения заключается в том, что та часть солнечного тепла $(1-A) W_m$, которая поглощается земной поверхностью и атмосферой, в случае теплового равновесия возвращается обратно в мировое пространство в виде земного теплового излучения $U(h)$.

Из (72) и (78) следует, что

$$dY(x) = -a_2(x) W(x) dx, \quad (81)$$

и интегрирование этого уравнения в пределах от x до h дает, принимая во внимание (79):

$$Y(x) = (1-A) W_m + \int_x^h a_2(x) W(x) dx, \quad (82)$$

причем W можно найти из равенства (70). Уравнения (44), (50), (60) и (74) дают равенство

$$2\sigma\Theta^4(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)} W_x + (1-A) W_m + \int_x^h a_2(x) W(x) dx, \quad (83)$$

на основании которого мы можем вычислить температуру $\Theta(x)$ атмосферы на высоте x . На верхней границе атмосферы, т. е. при $x=h$,

$$2\sigma\Theta^4(h) = \left[1 + \frac{a_1(h)}{a_2(h)}\right] (1-A) W_m. \quad (84)$$

Из (46), (47), (75) следует:

$$\sigma a_p^Y \Theta_p^4 = W(0) + O(0),$$

и, вследствие (57),

$$a_p^Y \Theta_p^4 = W(0) + \frac{1}{2} [Y(0) + Z(0)],$$

т. е. на основании (41), (66), (76), (82):

$$a_p^Y \Theta_p^4 = \frac{1}{2} (1-A) (1 + p_a) W_m + \frac{1}{2} \int_0^h a_2(x) W(x) dx. \quad (85)$$

Это равенство позволяет вычислить температуру на поверхности земли Θ_p .

Особый интерес представляет случай, когда

$$a_1(x) = 0, \quad (86)$$

т. е. когда атмосфера вполне прозрачна для солнечных лучей; тогда $p_a = 1$, $W(x) = (1-A) W_m$.

Полагая, кроме того, так же как в (36),

$$a_2(x) = k_2 \rho(x), \quad (87)$$

где k_2 — коэффициент поглощения собственного излучения Земли атмосферой, мы получим:

$$\sigma\Theta^4(x) = \frac{1}{2} (1-A) W_m [1 + k_2 \int_x^h \rho(x) dx], \quad (88)$$

$$\sigma\Theta^4(h) = \frac{1}{2} (1-A) W_m, \quad (89)$$

$$\sigma\Theta^4(0) = \frac{1}{2} (1-A) W_m [1 + k_2 \int_0^h \rho(x) dx], \quad (90)$$

и так как $\int_0^h \rho(x) dx$ представляет собой массу M вертикального столба воздуха, имеющего горизонтальное сечение, равное единице и простирающегося от земной поверхности до границы атмосферы, то

$$\sigma\Theta^4(0) = \frac{1}{2} (1-A) W_m (1 + k_2 M). \quad (91)$$

Дифференцируя (88) по x , мы можем вычислить градиент температуры $\frac{d\theta(x)}{dx}$ в атмосфере. Имеем

$$4\sigma\theta^3(x) \frac{d\theta(x)}{dx} = -\frac{1}{2}(1-A)W_m k_2 \rho(x).$$

Градиент температуры у самой земной поверхности, где $\rho(x) = \rho_0$, можно вычислить из уравнения

$$4\sigma\theta^3(0) \frac{d\theta(0)}{dx} = -\frac{1}{2}(1-A)W_m k_2 \rho_0. \quad (92)$$

Если бы мы сжали атмосферу так, чтобы высота ее стала равной H — высоте однородной атмосферы, т. е. плотность ее во всех точках стала равной ρ_0 , то было бы прежде всего

$$M = \rho_0 H$$

и мы получили бы

$$\sigma\theta^4(x) = \frac{1}{2}(1-A)W_m [1 + k_2 \rho_2 (H-x)], \quad (93)$$

$$4\sigma\theta^3(x) \frac{d\theta(x)}{dx} = -\frac{1}{2}(1-A)W_m k_2 \rho_0. \quad (94)$$

$$\sigma\theta^4(0) = \frac{1}{2}(1-A)W_m (1 + k_2 M), \quad (95)$$

$$4\sigma\theta^3(0) \frac{d\theta(0)}{dx} = -\frac{1}{2}(1-A)W_m k_2 \rho_0. \quad (96)$$

Последние два выражения идентичны с (91) и (92). Отсюда следует, что если бы атмосфера была вполне прозрачна для солнечных лучей, то, сжав ее до высоты однородной атмосферы, мы не изменили бы ни температуры воздуха в приземном слое, ни величины температурного градиента непосредственно у земной поверхности.

§ 26. Соляные температуры различных параллелей. Мы перейдем теперь к вычислению соляных температур различных параллелей, т. е. тех средних годовых температур, которые имел бы самый нижний слой воздуха на различных широтах при условии неподвижности атмосферы. Мы примем, кроме того, что в атмосфере господствуют некоторые средние условия поглощения и отражения, т. е. положим в основу расчета средние значения ρ_a , ρ'_a и A , полученные нами при определении теплового баланса Земли.

Зависимость плотности атмосферы $\rho(x)$ от высоты x достаточно точно выражается равенством (29), а именно:

$$\rho(x) = \rho_0 e^{-\frac{x}{H}}, \quad (97)$$

в котором надо положить $H = 8000$ м. Позднее мы подробнее остановимся на законности такого допущения. В этом случае $\rho(x)$ обращается в нуль только при $x = \infty$, т. е. теоретически атмосфера простирается в бесконечность, и мы должны положить

$$x = \infty. \quad (98)$$

Подставляя ρ из (97) в (36) и (87), мы получим:

$$a_1(x) = k_1 \rho_0 e^{-\frac{x}{H}} = a_1 e^{-\frac{x}{H}}, \quad a_2(x) = k_2 \rho_0 e^{-\frac{x}{H}} = a'_1 e^{-\frac{x}{H}}, \quad (99)$$

где мы ради сокращения обозначили

$$k_1 \rho_0 = a_1, \quad k_2 \rho_0 = a'_1. \quad (100)$$

Вводя (98) и (99) в формулу (17), мы получим

$$\rho_a = e^{-a_1 \int_0^\infty e^{-\frac{x}{H}} dx} = e^{-a_1 H} \quad (101)$$

и аналогично

$$\rho'_a = e^{-a'_1 H}. \quad (102)$$

Совершенно так же мы получим из (70) и (83)

$$W(x) = (1-A)W_m e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}}, \quad (103)$$

$$\sigma\theta^4(x) = \frac{1}{2}(1-A)W_m \left(1 + \frac{a_1}{a'_1} e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} + a'_1 \int_0^\infty e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} e^{-\frac{x}{H}} dx \right). \quad (104)$$

Дело сводится к вычислению написанного здесь интеграла. Делая подстановку

$$a_1 H e^{-\frac{x}{H}} = y, \quad \text{т. е.} \quad -a_1 e^{-\frac{x}{H}} = dy,$$

получим:

$$\int_0^\infty e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} e^{-\frac{x}{H}} dx = \frac{1}{a_1} \left(1 - e^{-a_1 H} \right) = \frac{1}{a_1} \left(1 - \rho_a e^{-\frac{x}{H}} \right)$$

т. е. мы вместо (104) найдем

$$\sigma\theta^4(x) = \frac{1}{2}(1-A)W_m \frac{a_1 + a'_1}{a_1} \left(1 + \frac{a_1 - a'_1}{a'_1} \rho_a e^{-\frac{x}{H}} \right). \quad (105)$$

Температура нижнего слоя воздуха поэтому определяется соотношением

$$\sigma\theta^4(0) = \frac{1}{2}(1-A)W_m \left(\frac{a_1 + a'_1}{a_1} \right) \left(1 + \frac{a_1 - a'_1}{a'_1} \rho_a \right). \quad (106)$$

Замечательно, что эта температура зависит не от абсолютных значений величин a_1 и a'_1 , а только от их отношения. Последнее может быть

выражено через коэффициенты прозрачности, так как из (101) и (102) следует:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{H} \ln p_a = -\frac{1}{MH} \lg p_a, \\ a'_1 &= -\frac{1}{H} \ln p'_a = -\frac{1}{MH} \lg p'_a, \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

где M — модуль бригговских логарифмов. Таким образом

$$\sigma \Theta^4(0) = \frac{1}{2} (1-A) W_m \left(1 + \frac{\lg p'_a}{\lg p_a} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{\lg p_a}{\lg p'_a} \right) p_a \right]. \quad (108)$$

С помощью этой формулы можно вычислить среднюю годовую температуру любой параллели земного шара. Для этого вместо W_m надо подставить среднее годовое облучение на верхней границе атмосферы, т. е. $\frac{W_T}{T}$. Эту величину можно получить из табл. 4, умножив стоящие там числа на величину солнечной постоянной и разделив на 100 000. Солнечную постоянную мы принимаем равной 2 кал. Средний годовой коэффициент прозрачности p_a согласно (87) следует положить равным отношению $\frac{W'_T}{W_T}$, которое можно вычислить с помощью табл. 3 и 9 (полагая $p = 0,8$). Для p'_a , которое не зависит от географической широты, следует взять значение 0,05, для A — значение 0,40.

Таким образом мы найдем температуры, приведенные в табл. 10.

Таблица 10

Средние годовые температуры (в градусах Цельсия) параллелей при неподвижной атмосфере и равномерном распределении суши однородной земной поверхности

Географическая широта	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Температура	+32,8	+31,6	+28,2	+22,1	+13,7	+2,6	-10,9	-24,1	-32,0	-34,8

Чтобы правильно оценить эти числовые результаты математической теории климата Земли, мы должны снова бросить взгляд на отправные точки этой теории. Основными предпосылками, на которых построена вся теория, были следующие: допущение вполне горизонтальной и однородной (средней) земной поверхности под всеми широтами; влажность и облачность в находящейся над ней атмосфере имеют везде их среднее значение. Далее, мы приняли, что обмен тепла между земной поверхностью и воздухом происходит только посредством излучения и, кроме того, что атмосфера и гидросфера земли неподвижны, т. е. в них отсутствуют какие-либо нарушения механического равновесия, вызывающие различные течения.

Из всех этих предположений первое и последнее имеют наибольшее значение, так как они исключают из нашего рассмотрения целый

ряд географических особенностей и метеорологических явлений. На этом основании мы и должны назвать вычисленные нами температуры солярными, т. е. такими, которые зависят только от количества солнечной радиации, получаемой той или иной широтой. Солярные температуры, таким образом, представляют лишь влияние важнейшей слагающей климата Земли. Отклонения их от действительно наблюдающихся температур дают нам представление о влиянии распределения суши, а также о значении воздушных и морских течений.

Различные исследователи неоднократно пытались выразить влияние распределения суши с помощью эмпирически выведенных формул и даже применяли такие формулы к изучению климатов прошлых геологических эпох. Воейков и Ганн делали из них очень далеко идущие выводы. Когда приведенный выше ряд солярных температур был опубликован впервые¹⁾, оказалось возможным исключить влияние суши без помощи упомянутых формул, вычисляя путем интерполяции между наблюдаемыми средними температурами какой-либо параллели северного и южного полушарий ту температуру, которая соответствовала бы среднему распределению суши под этой широтой. Вместо этого можно воспользоваться приведенными к среднему распределению суши нормальными температурами, вычисленными Прехтом²⁾. В том и другом случае мы придем к следующему результату.

Для географической широты $\pm 41^\circ$ вычисленная здесь солярная температура равна наблюдаемой, приведенной к среднему распределению суши. По мере приближения к экватору солярные температуры начинают все больше превышать наблюдаемые; по мере приближения к полюсу солярные температуры, наоборот, становятся ниже действительных. Как и следовало ожидать, солярный климат Земли отличается гораздо большими противоположностями, чем действительно наблюдающийся, в котором эти противоположности смягчены действием морских и воздушных течений. Эти последние постоянно переносят теплый воздух и теплую воду из экваториальных областей по направлению к полюсам, в то время как обратные течения несут из околополярных широт по направлению к экватору холодный воздух и холодную воду и даже лед. Таким образом от экватора уносится часть тепла, которая компенсируется инсоляцией, а на полюсах, наоборот, большое излучение компенсируется отчасти этим дополнительным притоком тепла. Таким образом мы вместе с Бецольдом³⁾ можем разделить всю земную поверхность на три зоны: на экваториальную, в которой инсоляция преобладает над излучением, и на две полярных, в которых имеет место обратное явление. Бецольд называет эти зоны зонами инсоляции и излучения, а две линии на земной поверхности, их разделяющие, „линиями равной инсоляции и излучения“ или „линиями лучистого равновесия“, или „нейтральными линиями“. Из наших предыдущих рассуждений следует, что при равномерном распределении суши эти линии совпадали бы с параллелями $+41^\circ$ и -41° .

1) *Théorie mathématique...*, стр. 202.

2) *Precht, Neue Normaltemperaturen*, „Met. Ztschr.“ 1899, стр. 81.

3) *Bezold, Der Wärmeaustausch an der Erdoberfläche und in der Atmosphäre*, „Berl. Sitzungsber.“, 1892, стр. 1152.

Воздушные и морские течения и циркуляция по замкнутым путям в поле земной силы тяжести не могут заметно изменить средней температуры атмосферы. Действительно, приведенные выше солярные температуры позволяют вычислить среднюю для всей земной поверхности температуру нижнего слоя воздуха, равную

$$\vartheta_m = 15^\circ,2,$$

в то время как Прехт (1. с.) дает для случая равномерного распределения суши среднюю температуру $15^\circ,3$, а Шпиталер $15^\circ,1$. Таким образом наш теоретически полученный результат попадает в точности в середину между приведенными двумя цифрами, что дает прекрасное подтверждение правильности теории и составленного нами баланса лучистой энергии на поверхности Земли.

§ 27. Строение атмосферы в состоянии лучистого равновесия. В обычных формулах¹⁾, связывающих уменьшение давления или плотности атмосферы с высотой x , принимается, что температура атмосферы почти не изменяется с высотой. В результате эти формулы строго точны лишь для ограниченных интервалов высоты. Теперь мы должны освободиться от этого упрощающего предположения для того, чтобы осветить вопрос о строении атмосферы в общем случае, когда температура является функцией высоты. Эта задача может быть математически точно разрешена с помощью уравнений излучения. Как мы позднее докажем, можно при этом принять, что атмосфера нагревается только земным тепловым излучением; для верхних слоев атмосферы это предположение оправдывается совершенно точно. Таким образом мы положим $a_1(x) = 0$, в то время как согласно (87) $a_2(x) = k_2 p(x)$. Тогда уравнение (88) даст нам температуру $\Theta(x)$ на высоте x :

$$2\sigma\Theta^4(x) = (1-A)W_m \left[1 + k_2 \int_x^h p(x) dx \right]. \quad (109)$$

Мы обозначим через μ температуру верхнего слоя, т. е. при $x = h$. Она, очевидно, может быть найдена из уравнения

$$2\sigma\mu^4 = (1-A)W_m. \quad (110)$$

Мы получаем, следовательно:

$$2\sigma[\Theta^4(x) - \mu^4] = (1-A)W_m k_2 \int_x^h p(x) dx. \quad (111)$$

Из (22) и (24) следует, что, пренебрегая исчезающе малыми изменениями ускорения силы тяжести в пределах атмосферы:

$$dp(x) = -g p(x) dx. \quad (112)$$

Интегрируя это уравнение в пределах от x до h и принимая во внимание, что при $x = h$ $p(x)$ обращается в нуль, мы находим:

$$p(x) = g \int_x^h p(x) dx \quad (113)$$

¹⁾ Собственно в той формуле, которая применена автором в § 22.

и вследствие (111):

$$2\sigma[\Theta^4(x) - \mu^4] = (1-A)W_m \frac{k_2}{g} p(x), \quad (114)$$

или, дифференцируя это уравнение:

$$8\sigma\Theta^3(x) d\Theta(x) = (1-A)W_m \frac{k_2}{g} dp(x). \quad (115)$$

Из (21) и (112) следует:

$$\frac{dp(x)}{p(x)} = -\frac{g}{R} \frac{dx}{\Theta(x)}.$$

Подставляя сюда значения $p(x)$ и $dp(x)$ из (114) и (115), мы получим

$$dx = -\frac{4R}{g} \frac{\Theta^4(x) d\Theta(x)}{\Theta^4(x) - \mu^4}$$

или, выделяя из предыдущей дроби целую часть:

$$dx = -\frac{4R}{g} d\Theta(x) - \frac{4R}{g} \frac{\mu^4 d\Theta(x)}{\Theta^4(x) - \mu^4}. \quad (116)$$

Припомним известное разложение на простые дроби:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Theta^4(x) - \mu^4} &= \frac{1}{4\mu^3} \left(\frac{1}{\Theta(x) - \mu} - \frac{1}{\Theta(x) + \mu} + \frac{i}{\Theta(x) - i\mu} - \frac{i}{\Theta(x) + i\mu} \right) = \\ &= \frac{1}{4\mu^3} \left(\frac{1}{\Theta(x) - \mu} - \frac{1}{\Theta(x) + \mu} - \frac{2\mu}{\Theta^2(x) + \mu^2} \right), \end{aligned}$$

где i означает мнимую единицу. Интегрирование уравнения (116) дает

$$x = C - \frac{4R}{g} \Theta(x) - \frac{R\mu}{g} \left[\ln \frac{\Theta(x) - \mu}{\Theta(x) + \mu} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\Theta(x)}{\mu} \right]. \quad (117)$$

Входящую сюда постоянную интегрирования C можно определить из условия, что, при $x = 0$, $\Theta(x) = \Theta_0$, где Θ_0 означает температуру нижнего слоя атмосферы. Таким образом

$$C = \frac{4R}{g} \Theta_0 + \frac{R\mu}{g} \left(\ln \frac{\Theta_0 - \mu}{\Theta_0 + \mu} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\Theta_0}{\mu} \right). \quad (118)$$

Уравнение (117) дает в явном виде значение x в зависимости от $\Theta(x)$.

Из (21) и (113), исключая $p(x)$ и принимая во внимание (110), мы получаем

$$p(x) = \frac{g}{Rk_2} \frac{\Theta^4(x) - \mu^4}{\mu^4 \Theta(x)} \quad (119)$$

и вследствие (21)

$$p(x) = \frac{g}{k_2} \frac{\Theta^4(x) - \mu^4}{\mu^4}. \quad (120)$$

Вместе с уравнением (117) эти два последних уравнения изображают зависимость $p(x)$ и $\Theta(x)$ от x в параметрической форме; в роли параметра здесь выступает $\Theta(x)$.

Из (117) и (119) следует, что для $\Theta(x) = \mu$, $x = \infty$, $p(x) = 0$, т. е., в то время как температура при неограниченном возрастании x приближается к пределу μ , плотность p приближается к нулю. Теоретически атмосфера простирается в бесконечность.

Проведя числовой расчет на основании уравнений (117) — (120), можно во всех деталях изучить вертикальное строение атмосферы, находящейся в состоянии лучистого равновесия. Мы сделаем такой расчет, предположив, что температура нижнего слоя воздуха равна $10^{\circ},5$, т. е. $\Theta_0 = 283^{\circ},5$, для того чтобы сделать возможным сравнение с наблюдениями в Средней Европе. Соответствующее этой температуре среднее годовое облучение равно $W_m = 0,464 \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{мин}}$. Подставляя в (110) $A = 0,40$, мы получаем $\mu = 206^{\circ},9$. Далее, при нормальном давлении воздуха в 760 мм рт. ст., полагая удельный вес ртути равным 13,596, $\rho_0 = 1033,3 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Из (113) следует, что $p(0) = gM$, т. е. вследствие (31) $p_0 = M$; следовательно, над 1 см² земной поверхности находится столб воздуха с массой $M = 1033,3$ г. Из уравнения (31) и следующего за ним мы выводим, что $\frac{R}{g} = \frac{\rho_0}{\Theta_0 \rho_0}$; откуда, положив $\rho_0 = 1,293 \cdot 10^{-3} \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, можно найти $\frac{R}{g}$. Для определения величины k_2 можно использовать уравнение (109). Подставляя в него $x = 0$, мы найдем, что входящий в правую часть интеграл становится равным массе M и что вследствие (110) $1 + k_2 M = \frac{\Theta_0^4}{\mu^4}$, откуда $k_2 = 0,00245$. Исходя из этих констант, получены величины, приведенные в табл. 11.

Таблица 11

Вертикальное строение атмосферы, находящейся в состоянии лучистого равновесия

Высота, м	Температура, °С	Барометрическое давление, мм Hg	Плотность, $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$
0	+ 10,5	760	$1,293 \cdot 10^{-3}$
918	+ 5	679	$1,134 \cdot 10^{-3}$
1 779	0	610	$1,038 \cdot 10^{-3}$
2 672	- 5	545	$0,945 \cdot 10^{-3}$
3 602	- 10	484	$0,855 \cdot 10^{-3}$
4 577	- 15	426	$0,767 \cdot 10^{-3}$
5 607	- 20	371	$0,682 \cdot 10^{-3}$
6 706	- 25	320	$0,599 \cdot 10^{-3}$
7 891	- 30	271	$0,519 \cdot 10^{-3}$
9 190	- 35	226	$0,440 \cdot 10^{-3}$
10 644	- 40	183	$0,364 \cdot 10^{-3}$
12 320	- 45	143	$0,291 \cdot 10^{-3}$
14 344	- 50	105	$0,218 \cdot 10^{-3}$
16 975	- 55	70	$0,149 \cdot 10^{-3}$
20 977	- 60	37	$0,080 \cdot 10^{-3}$
31 723	- 65	7	$0,016 \cdot 10^{-3}$

Для сравнения вычисленной таким образом температуры с наблюдением С. Мохоровичек составил следующую табличку¹⁾.

¹⁾ „Met. Ztschr.“, 1921, стр. 316.

Высота в км	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7
Вычисленная температура . . .	10,5	7,0	4,1	1,2	-1,5	-6,9	-11,8	-16,9	-22,0	-26,4
Наблюденная температура . . .	10,5	7,4	4,9	2,5	0,1	-5,0	-10,7	-16,9	-23,7	-30,8
Высота в км . . .	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
Вычисленная температура . . .	30,7	-34,8	-38,2	-41,4	-44,1	-46,8	-48,3	-51,3	-53,2	
Наблюденная температура . . .	38,0	-44,4	-49,6	-52,8	-54,2	-54,4	-54,4	-54,3	-54,0	

Приведенные числа наглядно показывают преобладающее влияние лучистой энергии на вертикальное строение атмосферы. Наблюдающиеся расхождения между вычислением и действительностью объясняются, особенно в нижних слоях атмосферы, конвекционными токами, а в более высоких слоях — присутствием водяного пара, о чем будет речь ниже.

§ 28. Вопрос об устойчивости равновесия атмосферы. До сих пор во всех наших исследованиях мы не принимали во внимание превращения теплоты в механическую энергию и обратно, предполагая, что атмосфера находится в состоянии механического равновесия и что в ней не наблюдается никаких движений и течений. Теперь мы должны исследовать, при каких обстоятельствах выполняются эти предположения. Для этой цели мы должны будем воспользоваться некоторыми уравнениями механической теории тепла, к выводу которых сейчас и перейдем.

Если единица массы газа, занимающая объем v , получает некоторое количество тепла dQ , то часть последнего пойдет на повышение температуры газа, а остальная часть — на увеличение его объема, причем будет совершена определенная механическая работа. Первая часть, очевидно, равна $c d\Theta$, где c — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, в то время как вторая равна $Ap dv$, где A — тепловой эквивалент работы. Таким образом

$$dQ = c d\Theta + Ap dv. \quad (121)$$

Предположим, что мы имеем дело с идеальным газом; тогда для него будет справедливо уравнение Клапейрона

$$pv = R\Theta, \quad (122)$$

дифференцируя которое, мы получим

$$p dv + v dp = R d\Theta.$$

На основании этого мы вместо (121) найдем

$$dQ = (c + AR) d\Theta - Av dp. \quad (123)$$

Если это тепловое расширение газа происходит при постоянном давлении, т. е. можно положить $dp = 0$, то $\frac{dQ}{d\theta}$ представляет собой теплоемкость газа при постоянном давлении, которую мы обозначим через c' . Следовательно:

$$c' = c + AR \quad (124)$$

и

$$dQ = c' d\theta - Av dp. \quad (125)$$

Если газ изменяет свое состояние адиабатически, т. е. не получая и не отдавая тепла, тогда $dQ = 0$, и вместо (125) мы будем иметь

$$c' d\theta = Av dp. \quad (126)$$

Исключая с помощью (122) отсюда v , принимая во внимание (124) и полагая

$$\frac{c'}{c} = \kappa, \quad (127)$$

мы получим

$$\frac{dp}{p} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{d\theta}{\theta}, \quad (128)$$

— уравнение Пуассона в его дифференциальной форме.

Вернемся теперь к земной атмосфере. Предположив, что она состоит вся из одного идеального газа, мы сможем применить к ней выведенные выше уравнения. Если частица этого газа, находившаяся на высоте x , переместится вверх на высоту dx , то она из слоя с давлением p попадет в слой с давлением $p + dp$, причем на основании наших прежних выводов

$$\frac{dp(x)}{p(x)} = -\frac{g}{R} \frac{dx}{\theta(x)}. \quad (129)$$

Пусть это перемещение происходит без получения или потери тепла; тогда между изменением давления dp и вызванным им изменением температуры $d\theta$ существует соотношение (128). Из него и из (129) следует, что

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{g}{R} \frac{\kappa - 1}{\kappa}. \quad (130)$$

Это равенство позволяет найти изменение $d\theta$ температуры θ частицы атмосферы, когда она перемещается вверх на отрезок dx .

Если в рассматриваемом месте атмосферы наблюдается падение температуры с высотой меньше, чем $\frac{g}{R} \frac{\kappa - 1}{\kappa}$, то поднимающаяся частица воздуха попадает в слой, более теплые и менее плотные, чем слой, из которого частица вышла, и испытывает при этом давление, направленное вниз. Совершенно так же опускающаяся частица испытывает давление, направленное снизу вверх. Равновесие атмосферы будет в этом месте устойчивым. Если, наоборот, падение температуры с высотой больше, чем $\frac{g}{R} \frac{\kappa - 1}{\kappa}$, то равновесие будет неустойчивым.

Если, наконец, строение атмосферы будет таково, что во всех слоях будет удовлетворяться соотношение

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = -\frac{g}{R} \frac{\kappa - 1}{\kappa}, \quad (131)$$

то атмосфера будет находиться в состоянии безразличного равновесия. Интегрируя это уравнение и помня, что при $x = 0$ $\theta(x) = \theta_0$, мы получим

$$\theta(x) = \theta_0 - \frac{g}{R} \frac{\kappa - 1}{\kappa} x. \quad (132)$$

В этом случае температура является линейной функцией x и достигает абсолютного нуля на высоте

$$h = \frac{R}{g} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \theta_0. \quad (133)$$

Эта высота является верхней границей атмосферы.

Такой вид температурного равновесия атмосферы мог бы установиться в ней при полном отсутствии как солнечного, так и земного излучения, под влиянием одного только нагревания у земной поверхности, при постоянном перемешивании всей толщи атмосферы. Как ни далек этот случай от действительного положения вещей, в течение десятилетий его приводили в качестве объяснения вертикальной температурной структуры атмосферы.

В атмосфере произвольного строения граница устойчивого равновесия имеет место там, где прекращается убывание плотности с высотой, т. е. там, где

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = 0. \quad (134)$$

Этому условию мы можем придать несколько иную форму. С помощью уравнения состояния (21), которое может быть переписано в виде

$$\rho(x) = \frac{1}{R} \frac{p(x)}{\theta(x)}, \quad (135)$$

(134) переходит в

$$\frac{dp(x)}{p(x)} = -\frac{d\theta(x)}{\theta(x)},$$

т. е. вследствие (129)

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = -\frac{g}{R}. \quad (136)$$

Неустойчивое равновесие перестает существовать, когда падение температуры с высотой становится большим, чем $\frac{g}{R}$.

С помощью выведенных условий можно судить о том, находится ли рассматриваемая часть атмосферы в равновесии. Оказывается, что атмосфера, находящаяся в состоянии чистого равновесия (случай, изученный выше), будет находиться также в состоянии устойчивого механического равновесия в том случае, если определенное уравнением (116) падение температуры с высотой меньше, чем $\frac{g}{R} \frac{\kappa - 1}{\kappa}$. Это будет иметь место, если удовлетворяется неравенство

$$1 - \left(\frac{\mu}{\theta(x)}\right)^2 < 4 \frac{\kappa - 1}{\kappa}. \quad (137)$$

Это условие выполняется во всяком случае, если $x \geq \frac{4}{3}$. Кинетическая теория газов доказывает, что для одноатомного газа $x = \frac{5}{3}$, для двуатомного газа $x = \frac{7}{3}$, для трехатомного $x = \frac{4}{3}$. *Земная атмосфера*, которая во всей своей толще содержит только такие газы, находясь в состоянии лучистого равновесия, находится также в состоянии механического равновесия.

Совершенно иначе обстоит дело с устойчивостью равновесия атмосферы в горизонтальном направлении: теоретически условия равновесия здесь никогда не выполняются, даже при стационарных условиях облучения. Именно из (120) следует, что в этом случае атмосферное давление на заданной высоте x является функцией $\Theta(x)$ и, следовательно, в результате (118) функцией Θ_0 . Так как в среднем годовом величина Θ_0 является функцией географической широты, то, перемещаясь вдоль меридиана, мы на одной и той же высоте x будем иметь различные значения $p(x)$. Уравнение $p(x) = \text{const}$ представляет, очевидно, меридиональные кривые поверхностей равного давления, которые в этом случае являются поверхностями вращения. Эти поверхности не совпадают с горизонтальными эквипотенциальными поверхностями силы тяжести, вследствие чего возникают движения воздуха параллельно этим последним, вдоль меридианов. Так как условия облучения на земной поверхности далеко не стационарны, то в действительности это явление выражается еще более резко и значительно усложняется.

Неравномерное распределение температур вдоль параллелей ведет к тому, что поверхности равного давления не являются поверхностями вращения, а колебания температуры со временем вызывают постоянные поднятия и опускания этих изобарических поверхностей; к этому присоединяется еще влияние отклоняющей силы вращения Земли. Мы не можем дольше останавливаться на математическом описании этих явлений, так как они уже относятся к области динамической метеорологии.

§ 29. Влияние водяного пара на процессы излучения в атмосфере. Еще Тиндаль показал, что лучистая энергия заметно поглощается в атмосфере не главными ее составными частями — элементарными газами (азотом и кислородом), — а преимущественно газообразными и парообразными соединениями. Прежде всего в атмосфере находятся водяной пар и углекислота, поглощающие значительную часть солнечной радиации и почти все земное излучение.

Мы рассмотрим здесь это явление и дадим его математическую теорию. Чтобы не слишком усложнять наши расчеты, мы введем некоторые упрощения. Ввиду того что процентное содержание углекислоты даже в самых нижних слоях атмосферы очень незначительно, не более 0,03%, мы будем рассматривать сухой воздух вместе с углекислотой как простой газ и выделим только один водяной пар. Уравнения (29) и (35) позволяют выразить закон убывания плотности атмосферы с высотой в виде

$$p(x) = p_1 e^{-\frac{x}{H}} + p_2 e^{-\frac{3x}{H}}, \quad (138)$$

где p_1 и p_2 означают плотность сухого воздуха и водяного пара непосредственно у земной поверхности. Вместо H мы подставим общепринятую величину 8000 м, а вместо H' — величину $\frac{H}{3}$ в соответствии с формулой (34). Прежде, однако, мы должны сказать несколько слов о применимости написанной выше формулы. Как мы уже показали, она выведена в предположении изотермической атмосферы; тем не менее она дает результаты, вполне пригодные для наших целей. В этом можно убедиться, сравнивая вычисленные по ней значения $p(x)$ с данными табл. 11¹⁾. Влияние температуры, уменьшающейся с высотой, на плотность оказывается слишком незначительным, чтобы помешать применению формулы (138), которой мы здесь и воспользуемся, не входя в разбор дальнейших деталей. Второе упрощение, которое мы здесь считаем возможным сделать, состоит в том, что мы приписываем все поглощение солнечной радиации сухому воздуху и углекислоте. Мы полагаем, таким образом:

$$a_1(x) = a_1 e^{-\frac{x}{H}}, \quad a_2(x) = a'_1 e^{-\frac{x}{H}} + a'_2 e^{-\frac{3x}{H}}, \quad (139)$$

т. е.

$$p_a = e^{-a_1 H}, \quad p'_a = e^{-a'_1 H - a'_2 \frac{H}{3}}. \quad (140)$$

Тогда вследствие (70)

$$W(x) = (1 - A) W_m e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}}, \quad (141)$$

и вследствие (83):

$$\begin{aligned} \Theta^4(x) = & \frac{1}{2} (1 - A) W_m \left(1 + \frac{a_1}{a'_1 + a'_2 e^{-\frac{2x}{H}}} p_a e^{-\frac{x}{H}} + \right. \\ & \left. + a'_1 \int_x^\infty e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} e^{-\frac{x}{H}} dx + a'_2 \int_x^\infty e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} e^{-\frac{3x}{H}} dx \right). \quad (142) \end{aligned}$$

Делая подстановку $a_1 H e^{-\frac{x}{H}} = y$ и интегрируя по частям, мы получаем

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-a_1 H e^{-\frac{x}{H}}} e^{-\frac{3x}{H}} dx = & -\frac{1}{a_1^3 H^2} \int_y^0 e^{-y} y^2 dy = \\ = & \frac{1}{a_1} \left[\frac{2}{a_1^2 H^2} - p_a e^{-\frac{x}{H}} \left(e^{-\frac{x}{H}} + \frac{2}{a_1 H} e^{-\frac{x}{H}} + \frac{2}{a_1^2 H^2} \right) \right], \end{aligned}$$

¹⁾ См. „Théorie mathématique“, где на стр. 210 такое сравнение проведено графическим путем.

и применяя уравнение (104), получаем следующий результат:

$$\Theta^4(x) = \frac{1}{2}(1-A)W_m \left\{ 1 + \frac{a_1}{a_1' + a_2'e^{-\frac{2x}{H}}} p_a^{-\frac{x}{H}} + \frac{a_1'}{a_1} (1 - p_a^{-\frac{x}{H}}) + \frac{a_2^1}{a_1} \left[\frac{2}{a_1^2 H^2} - p_a^{-\frac{x}{H}} \left(e^{-\frac{2x}{H}} + \frac{2}{a_1 H} e^{-\frac{x}{H}} + \frac{2}{a_1^2 H^2} \right) \right] \right\}. \quad (143)$$

Некоторая громоздкость вывода этого уравнения искупается его замечательным результатом, — именно, что температура воздуха достигает минимума уже на конечной высоте. Чтобы это доказать, мы продифференцируем это уравнение по x и приравняем производную нулю; тогда

$$-\frac{1}{H} \ln p_a \left[a_1 (a_1' + a_2' e^{-\frac{2x}{H}})^{-1} - \frac{a_1'}{a_1} - \frac{a_2'}{a_1} \left(e^{-\frac{2x}{H}} + \frac{2}{a_1 H} e^{-\frac{x}{H}} + \frac{2}{a_1^2 H^2} \right) \right] + \frac{2a_1 a_2'}{H} (a_1' + a_2' e^{-\frac{2x}{H}})^{-2} e^{-\frac{x}{H}} + \frac{2a_2'}{H a_1} \left(e^{-\frac{x}{H}} + \frac{1}{a_1 H} \right) = 0. \quad (144)$$

При этом мы сократили все выражение на $e^{-\frac{x}{H}}$, что означает, что и для $x = \infty$ температура достигает экстремума, а именно, что здесь имеется вторичный минимум. Помня, что вследствие (140) $\ln p_a = -a_1 H$ и полагая для сокращения письма

$$e^{-\frac{x}{H}} = z, \quad (145)$$

мы получим вместо (144) уравнение

$$(a_1' + a_2' z^2)^3 - a_1^3 (a_1' + a_2' z^2) - \frac{2a_1 a_2' z}{H} = 0. \quad (146)$$

Отсюда легко вычислить высоту x , на которой температура воздуха достигает абсолютного минимума. Для такого вычисления нам необходимо иметь числовое значение H (которое можно положить равным 8000 м), а также величин a_1 , a_1' и a_2' . Как мы уже говорили, по имеющимся данным, подтвержденным вычислением, $p_a = 0,67$, $p_a' = 0,05$, т. е.

$$e^{-a_1 H} = 0,67, \quad e^{-a_1' H - a_2' \frac{H}{3}} = 0,05. \quad (147)$$

Последнее выражение определяет прозрачность нашей атмосферы для земного излучения, обусловленную как воздухом, так и присутствием водяного пара. Работа Экхольма¹⁾ дает нам по крайней мере приближенное представление о том, как велико участие этих обоих газов в поглощении земного излучения. По Экхольму сухой воздух вместе с углекислотой поглощает около 25%, а водяной пар около 60%

¹⁾ Ekholm, Über Emission und Absorption der Wärme und deren Bedeutung für die Temperatur der Erdoberfläche, „Met. Ztsch.“, 1902.

земного излучения; отсюда следует, что $e^{-a_1' H} = 0,75$ и $e^{-a_2' \frac{H}{3}} = 0,40$. Это дает нам соотношение

$$a_2' = 10a_1'. \quad (148)$$

Из (147) и (148) следует, что $a_1 = 0,0501$, $a_1' = 0,0864$, $a_2' = 0,8642$, и уравнение (146) принимает вид

$$(0,0864 + 0,8642z^2)^3 - 0,0025(0,0864 + 0,8642z^2) - 0,0108z = 0; \quad (149)$$

отсюда можно найти, что

$$z = 0,268,$$

$$x = 10530 \text{ м.}$$

Это означает, что на высоте $10\frac{1}{2}$ км средняя годовая температура достигает минимума, что, повидимому, подтверждается и наблюдениями. Это явление называется *верхней температурной инверсией*.

§ 30. Теплопроводность почвы. Мы уже упоминали о том, что количество тепла, которое притекает к земной поверхности изнутри Земли, исчезающе мало по сравнению с получаемым ею солнечным теплом; несколько далее мы докажем это расчетом. Однако как только мы перейдем от среднего облучения к облучению, изменяющемуся со временем, к нестационарным условиям, мы должны принять во внимание движение тепла в почве. Известно, что в последней уже на глубине около 10 м в течение всего года температура почти постоянна и мало отличается от средней годовой температуры на поверхности почвы. Поэтому летом средняя суточная температура на поверхности почвы выше, чем температура на указанной глубине, и в это время года поток тепла идет от поверхности вглубь. В это время, следовательно, температура у поверхности ниже, чем она была бы при отсутствии теплопроводности почвы. Обратное явление наблюдается зимой. Аналогичную периодическую смену оттока тепла от поверхности и притока к ней вызывает смена дня и ночи.

Для того чтобы математически описать это явление теплообмена в почве, можно считать, как мы это до сих пор и делали, рассматриваемый элемент поверхности почвы плоским и горизонтальным. Принимая во внимание, что вдоль этой поверхности температура изменяется очень незначительно, так, что поток тепла, параллельный земной поверхности, исчезающе мал, мы будем рассматривать поток тепла, нормальный к земной поверхности.

Вообразим вертикальную призму грунта, верхнее основание которой с площадью, равной единице, совпадает с поверхностью почвы, и проследим в ней явление теплопередачи. Обозначим через $\vartheta(x, t)$ температуру в момент t в горизонтальном сечении призмы на глубине x ; тогда $\frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x}$ будет представлять собой градиент температуры в направлении возрастающих x (т. е. вниз), перпендикулярный к этому сечению. В силу основных положений математической теории теплопроводности

через это сечение в единицу времени протечет тогда количество тепла, равное

$$Q_1 = -K \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x},$$

где K означает коэффициент теплопроводности почвы. Через другое сечение этой призмы, лежащее на dx глубже первого, за то же время протечет количество тепла, равное

$$Q_2 = -K \left[\frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial x^2} dx \right].$$

Таким образом в элементарном объеме, заключенном между обоими сечениями, остается некоторое количество тепла

$$dQ = Q_1 - Q_2 = K \frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial x^2} dx,$$

которое пойдет, отвлекаясь от различных возможных превращений тепловой энергии, на повышение температуры $\vartheta(x, t)$ этого элемента. Обозначая через c_p удельную теплоемкость почвы, т. е. то количество тепла, которое может нагреть единицу ее массы на 1° , и через ρ_p плотность почвы, мы найдем, что в нашем элементарном объеме заключена масса $\rho_p dx$ и что увеличение количества заключенного в нем тепла на dQ вызовет в единицу времени повышение температуры $\frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t}$, определяемое равенством

$$dQ = c_p \rho_p \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} dx.$$

Полагая

$$\frac{K}{c_p \rho_p} = a^2, \quad (150)$$

где a^2 — так называемый коэффициент температуропроводности почвы, мы получим из предыдущих уравнений новое:

$$\frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial x^2}. \quad (151)$$

Это уравнение в частных производных вместе с рассматриваемыми дальше граничными условиями управляет теплопередачей в почве — важным климатическим фактором, механизм которого нетрудно изучить. При этом целесообразно вначале исключить из поля нашего зрения влияние атмосферы на облучение земной поверхности. Мы предположим, что последняя открыта непосредственному действию солнечных лучей. Как мы уже видели, количество радиации, получаемой земной поверхностью, легко выразить математически: оно является периодической функцией времени и может быть поэтому представлено с помощью ряда Фурье в виде:

$$W_1(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + a_2 \cos \frac{4\pi}{T} t + \dots \\ \dots + b_1 \sin \frac{2\pi}{T} t + b_2 \sin \frac{4\pi}{T} t + \dots \quad (152)$$

Здесь T означает период — год, когда речь идет о годовом ходе облучения, и день, когда мы ограничиваемся суточным ходом. Для того чтобы не усложнять наших выкладок, мы примем, что написанный выше ряд (152) сводится к двум первым членам и, следовательно:

$$W_1(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t. \quad (152 \text{ bis})$$

Нетрудно перейти от этого частного случая к общему. Обозначим через a_p поглощательную способность земной поверхности для солнечной радиации; тогда земная поверхность из падающего на нее количества радиации $W_1(t)$ за единицу времени поглотит количество

$$Q_i = a_p W_1(t) = a_p \left(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t \right).$$

Кроме этого, как мы уже сказали, существует приток тепла к поверхности из земных недр, равный в единицу времени

$$Q_p = K \frac{\partial \vartheta(0, t)}{\partial x}. \quad (153)$$

Исчезновение знака минус в этом выражении объясняется тем, что оно представляет количество тепла, притекающее к поверхности, т. е. в направлении убывающих x .

В сумме земная поверхность получает в единицу времени количество тепла, равное $Q_i + Q_p$, и в то же время излучает в согласии с уравнением (46) количество тепла $E = a'_p \sigma \Theta_p^4$. На земной поверхности устанавливается поэтому абсолютная температура Θ_p , при которой приход и расход тепла будут равны между собой. Это приводит к уравнению

$$a_p \left(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t \right) + K \frac{\partial \vartheta(0, t)}{\partial x} = a'_p \sigma \Theta_p^4.$$

Так как мы недостаточно точно знаем величины a_p и a'_p , то их обычно считают равными друг другу:

$$a_p = a'_p. \quad (154)$$

Тогда мы получим

$$a_p \left(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t \right) + K \frac{\partial \vartheta(0, t)}{\partial x} = a_p \sigma \Theta_p^4; \quad (155)$$

при этом

$$\Theta_p = 273^\circ + \vartheta(0, t). \quad (156)$$

Для того чтобы с помощью двух составленных уравнений определить температуру $\vartheta(0, t)$ поверхности почвы, мы должны знать $\frac{\partial \vartheta(0, t)}{\partial x}$; поэтому нам придется решить более общую задачу и определить тепловые условия в почве, на поверхности которой происходят описанные излучение и поглощение тепла.

Наша задача может быть решена в конечной форме в том случае, если правая часть уравнения (155) линейна по отношению к $\vartheta(0, t)$. Это имеет место только тогда, когда полуамплитуда температуры $\vartheta(0, t)$ мала по сравнению с средней абсолютной температурой по-

верхности почвы $\Theta_0 = 273^\circ + \vartheta_0$. Поскольку так оно и есть, можно положить

$$\Theta_p = \Theta_0 + \Delta\vartheta; \quad \vartheta(0, t) = \vartheta_0 + \Delta\vartheta,$$

откуда следует:

$$\sigma\Theta_p^4 = \sigma\Theta_0^4 \left(1 + \frac{\Delta\vartheta}{\Theta_0}\right)^4.$$

Разлагая это выражение по биному Ньютона и опуская малое число $\frac{\Delta\vartheta}{\Theta_0}$ в степенях, выше первой, получим

$$\sigma\Theta_p^4 = \sigma\Theta_0^4 \left[1 + 4 \frac{\vartheta(0, t) - \vartheta_0}{\Theta_0}\right] = \sigma(\Theta_0^4 - 4\Theta_0^3\vartheta_0) + 4\sigma\Theta_0^3\vartheta(0, t).$$

Полагая

$$\begin{aligned} \sigma(\Theta_0^4 - 4\Theta_0^3\vartheta_0) &= hw, & 4\sigma\Theta_0^3 &= h, \\ \frac{K}{a_p h} &= R, & \frac{a_0}{h} - w &= A_0, & \frac{a_1}{h} &= A_1, \end{aligned} \quad (157)$$

мы получим вместо (155) уравнение

$$\vartheta(0, t) - R \frac{\partial \vartheta(0, t)}{\partial x} = A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi}{T} t. \quad (158)$$

Таким образом дело сводится к тому, чтобы найти частный интеграл уравнения (151), удовлетворяющий выведенному нами граничному условию (158). Положим для этого

$$\vartheta(x, t) = e^{\alpha t + \beta x},$$

где α и β — постоянные; тогда $\vartheta(x, t)$ будет частным интегралом (151), если только удовлетворено условие

$$\alpha = a^2 \beta^2. \quad (159)$$

Легко видеть, что выражение

$$\vartheta(x, t) = C_1' e^{\alpha_1 t + \beta_1 x} + C_2' e^{\alpha_2 t + \beta_2 x} + C_3 x + C_4,$$

в котором C_1' , C_2' , C_3 , C_4 — произвольные постоянные, тоже будет частным интегралом уравнения (151), если только α_1 и β_1 , α_2 и β_2 удовлетворяют попарно условию (159). Подставим

$$\alpha_1 = iN, \quad \alpha_2 = -iN,$$

где N — действительное число и i — мнимая единица; тогда значения β_1 и β_2 будут сопряженными комплексными величинами, так как одно из них получается из другого, если мы в выражении (158) заменяем $+i$ на $-i$. Таким образом они имеют вид:

$$\beta_1 = L + iP, \quad \beta_2 = L - iP.$$

Подставляя эти выражения в (159) и приравнявая друг другу действительные и мнимые части полученного уравнения, мы найдем

$$P = L = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{N}{2}},$$

$$\beta_1 = (1 + i)P, \quad \beta_2 = (1 - i)P.$$

Таким образом

$$\vartheta(x, t) = e^{Px} [C_1' e^{i(Nt + Px)} + C_2' e^{-i(Nt + Px)}] + C_3 x + C_4.$$

По известной формуле Эйлера

$$e^{\pm i(Nt + Px)} = \cos(Nt + Px) \pm i \sin(Nt + Px),$$

и мы получим, полагая $C_1' + C_2' = C_1$; $i(C_1' - C_2') = C_2$, где C_1 и C_2 — пока произвольные постоянные:

$$\vartheta(x, t) = e^{Px} [C_1 \cos(Nt + Px) + C_2 \sin(Nt + Px)] + C_3 x + C_4.$$

Подставим это выражение в (158) и потребуем, чтобы полученное равенство удовлетворялось тождественно. Тогда мы найдем, что для этого необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} N &= \frac{2\pi}{T}, \\ \left. \begin{aligned} C_1 - RP(C_1 + C_2) &= A_1, \\ C_2 - RP(C_2 - C_1) &= 0, \\ C_4 - RC_3 &= A_0. \end{aligned} \right\} \quad (160) \end{aligned}$$

Постоянной P мы можем придать два значения, равных по абсолютной величине, но различных по знаку. При положительном P амплитуда колебания температуры будет неограниченно расти с глубиной. Мы исключим этот случай как физически невозможный и противоречащий тому, что мы сказали в начале параграфа, и придадим P отрицательный знак. Тогда

$$P = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{T}}, \quad (161)$$

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) = e^{-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\pi}{T}}} & \left[C_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x}{a} \sqrt{\frac{\pi}{T}}\right) + \right. \\ & \left. + C_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x}{a} \sqrt{\frac{\pi}{T}}\right) \right] + C_3 x + C_4. \quad (162) \end{aligned}$$

Если мы пожелаем вычислить среднюю температуру за интервал времени T , то каждому положительному значению обоих тригонометрических членов правой части уравнения (162) будет соответствовать равный отрицательный член, и мы получим

$$\vartheta(x) = C_3 x + C_4.$$

Следовательно, C_4 представляет собой среднюю температуру ϑ_0 за время T на поверхности почвы, в то время как C_3 представляет средний градиент температуры g_T (так называемый геотермический градиент). Отсюда мы находим

$$C_4 = \vartheta_0, \quad C_3 = g_T. \quad (163)$$

Из (156), (157), (160), (163) следует, что

$$\alpha_p \sigma (273 + \vartheta_0)^4 = a_p \alpha_0 + K g_T, \quad (164)$$

т. е. ϑ_0 есть та средняя температура поверхности почвы, которая соответствует среднему облучению $W_m = a_0$. Уравнения (160) и (161) позволяют определить оставшиеся две постоянные C_1 и C_2 , и задача тем самым оказывается решенной до конца.

Можно придать полученному решению более наглядную форму, положив

$$C_1 = B \cos \varepsilon, \quad C_2 = B \sin \varepsilon^1),$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{C_2}{C_1}, \quad B = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad (165)$$

так как тогда мы получим

$$\vartheta(x, t) = \vartheta_0 + g_T x + B e^{-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\pi}{T}}} \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{x}{a} \sqrt{\frac{\pi}{T}} - \varepsilon \right). \quad (166)$$

Температура поверхности почвы теперь равна

$$\vartheta(0, t) = \vartheta_0 + B \cos \left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon \right). \quad (167)$$

§ 31. Теплообмен в почве, запаздывание температурных экстремумов. Уравнение (166) дает нам полное представление о механизме теплообмена в почве. Из него прежде всего следует, что амплитуды колебания температуры на двух различных глубинах x_1 и x_2 равны соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 2Be^{-\frac{x_1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{T}}}, \\ \alpha_2 &= 2Be^{-\frac{x_2}{a} \sqrt{\frac{\pi}{T}}}, \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

т. е. с возрастанием глубины в арифметической прогрессии амплитуда убывает в геометрической прогрессии. Затухание амплитуды выражено тем сильнее, чем меньше период T . Температура на глубинах x_1 — x_2 достигает своих крайних значений в моменты t_1 и t_2 , которые легко вычислить из уравнений

$$\frac{2\pi}{T} t_1 - \frac{x_1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{T}} - \varepsilon = m\pi, \quad \frac{2\pi}{T} t_2 - \frac{x_2}{a} \sqrt{\frac{\pi}{T}} - \varepsilon = m\pi, \quad (169)$$

где m — любое целое число. Вычитая друг из друга эти равенства, мы найдем

$$a = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \sqrt{\frac{T}{4\pi}}. \quad (170)$$

Величина

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = c$$

представляет собой, очевидно, скорость, с которой температурные колебания распространяются в почве, и, следовательно:

$$c = a \sqrt{\frac{4\pi}{T}}. \quad (171)$$

¹⁾ Не смешивать этого ε с наклоном эклиптики, который в разделе I был обозначен тоже через ε . *Прим. перев.*

В однородной почве, т. е. при постоянном a и при заданном T , эта скорость тоже постоянна. Чем меньше период T , тем больше скорость распространения c .

Определив из наблюдений амплитуды α_1 и α_2 или моменты t_1 и t_2 , можно, воспользовавшись предыдущими уравнениями, определить коэффициент температуропроводности почвы a^2 . Так, из уравнений (168) можно вывести

$$a^2 = \frac{\pi}{T} \left(\frac{x_2 - x_1}{\ln \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \right)^2. \quad (172)$$

Если у нас имеется больше двух уравнений типа (168) или (169), то вероятнейшую величину a^2 мы получим по способу наименьших квадратов. Таких вычислений значения a^2 сделано большое количество; они дали различные результаты в зависимости от состава почвы. Некоторые результаты вместе с соответствующими значениями K и $C_p = c_p \rho_p$ (теплоемкостью почвы) в системе единиц *CGM* (сантиметр-грамм-минута) приведены ниже:

	a^2	C_p	K
Базальт	0,47	0,53	0,25
Песчаный грунт	0,52	0,31	0,16
Гранит	0,90	0,52	0,47
Песчаник	1,39	0,46	0,64

Для скалистой почвы мы можем принять округленные величины:

$$\begin{array}{ccc} a^2 & C_p & K \\ 1,00 & 0,50 & 0,50, \end{array} \quad (173)$$

на основании которых мы сделаем некоторые расчеты, поясняющие изложенную выше теорию. Пользуясь уравнением (168), мы найдем, что на глубине 10 м годовая амплитуда температуры уменьшается до 8,7% своей величины на поверхности, а на глубине 30 м — до 0,065%. В земляных грунтах она будет еще меньше. То же уравнение показывает нам, что суточные колебания температуры затухают еще гораздо сильнее. На больших глубинах температура остается в течение всего года постоянной; она не изменяется со временем и зависит только от глубины, возрастая вместе с последней, как это можно видеть из уравнения (166). Последний член этого уравнения там становится так мал, что распределение температур в почве может быть представлено следующим выражением:

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 + g_T x. \quad (174)$$

Повышение температуры с глубиной, т. е. градиент температуры g_T , также изменяется от места к месту; из всех имеющихся наблюдений можно вывести, что в среднем на каждые 33,3 м глубины (геотермическая ступень) температура увеличивается на 1°. Отсюда среднее значение g_T равно

$$g_T = 0,0003 \text{ градус/см}. \quad (175)$$

По Цёпприцу, средняя теплопроводность пород, из которых сложена земная поверхность, в единицах *CGM* равна $K = 0,35$. Поэтому

поток тепла, идущий из глубоких слоев к земной поверхности, равен $Kg_T = 0,000105 \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{мин}}$, т. е. 55 кал/год. Сопоставление с числами табл. 3 показывает, как незначительно это количество тепла по сравнению с тем теплом, которое Земля получает от Солнца. Отсюда можно заключить, что высокие температуры внутри Земли не оказывают никакого влияния на температуру земной поверхности и не имеют значения для климата Земли. Совершенно так же дело обстоит и в геологическом прошлом, ибо, как только расплавленный земной шар покрылся твердой корой толщиной всего в 1000 м, внутренняя теплота его не могла повысить температуру его поверхности даже на 1° . Со времени превращения Земли из яркой звезды в темное мировое тело — превращения в космических единицах времени можно считать почти мгновенным, — тепло земной атмосферы и земной поверхности имеет единственным источником солнечное излучение.

Внутреннее тепло Земли не является климатическим фактором; зато для климата имеет большое значение накопление тепла в поверхностных слоях почвы, происходящее днем и в течение теплой половины года. Это тепло земная поверхность возвращает атмосфере ночью и в течение холодной половины года. Здесь мы дадим математическое выражение этого теплооборота.

Поток тепла, текущий от земной поверхности в глубь почвы, очевидно, равен

$$\frac{dQ}{dt} = -K \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x};$$

но вследствие (166):

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} = g_T - \frac{B}{a} \sqrt{\frac{\pi}{T}} e^{-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\pi}{T}}} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{x}{a} \sqrt{\frac{\pi}{T}} - \varepsilon\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{x}{a} \sqrt{\frac{\pi}{T}} - \varepsilon\right) \right\},$$

так что

$$\frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = g_T - \frac{B}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4} - \varepsilon\right).$$

За интервал времени от t_1 до t_2 протечет от земной поверхности в недра количество тепла, равное

$$Q_t = \frac{KB}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \int_{t_1}^{t_2} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) dt = \\ = \frac{KB}{a} \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) \right]_{t_1}^{t_2},$$

причем опущено вычисленное ранее очень малое количество тепла $g_T K(t_2 - t_1)$. При расчете теплообмена в почве этот постоянный поток тепла, идущий из глубины, может быть устранен из рассмотрения.

Подставляя в написанное выше выражение то значение $t = t_1$, которое дает $\frac{2\pi}{T}t_1 + \frac{\pi}{4} - \varepsilon = \frac{\pi}{2}$, соответствующее $\frac{dQ}{dt} = 0$, т. е. мо-

мент, в который накопление тепла в почве (отдача тепла земной поверхностью недрам) начинается, и для t_2 значение, дающее $\frac{2\pi}{T}t_2 + \frac{\pi}{4} - \varepsilon = \frac{3}{2}\pi$, т. е. момент, когда это накопление прекращается, мы получим собственно величину теплообмена в почве

$$Q = \frac{2KB}{a} \sqrt{\frac{T}{2\pi}}. \quad (176)$$

Как можно было ожидать, эта величина равна полной амплитуде колебания количества Q_t . Пользуясь для a^2 и K данными, приведенными в (173), мы найдем, например, для суточного теплообмена, подставляя $T = \tau = 1440^m$:

$$Q_\tau = 15,2 B_\tau \text{ кал},$$

и для годового оборота, подставляя $T = 525\,960^m$:

$$Q_T = 290 B_T.$$

В этих выражениях B_τ представляет собой половину суточной амплитуды, а B_T — половину годовой амплитуды температуры на земной поверхности. Так, для $B_\tau = 10^\circ$ мы находим $Q_\tau = 152 \text{ кал}$; для $B_T = 10^\circ$ $Q_T = 2900 \text{ кал}$.

Накопление тепла в почве за сутки относительно больше годового, так как оно вырастает пропорционально корню квадратному из периода. Вследствие этого накопления тепла амплитуда температуры $\theta(0, t)$ меньше, чем она была бы при отсутствии влияния почвы. Кроме того, это накопление тепла вызывает запаздывание экстремумов температуры.

Для того чтобы математически описать явление, мы в первом приближении примем, что величину облучения земной поверхности можно представить в виде простой тригонометрической функции (152). В этом случае величина облучения достигает максимума в моменты, когда $\frac{2\pi}{T}t = m\pi$, где m — любое целое число. Но, как мы видим из выражения (167), температура поверхности почвы достигает максимума в моменты, когда $\frac{2\pi}{T}t_2 - \varepsilon = m\pi$. Запаздывание максимума $\Delta t = t_2 - t_1$, следовательно, равно

$$\Delta t = \frac{T}{2\pi} \varepsilon,$$

т. е. вследствие (165)

$$\Delta t = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{C_2}{C_1}.$$

Из (157), (160) и (161) следует, что

$$\Delta t = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{K}{K + a_p h a \sqrt{\frac{T}{\pi}}}. \quad (177)$$

Величина h есть функция средней температуры поверхности почвы ϑ_0 . Для $\vartheta_0 = 0, 10$ и 20° ее значения равны соответственно 0,006185, 0,006890 и 0,007647. Пользуясь средней из этих величин и подставляя в написанное выше выражение вместо K и a^2 данные из (173), а также обычно принимаемую величину $a_p = 0,92$, мы получим

$$\Delta t = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{1 + 0,01258 \sqrt{\frac{T}{\pi}}}$$

Принимая, что суточный ход облучения выражается формулой (152 bis), мы найдем, полагая $T = \tau = 1440^m$, что запаздывание температурных экстремумов равно $2^h 32^m 44^s$, а для годового периода, при $T = 525960^m$ оно окажется равным $9^d 7^h 33^m$. Первая из этих двух вычисленных теоретически величин очень хорошо согласуется с наблюдениями, в особенности в отношении дневного максимума температуры; о запаздывании минимума температуры речь будет ниже. Вторая из приведенных величин, т. е. запаздывание экстремумов температуры в годовом ходе, гораздо меньше действительно наблюдаемого. Для того чтобы объяснить это явление, мы должны принять во внимание и влияние атмосферы.

§ 32. Форма суточной кривой температуры. Вследствие прерывности суточного хода облучения кривая хода температуры за тот же интервал времени имеет особую форму. Этому обстоятельству были посвящены многочисленные специальные исследования, но только развитая выше теория позволяет четко и наглядно объяснить все характеристические особенности этой кривой. Мы остановимся на этом вопросе подробнее. Для того чтобы иметь перед собой конкретный пример, мы изучим кривую нормального суточного хода температуры на экваторе. При этом мы отвлечемся от влияния атмосферы и сосредоточим наше внимание на температуре самого верхнего слоя почвы. Вообразим, что Солнце находится на среднем расстоянии от Земли $r = 1$ и что склонение его имеет среднее значение, т. е. $\delta = 0$. Тогда по формулам (18) и (19) раздела I суточный ход облучения можно представить выражением

$$W_1(t) = B_0 \cos \omega. \quad (178)$$

Поскольку дело идет о среднем ходе облучения, можно положить $\omega = \frac{2\pi}{\tau} t$, где $\tau = 24^h$ и t означают среднее солнечное время. Величине B_0 мы дадим такое значение, при котором среднее суточное облучение равно среднему годовому. Так как в нашем случае $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ и суточная сумма радиации равна $W_\tau = \frac{\tau}{\pi} B_0$, то среднее облучение равно $\frac{B_0}{\pi}$. Оно должно быть равно среднему годовому напряжению радиации на экваторе, т. е. $0,6106$ кал. Отсюда следует, что

$$B_0 = 0,6106 \cdot \pi \text{ кал.}$$

Выражение (178), представляющее простую косинусоиду, справедливо только для интервала времени между восходом и заходом Солнца,

т. е. для $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$. Ночью облучение отсутствует, и ход его изображается отрезком прямой, совпадающей с осью абсцисс. Дело сводится к тому, чтобы эти две части кривой суточного хода облучения представить одной непрерывной функцией. Это можно сделать, воспользовавшись рядами Фурье в виде (152). Теория этих рядов даст следующие значения коэффициентов:

$$a_0 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau W_1(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau W_1(t) \cos \frac{2n\pi}{\tau} t dt;$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau W_1(t) \sin \frac{2n\pi}{\tau} t dt;$$

и в приложении к данному случаю мы находим:

$$a_0 = \frac{B_0}{\pi}, \quad a_1 = \frac{B_0}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{3} \frac{2B_0}{\pi}, \quad a_4 = -\frac{1}{15} \frac{2B_0}{\pi},$$

$$a_6 = \frac{1}{35} \frac{2B_0}{\pi}, \quad a_8 = -\frac{1}{63} \frac{2B_0}{\pi}, \quad a_{10} = \frac{1}{99} \frac{2B_0}{\pi},$$

$$a_{12} = -\frac{1}{143} \frac{2B_0}{\pi}, \quad a_{14} = \frac{1}{195} \frac{2B_0}{\pi}, \quad a_{16} = -\frac{1}{255} \frac{2B_0}{\pi}.$$

Коэффициенты $a_3, a_5, a_7, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$ все равны нулю.

Так как каждому тригонометрическому члену (152) соответствует аналогичный член выражения (167), то суточный ход температуры поверхности почвы изобразится рядом:

$$\vartheta(0, t) = \vartheta_0 + B_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\tau} t - \varepsilon_1\right) + B_2 \cos\left(\frac{4\pi}{\tau} t - \varepsilon_2\right) +$$

$$+ B_4 \cos\left(\frac{8\pi}{\tau} t - \varepsilon_4\right) + B_6 \cos\left(\frac{12\pi}{\tau} t - \varepsilon_6\right) + B_8 \cos\left(\frac{16\pi}{\tau} t - \varepsilon_8\right) \dots$$

При этом ϑ_0 дано формулой (164), в которой можно опустить член KgT . Значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ и B_1, B_2, \dots можем найти с помощью (160), (161), (165), подставляя вместо T значения $\tau, \frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{4}$. Таким образом мы получим следующее выражение для суточного хода температуры на поверхности почвы:

$$\vartheta(0, t) = 26,39 + 22,80 \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - 37^\circ 7' 5''\right) +$$

$$+ 7,16 \cos\left(\frac{4\pi t}{\tau} - 39^\circ 10' 28''\right) - 1,02 \cos\left(\frac{8\pi t}{\tau} - 40^\circ 44' 48''\right) +$$

$$+ 0,37 \cos\left(\frac{12\pi t}{\tau} - 41^\circ 28' 38''\right) - 0,18 \cos\left(\frac{16\pi t}{\tau} - 41^\circ 55' 21''\right) +$$

$$+ 0,10 \cos\left(\frac{20\pi t}{\tau} - 42^\circ 13' 55''\right) - 0,07 \cos\left(\frac{24\pi t}{\tau} - 42^\circ 27' 40''\right) +$$

$$+ 0,04 \cos\left(\frac{28\pi t}{\tau} - 42^\circ 38' 31''\right) - 0,03 \cos\left(\frac{32\pi t}{\tau} - 42^\circ 47' 19''\right).$$

Для того чтобы дать наглядное представление о полученном результате, с помощью предыдущей формулы были вычислены темпера-

туры для моментов, отделенных трехчасовым интервалом. Полученные данные приведены в следующей таблице:

До полудня					После полудня			
0 ^h	3 ^h	6 ^h	9 ^h	12 ^h	3 ^h	6 ^h	9 ^h	12 ^h
13°,2	8°,8	5°,7	25°,9	49°,5	54°,0	33°,3	19°,6	13°,2

Форма кривой суточного хода температуры изображена на рис. 13. Как легко видеть из таблицы и кривой, минимум температуры падает на восход Солнца; затем начинается крутой подъем кривой температуры, которая достигает максимума вскоре после 2^h пополудни. Отсюда начинается падение температуры, постепенно замедляющееся

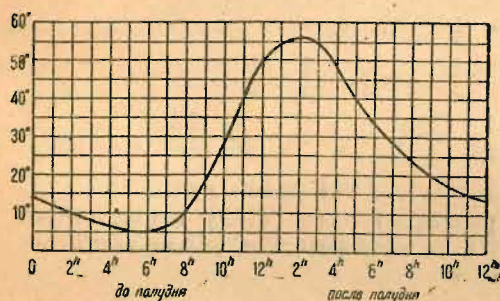


Рис. 13.

до момента минимума. Все это так хорошо совпадает с результатами наблюдений, что мы можем сказать: явление теплообмена в почве может вполне удовлетворительно объяснить как несимметричную форму суточного хода температуры, так и наблюдаемое запаздывание обоих экстремумов температуры.

§ 33. Вторая основная проблема математической климатологии. Интегрирование уравнения излучения для нестационарного случая.

Обращаясь к случаю, когда облучение является переменной величиной, как это и есть в действительности, мы не должны упускать из виду теплопроводности почвы, ибо путем теплопроводности часть получаемого Землей солнечного тепла днем и в теплое время года поглощается почвой, накапливаясь постепенно в ней, с тем, чтобы быть отданной обратно ночью и в холодное время года. Теплообмен в почве является важным климатическим фактором, который тесно связан со всем механизмом термических явлений на земной поверхности. Учет этого теплообмена, а также изменчивость величины облучения чрезвычайно затрудняют решение поставленной задачи. Несмотря на это, необычайная гибкость методов математики позволяет нам понять и описать все детали этого сложного явления.

Полное решение этой проблемы было получено только недавно ¹⁾. Сложность примененного математического аппарата вполне окупается большим значением этого решения.

¹⁾ Миланкович, Колебания температуры в различных слоях атмосферы (на сербском языке), Протоколы Сербской академии, ч. XXXIV, 1929 г. В „Théorie mathématique“ эта задача решена без учета теплообмена в почве и при некоторых других упрощающих предположениях.

Чтобы получить упомянутое решение, мы примем, что рассматриваемая часть земной поверхности вместе с прилегающим слоем атмосферы получает некоторое количество солнечной энергии, которое меняется по периодическому закону. Этот последний для случаев годового и суточного хода облучения может быть представлен с помощью ряда Фурье, имеющего вид (152). Совершенно достаточно принять во внимание только первые два члена этого ряда, т. е. положить

$$W_1(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t, \quad (179)$$

так как не составит никакой трудности перейти от этого частного случая к общему.

Кроме нижних слоев, в которых происходит конвекция, вся атмосфера нагревается преимущественно тепловым излучением земной поверхности. Поэтому можно, как мы это уже делали в (86) и (87), а также при изучении вертикального строения атмосферы, с успехом положить $a_1(x) = 0$, $a_2(x) = k_2 \rho(x)$. Тогда

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (180)$$

так что до земной поверхности доходит количество лучистой энергии, равное

$$W(0, t) = (1 - A) \left(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t \right), \quad (181)$$

которое полностью поглощается поверхностью почвы, ибо все отражения уже учтены в коэффициенте A . Кроме того, земная поверхность получает еще атмосферное тепловое излучение $O(0, t)$, которое совершенно так же поглощается нацело, и, наконец, некоторое количество тепла, идущее путем теплопроводности из почвы, Q_p , вследствие (153) равное

$$Q_p = K \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x}, \quad (182)$$

причем x надо считать возрастающим в глубь почвы. Земная поверхность сама испускает тепловое излучение $U(0, t)$, и так как в каждый момент приход и расход лучистой энергии должны быть равны, мы имеем

$$U(0, t) = W(0, t) + O(0, t) + Q_p.$$

Принимая во внимание (57) и (182), имеем

$$Z(0, t) + W(0, t) + K \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = 0. \quad (183)$$

На верхней границе атмосферы должно выполняться граничное условие (63).

Плотность атмосферы мы можем с достаточной точностью определить из формулы (97), т. е.

$$\rho(x) = \rho_0 e^{-\frac{x}{H}}. \quad (184)$$

Последняя вместе с (44) и (180) позволяет придать дифференциальным уравнениям (58), (61) и (60) следующий вид:

$$\frac{\partial Y(x, t)}{\partial x} = k_2 \rho_0 e^{-\frac{x}{H}} Z(x, t), \quad (185)$$

$$\frac{\partial Z(x, t)}{\partial x} = c \rho_0 e^{-\frac{x}{H}} \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t}, \quad (186)$$

$$2k_2 \sigma \Theta^4(x, t) + c \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} = k_2 Y(x, t). \quad (187)$$

Так как согласно (184) атмосфера теоретически простирается в бесконечность, то (63) заменяется через

$$Y(\infty, t) + Z(\infty, t) = 0. \quad (188)$$

Задачу осложняет присутствие членов $K \frac{\partial \vartheta(0, t)}{\partial x}$ и $2k_2 \sigma \Theta^4(x, t)$, так как первый из них представляет градиент температуры в почве, а второй содержит четвертую степень температуры. Однако эти затруднения легко устранить.

Температура поверхности почвы выражается с помощью формулы (167) так:

$$\vartheta(0, t) = \vartheta_0 + B \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \varepsilon\right). \quad (189)$$

Изучая теплообмен в почве, мы уже нашли значение градиента температуры в почве $\frac{\partial \vartheta(0, t)}{\partial x}$,

$$\frac{\partial \vartheta(0, t)}{\partial x} = g_T - \frac{B}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{4} - \varepsilon\right).$$

Поскольку g_T очень мало, мы можем переписать это в виде

$$\frac{\partial \vartheta(0, t)}{\partial x} = -\frac{B}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \cos\left[\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{T}{8}\right) - \varepsilon\right].$$

Это выражение равно [см. (189)] разности $\vartheta(0, t) - \vartheta_0$, умноженной на $-\frac{1}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{T}}$, в которой время t увеличено на значение разности фаз $\frac{T}{8}$. Таким образом

$$\frac{\partial \vartheta(0, t)}{\partial x} = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left[\vartheta\left(0, t + \frac{T}{8}\right) - \vartheta_0 \right].$$

Так как мы имеем дело с годовым ходом температуры, то с достаточной точностью можно приравнять температуру поверхности почвы $\vartheta(0, t)$ температуре прилежащего к ней слоя воздуха $\vartheta'(0, t)$. Таким образом

$$\frac{\partial \vartheta(0, t)}{\partial x} = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left[\vartheta'\left(0, t + \frac{T}{8}\right) - \vartheta'_0 \right],$$

так что уравнение (183) заменится следующим:

$$\begin{aligned} Z(0, t) + (1-A) \left(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t \right) = \\ = \frac{K}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left[\vartheta'\left(0, t + \frac{T}{8}\right) - \vartheta'_0 \right]. \end{aligned} \quad (190)$$

От четвертой степени температуры мы можем освободиться таким образом: периоду T соответствует среднее облучение

$$W_m = a_0,$$

и этому, согласно (109), соответствует следующее распределение температур в воздушном столбе:

$$\sigma \Theta_m^4(x) = \frac{1}{2} a_0 (1-A) \left[1 + k_2 \int_x^h \rho(x) dx \right].$$

Подставляя сюда выражение $\rho(x)$ из (184) и интегрируя от x до h , мы получим

$$\sigma \Theta_m^4(x) = \frac{1}{2} a_0 (1-A) \left(1 + k_2 \rho_0 H e^{-\frac{x}{H}} \right);$$

но, в силу (30)

$$\rho_0 H = M$$

равно массе столба атмосферы, приходящегося на единицу земной поверхности, так что

$$\sigma \Theta_m^4(x) = \frac{1}{2} a_0 (1-A) \left(1 + k_2 M e^{-\frac{x}{H}} \right). \quad (191)$$

Полагая

$$\Theta_m(x) = 273^\circ + \vartheta'_m(x),$$

т. е. обозначая через $\vartheta'_m(x)$ среднюю температуру воздуха за период T , измеренную в градусах Цельсия, мы видим, что дробь $\frac{\vartheta'_m(x)}{273}$ достаточно мала и что ее высшими степенями по сравнению с единицей можно пренебречь. Применяя формулу бинома, мы найдем

$$\Theta_m^4(x) = 273^4 \left[1 + 4 \frac{\vartheta'_m(x)}{273} \right], \quad (192)$$

и, следовательно,

$$273^4 \sigma + 4 \cdot 273^3 \sigma \vartheta'_m(x) = \frac{1}{2} a_0 (1-A) \left(1 + k_2 M e^{-\frac{x}{H}} \right).$$

Так как для $x=0$ $\vartheta'_m(x) = \vartheta'_0$, то, вводя обозначение

$$\frac{1}{8} \frac{a_0 (1-A)}{273^3 \sigma} k_2 M = b, \quad (193)$$

получим:

$$\vartheta'_m(x) = \vartheta'_0 + b \left(e^{-\frac{x}{H}} - 1 \right). \quad (194)$$

Обозначая, далее, через $\vartheta''(x, t)$ отклонение переменной температуры воздуха на высоте x от ее среднего значения $\vartheta'_m(x)$, т. е. полагая

$$\vartheta''(x, t) = \vartheta(x, t) - \vartheta'_m(x), \quad (195)$$

мы видим прежде всего, что

$$\frac{\partial \vartheta'(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \vartheta''(x, t)}{\partial t}, \quad (196)$$

и, кроме того:

$$\Theta(x, t) = 273^\circ + \vartheta'(x, t) = 273^\circ + \vartheta'_m(x) + \vartheta''(x, t) = 273^\circ + \vartheta'_0 + \vartheta''(x, t) + b(e^{-\frac{x}{H}} - 1).$$

Обозначая через Θ_0 среднюю абсолютную температуру $273^\circ + \vartheta'_0$ нижнего слоя воздуха, получим

$$\Theta(x, t) = \Theta_0 + \vartheta''(x, t) + b(e^{-\frac{x}{H}} - 1).$$

Применяя вновь формулу бинома и принимая во внимание, что последние два члена правой части написанного выше уравнения малы по сравнению с первым, и, кроме того, введя обозначение

$$4\sigma\Theta_0^3 = p, \quad (197)$$

мы найдем:

$$4\sigma\Theta^4(x, t) = \frac{1}{4}p\Theta_0 + p[\vartheta''(x, t) + b(e^{-\frac{x}{H}} - 1)]. \quad (198)$$

Таким путем мы получим вместо уравнений (185), (186), (187), (188) и (190) следующие:

$$\frac{\partial Y(x, t)}{\partial x} = k_2 p_0 e^{-\frac{x}{H}} Z(x, t), \quad (199)$$

$$\frac{\partial Z(x, t)}{\partial x} = c p_0 e^{-\frac{x}{H}} \frac{\partial \vartheta''(x, t)}{\partial t}, \quad (200)$$

$$\frac{\partial \vartheta''(x, t)}{\partial t} + 2 \frac{k_2 p}{c} \vartheta''(x, t) + 2 \frac{k_2 p}{c} b(e^{-\frac{x}{H}} - 1) + \frac{1}{2} \frac{k_2 p}{c} \Theta_0 = \frac{k_2}{c} Y(x, t), \quad (201)$$

$$Z(0, t) + (1 - A) \left(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t \right) = \frac{K}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \vartheta''(0, t + \frac{T}{8}), \quad (202)$$

$$Y(\infty, t) + Z(\infty, t) = 0. \quad (203)$$

Сделаем подстановку $x = -H \ln z$, т. е. заменим

$$z = e^{-\frac{x}{H}}, \quad (204)$$

тогда

$$\frac{\partial F(z, t)}{\partial x} = \frac{\partial F(z, t)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{H} e^{-\frac{x}{H}} \frac{\partial F(z, t)}{\partial z},$$

причем при $x=0$ $z=1$, а при $x=\infty$ $z=0$, и написанная выше система уравнений заменяется следующей, удобной для интегрирования:

$$\frac{\partial Y(z, t)}{\partial z} = -k_2 M Z(z, t), \quad (205)$$

$$\frac{\partial Z(z, t)}{\partial z} = -c M \frac{\partial \vartheta''(z, t)}{\partial t}, \quad (206)$$

$$\frac{\partial \vartheta''(z, t)}{\partial t} + 2 \frac{k_2 p}{c} \vartheta''(z, t) + 2 \frac{k_2 p}{c} b(z-1) + \frac{1}{2} \frac{k_2 p}{c} \Theta_0 = \frac{k_2}{c} Y(z, t), \quad (207)$$

$$Z(1, t) + (1 - A) \left(a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t \right) = \frac{K}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \vartheta''(1, t + \frac{T}{8}), \quad (208)$$

$$Y(0, t) + Z(0, t) = 0. \quad (209)$$

Для того чтобы проинтегрировать эту систему, мы дифференцируем уравнение (207) по z и получим вследствие (205)

$$\frac{\partial^2 \vartheta''(z, t)}{\partial z \partial t} + 2 \frac{k_2 p}{c} \frac{\partial \vartheta''(z, t)}{\partial z} + 2 \frac{k_2 p}{c} b = -\frac{k_2^2}{c} M Z(z, t). \quad (210)$$

Вторичное дифференцирование по z дает, принимая во внимание (206):

$$\frac{\partial^2 \vartheta''(z, t)}{\partial z^2 \partial t} + 2 \frac{k_2 p}{c} \frac{\partial^2 \vartheta''(z, t)}{\partial z^2} - k_2^2 M^2 \frac{\partial \vartheta''(z, t)}{\partial t} = 0. \quad (211)$$

Полагая

$$\vartheta''(z, t) = e^{+\alpha_i t + \beta_i z},$$

где α_i и β_i — постоянные, мы легко увидим, что это выражение будет частным интегралом уравнения (211) в том случае, если α_i и β_i удовлетворяют уравнению

$$\alpha_i \beta_i^2 + 2 \frac{k_2 p}{c} \beta_i^2 - k_2^2 M^2 \alpha_i = 0. \quad (212)$$

Выражение

$$\vartheta''(z, t) = C_1 + C_2 z + \sum_1^n G_i e^{\alpha_i t + \beta_i z}, \quad (213)$$

где C_1 , C_2 , G_1 , G_2, \dots, G_n — произвольные постоянные, будет тоже частным интегралом уравнения (211), если только каждая пара значений (α_1, β_1) , $(\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$ будет удовлетворять уравнению (212).

Величина $\vartheta''(z, t)$ представляет согласно формуле (195) отклонение переменной температуры воздуха от ее среднего значения $\vartheta'_m(x)$. Она не может содержать никаких членов, независимых от времени, и поэтому, конечно, следует положить

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0. \quad (214)$$

Кроме этого, $\vartheta''(z, t)$ должна быть периодической функцией времени с периодом T . Поэтому мы должны положить, так же как мы делали при изучении распространения тепла в почве, что

$$\alpha_i = \pm i \frac{2\pi}{T}.$$

Этим двум значениям α_i соответствуют два сопряженных комплексных значения

$$\beta_i = R \pm iP.$$

Мы найдем их, подставляя предыдущие выражения в (212) и приравнявая отдельно действительную и мнимую части полученного уравнения.

Обозначив для краткости

$$r^2 = \frac{1}{2} \frac{\pi c k_2^2 M^2}{\pi^2 c^2 + k_2^2 p^2 T^2},$$

мы найдем

$$R^2 - P^2 = 2\pi c r^2, \\ PR = p k_2 T^2 r^2;$$

отсюда следует, что

$$R^2 = r^2 \left(\sqrt{\pi^2 c^2 + k_2^2 p^2 T^2} + \pi c \right).$$

Стоящий здесь корень должен быть взят со знаком плюс, так как только в этом случае R будет действительным. Далее,

$$P^2 = r^2 \left(\sqrt{\pi^2 c^2 + k_2^2 p^2 T^2} - \pi c \right).$$

Для годового хода облучения, т. е. при $T = 525\,960$ мин., πc исчезающе мало по сравнению с $k_2 p T$. В этом единственном для нас интересном случае

$$r^2 = \frac{1}{2} \frac{\pi c}{p^2 T^2} M^2, \quad (215)$$

$$R^2 = P^2 = \frac{1}{2} \frac{\pi c k_2}{p T} M^2. \quad (216)$$

Постоянные R и P , которые можно найти простым извлечением корня из выражения (216), могут быть взяты как с положительным, так и с отрицательным знаком. Обозначая через P положительное значение корня, мы найдем для α_i и β_i следующие четыре пары значений:

$$\alpha_1 = i \frac{2\pi}{T}; \quad \alpha_2 = -i \frac{2\pi}{T}; \quad \alpha_3 = i \frac{2\pi}{T}; \quad \alpha_4 = -i \frac{2\pi}{T};$$

$$\beta_1 = (1+i)P; \quad \beta_2 = (1-i)P; \quad \beta_3 = -(1+i)P; \quad \beta_4 = -(1-i)P.$$

Подставляя эти пары значений в (213), применяя формулу Эйлера

$$e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$$

и заменяя произвольные постоянные $(C_1 + C_2)$, $i(C_1 - C_2)$, $(C_3 + C_4)$, $i(C_3 - C_4)$ через C_5, C_6, C_7 и C_8 , мы получим следующее выражение для $\mathcal{D}''(z, t)$:

$$\mathcal{D}''(z, t) = e^{Pz} \left[C_5 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right) + C_6 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right) \right] + \\ + e^{-Pz} \left[C_7 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - Pz\right) + C_8 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - Pz\right) \right]. \quad (217)$$

Исходя из этого решения, мы можем вычислить с помощью (206) значение $Z(z, t)$, причем появится новая постоянная интегрирования C_9 . Далее посредством (205), пользуясь выражением для $Z(z, t)$, можно вычислить $Y(z, t)$, введя новую постоянную интегрирования C_{10} . Подставляя полученные выражения в граничные условия (208) и (209) и потребовав, чтобы они удовлетворялись тождественно, мы найдем:

$$C_3 + C_4 = 0, \quad (218)$$

$$= -(1-A)a_0. \quad (219)$$

$$C_5 - C_6 - C_7 + C_8 + \frac{k_2 M}{P} (C_6 + C_8) = 0, \quad (220)$$

$$C_5 + C_6 - C_7 - C_8 - \frac{k_2 M}{P} (C_5 + C_7) = 0, \quad (221)$$

$$\frac{\pi}{T} \frac{cM}{P} e^P [(C_5 - C_6) \cos P + (C_5 + C_6) \sin P] + \\ + \frac{K}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} e^P [C_5 \sin\left(\frac{\pi}{4} + P\right) - C_6 \cos\left(\frac{\pi}{4} + P\right)] + \\ + \frac{\pi}{T} \frac{cM}{P} e^{-P} [(-C_7 + C_8) \cos P + (C_7 + C_8) \sin P] + \\ + \frac{K}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} e^{-P} [C_7 \sin\left(\frac{\pi}{4} - P\right) - C_8 \cos\left(\frac{\pi}{4} - P\right)] = 0, \quad (222)$$

$$\frac{\pi}{T} \frac{cM}{P} e^P [(C_5 - C_6) \sin P - (C_5 + C_6) \cos P] - \\ - \frac{K}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} e^P [C_5 \cos\left(\frac{\pi}{4} + P\right) + C_6 \sin\left(\frac{\pi}{4} + P\right)] + \\ + \frac{\pi}{T} \frac{cM}{P} e^{-P} [(C_7 - C_8) \sin P + (C_7 + C_8) \cos P] - \\ - \frac{K}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} e^{-P} [C_7 \cos\left(\frac{\pi}{4} - P\right) + C_8 \sin\left(\frac{\pi}{4} - P\right)] = -(1-A)a_1. \quad (223)$$

Эти шесть линейных уравнений однозначно определяют оставшиеся шесть неизвестных постоянных; тем самым рассматриваемая проблема может считаться вполне разрешенной.

§ 34. Числовые результаты. Результаты теоретических выкладок, изложенных выше, делают возможным числовой расчет годового хода солярной температуры на любой широте и высоте. Мы имеем достаточно надежные данные для того, чтобы определить все постоянные, входящие в выведенные выше уравнения. Длина года T равна 525 960 мин. Масса воздушного столба, расположенного над 1 см² земной поверхности, равна 1033,3 г. Высоту однородной атмосферы H принимаем в 8000 м. Удельная теплоемкость воздуха при постоянном объеме равна $c_v = 0,17$. Коэффициент температуропроводности почвы мы положим, как и ранее, равным $a^2 = 1,00$, а ее коэффициент теплопроводности $K = 0,50$. Таким же образом мы примем уже применявшуюся величину $k_2 = 0,00245$. Далее, как и прежде, примем $A = 0,40$, $\sigma = 0,76 \cdot 10^{-10}$.

Приведенные величины независимы от географической широты; наоборот, числовая величина p связана формулой (197) со средней годовой температурой нижнего слоя воздуха. Для того чтобы иметь возможность сравнить наши расчеты с наблюдениями в Средней Европе, мы положим эту среднюю равной $10^\circ,5$, т. е. $\Theta_0 = 283^\circ,5$, как мы уже делали при изучении вертикального строения атмосферы. Тогда $p = 0,00693$ и $P = 0,43790$, или в угловой мере $P = 25^\circ 5' 25''$. Оставляя величину a_1 (полуамплитуду годового хода облучения) пока неопределенной и решая уравнения (220) — (223), мы найдем следующие выражения:

$$C_5 = 31,051a_1, \quad C_6 = 66,451a_1,$$

$$C_7 = -4,415a_1, \quad C_8 = -52,083a_1.$$

Теперь мы можем написать формулу для температуры $\vartheta''(z, t)$:

$$\vartheta''(z, t) = a_1 1,5495^z \left[31,051 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + 0,4379z\right) + 66,451 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + 0,4379z\right) \right] - a_1 0,6454^z \left[4,415 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - 0,4379z\right) + 52,083 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - 0,4379z\right) \right];$$

при этом

$$z = e^{-\frac{x}{8000}},$$

где высота x измеряется в метрах. Температура воздуха, отсчитываемая от точки таяния льда, согласно (195) равна

$$\vartheta'(x, t) = \vartheta'_m(x) + \vartheta''(x, t).$$

Для вычисления входящей сюда средней годовой температуры данного воздушного слоя в нашем распоряжении имеется уравнение (191), которое теперь принимает вид

$$\Theta_m^4(x) = 0,30 \left(1 + 2,5316 e^{-\frac{x}{8000}} \right) a_0.$$

Как уже было указано, при вычислении p было принято $\Theta_0 = 28^{\circ},5$. Тогда при $x=0$ предшествующее уравнение дает $a_0 = 0,46334$. Это число представляет годовое среднее напряжение солнечной радиации на 43° широты и ему соответствует годовая амплитуда колебаний инсоляции $2a_1 = 0,490 \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{мин}}$, так что предшествующие уравнения пригодны только для указанных условий, и для любой другой широты константы p , P и C должны быть вычислены заново. Мы, однако, не будем делать этого, так как все эти постоянные мало изменяются при небольших изменениях широты. В этом смысле мы будем пользоваться выведенными уравнениями, не связывая их с определенной географической широтой. При $x=0$, т. е. при $z=1$, например, мы получим

$$\vartheta'(0, t) = \vartheta'_0 + 48,112 a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + 25^{\circ}5'25''\right) + 102,962 a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + 25^{\circ}5'25''\right) - 2,849 a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - 25^{\circ}5'25''\right) - 33,613 a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - 25^{\circ}5'25''\right),$$

или, раскрывая скобки и сделав приведение подобных тригонометрических членов:

$$\vartheta'(0, t) = \vartheta'_0 + 98,907 a_1 \cos \frac{2\pi}{T}t + 41,195 a_1 \sin \frac{2\pi}{T}t.$$

Положим

$$B \cos \varepsilon = 98,907,$$

$$B \sin \varepsilon = 41,195;$$

тогда

$$\vartheta'(0, t) = \vartheta'_0 + B a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \varepsilon\right).$$

и так как

$$B^2 = 98,907^2 + 41,195^2,$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{41,195}{98,907},$$

то мы найдем

$$\vartheta'(0, t) = \vartheta'_0 + 108,39 a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - 22^{\circ}36'43''\right).$$

Сдвиг фазы, выраженный в единицах времени, равен

$$\frac{22^{\circ}36'43''}{360^{\circ}} 365^d,25 = 22^d 22^h 36^m,$$

так что мы окончательно получим

$$\vartheta'(0, t) = \vartheta'_0 + 108,39 a_1 \cos \frac{2\pi}{T}(t - 22^d 22^h 36^m).$$

Совершенно таким же образом находится выражение $\vartheta'(x, t)$ при любом x в виде

$$\vartheta'(x, t) = \vartheta'_m(x) + a_1 B(x) \cos \frac{2\pi}{T}[t - \varepsilon(x)].$$

Величины $\varepsilon(x)$ и $B(x)$ имеют следующие значения: $\varepsilon(x)$ представляет собой запаздывание температурных экстремумов по отношению к экстремумам облучения. В действительности облучение $W_1(t)$ достигает своей максимальной и минимальной величины соответственно при $t=0$ и $t=\frac{T}{2}$ [ср. формулу (179)], а температура воздуха на высоте x — наибольшая при $t - \varepsilon(x) = 0$ и наименьшая при $t - \varepsilon(x) = \frac{T}{2}$, т. е. в моменты $t = \varepsilon(x)$ и $t = \frac{T}{2} + \varepsilon(x)$.

Предшествовавшее уравнение показывает, что амплитуда годового хода температуры на высоте x равна $2a_1 B(x)$ при амплитуде колебания облучения, равной $2a_1$ [см. ур-е (179)]. Таким образом $B(x)$ представляет собой отношение амплитуды температуры к амплитуде облучения. Ради наглядности в табл. 12 приведены числовые значения $\varepsilon(x)$ и $B(x)$, рассчитанные с помощью предыдущего уравнения для ряда высот. Кроме того, в этой таблице четвертый столбец дает отношение $B(x) : B(0)$, выражающее затухание колебания температуры с высотой.

Пользуясь уже полученными числовыми результатами, можно ответить на вопрос:

Таблица 12

x км	$\varepsilon(x)$	$B(x)$	$B(x) : B(0)$
0		108,39	1,0000
1	24 1 54	98,04	0,9045
2	24 23 32	90,03	0,8306
4	26 7 32	76,77	0,7083
6	27 4 3	66,47	0,6133
8	27 17 25	58,46	0,5394
10	28 2 23	52,22	0,4818
12	28 8 0	47,36	0,4370
15	28 12 42	42,02	0,3877
	28 18 10	36,26	0,2792

какой годовой ход температуры должен установиться в неподвижной атмосфере в ее различных слоях и у поверхности Земли. Так, широте в 43° соответствует годовой ход облучения, если ограничиться первыми двумя членами ряда и отсчитывать время от момента летнего солнцестояния:

$$W_1(t) = 0,46334 + 0,245 \cos \frac{2\pi}{T} t \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{мин}}.$$

По табл. 12 этому ходу облучения соответствует в нижнем слое атмосферы ход температуры, изображаемый уравнением

$$\theta'(0, t) = 10^\circ,5 + 26^\circ,56 \cos \frac{2\pi}{T} (t - 22^d 22^h 36^m),$$

т. е. средняя температура $10^\circ,5$ и годовая амплитуда $53^\circ,1$, равная разности средних температур самого холодного и самого теплого дней года (но не разности средних температур наиболее холодного и наиболее теплого месяцев).

Из этого уравнения видно, что в нижнем слое воздуха экстремумы температур наступают через 23 дня после солнцестояний. Рассматривая более высокие слои атмосферы, как это мы сделаем в следующем параграфе, мы найдем еще более значительное запаздывание. Годовые колебания температуры ослабевают с высотой в согласии с данными последнего столбца табл. 12. Промежутки времени между солнцестояниями и экстремумами температур приведены во втором столбце таблицы. Таким образом распространение температурных колебаний в атмосфере происходит аналогично этому же явлению в почве, отличаясь от него лишь количественно.

Затухание с высотой, которое испытывают колебания температуры, в атмосфере гораздо меньше, чем в почве. Если бы атмосфера была неподвижна, то амплитуда этих колебаний в самых верхних слоях тропосферы была бы равна половине амплитуды у земной поверхности. В действительности затухание гораздо меньше. Еще меньше затухание температурных колебаний в стратосфере; здесь запаздывание температурных экстремумов почти не увеличивается с высотой. Совершенно ясно, что в этом слое атмосферы температура зависит еще от какого-то другого фактора, нами не предусмотренного, который, однако, изменяет картину всего явления. Дело в следующем. До сих пор в наших исследованиях мы принимали, что все отражения лучистой энергии Солнца имеют место на верхней границе атмосферы. Это упрощающее предположение допустимо при вычислении температур нижних слоев воздуха, но не при расчете температур стратосферы. Отражение солнечной радиации происходит, главным образом, в тропосфере, в которой плавают облака, хорошо отражающие эту радиацию. Поэтому через слои стратосферы проходит почти без ослабления не только прямая солнечная радиация, но и радиация, отраженная облаками. В этой области атмосферы напряжение радиации равно не $(1-A)W_1(t)$, как мы принимали прежде, но близко к $(1+A)W_1(t)$. Разность по сравнению с тем, что мы положили в основу наших вычислений, равна, таким образом, почти $2AW_1(t)$, т. е. при $A=0,40$ — почти 80% . Несмотря на очень большую прозрачность стратосферы, это обстоятельство не

может не повлиять на ее температуру. Оно ведет к тому, что затухание колебаний температуры с высотой почти прекращается, а моменты экстремумов температуры вновь приближаются к моментам солнцестояний, хотя никогда не совпадают с ними вполне. Все эти явления также поддаются математической трактовке, но здесь мы не можем уделить этому места.

§ 35. Годовой оборот тепла в атмосфере. Результаты предыдущих параграфов позволяют изучить и годовой оборот тепла в атмосфере, если только мы предположим эту последнюю вполне неподвижной. Рассматривая элемент объема воздуха, имеющий вид призмы с основанием, равным квадратной единице, и с высотой dx , заключенной между горизонтальными плоскостями x и $x+dx$, мы найдем, что за единицу времени заключающееся в нем количество тепла увеличивается на

$$c\rho(x) \frac{\partial \theta'(x, t)}{\partial t} dx.$$

Следовательно, вертикальный столб атмосферы, расположенный над 1 кв. единицей земной поверхности, за единицу времени увеличивает свой запас тепла на

$$\frac{dQ}{dt} = c \int_0^\infty \rho(x) \frac{\partial \theta'(x, t)}{\partial t} dx; \quad (224)$$

но по (184)

$$\rho(x) = \rho_0 e^{-\frac{x}{H}},$$

делая подстановку $x = -H \ln z$, т. е. полагая

$$z = e^{-\frac{x}{H}},$$

мы найдем

$$dz = -\frac{1}{H} z dx, \quad \rho(x) = \rho_0 z, \quad \rho(x) dx = -\rho_0 H dz,$$

и, имея в виду (196),

$$\frac{\partial \theta'(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial \theta''(z, t)}{\partial t},$$

так что

$$\frac{dQ}{dt} = -c\rho_0 H \int_1^0 \frac{\partial \theta''(z, t)}{\partial t} dz.$$

Так как при $x=0$ $z=1$ и при $x=\infty$ $z=0$, то мы взяли пределами интегрирования соответственно нуль и единицу. Помня, что согласно (30) $\rho_0 H = M$, где M — масса рассматриваемого столба атмосферы, получаем

$$\frac{dQ}{dt} = -cM \int_1^0 \frac{\partial \theta''(z, t)}{\partial t} dz. \quad (225)$$

Но вследствие (217)

$$\vartheta''(z, t) = e^{Pz} \left[C_5 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right) + C_6 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + Pz\right) \right] + \\ + e^{-Pz} \left[C_7 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - Pz\right) + C_8 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - Pz\right) \right].$$

Введя вспомогательные величины A_1, A_2, ε_1 и ε_2 , определяемые уравнениями

$$\left. \begin{aligned} C_5 &= A_1 \cos \varepsilon_1, & C_6 &= A_1 \sin \varepsilon_1, \\ C_7 &= A_2 \cos \varepsilon_2, & C_8 &= A_2 \sin \varepsilon_2, \end{aligned} \right\} \quad (226)$$

мы получим:

$$\vartheta''(z, t) = A_1 e^{Pz} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \varepsilon_1 + Pz\right) + A_2 e^{-Pz} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \varepsilon_2 - Pz\right), \\ \frac{\partial \vartheta''(z, t)}{\partial t} = -\frac{2\pi}{T} A_1 e^{Pz} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \varepsilon_1 + Pz\right) - \frac{2\pi}{T} A_2 e^{-Pz} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \varepsilon_2 - Pz\right).$$

Положив для краткости письма

$$\frac{2\pi}{T}t - \varepsilon_1 = N_1, \quad \frac{2\pi}{T}t - \varepsilon_2 = N_2, \quad (227)$$

мы получим

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi}{T} cM \left[A_1 \int_1^0 e^{Pz} \sin(N_1 + Pz) dz + A_2 \int_1^0 e^{-Pz} \sin(N_2 - Pz) dz \right].$$

Вообще

$$\int e^{Pz} \sin(N + Pz) dz = \frac{1}{2P} e^{Pz} \left[\sin(N + Pz) - \cos(N + Pz) \right] + C,$$

так что выполнение интегрирования дает

$$A_1 \int_1^0 e^{Pz} \sin(N_1 + Pz) dz = \frac{A_1}{2P} \left[(1 - e^P \cos P - e^P \sin P) \sin N_1 - \right. \\ \left. - (1 - e^P \cos P + e^P \sin P) \cos N_1 \right], \\ A_2 \int_1^0 e^{-Pz} \sin(N_2 - Pz) dz = -\frac{A_2}{2P} \left[(1 - e^{-P} \cos P + e^{-P} \sin P) \sin N_2 - \right. \\ \left. - (1 - e^{-P} \cos P - e^{-P} \sin P) \cos N_2 \right].$$

Введем новые вспомогательные величины G_1, G_2, η_1, η_2 , значения которых определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1}{2P} (1 - e^P \cos P - e^P \sin P) &= G_1 \cos \eta_1, \\ \frac{A_1}{2P} (1 - e^P \cos P + e^P \sin P) &= G_1 \sin \eta_1, \\ \frac{A_2}{2P} (1 - e^{-P} \cos P + e^{-P} \sin P) &= G_2 \cos \eta_2, \\ \frac{A_2}{2P} (1 - e^{-P} \cos P - e^{-P} \sin P) &= G_2 \sin \eta_2. \end{aligned} \right\} \quad (228)$$

Тогда

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi}{T} cM \left\{ G_1 \sin\left[\frac{2\pi}{T}t - (\varepsilon_1 + \eta_1)\right] - G_2 \sin\left[\frac{2\pi}{T}t - (\varepsilon_2 + \eta_2)\right] \right\} = \\ = \frac{2\pi}{T} cM \left\{ \left[G_1 \cos(\varepsilon_1 + \eta_1) - G_2 \cos(\varepsilon_2 + \eta_2) \right] \sin\frac{2\pi}{T}t - \right. \\ \left. - \left[G_1 \sin(\varepsilon_1 + \eta_1) - G_2 \sin(\varepsilon_2 + \eta_2) \right] \cos\frac{2\pi}{T}t \right\}.$$

Вводя, далее, новые постоянные L и φ , связанные с предыдущими при посредстве уравнений

$$\left. \begin{aligned} G_1 \cos(\varepsilon_1 + \eta_1) - G_2 \cos(\varepsilon_2 + \eta_2) &= L \cos \varphi, \\ G_1 \sin(\varepsilon_1 + \eta_1) - G_2 \sin(\varepsilon_2 + \eta_2) &= L \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (229)$$

мы получим

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi}{T} cML \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right). \quad (230)$$

Таким образом в течение интервала времени от t_1 до t_2 весь рассматриваемый столб воздуха, находящийся над квадратной единицей земной поверхности, получит количество тепла, равное

$$Q_t = cML \int_{t_1}^{t_2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right) d\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = -cML \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right) \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (231)$$

Максимальное накопление тепла будет иметь место за интервал времени, определяемый равенствами $\frac{2\pi}{T}t_1 - \varphi = 0$ и $\frac{2\pi}{T}t_2 - \varphi = \pi$, так что годовой оборот тепла в атмосфере равен

$$Q = 2 cML. \quad (232)$$

Приведенные выше значения C_5, C_6, C_7, C_8, M и c позволяют вычислить $\frac{dQ}{dt}$:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi}{T} 12\,050 a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - 25^\circ 41' 51''\right),$$

Охлаждение атмосферы, т. е. потеря ею тепла, начинается поэтому через

$$\frac{25^\circ 41' 51''}{360^\circ} 365 d,25 = 26 d 1^h 44^m$$

после солнцестояния.

Из полученных числовых данных мы найдем, что годовой оборот тепла в атмосфере равен

$$Q = 24\,100 a_1.$$

Этот оборот тепла пропорционален амплитуде колебания облучения. На широте 43° , например, мы имеем $a_1 = 0,245 \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{мин}}$, и, следовательно, здесь годовой оборот тепла равен 5900 кал . Этой амплитуде колебаний облучения соответствует пропорциональная ей теоретическая амплитуда колебаний температуры $\pm 26^\circ,56$, т. е. равная $53^\circ, 1$.

Вообразим, что земная поверхность покрыта слоем воды, который может накапливать такое же количество тепла, как атмосфера. Толщина этого слоя, очевидно, должна быть равна $\frac{5900}{53,1} = 111$ см. При этом все получаемое тепло должно идти на повышение температуры этого слоя, так что другие виды расхода тепла, как таяние снега или испарение, исключены.

Поглощение атмосферой солнечной радиации и теплового излучения земной поверхности имеет следствием значительный годовой оборот тепла в атмосфере. Соответствующая "теплоемкость" атмосферы равна "теплоемкости" слоя воды толщиной в 1,11 м. Этот теплообмен атмосферы и почвы ведет к тому, что вся атмосфера, рассматриваемая как целое, начинает охлаждаться только через 26 дней после летнего солнцестояния и начинает нагреваться только через 26 дней после зимнего солнцестояния.

§ 36. Обзор результатов раздела II. Когда солнечные лучи попадают в земную атмосферу, то, как это было изложено в § 17, энергия этих лучей претерпевает разнообразные превращения, что сильно влияет на облучение земной поверхности. Математическое изучение этого влияния базируется на законе Бугера-Ламберта, который был первоначально установлен только для солнечного света, но с успехом применяется и по отношению ко всей лучистой энергии, исходящей от Солнца.

В § 18 и 19 было показано, что приложение этого закона к исследованию ослабления радиации в атмосфере не представляет никаких принципиальных трудностей, но связанные с ним числовые расчеты ведут к механическим квадратурам и довольно громоздки. В § 20 изложены в наглядной форме относящиеся сюда числовые результаты. В табл. 8 приведены суточные суммы тепла при различных коэффициентах прозрачности атмосферы, а в табл. 9 — полугодовые и годовые суммы тепла. Данные табл. 9 изображены графически на рис. 12, а часть данных табл. 8 — на рис. 11. Оба графика наглядно демонстрируют влияние атмосферы на количество лучистой энергии, получаемой земной поверхностью. В § 21 устанавливается баланс лучистой энергии, правильность которого проверяется приведенными далее исследованиями.

В то время как в указанных параграфах мы имели дело только с лучистой энергией, доходящей до земной поверхности, в § 22 начинается математическое исследование процессов излучения и поглощения в самой атмосфере. Для этой цели необходимо прежде всего знать строение атмосферы в ее статическом состоянии, подчиняющееся известным и хорошо обоснованным законам физики. Эти законы позволяют математически изучать строение атмосферы. Предполагая, что атмосфера изотермична или ограничиваясь малыми разностями высот, можно установить простую формулу для убывания плотности с высотой, а также для отношения, в котором смешаны различные газы с учетом также и водяного пара на различных высотах. Устранив упомянутые упрощающие предположения, можно провести более точное исследование состава атмосферы, что и сделано в дальнейших параграфах.

Влияние различных воздушных слоев на ослабление солнечного луча, проходящего атмосферу, определяется законом Бугера, гласящим, что поглощение радиации в том или ином слое пропорционально его плотности. Благодаря этому поглощению каждая молекула атмосферы становится источником атмосферного теплового излучения. Земная поверхность также превращает поглощенную солнечную радиацию в земное тепловое излучение. В § 23 выведено уравнение, выражающее связь между количеством получаемой и испускаемой земной поверхностью лучистой энергии с учетом атмосферного излучения и теплооборота в почве. Это уравнение можно получить, если потребовать, чтобы сумма тепла, получаемого за единицу времени квадратной единицей земной поверхности (сюда относятся поглощаемые земной поверхностью прямая и диффузная солнечные радиации и тепловое излучение атмосферы, а также тепло, притекающее из земных недр к поверхности путем теплопроводности), была равна сумме тепла, излучаемого ею. По закону Стефана-Кирхгофа эта последняя пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры и поглощательной способности земной поверхности.

Найденное уравнение является одним из граничных условий уравнений, выражающих процессы излучения в атмосфере. Эти дифференциальные уравнения выводятся в § 24, исходя из того же условия, что количество тепла, поглощаемого каким-либо слоем атмосферы в единицу времени, равно количеству тепла, идущему на повышение температуры этого слоя, плюс количество тепла, излучаемого обоими плоскостями, ограничивающими этот слой, также подчиняющееся закону Стефана-Кирхгофа. Благодаря этому удается установить математическую зависимость между количеством получаемой радиации и температурой атмосферы и земной поверхности, выражающуюся в форме дифференциального уравнения.

Для того чтобы выразить эту зависимость в конечном виде, необходимо проинтегрировать составленные дифференциальные уравнения. Это интегрирование проводится особенно просто в том случае, если инсоляция является величиной постоянной, т. е. если мы имеем стационарные условия облучения. Строго говоря, такой случай никогда не имеет места, так как вращение Земли вокруг своей оси и обращение ее вокруг Солнца все время изменяют величину инсоляции. Однако для того чтобы вычислить средние годовые температуры различных параллелей земного шара, вполне допустимо принять, что облучение каждой параллели постоянно и равно среднему годовому значению этого облучения. Поэтому проведенное в § 25 интегрирование упомянутых дифференциальных уравнений для стационарного случая может считаться решением первой основной проблемы математического учения о климате.

В § 26 проведено вычисление солярных температур различных параллелей, т. е. тех средних годовых температур, которые имел бы нижний слой воздуха при условии, что атмосфера вполне неподвижна. Эти температуры названы солярными, потому что они выражают эффект только одной главной составляющей климата Земли — солнечной радиации. Вычисленные температуры отличаются от наблюдаемых, приведенных

к среднему распределению суши, тем, что в низких широтах они выше, а в высоких широтах ниже наблюдаемых. Причину такого явления следует искать в том, что развитая выше теория не принимает во внимание воздушных и морских течений. Эти течения сглаживают противоположность тропического и полярного климатов, но не могут, однако, как легко доказать, изменить среднюю температуру всей земной поверхности или атмосферы; поэтому их влияние мы исключим, рассматривая среднюю температуру слоя воздуха, прилегающего к земной поверхности; вычисленная таким образом величина с точностью до десятой доли градуса согласуется с наблюдаемой.

В § 27 на основании законов тяготения и излучения и уравнения состояния газов изучается строение атмосферы, причем отбрасываются прежние упрощающие предпосылки. Значения убывания температуры и плотности атмосферы с высотой, полученные здесь, так хорошо согласуются с наблюдаемыми, что мы можем считать несомненным преобладающее влияние условий излучения на структуру атмосферы. В § 28 доказывается, что это теоретическое вертикальное строение удовлетворяет также и условиям механического равновесия.

В то время как в предыдущих параграфах рассматривалась сухая атмосфера, в § 29 принимается во внимание и влияние водяного пара на процессы излучения в атмосфере. Наличие водяного пара в земной атмосфере очень своеобразно влияет на процессы излучения. Водяной пар поглощает длинноволновую радиацию гораздо сильнее, чем другие составные части атмосферы. Вводя это обстоятельство в наши математические выкладки и вычисляя на основании законов излучения температуру воздуха в этом случае, мы обнаруживаем, что теперь температура воздуха не убывает непрерывно с высотой, как это имело место в сухой атмосфере, но уже на конечной высоте достигает минимума. Пользуясь тем числовым значением коэффициента прозрачности атмосферы, который был найден при установлении теплового баланса Земли, а также данными Эхольма об участии водяного пара в поглощении теплового излучения, можно вычислить, что минимум температуры находится на высоте 10 530 м.

При дальнейшем изучении тепловых явлений на земной поверхности принимается во внимание также и явление теплопроводности почвы. Прежде всего устанавливается зависимость между условиями облучения и температурой поверхности почвы при одном упрощающем предположении — при исключении из рассмотрения влияния атмосферы. Тем самым мы подходим к классической задаче теории теплопроводности Фурье-Пуассона с одной особенностью: условия на земной поверхности должны удовлетворять закону Стефана-Кирхгофа. Возникающие здесь математические трудности легко устранить, приняв, что облучение имеет правильный периодический ход с малой амплитудой. Таким образом мы имеем возможность в § 30 и 31 вывести известные законы распространения температурных колебаний в почве. Одновременно выводятся математические формулы, позволяющие вычислить суточный и годовой теплооборота в почве; несколько числовых примеров иллюстрируют эти формулы. В качестве дальнейшего следствия отсюда полу-

чаются формулы, выражающие запаздывание экстремумов температуры по сравнению с экстремумами инсоляции, связанное с теплооборотом в почве. Здесь показано, что это запаздывание в суточном ходе равно $2^{\text{h}}33^{\text{m}}$, а в годовом — около 9 дней.

Прерывность суточного хода инсоляции, вызываемая наступлением ночи, имеет следствием, как это показано в § 32, особую форму кривой суточного хода температуры. Эта последняя тоже может быть построена теоретическим путем: на рис. 13 изображена такая теоретическая кривая среднего суточного хода температуры на экваторе. На ней минимум температуры совпадает с моментом солнечного восхода, в то время как максимум имеет место вскоре после 2 час. полудня. Такое совпадение с наблюдаемыми условиями показывает, что явление теплообмена в почве может удовлетворительно объяснить не только несимметричность кривой хода температуры, но и наблюдаемое запаздывание экстремумов температуры.

Для объяснения запаздывания годовых экстремумов температуры необходимо принять во внимание и теплооборот в атмосфере, т. е. приходится решать вторую основную задачу математического учения о климате — интегрировать уравнения излучения для случая переменной величины инсоляции. Полное решение этой задачи дано в § 33. Это решение еще раз доказывает гибкость и мощь математического метода, который позволяет охватить весь чрезвычайно сложный процесс излучения атмосферы, слои которой имеют различную плотность, вместе с явлениями теплопроводности почвы и излучения земной поверхности и особыми условиями на верхней и нижней границах атмосферы. Полученное решение учитывает все эти процессы, выражая одной формулой изменяющееся со временем и с высотой тепловое состояние атмосферы.

Числовые результаты, приведенные в § 34, доказывают большое значение этой теории: в них проявляются характерные черты распространения годовых колебаний температуры вверх, их затухание и запаздывание. В § 35 рассчитывается годовой оборот тепла в атмосфере. Здесь вычислено, что атмосфера накапливает за теплое полугодие такое же количество тепла, как слой воды толщиной в 1,11 м, имеющий ту же амплитуду колебания температуры. Далее показано, что теплообмен в атмосфере и в почве приводит к запаздыванию годовых экстремумов температуры до 26 дней, что хорошо совпадает с наблюдениями в континентальном климате, к которому и относятся все эти рассуждения.

Таким образом, исходя из напряжения солнечной радиации, выраженного числовым значением солнечной постоянной, а также из числовых значений коэффициентов прозрачности и поглощения атмосферы и из коэффициента теплопроводности почвы, и не опираясь на какие-либо другие результаты метеорологических наблюдений, оказалось возможным чисто теоретически наметить картину тех климатов Земли, которые установились бы на ней под влиянием солнечной радиации в том случае, если бы атмосфера была неподвижна. Вычисленная таким образом средняя температура нижнего слоя атмосферы совпадает почти точно с наблюдаемой; точно так же

теоретическое вертикальное строение атмосферы очень близко подходит к действительному.

Совершенно ясно, что эта, только сейчас создающаяся теория не может и не сможет никогда охватить все детали климата Земли. Тем не менее уравнения математической теории климата, выведенные исключительно на основании законов физики, дают лучшее представление о механизме тепловых явлений в земной атмосфере, чем любой другой способ изложения. Это позволяет нам проследить те колебания климата в прошлом, которые имели причиной колебания облучения Земли. Этой задаче посвящен следующий раздел.

III. АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ КЛИМАТА.

§ 37. Исторический обзор. Мысль, что с изменением наклона эклиптики тесно связано и изменение земного климата, очень стара. Еще Анаксагор считал, что вместе с наклоном эклиптики меняется и обитаемость Земли.

Астрономическая школа Александрии не занималась изучением перемен климата, вызываемых астрономическими причинами, несмотря на то, что при своих вычислениях эксцентриситета солнечной орбиты и при определении линии ее апсид она основывалась как раз на различной длительности астрономических времен года и на то, что движение равноденственной линии составляло один из элементов ее учения. Дело в том, что это последнее движение школа ставила в зависимость от сферы неподвижных звезд. Даже открытие арабским астрономом Альбатани движения линии апсид солнечной орбиты не вызвало интереса к вопросу об изменчивости времен года. Только открытие Ньютоном закона тяготения (1686) пролило яркий свет на проблему изменчивости астрономических элементов, от которых зависит получаемое Землей тепло. Однако прошло еще целое столетие, прежде чем оказалось возможным благодаря работам Лагранжа и Лапласа математически изучить и проследить эти изменения. При этом выяснилось, что изменения эксцентриситета земной орбиты и наклона эклиптики происходят в чрезвычайно тесных границах, а величина большой полуоси земной орбиты всегда остается неизменной. Эта теория не вызвала развития учения об изменении климатов в связи с астрономическими причинами, и наиболее передовые ученые последующей эпохи — Дж. Гершель, А. Гумбольдт, Араго, Пуассон и др., — относились к такому учению отрицательно. Насколько нам известно, Адемар был первым, попытавшимся научно обосновать связь между изменчивостью астрономических элементов и изменением климата. В вышеупомянутом его труде „*Révolutions de la mer, déluges périodiques* (1842) он впервые затронул, правда, недостаточно глубоко, эту большую климатологическую проблему, столь увлекательную благодаря ее новизне. Как раз незадолго до этого было установлено северное происхождение обломочных масс и валунов, рассеянных по большей части Европы и Северной Америки, причем осталось не совсем ясным, каким образом эти массы были перенесены на юг. Согласно одной из выдвинутых гипотез перемещение это произошло при помощи плавающих ледяных глыб; по другой — соответствующую роль сыграли мощные потоки, излившиеся из полярных областей, по третьей — движущиеся к югу ледники. Адемар, находившийся еще всецело под влиянием идей Кювье, согласно которым наша планета

неоднократно опустошалась рядом катастроф и каждый раз путем нового творческого акта заселялась новым миром организмов, прежде всего стремился обосновать гипотезу катастрофических потоков при помощи своей теории. Содержание ее таково.

Вследствие прецессии равноденствий и движения перигелия и проистекающей отсюда изменчивости длительности времен года, как уже указывалось в § 14, на обоих полушариях через каждые десять тысячелетий короткие и мягкие зимы должны чередоваться с долгими и суровыми: когда на одном из полушарий зима будет очень сурова, на другом она будет особенно мягка. На первом, благодаря понижению температуры, вокруг полюса накапливаются массы льда в такой степени, что значительно возросшее вследствие этого притяжение масс вызывает затопление этого полушария, что сопровождается дальнейшим похолоданием. Обширные покрытые льдом площади и преобладание водной поверхности в южном полушарии, в котором в настоящее время зима более продолжительна, являются наглядной демонстрацией этого положения. Скопившиеся вокруг полюса массы льда и воды с наступлением периода более теплых зим начнут таять и стекать, увлекая за собой обломки каменных пород полярных стран. Когда впоследствии подтаявшая и как бы надтая в виде шляпки гриба наплыв льда внезапно обрушивается, то из нее изливаются катастрофические потоки. Подобные катастрофы повторяются попеременно в обоих полушариях через каждые десять тысячелетий.

Позднейшие геологические изыскания более подробно осветили вопрос о климатических изменениях на Земле, установив прежде всего, что в продолжение известных периодов, во время дилuvia, огромные пространства Европы и Северной Америки находились под ледяным покровом и что упомянутые перемещения обломочных масс могли происходить только при помощи ледников или же материкового льда. Гипотезы плавающих ледяных глыб и катастрофических потоков были окончательно отвергнуты. Теория Адемара, даже в той форме, которая была приспособлена для объяснения ледникового переноса, оказалась несостоятельной после того, как было доказано, что ледяные массы, накопленные во время дилувиального ледникового периода, далеко не достигали тех размеров, которые могли бы повести к затоплению покрытого льдом полушария, как следовало из этой теории. Тем не менее теория Адемара оказалась отправной точкой для ряда других астрономических теорий ледниковой эпохи, из которых наиболее замечательные, ввиду их исторического интереса, будут здесь изложены.

Теория Кролля (1875), которая пользовалась большим распространением, исходила, как и теория Адемара, из неравной длительности времен года, но по сравнению с последней делала уже и в этом отношении шаг вперед, так как Кролля более правильно учитывал влияние эксцентриситета земной орбиты на продолжительность астрономических времен года. Только при сравнительно большом эксцентриситете разница между летним и зимним полугодиями могла быть значительной. Таким образом если при наличии заметного эксцентриситета равноденственная линия становится нормальной к линии аписид, то в полушарии, где зима совпадает с прохождением Земли через

афелий, это время года будет длительным и суровым. Такая зима, по мнению Кролля, вызовет оледенение более высоких широт этого полушария, т. е. создаст там ледниковый период, тогда как в это же время другое полушарие будет находиться в периоде межледникового.

С изменением долготы перигелия по отношению к точке весеннего равноденствия изменяются и вышеуказанные условия. Если линия равноденствия совпадает с линией аписид, то оба полушария оказываются в одинаковом положении в отношении количества получаемого ими солнечного тепла, т. е. находятся в переходном периоде, из которого полушарие, ранее покрытое льдом, перейдет в межледниковое состояние, другое же оледенеет. Таким путем в каждом из полушарий сменяются один за другим ледниковый, переходный и межледниковый периоды в такой последовательности, что в то время как на одном полушарии господствует ледниковый период, другое переживает период межледниковый. Описанные явления усиливаются вместе с возрастанием эксцентриситета земной орбиты и ослабевают с его уменьшением.

Теория Кролля вызвала многочисленные возражения. Самым веским с точки зрения климатологии было то, что суровая зима не только не благоприятствует образованию глетчеров, но, наоборот, служит помехой для возникновения крупных ледников, как это можно наблюдать в материковых областях на севере, имеющих суровые зимы, например в Сибири. Не суровая зима, а прохладное лето способствует продвижению ледников.

Чрезвычайно существенный недостаток теории Кролля с астрономической точки зрения состоит в том, что из трех астрономических элементов, оказывающих влияние на количество получаемой Землей солнечной теплоты, — долготы перигелия, эксцентриситета земной орбиты и наклона эклиптики — Кролля более или менее точно учел только изменения первых двух.

Тем же самым недостатком страдает и теория Болля (1891), который снова возвратился к теории Кролля и придал ей математическую форму, что, однако, вовсе не оказалось шагом вперед. Правда, Болль частично принял во внимание наклон эклиптики; однако он учел только его влияние на общее количество солнечной теплоты, получаемой отдельными полушариями, выраженное уравнениями (92) раздела I. Между тем изменения наклона эклиптики не оказывают существенного влияния на общее количество тепловой энергии, получаемой отдельными полушариями, но зато имеют особенно ощутительное значение для распределения солнечной теплоты вдоль меридиана, о чем мы уже подробно говорили раньше. В рассуждениях Болля это чрезвычайно существенное следствие изменения наклона эклиптики совершенно не учтено. То же самое относится к вычислениям, произведенным Кельверузлем (1894).

Хэргривс (1896) уделил больше внимания изменениям наклона эклиптики; однако он вычислил только колебания годовых сумм радиации, вызываемые этими изменениями. Удивительно, что вытекающие из этих колебаний периодические усиления и ослабления контраста между временами года, повидимому, ускользнули от его внимания. Эхольм посвятил (1901) обширную работу вопросу о том, как отра-

жаются изменения наклона эклиптики на климатической картине Земли; однако он рассматривал только последствия наступления крайних значений этого астрономического элемента, экстремумы же двух остальных астрономических элементов были оставлены им без внимания.

Таким образом все перечисленные здесь теории имеют тот общий недостаток, что ни одна из них не сумела правильно учесть изменчивость всех трех астрономических элементов, оказывающих влияние на количество лучистой энергии, получаемой Землей. Уже классификация этих теорий, предпринятая Ханном и проведенная по рассматриваемым в них астрономическим элементам, ясно показала их несостоятельность. То, что здесь не были учтены последствия изменения наклона эклиптики, повело к тому, что ни одна из этих теорий не могла быть согласована с имеющимися геологическими данными. Быстро следующие одно за другим в обоих полушариях попеременные оледенения противоречили всем результатам геологических изысканий. Вытекающие из этих теорий изменения прихода лучистой энергии были столь незначительны, что Ханн (1908) объявил все астрономические теории ледниковых периодов несостоятельными и пришел к заключению, что с астрономической точки зрения можно скорее сделать вывод об известном постоянстве земных климатов.

Это мнение Ханна было, несомненно, слишком поспешно и имело основание лишь постольку, поскольку под астрономическими теориями ледниковых периодов подразумеваются теории, существовавшие в то время. Дальше мы увидим, что может дать строго научная математическая теория колебаний климата, опирающаяся на основы небесной механики.

Астрономическая проблема ледниковых периодов лишь в 1920 г., с появлением „*Théorie mathématique*“, получила достаточно широкое обоснование. Созданное этим трудом орудие для расчета вековых изменений облучения Земли и сопутствующих им явлений было в 1924 г. усовершенствовано, благодаря вычислению этих изменений, произведенному для книги Кеппена-Вегенера „*Климаты геологических эпох*“¹⁾. Свою современную форму астрономическая теория климатических колебаний получила лишь в 1930 г., после того, как в работе, приведенной в конце списка литературы, математической обработке был подвергнут еще ряд важных вопросов, как например, вековой ход температуры и механизм оледенения.

§ 38. О числовом расчете вековых изменений астрономических элементов. Как уже было показано в разделе I, из всех астрономических элементов только изменения эксцентриситета земной орбиты e , наклона эклиптики ϵ и долготы перигелия Π оказывают влияние на количество лучистой энергии, получаемое Землей. Определение изменений этих элементов во времени составляет задачу небесной механики; однако ввиду важности этого вопроса нам необходимо уделить ему здесь некоторое внимание.

В повседневной работе наблюдательной астрономии под вековыми

изменениями астрономических элементов обычно подразумеваются те, в математическое выражение которых явно входит время t , тогда как периодическими изменениями называются те, которые имеют колебательный характер и изображаются тригонометрическими функциями времени t . Таким образом в астрономических ежегодниках под названием вековых изменений эксцентриситета земной орбиты и наклона эклиптики мы встретимся со следующими выражениями:

$$e = 0,016749827 - 0,0000004245 (t - 1900) -$$

$$- 0,0000000000001367 (t - 1900)^2,$$

$$\epsilon = 23^\circ 27' 8'', 12 - 0'',46657 (t - 1900) - 0'',0000073 (t - 1900)^2.$$

При помощи этих выражений можно, судя по большому количеству употребленных десятичных знаков, с громадной точностью вычислить изменения величин e и ϵ со временем. С первого взгляда ясно, однако, что эти выражения, как это и было учтено при их составлении, действительны только для ограниченных промежутков времени. Поэтому приведенные формулы непригодны для наших целей, поскольку нам придется иметь дело с геологическими периодами времени.

Одной из главнейших задач небесной механики было выяснение вопроса, могут ли изменения элементов орбит планет, вызываемые их взаимными возмущениями, возрастать неограниченно или же они происходят в определенных границах. Выяснилось, что, за исключением долгот перигелия и узлов, вековые изменения остальных элементов заключены в тесные границы и что подобные изменения также носят колебательный характер. Таким образом они, так же как и вышеупомянутые периодические изменения, могут быть математически выражены с помощью тригонометрических функций времени, — функций, имеющих, однако, весьма длинный период. Если, как например в наблюдательной астрономии, приходится иметь дело с более короткими промежутками времени, то можно эти функции заменить алгебраическими, как это и было сделано в обоих приведенных примерах.

Определение вековых изменений астрономических элементов с точностью, достаточной для длительных геологических периодов времени, составляет одну из труднейших проблем небесной механики. Решение этой проблемы впервые было дано Лагранжем. Оно целиком изложено в его труде „*Théorie des variations séculaires des éléments des planètes*“ (1781—1782) и является одним из крупных достижений гениального математика. До сих пор оно служит основой для всех исследований в этой области, и только числовые результаты этой классической работы могут считаться устаревшими. Дело в том, что значения масс планет и те цифровые данные, которыми Лагранж воспользовался для установления начальных условий, были недостаточно точны. Кроме того, из известных в наше время больших планет он мог принять во внимание только шесть. Планета Урач, называвшаяся в ту эпоху „новой планетой“, была открыта только в то время, когда писалась работа Лагранжа; элементы орбиты этой планеты не были определены даже приблизительно, и нечего было и думать о более точном вычислении ее массы, так как не были открыты ее спутники. О планете

¹⁾ W. Köppen und A. Wegener, Die Klimate der geologischen Vorzeit, Berlin 1924.

Нептун в то время вообще еще не было ничего известно, а Марс считался неизменяющим спутником. Если принять во внимание, что массы планет тогда могли быть вычислены только по времени обращения их спутников вокруг них, то станет ясно, что Лагранж для определения значения масс трех планет мог опираться лишь на грубо приближенные данные. Вполне сознавая эту неточность, он учел в своих исследованиях влияние возможных изменений значения масс. Несмотря на скудость необходимых цифровых данных, даже и чисто числовые результаты работы Лагранжа имели большое значение. Так, например, ему удалось, хотя и приблизительно, определить границы, между которыми могут изменяться эксцентриситеты орбит планет, наклоны плоскостей их орбит и наклон эклиптики. Еще важнее был тот вывод, что большие полуоси планетных орбит не подвергаются никаким вековым изменениям.

После того как разработка основ небесной механики была закончена Лапласом, работы по числовому расчету вековых изменений элементов орбит главных планет были широко развернуты в конце 40-х годов прошлого столетия Леверрье. Результаты этих работ были впервые опубликованы в пятом томе „Журнала Лиувилля“ и в „Cognaisance des Temps“ 1843; а когда Леверрье благодаря своему открытию планеты Нептун, сделанному математическим путем, получил всемирную известность и сделался руководителем Парижской обсерватории, они были напечатаны во вновь основанных „Анналах“ этой обсерватории. В первом томе была заново проработана теория движения планет, во втором было приступлено к числовому расчету вековых изменений. Эти во всех отношениях образцово проведенные вычисления были произведены еще до открытия Нептуна и имеют только один недостаток, а именно тот, что возмущающее действие этой планеты в них было учтено лишь дополнительно и недостаточно точно. Вероятно, это и послужило причиной того, что вскоре после опубликования упомянутых работ Леверрье Стоквэлл приступил к новому расчету вековых изменений элементов орбит всех восьми главных планет. После почти десятилетней работы эти расчеты в 1870 г. были закончены и в 1873 г. вышли в свет. С тех пор мы не имеем других полных вычислений этих изменений. Правда, Гарцер попытался дать в своем обширном (и премированном) труде „Вековые изменения орбит больших планет“ (Лейпциг 1895) ответ на вопрос, заключающийся в этом заглавии, утя все имевшиеся до этого момента достижения небесной механики; однако уже после того, как это сочинение было закончено печатанием и часть экземпляров оказалась разосланной, в нем была обнаружена теоретическая ошибка. Это весьма досадное обстоятельство, на которое указывается в дополнении к книге, сильно обесценило числовые результаты широко задуманной и в остальном прекрасной работы.

Если возникает (как в данном случае) необходимость проследить вековые изменения облучения Земли до самых отдаленных времен, то необходимо решить — воспользоваться ли для расчетов вычислениями Леверрье или вычислениями Стоквэлла; вычисление вековых изменений астрономических элементов заново потребовало бы многих лет

работы, о чем мы еще будем говорить. До сих пор, применяя изложенную здесь теорию, в моем основном труде (1920) и в книге Кеплена-Вегенера (1924) я основывал свои расчеты облучения Земли на данных Стоквэлла. Это было тем легче осуществить, что Пильгрим в своей опубликованной в 1904 г. работе „Опыт числовой разработки проблемы ледниковых периодов“, которая в остальном не имеет ничего общего с изложенной здесь теорией, произвел числовой расчет величин e , e , Π за период времени в 1010 тысячелетий до 1850 г. н. э. Полученные им цифры могли быть использованы для дальнейших вычислений. При своих подсчетах Пильгрим частично исправил использованное Стоквэллом значение массы Земли в соответствии с современными данными. При этом он применил формулы, выведенные самим Стоквэллом для этой цели, так же как это уже было сделано Лагранжем и Леверрье.

В связи с изданием настоящей работы была произведена проверка вычислений Пильгрима, которая выяснила, что в некоторые из его цифр вкрались арифметические ошибки, а другие недостаточно точны, вследствие слишком широкого применения линейной интерполяции. Поэтому оказалось необходимым новое определение этих величин, тем более, что было желательно повысить на один десятичный знак точность вычислений изменений радиации. Профессор Мишкович, директор Астрономической обсерватории в Белграде, любезно взял на себя первую часть этой задачи, т. е. вычисление вековых изменений астрономических элементов. В своих расчетах он исходил из вычислений Леверрье, так как тщательное сравнение работ Стоквэлла и Леверрье убедило его в том, что труд Леверрье по качеству превосходит труд Стоквэлла, испорченный главным образом многочисленными опечатками. Это отметил еще Гарцер, когда проверил большую часть вычислений Леверрье и нашел в них только одну незначительную ошибку.

Имелась еще и другая причина для использования работы Леверрье. Вычисления Леверрье и Стоквэлла произведены совершенно независимо друг от друга и исходят из различных начальных условий, так как в первых за отправную точку принято начало 1800 г., а в последних — начало 1850 г. Поэтому весьма желательно путем сравнения конечных результатов настоящих расчетов с прежними, произведенными на основании уравнений Стоквэлла, проверить их правильность.

Относящаяся сюда часть результатов вычислений Мишковича помещена в нижеприведенной табл. 13¹⁾. Цифры этой таблицы, как вытекает из вышесказанного, могут считаться наиболее соответствующими современному положению науки.

Что касается точности и области применения вычисленных таким путем астрономических элементов, то по этому поводу нужно заметить следующее. Расчеты Леверрье обеспечивают точность вычисления

¹⁾ Остальная часть этих результатов напечатана в первом томе „Руководства по геофизике“ Гутенберга. Подробное описание предварительной работы и прочих результатов этих расчетов помещено в „Отчетах Сербской академии.“

Таблица 13

Вековые изменения астрономических элементов за истекшие
600 тысячелетий (по Мишковичу)

Тысячеле- тия до 1800 г.	Δe	$\Delta (e \sin \Pi)$	Тысячеле- тия до 1800 г.	Δe	$\Delta (e \sin \Pi)$
0,6	+ 0,062	+ 0,0003	175	+ 0,333	- 0,0503
5	+ 0,539	- 0,0123	176,3	+ 0,167	- 0,0526
10	+ 0,760	- 0,0344	180	- 0,308	- 0,0361
11,1	+ 0,666	- 0,0354	185	- 0,780	+ 0,0137
15	+ 0,335	- 0,0250	187,5	- 0,898	+ 0,0241
20	- 0,748	- 0,0013	190	- 0,977	+ 0,0149
22,1	- 1,235	+ 0,0007	195	- 0,957	- 0,0398
25	- 1,472	- 0,0066	198,5	- 0,623	- 0,0598
30	- 1,270	- 0,0295	200	- 0,480	- 0,0559
32,7	- 1,077	- 0,0312	205	+ 0,280	- 0,0045
35	- 0,912	- 0,0282	209,6	+ 0,807	+ 0,0264
40	- 0,255	- 0,0150	210	+ 0,853	+ 0,0261
45	+ 0,782	- 0,0065	215	+ 0,842	- 0,0070
47,1	+ 0,730	- 0,0055	220	+ 0,083	- 0,0551
50	+ 0,660	- 0,0074	220,8	- 0,097	- 0,0557
55	- 0,040	- 0,0195	225	- 1,043	- 0,0292
60	- 0,463	- 0,0338	230	- 1,538	+ 0,0132
60,6	- 0,503	- 0,03 5	232,4	- 1,453	+ 0,0148
65	- 0,917	- 0,0242	235	- 1,267	- 0,0001
70	- 1,178	+ 0,0052	240	- 0,795	- 0,0346
71,9	- 1,145	+ 0,0105	242,2	- 0,313	- 0,0385
75	- 0,938	+ 0,0016	245	+ 0,035	- 0,0336
80	- 0,312	- 0,0393	250	+ 0,873	- 0,0125
82,8	+ 0,052	- 0,0505	255	+ 0,542	- 0,0040
85	+ 0,336	- 0,0431	256,5	+ 0,345	- 0,0041
90	+ 0,745	- 0,0073	260	- 0,113	- 0,0081
94,0	+ 0,782	+ 0,0211	265	- 0,493	- 0,0200
95	+ 0,790	+ 0,0199	270	- 0,907	- 0,0332
100	- 0,180	- 0,0145	270,7	- 0,930	- 0,0342
105	- 1,223	- 0,0545	275	- 1,073	- 0,0241
105,1	- 1,225	- 0,0545	280	- 0,792	+ 0,0050
110	- 1,298	- 0,0225	281,8	- 0,577	+ 0,0095
115	- 1,200	+ 0,0170	285	- 0,193	+ 0,0002
116,1	- 1,160	+ 0,0186	290	+ 0,378	- 0,0390
120	- 0,802	- 0,0012	292,7	+ 0,542	- 0,0481
125	+ 0,250	- 0,0402	295	+ 0,680	- 0,0418
127,7	+ 0,498	- 0,0469	300	+ 0,542	+ 0,0018
130	+ 0,710	- 0,0408	303,1	- 0,007	+ 0,0167
135	+ 0,387	- 0,0084	305	- 0,465	+ 0,0114
140	- 0,133	+ 0,0094	310	- 1,197	- 0,0321
145	- 0,715	- 0,0092	313,4	- 1,123	- 0,0473
150	- 0,983	- 0,0380	315	- 1,090	- 0,0429
152,2	- 0,885	- 0,0429	320	- 0,928	- 0,0031
155	- 0,760	- 0,0370	323,3	- 0,582	+ 0,0093
160	- 0,222	- 0,0044	325	- 0,402	+ 0,0046
164,3	+ 0,205	+ 0,0138	330	+ 0,468	- 0,0041
165	+ 0,275	+ 0,0136	332,8	+ 0,488	- 0,0372
170	+ 0,542	- 0,0139	335	+ 0,433	- 0,0314

Продолжение табл. 13

Тысячеле- тия до 1800 г.	Δe	$\Delta (e \sin \Pi)$	Тысячеле- тия до 1800 г.	Δe	$\Delta (e \sin \Pi)$
340	- 0,007	- 0,0042	465,4	- 0,177	- 0,0230
342,1	- 0,173	+ 0,0002	470	- 0,468	- 0,0198
345	- 0,408	- 0,0031	475	- 0,773	+ 0,0223
350	- 0,828	- 0,0317	475,6	- 0,792	+ 0,0228
350,9	- 0,843	- 0,0328	480	- 0,902	- 0,0078
355	- 0,910	- 0,0191	485	- 0,588	- 0,0516
359,9	- 0,543	+ 0,0015	486,1	- 0,480	- 0,0514
360	- 0,537	+ 0,0016	490	- 0,095	- 0,0294
365	+ 0,038	- 0,0182	495	+ 0,347	+ 0,0054
369,6	+ 0,437	- 0,0368	497,1	+ 0,405	+ 0,0071
370	+ 0,472	- 0,0367	500	+ 0,487	- 0,0023
375	+ 0,605	- 0,0143	505	+ 0,218	- 0,0266
379,7	+ 0,250	+ 0,0036	508,2	- 0,273	- 0,0307
380	+ 0,227	+ 0,0035	510	- 0,550	- 0,0278
385	- 0,592	- 0,0188	515	- 0,988	- 0,0192
389,6	- 0,992	- 0,0340	520	- 0,807	- 0,0143
390	- 1,037	- 0,0337	525	- 0,582	- 0,0060
395	- 1,072	- 0,0138	525,3	- 0,553	- 0,0056
399,2	- 0,967	- 0,0043	530	- 0,083	- 0,0072
400	- 0,947	- 0,0051	535	+ 0,442	- 0,0324
405	- 0,350	- 0,0216	537,8	+ 0,298	- 0,0426
407,7	+ 0,083	- 0,0243	540	+ 0,187	- 0,0403
410	+ 0,455	- 0,0207	545	- 0,170	- 0,0001
415	+ 0,840	- 0,0085	548,6	- 0,368	+ 0,0212
415,5	+ 0,822	- 0,0082	550	- 0,172	+ 0,0192
420	+ 0,657	- 0,0192	555	- 0,812	- 0,0314
424,0	+ 0,100	- 0,0300	559,0	- 0,835	- 0,0615
425	- 0,038	- 0,0301	560	- 0,842	- 0,0605
430	- 0,915	- 0,0089	565	- 0,495	- 0,0053
433,5	- 1,275	+ 0,0052	569,4	- 0,007	+ 0,0308
435	- 1,332	+ 0,0049	570	+ 0,060	+ 0,0301
440	- 1,072	- 0,0282	575	+ 0,483	- 0,0231
444,0	- 0,772	- 0,0465	579,7	+ 0,627	- 0,0601
445	- 0,572	- 0,458	580	+ 0,637	- 0,0599
450	+ 0,083	- 0,0053	585	+ 0,252	- 0,0165
454,8	+ 0,658	+ 0,0208	590	- 0,693	+ 0,0204
455	+ 0,682	+ 0,0208	590,3	- 0,718	+ 0,0202
460	+ 0,422	- 0,0080	595	- 1,108	- 0,0145
465	- 0,152	- 0,0234	600	- 1,065	- 0,0431

эксцентриситета e до четырех десятичных знаков, наклона эклиптики e до секунд и долготы перигелия Π до минут для периода времени по меньшей мере в 100 000 лет до и после нашей эпохи ¹⁾. Вследствие этого помещенные в дальнейших параграфах и выраженные в канонических единицах таблицы количества радиации за последние сто тысяче-

¹⁾ Правда, Стоквелл довел числовой расчет своих уравнений только до 8000 лет до 1850 г. Однако при этом он гарантировал точность e с семью десятичными знаками, а точность e и Π — с десятичными долями секунды, вследствие чего область применения его данных не ниже, чем у Леверрье.

летий можно считать точными до единицы последнего десятичного знака. Для еще более отдаленных времен последняя цифра данных таблицы может оказаться неточной. Однако, если принять во внимание, что отклонение в десять канонических единиц соответствует изменению широты менее чем на $20'$, то эти отклонения окажут мало заметное влияние на получаемую Землей радиацию вплоть до шестисотого тысячелетия до нашего времени. И только если взять период времени более чем 600 тысячелетий, неточность астрономических данных может повлиять на неправильность предпоследнего десятичного знака цифр, приведенных в таблице. На основании этого приводимые расчеты и не были продолжены за пределы периода времени в 600 тысячелетий до нашей эпохи.

§ 39. Числовой расчет векового хода облучения Земли. Теперь мы должны приступить к числовой интерпретации векового хода облучения. Необходимые для этого предпосылки уже были изложены в разделе I. Там было показано, что можно уловить все интересующие нас детали этого явления, если разделить каждый из рассматриваемых прошедших годов на два одинаковых по продолжительности „калорических“ полугодия, из которых одно будет охватывать все те дни, в которые количество радиации, получаемое под данной географической широтой, больше, чем в какой-либо из дней другого полугодия, и на основании этого вычислить количества радиации, получаемые в течение этих полугодий рассматриваемой широтой. Эти количества радиации, выраженные в канонических единицах: $J_0 = 1$, $T = 100\,000$, представляются для северного полушария уравнениями (115) раздела I, т. е.

$$Q_s = W_s^\circ + \Delta W_s \Delta \varepsilon - m e \sin \Pi,$$

$$Q_w = W_w^\circ + \Delta W_w \Delta \varepsilon + m e \sin \Pi;$$

количества эти для нашего времени вычислены по формуле (116), т. е.

$$Q_s^\circ = W_s^\circ - m e_0 \sin \Pi_0,$$

$$Q_w^\circ = W_w^\circ + m e_0 \sin \Pi_0.$$

Что касается произведенного по формулам Леверрье расчета вековых изменений астрономических элементов, то здесь в качестве исходного момента было принято начало 1800 г., и ему соответствовали значения:

$$e_0 = 23^\circ 27' 55'', \quad e_0 = 0,0168, \quad \Pi = 99^\circ 30'.$$

Таким образом если принять для вычисления хода облучения 1800 год за начальный, то встречающиеся в вышеприведенных уравнениях величины W_s° и W_w° должны быть определены с помощью упомянутых астрономических величин. Таким путем мы получим содержащиеся в приведенной ниже табл. 14 значения Q_s° и Q_w° , которые впоследствии будут нам нужны.

Таблица 14
Количества лучистой энергии, полученные в течение калорических полугодий, в канонических единицах (эпоха 1800 г.)

Географическая широта	Северное полушарие		Южное полушарие	
	летнее полугодие	зимнее полугодие	летнее полугодие	зимнее полугодие
15°	16 109	13 476	16 757	12 828
20°	16 280	12 577	16 912	11 945
25°	16 345	11 595	16 953	10 987
30°	16 294	10 538	16 876	9 956
35°	16 139	9 418	16 689	8 868
40°	15 878	8 244	16 392	7 730
45°	15 522	7 033	15 996	6 559
50°	15 078	5 799	15 510	5 367
55°	14 573	4 575	14 959	4 189
60°	14 006	3 363	14 342	3 027
65°	13 454	2 250	13 738	1 966
70°	13 074	1 393	13 304	1 163
75°	12 862	786	13 030	618
80°	12 732	367	12 850	249
85°	12 673	100	12 733	40
90°	12 669	7	12 676	0

Отклонения ΔQ_s или ΔQ_w количеств радиации Q_s или Q_w за какой либо год геологического прошлого от данных 1800 г., для краткости называемые вековыми изменениями этих количеств радиации, даются следующими выражениями:

$$\Delta Q_s = \Delta W_s \Delta \varepsilon - m e \sin \Pi + m e_0 \sin \Pi_0, \quad \Delta \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0.$$

$$\Delta Q_w = \Delta W_w \Delta \varepsilon + m e \sin \Pi - m e_0 \sin \Pi_0.$$

Если ввести обозначение

$$e \sin \Pi - e_0 \sin \Pi_0 = \Delta (e \sin \Pi),$$

то получится

$$\Delta Q_s = \Delta W_s \Delta \varepsilon - m \Delta (e \sin \Pi),$$

$$\Delta Q_w = \Delta W_w \Delta \varepsilon + m \Delta (e \sin \Pi).$$

Эти уравнения, как уже упоминалось, применимы только для северного полушария; для южного их надо заменить следующими:

$$\Delta Q_s = \Delta W_s \Delta \varepsilon + m \Delta (e \sin \Pi),$$

$$\Delta Q_w = \Delta W_w \Delta \varepsilon - m \Delta (e \sin \Pi).$$

При помощи вышеуказанных уравнений мы вычислили вековые изменения количеств радиации Q_s и Q_w ; при этом величины ΔW_s и ΔW_w взяты из табл. 6, величины m — из маленькой таблицы на стр. 54 и величины $\Delta \varepsilon$ и $\Delta (e \sin \Pi)$ — из табл. 13. Результаты этих вычислений показаны в нижеследующей табл. 15.

Эта большая таблица представляет собой подробную историю хода облучения Земли за последние 600 тысячелетий, изложенную математическим языком. Обсуждению ее посвящены дальнейшие параграфы.

Таблица 15
Вековой ход облучения Земли.
Изменения количества тепла, получаемых различными широтами в течение калорических полугодий
(в канонических единицах)
Северное полушарие

Тысяче- летия до 1800 г. после н. э.	Летнее полугодие					Зимнее полугодие						
	Географическая широта (северная)											
	25°	35°	45°	55°	65°	75°	25°	35°	45°	55°	65°	75°
0,6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	264	271	275	277	288	27	304	294	274	170	5	0
10	685	667	632	589	553	309	742	700	528	387	170	78
11,1	697	671	630	578	529	524	747	699	524	384	197	197
15	482	457	420	374	328	281	508	471	347	255	137	137
20	28	72	119	171	243	338	84	103	111	80	15	15
22,1	99	166	237	315	426	573	192	218	229	155	41	41
25	18	74	176	290	444	646	358	338	170	99	111	111
30	453	331	189	27	179	437	417	338	183	137	126	126
32,7	498	383	249	96	68	338	417	243	175	132	116	116
35	451	354	236	101	68	277	386	316	175	98	68	68
40	258	217	168	111	42	42	239	206	131	88	56	56
45	174	206	271	246	295	394	232	239	207	151	50	50
47,1	152	182	213	246	287	365	207	213	187	135	57	57
50	85	206	227	250	287	341	232	233	197	143	98	98
55	355	319	272	217	153	81	352	317	220	162	157	157
60	589	504	399	278	133	43	554	485	315	234	160	160
60,6	599	510	401	277	125	57	561	489	317	235	94	94
65	381	288	178	54	105	301	312	249	128	96	61	61
70	178	233	292	354	446	569	267	283	259	188	87	87
71,9	273	317	361	407	479	581	359	365	314	229	86	86
75	95	144	196	253	333	440	165	184	177	127	190	190
80	700	614	506	379	231	55	677	601	405	299	258	258
82,8	932	845	734	601	451	280	936	848	597	489	248	248
85	852	791	708	609	500	393	877	805	581	427	21	21
90	58	98	141	189	256	346	114	129	128	93	—	—

94	333	253	158	61	85	254	275	220	164	115	86	84
95	311	232	140	35	99	263	251	199	145	99	74	77
100	345	301	246	182	106	16	332	294	247	197	145	94
105,1	915	753	555	329	51	289	823	701	564	428	239	239
110	322	433	465	61	248	484	225	157	92	44	36	75
115	396	454	480	497	554	639	486	483	456	400	291	122
116,1	423	451	480	505	553	629	510	503	472	411	299	129
120	34	80	131	186	263	364	94	114	125	121	87	18
125	756	699	622	530	430	318	774	710	620	510	375	211
127,7	897	841	764	670	591	467	934	862	760	630	462	252
130	800	767	716	653	591	533	853	797	711	594	436	227
135	181	188	191	194	204	221	210	205	189	163	119	55
140	182	173	159	142	126	109	192	178	159	131	97	52
145	119	64	0	71	164	283	66	34	5	13	7	26
150	629	508	364	197	8	261	555	467	371	277	207	163
152,2	726	602	452	280	67	191	660	565	458	351	261	191
155	627	520	391	242	59	163	570	488	397	303	225	164
160	65	45	22	4	37	80	49	36	24	14	11	15
164,3	239	203	160	110	48	24	223	195	162	127	93	64
165	231	192	144	90	24	58	210	180	146	112	84	61
170	293	289	299	297	303	820	334	322	295	253	185	86
175	947	878	782	668	544	409	972	892	780	641	471	265
176,3	978	895	886	654	508	343	990	902	785	640	471	271
180	641	561	460	343	204	41	618	549	462	368	272	174
185	307	326	340	533	382	105	573	550	505	432	290	92
187,5	506	512	511	505	513	536	416	411	505	432	316	149
190	664	370	394	416	460	525	592	501	402	302	246	104
195	664	541	395	225	16	240	1009	890	747	591	438	284
198,5	1055	916	742	541	301	16	957	849	717	570	421	269
200	993	869	714	531	316	62	124	122	115	99	73	28
205	103	110	117	122	134	152	124	122	110	110	128	110
209,6	429	338	231	106	48	238	368	304	236	171	121	106
210	419	327	217	92	66	261	451	292	223	161	121	106
215	188	221	255	291	346	423	1024	929	805	655	482	281
220	1018	925	805	662	500	317	1010	909	781	632	465	279
220,8	1017	913	780	624	444	237	885	311	234	165	124	117
225	463	355	227	80	105	383	385	311	234	165	124	117
230	350	411	472	537	636	776	465	489	412	299	244	119
232,4	374	428	479	534	621	745	488	489	469	416	303	303
235	87	156	232	315	430	583	182	210	223	212	152	37
240	580	476	350	205	27	191	521	442	355	269	202	151

Тысяче- летия до 1800 г. после н. э.	Летнее полугодие					Зимнее полугодие						
	Географическая широта (северная)											
	25°	35°	45°	55°	65°	75°	25°	35°	45°	55°	65°	75°
242,2	685	601	494	370	224	51	662	588	497	395	292	186
245	619	562	488	400	300	186	622	564	488	397	292	171
250	291	317	340	362	404	465	357	354	333	292	213	89
255	111	134	157	182	218	270	152	157	153	138	100	36
256,5	99	111	123	134	152	180	125	126	120	106	77	31
260	141	121	95	66	31	11	133	116	96	75	55	38
265	332	270	309	160	23	126	296	250	200	150	111	86
270	547	438	319	166	23	256	479	400	316	234	175	141
270,7	563	452	319	166	23	256	498	413	325	242	180	145
275	368	266	148	13	159	373	287	221	155	100	6	90
280	147	182	218	255	159	390	207	215	212	191	139	49
281,8	214	230	242	245	277	314	258	254	238	198	151	65
285	18	27	39	50	68	90	32	35	87	34	25	7
290	743	695	629	548	463	371	772	711	626	518	380	208
292,7	922	867	789	695	596	493	963	890	785	651	478	259
295	806	771	717	650	585	523	857	800	712	595	436	229
300	5	38	74	114	169	241	46	61	70	70	51	7
303,1	307	278	240	196	145	88	308	278	240	195	144	85
305	242	247	249	249	256	272	276	267	245	211	154	72
310	506	383	240	76	132	389	416	333	248	173	130	126
313,4	790	646	471	271	23	279	706	598	479	362	209	205
315	712	577	414	228	3	286	630	531	422	316	236	184
320	8	65	127	195	289	412	78	104	422	316	236	184
323,3	212	227	240	253	278	315	255	251	236	206	150	64
325	113	126	140	154	176	208	143	143	137	122	88	35
330	108	127	145	165	194	237	143	146	142	127	92	35
332,8	718	679	530	555	485	413	755	700	619	515	378	203
335	607	576	530	473	416	359	640	594	527	438	321	172
340	77	69	59	47	34	18	76	69	59	48	35	21
342,1	16	25	35	45	61	81	29	32	34	31	23	6
345	120	84	41	8	70	147	90	67	44	25	20	29

350	524	424	301	163	10	222	462	388	307	230	172	135
350,9	544	440	315	172	6	223	481	404	331	240	179	141
355	287	203	107	5	145	322	219	165	113	69	54	70
359,9	66	93	121	152	198	258	107	116	117	108	79	24
360	67	94	122	153	197	256	107	117	118	109	79	24
365	337	307	268	221	169	110	340	308	258	218	161	93
369,6	707	666	607	537	464	387	739	684	604	501	368	199
370	707	669	613	545	475	404	742	689	610	506	371	200
375	305	314	316	317	329	351	351	339	312	268	196	90
379,7	48	29	6	20	54	97	30	18	8	0	1	10
380	48	50	8	16	47	87	31	20	10	3	3	11
385	304	238	160	72	40	178	259	213	164	120	89	77
389,6	556	441	304	149	46	285	481	399	311	229	171	142
390	546	430	292	134	64	307	469	387	299	218	163	140
395	178	95	1	106	247	424	97	50	8	19	12	38
399,2	11	50	116	191	292	424	61	90	109	112	80	7
400	28	33	101	177	278	410	43	73	95	100	71	2
405	372	315	246	164	66	52	346	301	248	192	143	98
407,7	452	414	363	304	236	161	458	418	363	297	218	125
410	412	401	381	354	332	315	446	420	378	317	232	119
415	215	246	277	308	359	430	278	281	271	240	175	68
415,5	208	239	268	300	388	400	448	429	391	333	245	66
420	399	401	396	387	374	400	566	515	448	366	269	117
424	558	511	448	374	291	198	547	494	424	344	253	155
425	550	495	424	341	245	134	547	494	424	344	253	151
430	99	34	41	124	233	377	30	5	35	50	35	18
433,6	185	245	310	378	478	614	281	299	301	275	199	64
435	183	248	315	389	495	639	283	304	306	281	203	65
440	443	334	207	61	123	352	362	289	214	148	112	111
444	800	676	525	349	137	742	644	644	530	411	306	212
445	801	683	525	391	197	758	665	665	555	437	323	215
450	103	98	91	83	73	109	109	102	91	76	55	29
454,8	336	264	177	78	46	198	182	181	181	131	98	85
455	334	261	173	72	54	209	287	232	177	127	95	85
460	177	168	133	198	212	235	208	203	190	164	120	53
465	419	370	307	234	149	48	408	364	308	246	183	113
465,4	427	375	309	234	145	39	413	367	311	248	184	116
470	331	271	198	113	116	116	296	251	201	151	113	86
475	464	467	462	452	454	469	522	499	557	390	284	136
475,6	474	478	473	462	464	480	534	511	466	398	291	139
480	80	17	54	134	240	377	12	21	47	61	42	12

Тысяче- летия до 1800 г. после н. э.	Летнее полугодие					Зимнее полугодие						
	Географическая широта (северная)											
	25°	35°	45°	55°	65°	75°	25°	35°	45°	55°	65°	75°
485	908	784	632	454	247	10	864	760	636	501	371	243
486,1	910	794	649	479	278	39	874	774	652	517	383	246
490	533	476	404	318	220	105	526	472	404	326	241	146
495	73	47	67	23	72	133	49	32	16	5	4	17
497,1	102	67	97	18	77	151	71	50	30	15	12	24
50	85	108	130	154	190	238	122	128	126	115	83	29
505	504	469	421	344	302	236	521	478	420	347	254	142
508,2	545	476	390	289	170	29	524	464	392	311	230	147
510	472	393	297	187	110	113	431	370	301	232	171	124
515	284	195	93	23	171	558	210	154	100	57	45	67
520	207	137	57	35	151	300	146	103	62	30	25	48
525,3	69	27	21	75	147	238	26	8	17	28	19	13
530	64	24	22	73	140	227	23	1	18	19	11	11
535	110	88	54	63	84	2	120	106	88	70	52	34
535	593	545	545	487	428	368	659	612	542	451	331	177
537,8	804	745	666	570	466	353	826	758	664	546	401	225
540	753	692	611	516	409	290	767	700	610	500	368	210
545	10	19	30	41	57	77	23	26	29	28	20	4
548,6	415	398	372	339	307	27	442	413	369	309	227	118
550	386	378	362	342	325	315	421	398	359	303	222	111
555	520	420	361	164	7	215	459	386	306	230	171	135
559	1072	917	728	508	243	74	1009	882	734	576	426	286
560	1052	900	712	494	232	82	989	864	713	563	416	281
565	62	26	15	61	123	201	25	5	12	21	15	12
569,4	556	513	442	361	266	159	567	513	442	364	265	156
570	549	492	420	335	238	124	544	490	420	340	251	150
575	458	443	420	389	362	140	494	464	416	350	256	131
579,7	1149	1076	977	856	728	593	1196	1103	973	805	591	323
580	1144	1074	974	855	729	597	1191	1100	970	803	589	322
585	321	306	282	255	227	199	340	316	281	234	171	91
590	424	426	419	479	411	422	475	453	415	353	259	123
590,3	421	426	421	414	417	433	475	456	416	356	260	124
595	188	102	4	106	253	437	105	56	12	16	10	40
600	717	583	422	237	7	273	638	538	429	323	240	186

Южное полушарие

0,6	10	13	15	18	24	31	15	15	15	13	11	4
5	188	137	77	9	78	185	148	714	81	52	40	46
10	579	477	354	211	37	176	522	444	359	272	203	151
11,1	603	505	384	246	77	128	553	477	389	300	222	159
15	486	373	296	208	100	27	410	359	299	235	173	117
20	76	116	157	201	265	352	132	147	151	141	102	29
22,1	73	142	217	299	414	565	166	194	209	199	143	33
25	224	294	366	444	558	712	334	356	356	324	235	77
30	631	649	657	639	685	735	726	702	648	556	407	187
32,7	648	653	645	632	633	654	729	698	638	545	397	190
35	582	582	572	535	552	563	650	620	638	481	352	170
40	294	281	262	237	216	194	813	292	260	217	160	84
45	64	10	51	119	210	328	6	23	45	55	39	10
47,1	50	0	55	118	201	309	50	31	50	59	41	6
50	90	0	15	78	161	267	40	13	71	25	17	17
55	361	329	286	237	161	117	364	331	286	234	172	100
60	653	620	569	508	447	385	688	639	565	471	346	285
60,6	669	635	587	527	467	407	707	657	583	487	357	190
65	509	516	516	510	519	545	578	555	509	436	318	150
70	14	61	142	232	356	517	75	111	133	137	98	9
71,9	113	31	61	163	299	475	27	17	53	70	49	19
75	37	90	150	215	305	424	107	130	144	139	99	20
80	744	692	620	535	443	343	767	705	618	509	373	208
82,8	24	833	714	575	415	222	920	830	115	579	427	254
85	804	707	584	411	272	83	779	693	587	469	345	228
90	46	88	446	183	250	342	102	119	128	122	87	20
94	443	419	446	441	447	468	501	482	440	377	276	130
95	421	430	450	429	228	182	481	463	425	365	266	123
100	371	347	312	272	228	182	384	354	311	257	189	104
105,1	1087	1059	1067	939	883	841	1179	1111	591	480	615	313
110	504	536	561	535	634	712	601	591	522	480	350	153
115	228	134	23	107	262	467	138	83	32	7	7	50
116,1	251	164	54	73	235	441	115	115	62	21	19	59
120	78	120	165	211	283	376	138	154	159	149	107	30
125	720	637	530	406	260	38	702	626	332	426	315	193

Зимнее полугодие

Летнее полугодие

Географическая широта (южная)

Тысяче- летия до 1800 г. после н. э.	Географическая широта (южная)											
	25°	35°	45°	55°	65°	75°	25°	35°	45°	55°	65°	75°
127,7	827	717	580	422	233	7	790	696	584	462	342	222
130	700	589	454	297	109	121	647	559	459	356	264	185
135	127	92	49	2	60	135	98	75	51	33	25	31
140	164	139	111	76	36	13	154	134	111	87	65	44
145	219	242	264	285	322	377	272	259	227	165	165	68
150	767	754	726	687	660	645	841	795	719	607	445	221
152,2	850	824	778	720	669	625	916	861	772	649	475	243
155	733	710	671	620	575	537	790	742	665	559	409	210
160	97	101	104	106	113	124	113	110	102	88	65	29
164,3	267	255	236	212	188	164	283	263	234	195	143	76
165	269	260	246	226	210	196	290	272	244	204	150	77
170	217	163	99	502	65	180	176	140	103	71	53	54
176,3	954	794	660	570	318	189	876	780	682	529	391	245
180	685	639	724	497	394	189	942	846	725	584	431	261
185	197	130	52	85	148	325	708	651	572	472	346	192
187,5	380	288	181	57	99	292	139	98	58	23	23	46
190	206	126	34	70	204	375	132	85	41	10	10	46
195	798	781	747	701	666	642	870	821	740	624	457	230
198,5	1143	1072	972	851	725	590	1189	1098	967	801	588	322
200	1061	989	890	771	642	504	1097	1009	887	732	537	297
205	63	40	13	18	56	106	42	28	15	5	5	15
209,6	541	540	527	508	500	506	602	574	522	443	324	158
210	539	541	531	516	514	525	603	576	525	447	327	158
215	70	11	55	129	226	353	7	25	49	60	42	10
220	1006	905	775	672	544	241	1000	901	775	627	462	277
220,8	1031	937	816	620	410	327	1638	941	815	664	489	285
225	609	615	611	600	605	629	687	659	604	515	376	179
230	134	27	94	229	410	642	19	38	83	72	49	31
232,4	170	64	55	190	367	595	61	3	45	72	49	31
235	91	160	234	317	432	585	186	214	235	214	154	39
240	702	674	642	601	567	541	751	708	637	537	392	199
242,2	729	679	610	526	436	339	752	692	607	501	368	204
245	615	554	476	382	276	154	612	552	476	385	284	189
250	169	99	18	72	150	339	103	62	25	2	1	37
255	35	25	43	88	82	280	6	25	39	44	32	4
256,5	51	25	5	38	107	138	25	10	10	10	7	4
260	157	149	137	122	339	93	165	154	136	113	83	44
265	402	394	378	356	339	328	438	414	374	316	231	116
270	673	661	643	612	593	586	741	702	636	538	395	195
270,7	693	684	661	630	609	602	768	723	655	554	406	201
275	518	534	542	547	571	617	599	579	535	460	336	154
280	37	16	74	139	226	340	23	49	68	75	53	1
281,8	134	86	30	43	226	218	90	62	34	4	11	31
285	10	21	33	46	64	88	24	29	31	30	21	5
290	691	601	489	360	205	23	662	585	492	390	288	186
292,7	846	731	589	425	228	7	805	708	593	469	346	227
295	710	601	457	312	123	105	659	572	472	367	272	189
300	71	98	126	156	199	259	112	121	122	81	81	23
303,1	307	276	238	192	141	82	306	276	288	193	142	85
305	176	131	77	17	60	156	142	111	81	55	42	44
310	674	683	680	672	682	713	764	733	672	575	420	198
313,4	948	926	885	831	787	757	1032	974	877	740	541	273
315	864	849	816	770	739	720	946	895	808	682	500	250
320	122	167	215	267	343	444	192	206	208	192	139	44
323,3	130	81	26	37	118	211	87	57	30	10	10	30
325	57	26	8	46	98	162	27	9	5	14	10	11
330	42	9	27	69	124	195	7	10	24	31	22	7
332,8	650	557	413	311	153	37	613	536	447	351	260	173
335	547	468	370	257	122	41	514	450	373	292	217	146
340	77	71	61	51	38	24	78	71	61	50	37	21
342,1	8	19	29	41	57	79	21	26	28	27	19	4
345	178	186	191	196	208	229	208	203	188	163	118	53
350	640	630	607	575	554	542	702	665	601	508	372	185
350,9	662	750	625	592	568	555	725	686	619	524	363	191
355	415	431	441	449	473	516	483	469	435	375	274	124
359,9	10	43	79	118	172	240	51	65	74	74	53	8
360	9	40	76	115	169	242	49	63	72	71	53	8
365	331	297	254	203	143	74	328	296	254	206	151	91
369,6	645	556	447	319	166	15	613	538	450	355	262	173
370	641	551	439	309	153	32	606	531	442	348	257	172
375	221	162	94	15	83	207	175	137	98	64	50	54

Тысяча летия до 1800 г. после и. э.	Летнее полугодие					Зимнее полугодие						
	Географическая широта (южная)											
	25°	35°	45°	55°	65°	75°	25°	35°	45°	55°	65°	75°
379,7	84	91	98	104	116	133	102	102	96	84	61	26
380	80	86	92	98	107	123	97	96	90	79	57	25
385	386	366	378	366	362	368	411	411	374	318	233	202
389,6	694	689	670	643	628	629	769	733	663	411	411	202
390	692	690	674	650	642	619	769	733	667	566	411	202
395	328	363	395	428	483	564	409	408	388	341	248	102
399,2	147	192	240	291	366	468	219	232	233	212	154	54
400	160	203	247	295	366	462	231	243	241	218	159	54
405	422	403	374	338	304	270	448	417	372	310	227	120
407,7	440	394	333	262	180	85	484	390	333	198	122	121
410	348	287	213	128	22	105	314	268	216	165	122	91
415	97	36	33	110	213	344	34	1	27	42	29	18
415,5	92	33	34	110	209	338	31	1	28	43	29	16
420	307	237	154	59	58	206	258	209	159	113	85	77
424	544	485	412	324	223	106	536	481	412	382	245	149
425	556	505	438	359	271	170	559	506	438	356	263	153
430	227	262	295	332	387	467	296	301	289	258	187	72
433,6	7	73	160	256	388	562	89	127	151	153	109	12
435	3	86	175	275	411	589	103	142	166	167	119	15
440	593	602	601	595	607	638	674	647	594	508	372	175
444	908	870	809	733	661	591	966	902	804	671	492	258
445	881	833	762	675	587	496	924	857	758	629	461	249
450	91	78	61	41	17	11	85	74	61	48	35	25
454,8	428	428	419	406	402	408	477	456	414	353	258	125
455	430	431	423	412	410	419	481	460	419	357	261	125
460	117	80	37	12	74	155	86	63	40	22	18	27
465	441	408	363	310	253	188	452	414	362	219	123	123
465,4	451	419	375	322	265	203	465	427	373	308	226	126
470	397	357	370	347	329	313	432	407	367	309	227	114

475	356	273	178	68	72	243	298	241	183	130	98	90
475,5	364	280	181	68	74	250	304	247	188	132	99	91
480	206	243	278	316	374	455	274	281	271	243	176	66
485	990	932	848	746	642	532	1034	956	844	699	513	279
486,1	978	914	825	717	604	481	1014	934	822	679	499	274
495	947	500	438	366	284	193	551	504	438	338	263	152
497,1	123	133	141	149	164	187	149	148	138	171	86	37
500	158	169	177	184	190	223	189	186	174	151	110	48
505	474	14	50	88	142	210	20	34	46	49	35	1
508,2	583	415	341	256	154	34	457	406	342	273	202	128
510	550	544	490	425	356	281	604	556	488	408	296	163
515	422	531	499	461	425	395	591	554	495	416	305	158
520	319	443	457	469	501	552	476	484	450	389	285	127
525	325	339	353	367	397	444	380	373	348	302	221	96
525,3	151	173	193	215	249	298	194	197	189	168	121	47
530	142	162	182	203	236	283	183	185	178	158	115	45
535	138	130	118	105	90	71	144	134	318	98	72	38
537,8	564	483	383	267	128	40	531	464	386	303	225	151
540	762	671	556	422	264	79	740	658	558	446	329	207
545	727	646	543	422	281	118	713	638	544	438	322	198
548,6	14	23	32	43	59	79	27	30	31	30	21	6
550	363	306	236	155	57	63	336	291	239	185	137	96
555	320	260	188	106	5	121	285	240	191	145	108	83
559	694	524	500	538	545	533	695	658	594	502	367	183
559,3	1133	1125	1036	924	811	696	1251	1160	1030	856	628	336
560	1770	1110	1022	914	804	694	1233	1146	1016	845	620	331
565	132	150	167	185	213	255	169	171	164	145	105	42
569,4	566	511	440	357	262	153	565	511	440	358	263	156
570	557	508	442	365	278	180	562	510	442	365	265	154
575	390	323	242	149	34	106	354	302	246	188	140	103
579,7	1061	920	747	544	302	15	1014	893	751	595	439	285
580	1054	914	740	537	295	9	1007	888	744	589	435	284
585	285	242	190	129	55	33	266	232	191	150	111	75
590	326	252	165	129	61	216	275	223	169	121	91	82
590,3	321	246	157	56	71	229	267	216	162	114	86	80
595	344	380	412	446	501	583	427	426	404	356	258	105
600	867	849	814	767	731	709	946	894	807	681	498	250

§ 40. Результаты исследований климатологов и геологов о связи векового хода облучения Земли с климатами геологических эпох. Приведенная табл. 15, показывающая вековой ход облучения Земли, является математическим решением определенной астрономической проблемы. Метод этого решения был основан на принципах небесной механики и на теоретических выводах раздела I, т. е. той части настоящей работы, которая во введении была названа астрономической.

Если теперь поставить вопрос, каким образом описанный выше ход облучения отразился на климатической картине геологического прошлого, то для ответа перед нами имеются два пути. Один из них, как и тот, которым мы шли до настоящего момента, лежит еще целиком в области точного естествознания. Если воспользоваться теоретическими результатами раздела II (названного физическим), можно вывести из векового хода облучения соответствующий ход температур и таким путем выделить ту слагающую земного климата, которая коренится в изменчивости облучения Земли. Другой путь ведет через область описательного естествознания. Следы, оставленные климатами далекого прошлого на лике Земли, дают возможность установить последовательность климатов того периода истории Земли, к которому относятся наши расчеты колебаний облучения. Сравнивая последовательные смены климатов с вычисленным теоретически ходом облучения, мы не только вскрыем причину этих изменений климата, но сумеем также определить на астрономической основе тот абсолютный момент, когда они имели место. Этот второй путь весьма успешно использовался климатологами и геологами, прежде чем стал известен первый; в настоящей работе мы будем также придерживаться этой последовательности.

Первым, кто применил вычисленный мной теоретически ход облучения Земли к изучению климата геологических эпох, был В. Кеппен (1923). Вопреки распространенному в то время мнению Ханна о недостаточности астрономических методов для разрешения проблемы ледниковых периодов, Кеппен, ознакомившись с данными только что вышедшей в это время книги „Théorie mathématique“... и произведя по имеющимся в ней указаниям собственные вычисления, уяснил все значение этой теории. Это заставило его запросить дальнейшие разъяснения у автора, который в результате подобного сотрудничества усовершенствовал свой метод и придал ему форму, удобную для климатологических исследований. Результаты работ Кеппена вместе с относящимися сюда моими теоретическими выводами и числовыми расчетами напечатаны в труде Кеппена-Вегенера „Климаты геологического прошлого“ (Берлин 1924), в главе „Климаты четвертичного периода“, и вскоре были развиты в работах других исследователей. В дальнейшем мы еще вернемся к работе Кеппена и к данным имеющимся в этой области более новых исследований.

В своей работе Кеппен начинает с подробного обзора имеющегося материала, где он перечисляет и обсуждает результаты работ по истории Земли, касающиеся проблемы климата. В связи с этим мы приведем из труда Кеппена следующие положения.

После того как Европа и Северная Америка с эпохи алгонкско-

кембрийского оледенения в течение чрезвычайно долгого периода времени имели тропический и субтропический климаты, к концу третичного периода там снова наступил ледниковый период сначала в Северной Америке а затем и в Европе. Период этот достиг своего наивысшего развития в четвертичную эпоху. Снеговая линия в горах неоднократно спускалась до 1200 м, и в отдельные периоды огромные пространства обоих материков оказывались покрытыми почти тысячеметровым слоем внутриматерикового льда, тогда как в межледниковые периоды лед стаявал целиком или частично и на освобожденной поверхности развивалась флора, подобная современной.

А. Пенк и Э. Брюкнер подробно исследовали следы этого оледенения четвертичного периода в Альпах и изложили обширные материалы своих наблюдений в трехтомном труде „Альпы в ледниковый период“, Лейпциг 1901—1909. Изучая главным образом щельные террасы рек, они пришли к выводу, что это оледенение было четырехкратным, с тремя лежащими между ними межледниковыми периодами. Они обозначают эти ледниковые периоды, как Гюнц, Миндель, Рисс и Вюрм. В последнем различается еще несколько стадий его наступления. Наибольшего распространения лед достигал в Восточных Альпах во время Минделя, в Западных Альпах — во время Рисса. Следы наиболее древнего оледенения сохранились лишь в очень немногих местах. Из межледниковых периодов самым продолжительным был, по видимому, период между миндельской и рисской фазами оледенения.

Такое „альпийское“ деление ледниковой эпохи признается всеми наиболее совершенным и точным, вследствие чего Кеппен также берет его за основу для своих дальнейших исследований.

Что касается абсолютной длительности ледниковых и межледниковых периодов, то до издания труда Кеппена-Вегенера приходилось довольствоваться только грубо приближенными цифрами. Так, например, Кенигсбергер определил по содержанию гелия в минерале цирконе начало четвертичного периода за полмиллиона-миллион лет до нашего времени. В заключительном томе упомянутого труда Пенка и Брюкнера сообщены данные этих исследователей, основанные главным образом на изучении эрозии в выветривания во время межледниковых периодов речных наносов и морен ледникового происхождения. Данные эти изображены на прилагаемом рис. 14. Исходя из этого, Пенк определяет промежуток времени с момента отложения морен у Фирвальдштетского озера в 20 000 лет и принимает этот промежуток времени за единицу, так что по графику на рис. 14 можно определить межледниковый период Рисс-Вюрм в 60 000 лет; предыдущий межледниковый период Миндель-Рисс можно считать в четыре раза длиннее, т. е. в 240 000 лет. О продолжительности самых ледниковых периодов Пенк не высказывает никаких предположений. Если судить по рис. 14, можно считать время, протекшее с начала периода Гюнц, около 660 000 лет.

Наблюдения, сделанные в Альпах, уже давно заставили отказаться от упомянутой ранее гипотезы катастрофических потоков и ледяных глыб для объяснения четвертичных отложений Северной Европы, простирающихся до Южной Англии, Гарца и Карпат и состоящих из громадных масс глины, гальки и валунов, и позволили объяснить их

работой ледников. Однако до сих пор еще не удалось внести окончательную ясность в расчленение северогерманского четвертичного периода и в его отношении к расчленению альпийских ледниковых периодов, несмотря на то, что в настоящее время ожесточенный спор между моно- и полиглатциалистами может считаться разрешенным в пользу последних.

Согласно точке зрения, представляемой в данный момент большинством северогерманских геологов, здесь можно установить три или даже четыре периода оледенения. Между тем еще до появления работы Кеппена-Вегенера исследования, произведенные Гагелем (1915), Зергелем (1919), Кренкелем (1922) и др., показали, что последний ледниковый период, вюрмский, состоял из трех эпох наступления ледников. Эти

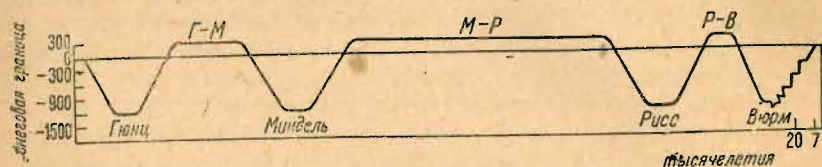


Рис. 14.

последние были обозначены как Вюрм I, Вюрм II и Вюрм III, причем последний носит иногда название „балтийского наступания“, или даже „балтийского ледникового периода“. Ледниковый период Гюнц, повидимому, не оставил заметных следов на севере.

В Англии Гейки установил также несколько ледниковых периодов а именно — шесть, которые, вероятно, можно отождествить с фазами оледенения: гюнцской, миндельской, рисской и вюрмской I, II и III.

В Скандинавии, близ очага оледенения, расчленение на ледниковые и межледниковые периоды весьма неясно, ввиду того, что эти страны составляли область выноса. Однако и здесь были найдены отложения, говорящие за существование хотя бы одного межледникового периода. Судя по этому, вероятно, в течение хотя бы одного из межледниковых периодов материковый лед в Скандинавии исчезал совершенно. Для Кольского полуострова и побережья Белого моря также было установлено существование межледникового периода. Можно предположить, что речь идет здесь, как и в Скандинавии, о длинном межледниковом периоде между миндельской и рисской фазами, в котором условия для полного исчезновения материкового льда были наиболее благоприятны. Многие указывают на то, что в течение этого долгого межледникового периода случались чрезвычайно жаркие лета.

В непокрытой льдом области Европы в четвертичном периоде образовались также отложения, представляющие непосредственный климатологический интерес и свидетельствующие о том, что число смен климатов в четвертичный период было гораздо значительнее, чем число ледниковых периодов, так как эти последние имели место при переходе определенных критических значений температуры. Между Альпами и краем северного ледника даже в эпоху наибольшего оледе-

нения оставалось пространство, свободное от льда, на котором встречались только местные ледники.

Европейские лёсы, барханы и серповидные дюны доказывают, что ледниковые периоды были относительно бедны осадками; последнее подтверждается также и весьма незначительными массами осадков в современных областях материкового льда. Поэтому старый взгляд, объяснявший ледниковые периоды главным образом увеличением осадков при слегка пониженной температуре, имеет в последнее время очень мало приверженцев. Причиной скопления снега, несмотря на его малое количество, был скорее холод, особенно в летнее время. Ввиду же того, что изменения в количестве получаемой Землей лучистой энергии (а вместе с тем и в температуре), как мы это увидим, зимой приблизительно противоположны летним, то для возникновения ледниковой эпохи решающим моментом оказалась комбинация холодных лет с относительно теплыми зимами. Межледниковые периоды, которым прежде приписывался сухой климат, в настоящее время считаются достаточно влажными для произрастания лесов.

Геологические отложения, свидетельствующие о периодических изменениях климата и об оледенениях во внеевропейских странах, весьма многочисленны. Однако мы здесь не будем останавливаться на относящихся сюда наблюдениях, ввиду того что к ним до сих пор астрономический метод не применялся.

Если мы захотим теперь приступить к выяснению связи между описанными колебаниями климата и вековым ходом облучения Земли, то для этого, как утверждает Кеппен, необходимо сперва ответить на два предварительных вопроса: 1) какой метеорологический элемент и 2) какое время года имеется главным образом в виду, когда идет речь об оледенении Европы и Северной Америки.

Из двух причин надвига ледников — большого количества снега и низкой температуры, особенно летней, — как мы уже говорили, долгое время наиболее действительной считалась первая. В настоящее же время можно привести ряд доказательств того, что по крайней мере в течение большей части каждого ледникового периода в Средней Европе существовали те же условия, как в настоящее время в Гренландии и Антарктике: низкая температура, которая не допускает таяния осадков, незначительных, но выпадающих только в твердом виде, и заставляет их скапливаться в виде ледниковых потоков. Совершенно таким же образом Пенк, в результате своих исследований и работ Брюкнера, ответил на первый вопрос применительно к Альпам следующими словами: „Ввиду того что в эпоху оледенения фирновые поля не были более обширными, чем теперь, мы не можем приписать развитие глетчеров ледникового периода увеличению количества осадков, но должны отнести его за счет уменьшения таяния, соответствующего уменьшению сумм положительных температур“. Так же определенно высказался в этом смысле Брюкнер, говоря, что причину депрессии снеговой линии следует искать не в увеличении количества осадков, но только в понижении температуры, особенно же в уменьшении сумм положительных температур, которые только одни способствуют таянию льда.

Подобные условия, как мы уже говорили, существуют в настоящее

время в Антарктике и Гренландии: в Антарктике, где количество осадков должно быть незначительным, так как в обширный антициклон, окружающий южный полюс, еще реже, чем в гренландский, могут проникать циклоны; в Гренландии, где также имеется северная граница материкового льда, определяемая уменьшением суммы осадков ниже того количества, которое успевает стаять даже за короткое полярное лето. Таким путем можно прийти к выводу, что оптимальные условия для образования материкового льда надо искать не на самом полюсе, но приблизительно под 75° широты.

Второй из поставленных предварительных вопросов уже частично затрагивался в вышеприведенных рассуждениях в том отношении, что фактором, вызывающим усиленное образование ледников, надо признать уменьшение сумм положительных температур. Правда, в современном климате Западной Европы годы с холодной зимой дают сами по себе значительное количество снега; но дело обстоит совершенно иначе там, где температура воздуха большую часть года ниже нуля и где дождь бывает только в виде исключения; здесь температура зимы либо не играет роли в образовании льда, либо как раз более теплые зимы, связанные с развитием циклонической деятельности, приносят больше снега.

Оледенению способствует отсутствие летнего тепла, а вовсе не холода наиболее сурового месяца или года. Что холодов самих по себе недостаточно, чтобы вызвать оледенение, яснее всего видно по Сибири, где мы находим наиболее низкие температуры, но не встречаем материкового льда. Часть Сибири, расположенная между 60 и 70° широты, лежит на одинаковой широте с Южной Гренландией, покрытой в настоящее время льдом, и имеет среднюю годовую температуру на 9° ниже последней. Несмотря на это, она не имеет ни ледяного покрова, ни даже отдельных ледников. Сибирское лето, однако, в среднем на 11° теплее лета Южной Гренландии. Отсюда видно, что решающую роль для оледенения играет лето. Поэтому в нашем исследовании мы должны обращать внимание главным образом на эпохи с холодным летом.

На основании изложенного была решена астрономическая часть проблемы ледниковых периодов, и сам Кеппен попытался, при помощи развитых в „Théorie mathématique“ методов, получить представление о вековом ходе солнечного облучения. Он вычислил, пользуясь приведенными там указаниями и примерами, вековые колебания количества радиации, получаемых широтой 65° в течение астрономического летнего полугодия. Добившись таким путем уже многообещающих результатов, он обратился к автору настоящей работы, чтобы получить от него математически точные данные о вековом ходе облучения Земли за последние 650 тысячелетий, обратив особое внимание на летнее полугодие.

Ввиду того что, как здесь уже подробно говорилось, длина астрономического летнего полугодия подвержена вековым изменениям, каждый рассматриваемый год разделялся на два одинаковых по продолжительности полугодия, из которых в летнее входили все те дни, в которые количество радиации, полученное рассматриваемой географической широтой, было больше, чем в какой-либо из дней другого полугодия.

Отсюда было вычислено количество радиации, полученное в течение такого летнего полугодия данной широтой. Это количество, как уже говорилось в первом разделе, достигает своих крайних значений в те моменты, когда долгота перигелия становится равной 90 или 270° . Для наглядности вычисленные изменения количества радиации были переведены в изменения широты, т. е. каждый раз вычислялась та широта, которая в настоящее время в течение летнего полугодия получает то же количество лучистой энергии, как и рассматриваемая широта в рассматриваемый год геологического прошлого. Таким путем был получен вековой ход количества лучистой энергии для широт $+55^\circ$, $+60^\circ$ и $+65^\circ$, представленный в виде таблицы и диаграммы.

Эта диаграмма, опубликованная в работе Кеппена-Вегенера, как мы увидим ниже, была использована и в других статьях. На диаграмме I (стр. 153) сверху еще раз воспроизведена эта диаграмма для географической широты 65° ; она восходит до 600-го тысячелетия до н. э. и приведена для того, чтобы с ее помощью пояснить сделанные выводы. Мы воздержимся от воспроизведения кривых, относящихся к широтам 55 и 60° , так как они почти совпадают с указанной кривой для 65° .

Хотя мы в настоящее время имеем возможность, основываясь на табл. 15, заменить упомянутую диаграмму более подробной, однако у нас есть основания перепечатать старую. Для изменений астрономических элементов e , ϵ и Π при ее составлении были использованы цифры Пильгрима, полученные им при помощи формул Стоквелла. Для составления табл. 15 были взяты изменения астрономических элементов, вычисленные Мишковичем на основании формул Леверрье. Следовательно, как мы уже говорили, в основу старых и новых расчетов количества лучистой энергии положены различные астрономические данные; поэтому сравнение прежних и новых результатов послужит контролем их правильности. Для того чтобы как можно нагляднее провести этот контроль, из табл. 15 были взяты только максимумы и минимумы, относящиеся к широте 65° , и отклонения количества лучистой энергии заменены эквивалентными изменениями широты в функции времени в том самом масштабе, как это было сделано на старой диаграмме. Таким образом получилась новая диаграмма, изображенная на диаграмме I (нижняя кривая).

Обе диаграммы, старая и новая, выглядят одинаково и обнаруживают один и тот же ритм в получаемой Землей лучистой энергии: одинаковое количество зубцов, расположенных на почти одинаковом расстоянии друг от друга. Различаются обе диаграммы только нижеследующими деталями: моменты максимума и минимума лучистой энергии на обеих диаграммах несколько расходятся (правда, очень мало) между собой, т. е. зубцы на той и на другой лежат на рисунке не всегда точно один под другим. Однако эта разница зависит большей частью от того, что при составлении первой диаграммы мы максимумы и минимумы радиации приблизительно отождествили с моментом, когда $\Pi = 90^\circ$ или $\Pi = 270^\circ$. Однако это не совсем так: изменчивость e и особенно ϵ немого смещает моменты экстремумов, что, впрочем, не имеет значения для геологических исследований. Второе различие касается величины зубцов, т. е. амплитуды колебаний количества

лучистой энергии. Эти вертикальные расхождения обеих диаграмм более значительны, чем горизонтальные; причина их кроется в том, что расчеты Леверрье и Стоквэлла исходят из различных значений планетных масс. Леверрье, например, принимал отношение массы Земли (с Луной) к солнечной массе, как 1:354 936, Стоквэлл, — как 1:368 689. В результате же проведенного в 1919 г. Баушигером для „Энциклопедии математических наук“ (том „Астрономия“) критического анализа существовавших по настоящее время определений планетных масс оказалось, что значения, из которых исходили как Леверрье, так и Стоквэлл, нельзя считать достаточно точными. Выше-

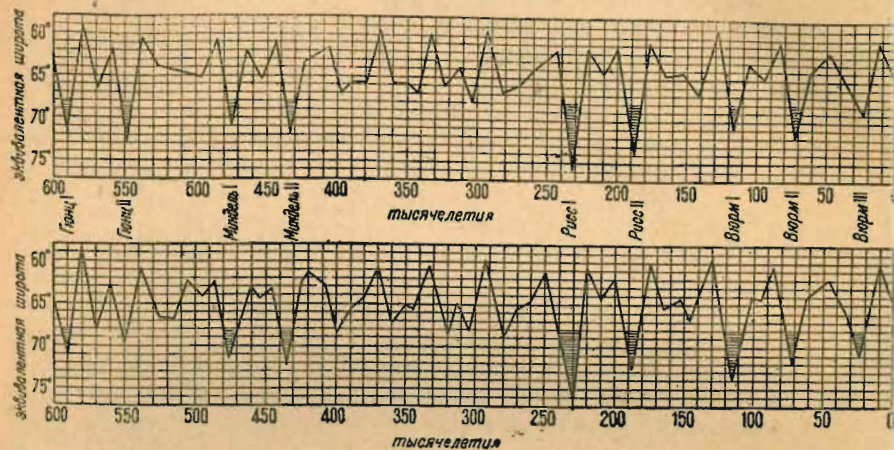


Диаграмма I. Амплитуды вековых отклонений летних сумм радиации под 65° северной широты, вычислены М. Миланковичем. Наверху — старая диаграмма, построенная по данным Стоквэлла; внизу — новая диаграмма, построенная по данным Леверрье.

приведенные цифры, если мы ограничимся взятым нами примером, нужно заменить отношением 1:329 350. При своем расчете вековых изменений астрономических элементов Мишкович произвел исправление принятых Леверрье величин планетных масс согласно данным Баушигера, тогда как Пильгрим, приняв не совсем точное отношение 1:335 172, внес исправления только в числовое определение эксцентриситета земной орбиты и долготы перигелия в отношении точки весеннего равноденствия 1850 г. н. э. Остальных принятых Стоквэллом значений планетных масс и его выражений для общей прецессии и наклона эклиптики Пильгрим не коснулся. Кроме того, как мы уже говорили, расчеты Пильгрима страдают далеко идущими интерполяциями и другими более мелкими неточностями, которые отразились как раз на весьма важном зубце нашей кривой, относящемся к 22,3-му тысячелетию.

Вышеприведенными причинами, повидимому, объясняются все расхождения обеих диаграмм; поэтому, сравнивая их, можно сделать следующие выводы. Ни тот, ни другой метод вычислений астрономи-

ческих элементов не страдает грубыми ошибками, могущими исказить расчеты облучения Земли; однако исправленные Мишковичем уравнения Леверрье гарантируют большую степень точности, т. е. высшую ступень приближения, необходимую при подобных расчетах возмущений. В расчетах Пильгрима имеется систематическая ошибка, происходящая от того, что исправленная величина массы Земли принята была только при расчете эксцентриситета земной орбиты и долготы перигелия, но не наклона эклиптики. Это обстоятельство, однако, становится ощутительным лишь в отношении чрезвычайно отдаленных времен, и им-то и объясняются более значительные отклонения обеих кривых

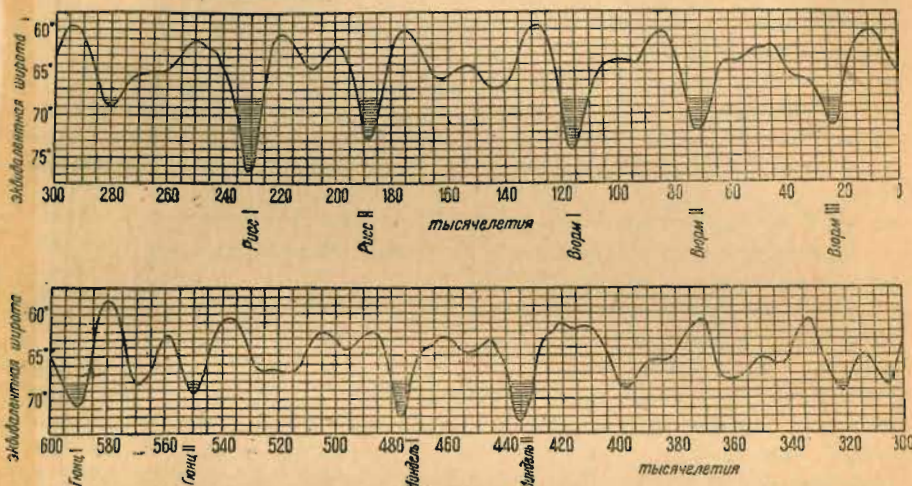


Диаграмма II. Вековой ход летних сумм радиации под 65° северной широты, вычислено М. Миланковичем.

между 500-м и 600-м тысячелетиями. Несмотря на все это, уже первая диаграмма облучения совершенно ясно показала характерные черты векового хода, так что оказалось возможным сделать отсюда основные климатологические выводы. И все-таки новое вычисление вековых изменений астрономических элементов, значительно задержавшее окончание настоящей работы, оказалось необходимым уже для того, чтобы рассеять возникавшие иногда сомнения в применимости вышеприведенных расчетов к таким длинным интервалам времени.

После того как вышеуказанное сравнение старой и новой диаграмм оказалось в пользу последней, новая диаграмма должна послужить основанием изложенных далее выводов.

Если нанести на график цифры табл. 15, относящиеся к 65° северной широты, то вместо зубчатой мы получим непрерывную волнистую линию, наглядно демонстрирующую все детали векового хода облучения 65-й параллели. Эта волнистая линия (на которой минимум 72-го тысячелетия должен быть обозначен как второе наступление вюрмской фазы) изображена на диаграмме II в масштабе времени, вдвое больше, чем масштаб предыдущей диаграммы.

Кеппен сделал из предоставленной ему диаграммы следующие основные выводы. Если рассматривать изображенную выше диаграмму I и выделить путем заштриховки те ее части, где зубцы линии заходят за 68° , то мы встретим четыре пары состоящих из многих тысячелетий групп холодных лет, которые, судя по разделяющим их промежуткам времени, приблизительно соответствуют вюрмской, рисской, гюнцской и миндельской фазам по расчетам Пенка и Брюкнера. Вероятность этой связи особенно усугубляется большим расстоянием между второй и третьей парами, соответствующим „великому межледниковому периоду“. Далее Кеппен ставит вопрос, может ли такая пара интервалов времени, отличающихся особенно холодными годами и отделенных друг от друга промежутком времени с более теплыми годами, считаться единым „ледниковым периодом“.

Этот специальный вопрос мы подробно разберем только в следующем параграфе, так как эта проблема требует более глубокого изучения физической связи между облучением и температурным состоянием земной поверхности. При этом мы ознакомимся и с аргументами Кеппена, который с замечательной прозорливостью также ответил на этот вопрос утвердительно.

Предварительно же отметим следующее. Физические теории, изложенные в предыдущем разделе II и проверенные на климате нашей эпохи, дают возможность вывести вековой ход температуры из векового хода облучения. При этом оказывается, что пока дело не доходит до образования материкового льда, вековые колебания температуры пропорциональны колебаниям количества радиации, и мы получаем вековую температурную кривую, умножая помещенные в табл. 15 цифры на фактор пропорциональности, который будет вычислен в следующем параграфе. Таким образом в межледниковые периоды вековая температурная кривая имеет одинаковую форму с кривой облучения, прямо выраженной цифрами табл. 15, т. е. не переведенной в колебания широты.

В ледниковые периоды дело обстоит иначе. Для того чтобы сделать это понятным, мы должны разделить рассматриваемые нами области следующим образом: а) на области, которые лежат вне материкового льда, б) на области, составляющие собственно ядро оледенения, и в) на пограничные области, переходные между первыми и вторыми, в которых находятся языки ледников с их конечными моренами. В областях, не покрытых льдом даже и в течение ледникового периода (учитывая в качестве климатического фактора только облучение), все остается в том же виде, как это было в межледниковом периоде, т. е. здесь вековая температурная кривая идет параллельно кривой облучения. В остальных двух категориях областей форма температурной кривой отличается от формы кривой облучения: минимумы температурной кривой углубляются, а в областях с материковым льдом при этом подъем между двумя соседними минимумами сглаживается или иногда исчезает вовсе. Таким образом фактически может случиться, что два отдельных интервала времени с холодными годами производят впечатление сплошного ледникового периода.

Этот вывод, который будет обоснован в дальнейшем, мы хотим

использовать для того, чтобы установить хронологию ледниковых периодов, принимая каждую из упомянутых пар зубцов за один ледниковый период. При этом мы уже воспользуемся точной диаграммой II, на которой зубчатая линия заменена волнистой. Если отделить здесь путем заштриховки гребни волн, заходящие за 68° параллель, то мы увидим, что каждый из трех первых ледниковых периодов состоит из двух, а последний из трех заходящих за 68° гребней волн, которые мы по вышеизложенным причинам объединим в один ледниковый период. Таким образом у нас получится график, изображенный на рис. 15.

Если сравнить полученную таким путем диаграмму с диаграммой Пенка и Брюкнера, помещенной на рис. 14, то сходство форм обеих кривых бросается сразу в глаза. По Пенку и Брюкнеру промежуток времени, протекший с последнего ледникового периода, составляет 20 тысячелетий в полном согласии с нашей вышеприведенной диаграммой; Пенк и

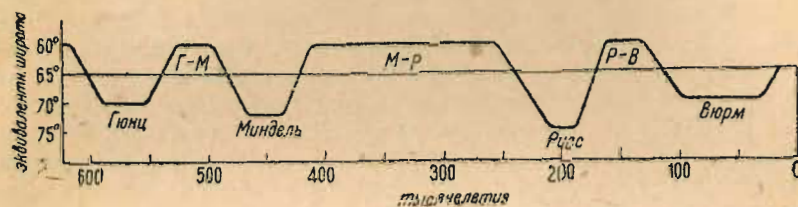


Рис. 15.

Брюкнер считают продолжительность межледникового периода между предпоследним и последним оледенениями в 60 тысячелетий. По нашей вышеупомянутой диаграмме этот межледниковый период имел место между 121-м и 183-м тысячелетиями и, следовательно, равнялся 62 000 лет. Пенк и Брюкнер оценивают продолжительность предшествующего большого межледникового периода круглым счетом в 240 000 лет. Согласно нашей диаграмме этот период продолжался с 430-го по 237-е тысячелетие и, таким образом, равнялся 193 000 лет. Длительность межледникового периода между двумя первыми оледенениями не дается определенно Пенком и Брюкнером. Судя по их диаграмме, они, повидимому, считали ее приблизительно в 100 тысячелетий. Согласно нашей диаграмме этот период тянулся между 547-м и 480-м тысячелетиями и, следовательно, равнялся 67 000 лет.

Подобное соответствие, выступившее ясно еще и на старой диаграмме, дало Кеппену повод совершенно определенно утверждать, что в графическом изображении кривой количества радиации точно отражены четыре европейских ледниковых периода.

На самом деле не может быть простой случайностью, что два столь глубоко различных метода, как астрономический расчет и основанные на эрозии речного щебня данные, могли давать столь совпадающие результаты. Констатируя это совпадение, нельзя не восхищаться тем, как Пенку и Брюкнеру удалось определить продолжительность двух последних, свободных от льда периодов с точностью почти до тысячелетия.

Благодаря столь важным данным, полученным Кеппеном, математическая теория автора стала на твердую почву и была признана практически применимой. Таким образом методы изучения истории Земли пополнились новым надежным орудием. Здесь мы кратко изложим то, что удалось сделать с помощью этих методов за относительно короткий срок, протекший с момента появления работы Кеппена-Вегенера.

Уже Кеппен смог подкрепить с помощью новейших геологических данных тройное подразделение вюрмской фазы, вытекающее из кривой облучения Земли. Здесь необходимо заметить следующее. На старой диаграмме это тройное подразделение, хотя и выступает достаточно ясно, однако последнее наступление выражено более слабо, чем на новой, более точной. Правда, это последнее надвижение ледников и по новейшим расчетам слабее обеих предыдущих вюрмских фаз (I и II), однако оно совершенно несомненно относится к явлениям собственно ледниковых периодов.

Последний максимум летнего облучения Земли был отождествлен Кеппеном с установленным геологически „климатическим оптимумом“, — эпохой, когда дуб и орешник передвинулись за свои теперешние границы на север и в более высокие области.

Соответствие между математически вычисленной кривой радиации и главными фазами европейского ледникового периода, однако, становится еще гораздо более полным, если принять во внимание так называемые пограничные области. Здесь, как уже упоминалось, в межледниковые периоды вековой ход температуры был параллелен вековому ходу облучения, а в ледниковые периоды отдельные минимумы температуры усиливались по сравнению с минимумами облучения. Как раз это-то и отражено на нашей диаграмме II. При вычерчивании этой кривой, вследствие перевода колебаний облучения в фактивные колебания широты, минимумы облучения оказались выраженными яснее, так как в полярных областях, в более высоких широтах, при том же колебании количества радиации получается большее колебание широты. Поэтому такая кривая радиации имеет форму, аналогичную форме температурной кривой пограничных областей, хотя бы эти последние лежали под более низкой географической широтой. Благодаря этому обстоятельству нанесенные на старую диаграмму кривые радиации оказались особенно удобными для изучения колебаний климата пограничных областей.

Впервые подобное исследование, и притом весьма детальное, было проведено В. Зергелем (Soergel). Он посвятил этому вопросу монографию „Подразделения и абсолютное летоисчисление ледниковой эпохи“ (Берлин 1925), а также ряд статей. Исходя из положения, что наиболее ясное представление о всех фазах ледниковой эпохи можно составить себе, изучая обширную область великого европейского обледенения, он еще до составления своей монографии и до опубликования работы Кеппена-Вегенера попытался проследить все этапы ледникового периода в пограничной области северогерманского обледенения в Тюрингии. В этой пограничной области в силу главным образом климатических условий образовались вполне определенные

ледниковые или межледниковые отложения, которые позволяют судить об оледенении этой области.

В качестве нового фактора сюда присоединяются щебневые террасы, в вполне развитом виде характерные для околледниковых областей, и особенно разнообразный лёсс, наличие которого можно считать доказательством повторного господства холодного сухого климата. Наконец, климатические колебания в околледниковой области оказали существенное влияние на деятельность рек, эрозию и на аккумуляцию. Зависимость этих явлений от климата должна, как на это указывал также и Зигерт, проявляться особенно ярко в верхнем течении их, главным образом в верховьях крупных германских речных систем. Здесь в деятельности рек должны были до известной степени запечатлеться все более крупные климатические колебания. Преимущества околледниковых областей для стратиграфического исследования побудили Зергеля провести в верхней части системы Эльбы полную классификацию, опирающуюся прежде всего на точное подразделение террас в области рр. Ильма и Зааля и на связь между щебневыми отложениями террас, ледниковыми образованиями и различным лёссом. Для сравнения были взяты области рр. Геры и Унструта. Кроме того, подобная классификация была предпринята также и в одной из самостоятельных речных систем, а именно р. Везера, о дилювиальных террасах которого Зигерт опубликовал подробное исследование. Это дало возможность провести самую тщательную параллель между террасами рр. Ильма—Зааля и террасами рр. Верра—Везера, так что новая классификация смогла базироваться на данных двух самостоятельных речных систем.

Геологическое подразделение ледниковой эпохи, проведенное Зергелем незадолго до появления работы Кеппена-Вегенера, а следовательно, до его знакомства с кривой радиации, насчитывает во всей ледниковой эпохе 11 холодных и 11 умеренных периодов. Такое подразделение ясно отражено в дилювиальных террасах области рр. Ильма—Зааля. Эти террасы Зергель обозначает в порядке перехода от самого отдаленного прошлого к современности следующим образом: древнедилювиальные террасы IV, III, II, I, средне- и новодилювиальные террасы 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, из которых последняя, правда, в Тюрингии отсутствует. Возникает вопрос, как эти террасы должны располагаться на кривой, изображающей ход радиации. Старая диаграмма, так же как и новая, показывает, особенно после исправления вычислительной ошибки Пильгрима, девять больших подъемов; эти подъемы соответствуют следующим тысячелетиям до 1800 г. н. э.:

590,3 548,6 475,6 435 232,4 187,5 116,1 71,9 22,1

Совершенно ясно, что девять из упомянутых террас должны быть отнесены к этим тысячелетиям. Зергель считает связь террас IV, III, II, I, 2, 3, 5, 6, 7 с этими периодами несомненной. Таким образом прежде всего оказывается установленным двойное и тройное подразделение четырех больших ледниковых периодов. Следовательно, можно считать несомненным, что девять наиболее значительных колебаний облучения Земли нашли свое отражение в климатической картине

геологического прошлого. Этим подтвердилось значение составленного автором графика хода радиации, и не только была вскрыта сущность больших климатических колебаний отдаленного прошлого, но и удалось установить на астрономической основе надежную хронологию ледниковой эпохи.

Впрочем, и более мелкие колебания облучения не остались без влияния на земной климат, и это обстоятельство порой затрудняет определение связи между геологическими отложениями и вычисленной кривой облучения. В данном случае имеются две излишних террасы, которые усложняют согласование остальных террас с графиком радиации. Их существование доказывает, что в климате отдаленного прошлого рассматриваемой приледниковой области отразились также и вторичные максимумы векового хода облучения; поэтому мы должны наряду с девятью несомненными главными минимумами облучения принимать во внимание также и минимумы вторичные. На графике, на диаграмме II, имеется несколько таких минимумов почти одинаковой глубины. Ту или иную террасу можно отнести к тому или иному из этих второстепенных минимумов и, таким образом, получить различные схемы ледникового периода. Поэтому не приходится удивляться, что классификация Зергеля вызвала некоторые возражения и что Граманн в чрезвычайно интересной статье¹⁾ передвинул зергелевское распределение террас согласно диаграмме радиации, начиная с середины, на одну ступень в сторону современности. В то время как Зергель одну из избыточных террас (обозначенную 1) относит к второстепенному минимуму 305-го тысячелетия и другую (обозначенную 4) к второстепенному минимуму 140-го тысячелетия до н. э. и дает этим периодам названия предрисского (Prae-Riss) и предвюрмского (Prae-Würm), Граманн оставляет первый из указанных минимумов без определенного места, вследствие чего и получается данная передвижка на одну ступень.

Так как мы не в состоянии решить, которому из двух вышеприведенных толкований нужно отдать предпочтение, мы дадим здесь только табличку, указывающую хронологию и интенсивность главных, а также наиболее важных вторичных минимумов хода облучения, получающихся из табл. 15 на основании наиболее новых и точных вычислений; они вычислены для широты 50°, которая является наиболее характерной для рассматриваемой геологической области.

Нижеприведенная небольшая сводка, где цифры, относящиеся к главным минимумам, напечатанные жирным шрифтом, показывает, что минимум предвюрмского периода выражен не резко и что довольно значительный минимум предрисского периода сопровождался двумя близлежащими минимумами почти одинаковой интенсивности. Между фазами гюнцской I и гюнцской II мы находим резко выраженный минимум, который для 50° широты оказывается даже интенсивнее, чем минимум фазы гюнцской II.

¹⁾ Grahmann, Über die Ausdehnung der Vereisungen Norddeutschlands und ihre Einordnung in die Strahlungskurve. Berichte der math.-phys. Klasse der sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig; Bd. LXXX, 1928.

Минимумы лучистой энергии	Моменты тысяче- летий перед 1800 г. до н. э.	590,3	569,4	548,6	475,6	435,0	323,5	305,0
	Интен- сивности	-418	-402	-356	-468	-352	-247	-249
	Обозна- чение	Гюнц I		Гюнц II	Миндель I	Миндель II		Пред-Рисс
продолжение								
Минимумы лучистой энергии	Моменты тысяче- летий перед 1800 г. до н. э.	281,8	232,4	187,5	140,0	116,1	71,9	22,1
	Интен- сивности	-244	-507	-508	-151	-493	-384	-276
	Обозна- чение		Рисс I	Рисс II	Пред-Вюрм	Вюрм I	Вюрм II	Вюрм III

В упомянутой статье Граманн исследовал и выяснил еще один чрезвычайно важный вопрос. Дело в том, что де-Геер и его ученики разработали метод абсолютного летоисчисления, совершенно отличный от изложенного астрономического и состоящий в счете ежегодных слоев, отлагавшихся год за годом в последледниковую эпоху и названных "варвами". Этот метод, который, правда, может быть применен только к последледниковой эпохе, при благоприятных условиях, там, где не прервана последовательность этих ежегодных отложений, или же в случае, если она может быть восстановлена, дает возможность получить надежные данные о возрасте этих пластов. Первые данные, полученные таким образом, оказалось трудно согласовать с кривой радиации, так как они, по видимому, указывали на меньшую длительность последледниковых периодов. В настоящее же время разработка шведской шкалы времени, сделанная уже после выхода первой работы де-Геера, установила значительно большую продолжительность этих периодов, чем думали раньше, так что, как об этом подробно говорит Граманн, по видимому, соответствие с кривой радиации может быть установлено.

Приводимый здесь точный расчет векового хода радиации также не противоречит данным де-Геера. Мы имеем, например, период более интенсивного наступания ледников в балтийском районе, чем это следовало из старой диаграммы. Кроме того, в дальнейшем мы покажем,

что совершенно так же, как между суточными ходами или годовым ходом облучения и ходом температуры, имеется всегда определенный сдвиг фаз, о чем подробно говорилось в предыдущем разделе; такая же разница фаз должна была бы иметь место и между вековым ходом облучения и вековым ходом температуры и еще более между вековым ходом облучения и оледенениями.

Скопления снега и льда ледниковой эпохи при их таянии поглощают значительную часть падающего на них солнечного тепла и тем самым вызывают удлинение ледниковых периодов, которые в областях материкового льда имеют большую продолжительность, чем описанные периоды с более холодными летами. Вследствие этого концы ледниковых периодов сдвигаются в сторону современности.

Живой интерес, с которым исследователи встретили астрономическую теорию климатических колебаний, и крупные успехи, которых они достигли, изучая кривые радиации, особенно ярко отразились в книге Эберля „Последовательность ледниковых периодов в северных предгорьях Альп“ (Аугсбург 1930). История возникновения этой работы настолько тесно связана с вышеизложенной теорией, что об этом необходимо сказать здесь несколько слов.

Предметом исследования Эберля является ландшафт северных предгорий Альп в ледниковую эпоху, и именно область между рр. Лех и Иллер, названная Пенком „плато Лех-Иллер“. Между ледником прирейнской области, к западу от р. Иллера, — ледником, который в своем мощном развитии к северу от Боденского озера простер дугу своих древних морен вплоть до Дуная, и ледником области, примыкающей к озеру Аммер, который к востоку от р. Лех достигает своими массами линии Аугсбург — Мюнхен, находятся языки двух меньших ледников, лехского и иллерского, достаточно мощных, чтобы дать возможность по ним проследить все фазы наступления ледников, но все-таки не столь мощных, чтобы разрушать и засыпать свои собственные отложения, как это обычно имело место в областях с особенно грандиозным развитием вытекающих из Альп ледяных потоков.

В этой области, классической для изучения ледниковой эпохи, в которой Пенк и почерпнул значительную часть данных для своей работы о ледниковой эпохе в Альпах и альпийских предгорьях, последовательность ледниковых отложений не только вполне развита, но и великолепно сохранилась. После многолетнего изучения этой области Эберлю, действительно, удалось распознать и изучить все фазы альпийского оледенения столь исчерпывающим образом, что едва ли в другом месте можно было бы добиться таких результатов. Прежде всего из распределения морен и щебня обнаружилось, что установленные Пенком ледниковые периоды Гюнц, Миндель и Рисс — двойные, тогда как в вюрмский ледниковый период проявились три главных фазы наступания. Между миндельскими и рисскими отложениями находился особенно мощный слой наносов. На основании геологического материала оказалось возможным провести также качественное сравнение отдельных наступаний, которое показало, что наиболее интенсивным в рисских отложениях было первое наступание, а в вюрмских фазах — второе.

О всех этих результатах Эберль имел возможность доложить Мюнхенскому геологическому обществу еще 29 января 1924 г., т. е. до выхода работы Кеппена-Вегенера.

За год до этого, 12 января 1923 г., Кеппен получил составленный автором график хода радиации (см. выше, диаграмма I), который он в октябре 1924 г. издал, объясняя зубцы графика как отдельные фазы ледниковых периодов Пенка. На этой диаграмме гюнцский, миндельский и рисский ледниковые периоды также имеют двойные фазы, тогда как в вюрмском ледниковом периоде намечалась еще и третья, которая в результате позднейших вычислений оказалась столь же важной, как и остальные. Здесь также можно было установить наиболее продолжительный межледниковый период между миндельским и рисским ледниковыми периодами и также здесь первый рисский подъем резче двух соседних. Это изумительное совпадение результатов двух исследований ледниковой эпохи, не зависящих друг от друга и полученных совершенно разными путями, во всяком случае имеет выдающееся научное значение, которое удалось значительно увеличить последующими изысканиями.

Дело в том, что когда Эберль ознакомился с упомянутым графиком хода радиации и с вполне понятным изумлением увидел поразительное совпадение результатов этого графика с результатами его собственных исследований, он смог поставить перед астрономической теорией колебаний ряд дальнейших интересных задач. Пользуясь посредничеством Кеппена, Эберль сообщил автору, что в исследуемой им области он натолкнулся на старую щебневую осыпь, изучение которой обнаружило, что она благодаря своему уровню и своей далеко зашедшей стадии выветривания должна считаться еще одной щебневой осыпью, которая и по времени должна была бы быть помещена перед гюнцской стадией. Такую же щебневую осыпь он наблюдал в другом месте и в том же отношении к гюнцскому щебню, т. е. она также должна была считаться более старой, чем щебень. В этом слое щебня он смог различить в то время два ясно разделенных горизонта. Далее Эберль сообщает, что на самой вершине Штауфенберга он обнаружил другую осыпь из щебня, еще более выветрившегося, которому он приписывает еще более древнее происхождение. Вопрос, нельзя ли включить также и этих свидетелей исчезнувших климатов в астрономическую кривую лучистой энергии, заставляет его просить продолжить диаграмму лучистой энергии и за 650-е тысячелетие.

В ответ на это автором был составлен график хода радиации, изображенный на прилагаемом рис. 16. При вычислениях оказалось, что при дальнейшем продвижении в глубь веков, за пределы гюнцского периода, кривые радиации изменяют свой вид. Вместо двойных зубцов, характерных для гюнцского, миндельского и рисского ледниковых периодов, получились прежде всего три соседних зубца, отделенных ясно выраженным межледниковым периодом от гюнцского ледникового периода, и затем два изолированных зубца, расположенных далеко друг от друга. Хотя степень точности вычислений столь отдаленных времен соответственно меньше, ненадежность результатов этих расчетов могла бы отразиться только на высоте зубцов. В дальнейшем

имеется возможность, применяя разложения в ряды с большим числом членов, более точно определить величины отдельных зубцов.

Исследования Эберля показали и в отношении этой столь отдаленной эпохи необычайно удовлетворительное соответствие результатов математических вычислений с геологическими данными, как это видно из помещаемого рис. 17, воспроизводящего составленную Эберлем

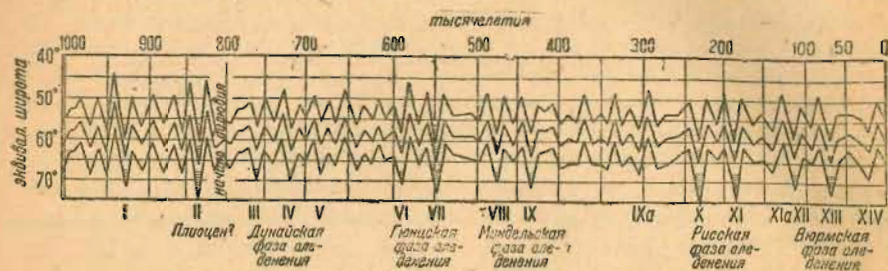


Рис. 16. Диаграмма инсоляции по Миланковичу

стратиграфическую диаграмму. На ней абсциссы, т. е. промежутки времени между теми или иными отложениями, выражены в относительных геологических единицах и воспроизводят ритм климатических колебаний, одинаковый с ритмом графика радиации. Различаемые на диаграмме радиации непосредственно перед гюнцским периодом три зубца соответствуют трем дунайским стадиям, которые Эберль помещает в качестве еще более древнего звена перед ледниковыми периодами Пенка; начало дилювиальной ледниковой эпохи он переносит за это звено. Предшествующие изолированные зубцы графика лучистой энергии

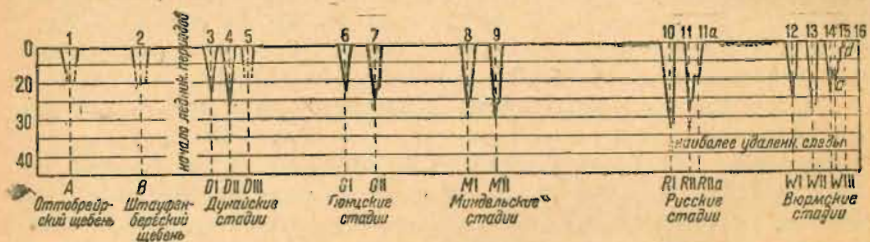


Рис. 17. Стратиграфическая диаграмма Эберля

соответствуют давно искомому плиоценовому щебню альпийских предгорий, который Эберль обнаружил в щебне Штауфенберга (Гессен), а также Оттобейра (Бавария).

Составленная Эберлем диаграмма приобретает, однако, особо важное значение для астрономической теории климатических колебаний, если принять во внимание, что на ней в качестве ординат нанесены расстояния, на которые выдается ледниковый язык по отношению к области питания.

Положение этой ледяной кромки совершенно точно установлено с помощью масс конечных морен, вынесенных ледником в предгорья.

На диаграмме нанесены положения концов ледников, средние по всей области. Для наиболее древних отложений зубцы не приведены, так как их моренные массы не сохранились. Ординаты этих нанесенных на диаграмму зубцов представляют собой чисто геометрические величины, значения которых совершенно не зависят от субъективных моментов. Если, кроме того, принять во внимание, что эти геометрические отрезки имеют порядок величины от 25 до 50 км, то станет ясно, что они могли быть вычислены с достаточной точностью и не зависят ни от каких случайностей. Благодаря этому диаграмма Эберля воспроизводит соотношение величин отдельных наступаний ледников с достаточной точностью. Если соответствие диаграммы Эберля со старым графиком радиации было вполне удовлетворительным, то это сходство становится полным, если взять для сравнения новейший, более детальный график лучистой энергии (диаграмму I, внизу). По Эберлю наступания миндельского ледникового периода были сильнее, чем наступания гюнцского периода, а наступания рисского ледникового периода более мощны, чем миндельского, тогда как в вюрмском ледниковом периоде интенсивность их уменьшилась. То же соотношение остается в силе и в новом графике радиации. Согласно Эберлю второе миндельское наступание было сильнее первого; первое рисское наступание мощнее второго. То же самое следует и из графика радиации. Тот факт, что второе наступание гюнцского периода и второе наступание вюрмского должны были оказаться выраженными более резко, чем предшествующие им, вытекает из приводимого ниже анализа. Мы знаем, что между нанесенными на диаграмме Эберля данными, полученными в результате геометрических измерений местности, и добытыми астрономическим путем данными графика радиации существует полное соответствие. Диаграммой Эберля окончательно замыкается круг доказательств того, что вековой ход облучения Земли является причиной всех, более значительных климатических изменений четвертичного периода.

§ 41. **Ход температуры, соответствующий вековому ходу облучения Земли.** Изложенные выше далеко идущие выводы сделаны на основании графиков хода облучения Земли, составленных автором для работы Кеппена-Вегенера и Эберля. Эти графики относились к вековым изменениям летнего количества лучистой энергии на 55, 60 и 65° северной широты. Небесполезным будет пополнить полученную, таким образом, картину путем изучения и других географических широт, а также наряду с летней лучистой энергией учесть и зимнюю. Все данные, необходимые для этого, уже имеются в табл. 15. До настоящего времени мы не дали такого полного изображения векового хода облучения Земли ввиду того, что между ним и соответствующим ему ходом температуры, к которому мы теперь переходим, существует столь тесная связь, что гораздо удобнее изучать оба явления вместе.

Выводы раздела II дают возможность вычислить по вековому ходу облучения Земли соответствующий ход температуры. Весьма существенно еще раз дать себе отчет в том, что под этим подразумевается. Развитая в разделе II теория предполагает вполне ровную земную поверхность и неподвижную атмосферу. В силу того что в дальнейшем будет рассматриваться только климат суши, выведенная на основании этой

теории температура нижнего слоя воздуха будет обозначать температуру на уровне средней высоты суши, т. е. на высоте около 100 м над уровнем моря. Ради упрощения, не делая заметной ошибки, эту температуру можно отождествить с температурой на уровне моря. Поэтому под вековым ходом температуры надо понимать те колебания ее, которые явились бы следствиями изменений облучения Земли на уровне моря и при неподвижной атмосфере. Влияние рельефа земной поверхности и его изменения в результате скопления льда в ледниковые периоды будут рассматриваться только в последующих параграфах.

Для того чтобы теоретически обосновать определенный таким образом вековой ход температуры, рассмотрим произвольно выбранное место земной поверхности под широтой φ и выберем некоторый год t геологического прошлого. Пусть за этот год или за точно ограниченный интервал времени этого года, который мы кратко назовем „время года“, на границу атмосферы над рассматриваемым местом попадет в среднем на единицу поверхности (1 см^2) и в единицу времени (1 мин.) количество радиации W . Пусть интервалу года такой же продолжительности, одинаково расположенному на годовой температурной кривой, в наше время будет соответствовать иное количество радиации W_0 .

Тогда разность

$$\Delta W = W - W_0 \quad (1)$$

будет называться вековым колебанием радиации, соответствующим рассматриваемому времени года.

Если теперь перейти к вычислению соответствующего колебания температуры, то можно не учитывать способность почвы и атмосферы накапливать теплоту, так как здесь речь идет о вычислении разницы температуры. Вместо теплового обмена между почвой и атмосферой, который, как это показано в разделе II, вызывает запаздывание температурных экстремумов в дневном и годовом годах, в вековом ходе температуры обнаружится аналогичное явление, причина которого кроется в скоплениях материкового льда. Это явление будет рассмотрено в следующем параграфе.

Пусть в году t геологического прошлого средняя температура нижнего слоя воздуха, соответствующая рассматриваемому времени года, будет ϑ , т. е. абсолютная температура

$$\Theta = 273 + \vartheta. \quad (2)$$

Эту температуру можно вычислить из соответствующего количества радиации W способом, указанным в § 25, так как, если пренебречь влиянием годового оборота тепла в атмосфере, температура окажется пропорциональной количеству радиации в соответствующий период. При этом можно пользоваться формулой (91) раздела II, которая, хотя и не принимает во внимание поглощения солнечной радиации в атмосфере, достаточно ясно учитывает все потери радиации на отражение в атмосфере и у земной поверхности с помощью альбедо (коэффициента отражения). Эта формула была с успехом применена в § 27, и эта же предпосылка послужила основанием в рассуждениях § 33, 34 и 35, так как в ней правильно учтена роль температурного излу-

чения земной поверхности и атмосферы. Таким образом если M означает массу находящегося над единицей поверхности столба атмосферы, k — коэффициент поглощения для теплового излучения в атмосфере и σ — постоянную Стефана-Больцмана, то соотношение между количеством получаемой радиации W и температурой Θ примет вид:

$$\sigma \Theta^4 = \frac{1}{2} (1 - A) (1 + kM) W. \quad (3)$$

Соответствующие современным значения величин ϑ , Θ , A и k мы обозначим ϑ_0 , Θ_0 , A_0 и k_0 . Поэтому

$$\Theta_0 = 273 + \vartheta_0, \quad (4)$$

$$\sigma \Theta_0^4 = \frac{1}{2} (1 - A_0) (1 + k_0 M) W_0. \quad (5)$$

Масса атмосферы M оставлена в (5) без изменения, так как нет никаких данных предполагать, что в течение рассматриваемого здесь периода эта величина могла измениться. Разница величины A для современности и прошлого зависит, как будет подробнее указано ниже, от изменения отражательной способности земной поверхности, покрытой в прошедшие времена ледяным покровом. Изменение величины k может вызываться увеличением или уменьшением содержания водяного пара или углекислоты в атмосфере. На возможности подобных изменений де-Марки и Аррениус построили свои гипотезы ледниковых периодов, подробно изложенные в „Théorie mathématique“. Так как нам нет надобности прибегать к помощи подобных гипотез, то, поскольку речь идет о средних величинах, будем считать, что

$$k = k_0. \quad (6)$$

Это вовсе не значит, что исключена возможность местных изменений коэффициента поглощения.

Мы получим тогда из предыдущих уравнений

$$\left(\frac{\Theta}{\Theta_0}\right)^4 = \frac{1 - A}{1 - A_0} \frac{W}{W_0}, \quad (7)$$

$$\sigma (\Theta^4 - \Theta_0^4) = \frac{1}{2} (1 + k_0 M) [(1 - A) W - (1 - A_0) W_0]. \quad (8)$$

Согласно (2) и (4) получится:

$$\Theta^4 - \Theta_0^4 = 273^4 \left[\left(1 + \frac{\vartheta}{273}\right)^4 - \left(1 + \frac{\vartheta_0}{273}\right)^4 \right].$$

Принимая во внимание, что $\frac{\vartheta}{273}$ и $\frac{\vartheta_0}{273}$ малы, так что их более высокие степени могут быть отброшены, и применяя формулу бинома, имеем

$$\Theta^4 - \Theta_0^4 = 4 \cdot 273^3 (\vartheta - \vartheta_0).$$

Разность $(\vartheta - \vartheta_0)$ представляет собой вековое колебание температуры, которое можно обозначить через $\Delta\vartheta$:

$$\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_0, \quad (9)$$

оно будет равно

$$\Delta\theta = \frac{1 - k_0 M}{8\sigma 273^3} [(1 - A) W - (1 - A_0) W_0]. \quad (10)$$

Если ограничиться пока рассмотрением таких областей земной поверхности, которые в геологическом прошлом не были погребены под материковым льдом, или если применить вышеизложенные соображения к межледниковым периодам областей, некогда подвергавшихся оледенению, то можно просто принять:

$$A = A_0,$$

и в таком случае вместо (10) мы получим

$$\Delta\theta = (1 - A_0) \frac{1 + k_0 M}{8\sigma 273^3} \Delta W. \quad (11)$$

Величина

$$n = (1 - A_0) \frac{1 + k_0 M}{8\sigma 273^3} \quad (12)$$

представляет собой постоянный коэффициент, который мы будем обозначать через n , так что окажется, что

$$\Delta\theta = n \Delta W. \quad (13)$$

В областях, не подвергшихся оледенению, вековое колебание температуры пропорционально вековому колебанию количества радиации.

Постоянную n можно вычислить при помощи данных, приведенных в § 34, т. е. считая $A_0 = 0,40$; $k_0 = 0,00245$; $M = 1033,3$; $\sigma = 0,76 \cdot 10^{10}$ (все в системе сантиметр-грамм-минута), и, таким образом, мы получим приближенно

$$n = 170. \quad (14)$$

Эта, полученная теоретическим путем, величина n , которая в качестве средней будет действительна для всех широт, может быть заменена эмпирической, учитывающей местные особенности рассматриваемой области. Дело в том, что предыдущие уравнения дают

$$\left(\frac{\theta_0 + \Delta\theta}{\theta_0}\right)^4 = \frac{W_0 + \Delta W}{W_0},$$

т. е.

$$\left(1 + \frac{\Delta\theta}{\theta_0}\right)^4 = 1 + \frac{\Delta W}{W_0},$$

или, если отбросить более высокие степени малого числа $\frac{\Delta\theta}{\theta_0}$:

$$\Delta\theta = \frac{1}{4} \frac{\theta_0}{W_0} \Delta W.$$

Если теперь положить

$$n = \frac{1}{4} \frac{\theta_0}{W_0}, \quad (15)$$

то снова получится уравнение (13), а значение n может быть вычислено при помощи наблюдаемого в настоящее время значения температуры θ_0 .

Для того чтобы использовать вышеприведенные уравнения для вычисления вековых колебаний средней температуры летнего или зимнего полугодия, нужно принять во внимание следующее. В формуле (13) для ΔW нужно подставить вычисленное для единицы времени количество радиации в кал. В табл. 15 даны вековые колебания ΔQ_s и ΔQ_w летних и зимних количеств радиации Q_s и Q_w в канонических единицах, т. е. $J_0 = 1$; $T = 100\,000$. Так как в действительности $T = 526\,000$ мин. и $J_0 = 2 \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{мин}}$, то мы получим величины ΔQ_s

и ΔQ_w в кал, если умножим цифры табл. 15 на $\frac{2 \cdot 526\,000}{100\,000}$. Однако ввиду того что калорические полугодия имеют продолжительность каждое в $\frac{526\,000}{2}$ мин., то, деля полученные ранее цифры на $\frac{526\,000}{2}$, мы найдем средние количества тепла, полученные в 1 мин.

в течение этих полугодий. Следовательно, для того чтобы получить величину ΔW в нужных нам единицах, нужно умножить цифры табл. 15, обозначенные нами, как ΔQ_s и ΔQ_w , на $\frac{4}{100\,000}$. Таким путем для векового колебания температуры летнего полугодия получится формула:

$$\Delta\theta_s = \frac{4n}{100\,000} \Delta Q_s,$$

т. е. в результате (14)

$$\Delta\theta_s = 0,0068 \Delta Q_s. \quad (16)$$

Вековое колебание температуры зимнего полугодия выражается

$$\Delta\theta_w = 0,0068 \Delta Q_w. \quad (17)$$

Чтобы вычислить вековое колебание $\Delta\theta_T$ средней температуры за весь год, надо в (13) подставить для ΔW вычисленное количество радиации в единицу времени $\frac{\Delta Q_s + \Delta Q_w}{526\,000}$ и выразить его в кал, т. е.

умножить на $\frac{2 \cdot 526\,000}{100\,000}$; таким образом получится $\Delta W = 2 \frac{\Delta Q_s + \Delta Q_w}{100\,000}$,

т. е. согласно (13) и (14)

$$\Delta\theta_T = 0,0068 \frac{\Delta Q_s + \Delta Q_w}{2}$$

или

$$\Delta\theta_T = \frac{1}{2} (\Delta\theta_s + \Delta\theta_w). \quad (18)$$

Далее, необходимо иметь в виду, что в настоящих расчетах под обоими полугодиями надо понимать калорические полугодия, разделяющие тропический год на два одинаково длинных промежутка времени по 182,62 дня, из которых летнее полугодие заключает в себе все те дни, когда количество радиации, получаемой рассматриваемой широтой, больше, чем в какой-либо день другого полугодия. С этими калорическими полугодиями нужно, если речь идет о температурах, связать *термические полугодия*, делящие год на два равных по длительности интервала по 182,62 дня, из которых летнее полугодие

охватывает все те дни, когда средняя температура выше, чем в какой-либо день другого полугодия. Как видно из формул § 34 и 35, между определенными таким образом калорическими и термическими полугодиями имеется разность фаз в 23 дня.

Благодаря тому что весеннее равноденствие имеет место приблизительно за 2 дня до начала калорического полугодия, в настоящее время между термическими полугодиями и астрономическими временами года окажется разность фаз около 25 дн. Таким образом, чтобы сравнить результаты настоящих вычислений с современным климатом, нужно разделить тропический год на термические полугодия и вычислить средние температуры ϑ_s° и ϑ_w° этих полугодий по имеющимся наблюдениям. В метеорологической практике подобный расчет температур ϑ_s° и ϑ_w° , правда, возможен, однако он не применяется. Здесь в качестве главных характеристик годового хода температуры рассматриваются следующие величины: средняя годовая температура ϑ_T° и средние температуры ϑ_1° и ϑ_2° наиболее теплого и наиболее холодного месяцев. Эти величины для различных пунктов земной поверхности можно найти в климатологических таблицах. Теперь же мы покажем, как можно вычислить вековые изменения $\Delta\vartheta_1$ и $\Delta\vartheta_2$ величин ϑ_1 и ϑ_2 из только что выведенных ϑ_s и ϑ_w .

В континентальном климате, о котором только и идет здесь речь, годовой ход температуры может быть весьма точно выражен простой синусоидой¹⁾. Следовательно, если принять за начало шкалы времени начало термического летнего полугодия, когда средняя дневная температура равна средней годовой температуре, и если обозначить через T длину тропического хода, то годовой ход температуры выражится следующим уравнением:

$$\vartheta = \vartheta_T + a \sin \frac{2\pi}{T} t. \quad (19)$$

Эта формула действительна для рассматриваемого года геологического прошлого, тогда как для нашего времени надо взять

$$\vartheta_0 = \vartheta_T + a_0 \sin \frac{2\pi}{T} t. \quad (20)$$

В этих уравнениях ϑ_T и ϑ_T° представляют собой, очевидно, годовые температуры, а a и a_0 — половины амплитуд годового хода температуры. Таким образом

$$\vartheta_T - \vartheta_T^\circ = \Delta\vartheta_T. \quad (21)$$

Средние температуры ϑ_s и ϑ_w термических полугодий геологического прошлого определяются следующими выражениями:

$$\vartheta_s \frac{T}{2} = \int_0^{\frac{1}{2}T} \vartheta dt, \quad \vartheta_w \frac{T}{2} = \int_{\frac{1}{2}T}^T \vartheta dt,$$

¹⁾ Hann-Säring, Lehrbuch der Meteorologie, 4-е изд., стр. 99.

из которых, применив (19) и произведя интегрирование, получается

$$\vartheta_s = \vartheta_T + \frac{2}{\pi} a; \quad \vartheta_w = \vartheta_T - \frac{2}{\pi} a. \quad (22)$$

Средние температуры ϑ_1 и ϑ_2 наиболее теплого и наиболее холодного месяцев рассматриваемого года давнего прошлого, очевидно, будут равны

$$\vartheta_1 \frac{T}{12} = \int_{\frac{1}{4}T - \frac{1}{24}T}^{\frac{1}{4}T + \frac{1}{24}T} \vartheta dt, \quad \vartheta_2 \frac{T}{12} = \int_{\frac{3}{4}T - \frac{1}{24}T}^{\frac{3}{4}T + \frac{1}{24}T} \vartheta dt,$$

из которых на основании (19) после интегрирования получим

$$\frac{\vartheta_1}{6} = \frac{\vartheta_T}{6} + 0,2588 \frac{2}{\pi} a, \quad \frac{\vartheta_2}{6} = \frac{\vartheta_T}{6} - 0,2588 \frac{2}{\pi} a. \quad (23)$$

Для нашего времени этим же путем мы получим

$$\vartheta_s^\circ = \vartheta_T^\circ + \frac{2}{\pi} a_0, \quad \vartheta_w^\circ = \vartheta_T^\circ - \frac{2}{\pi} a_0, \quad (24)$$

$$\frac{\vartheta_1^\circ}{6} = \frac{\vartheta_T^\circ}{6} + 0,2588 \frac{2}{\pi} a_0, \quad \frac{\vartheta_2^\circ}{6} = \frac{\vartheta_T^\circ}{6} - 0,2588 \frac{2}{\pi} a_0. \quad (25)$$

Из (21) по (25) следует, принимая во внимание (18) и ввиду того,

что $\Delta\vartheta_1 = \vartheta_1 - \vartheta_1^\circ$, $\Delta\vartheta_2 = \vartheta_2 - \vartheta_2^\circ$, $\Delta\vartheta_w = \vartheta_w - \vartheta_w^\circ$

$$\Delta\vartheta_s = \vartheta_s - \vartheta_s^\circ;$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta\vartheta_1 &= \Delta\vartheta_s + 0,2764 (\Delta\vartheta_s - \Delta\vartheta_w), \\ \Delta\vartheta_2 &= \Delta\vartheta_w + 0,2764 (\Delta\vartheta_w - \Delta\vartheta_s). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Таким путем по вековым колебаниям средних температур летнего и зимнего полугодий могут быть вычислены вековые колебания средних температур наиболее теплого и наиболее холодного месяцев. Под этими последними надо понимать термические месяцы, т. е. интервалы в 30,44 наиболее теплых и наиболее холодных дней. При изучении векового хода температуры уже потому нельзя пользоваться календарными месяцами, что календарный год не вполне совпадает со сменой времен года, и разница, кажущаяся незначительной, за долгие геологические периоды неограниченно возрастает. Так, например, юлианский календарь, год которого был принят за единицу времени для вычислений Лаверрье и Стоквэлла, через каждые 128 лет на целый день отстает от движения Солнца, так что уже в течение $\frac{1}{12}$ рассматриваемого периода геологического прошлого весеннее равноденствие будет совпадать поочередно со всеми календарными днями года.

Имея в своем распоряжении все эти данные, мы можем начертить совместный график векового хода облучения Земли и соответствующего хода температуры. Такой график для северного полушария и для последних 130 тысячелетий дан на диаграммах III и IV. Весьма нетрудно распространить этот ход на весь период времени за последние 600 ты-

сячений, так как все необходимые для этого данные (как для северного, так и для южного полушария) имеются в табл. 15. Если откладывать по оси абсцисс времена и нанести в качестве ординат имеющиеся в табл. 15 вековые колебания ΔQ_s и ΔQ_w летних и зимних количеств радиации, то мы получим одновременно и графическое изображение векового хода колебаний количества радиации и графическое изображение соответствующих колебаний температуры, смотря по тому, будем ли мы пользоваться шкалой радиации или температуры¹⁾.

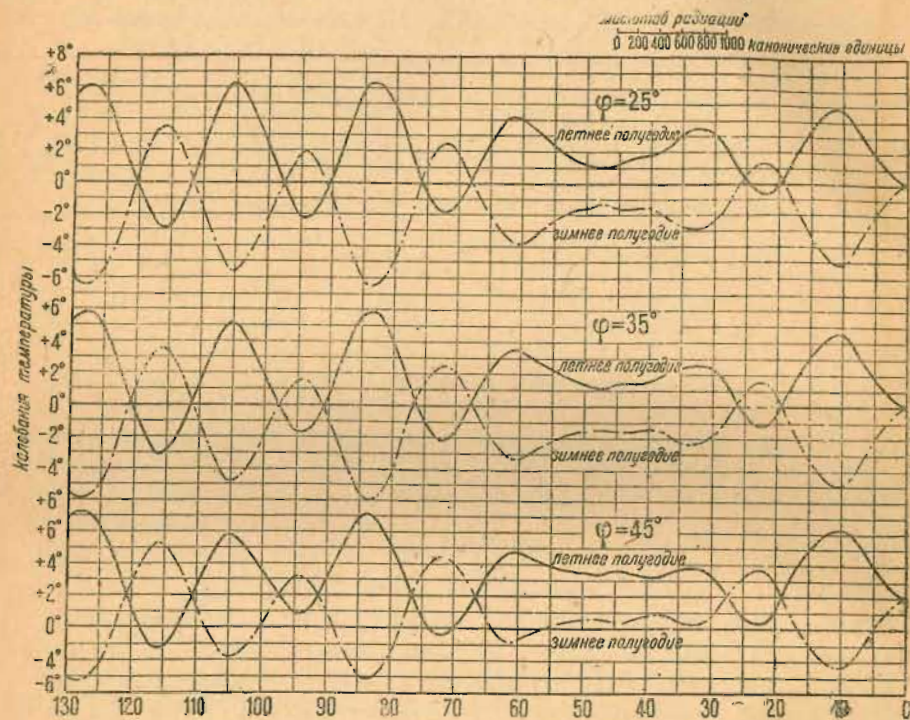


Диаграмма III. Кривые векового хода радиации и температуры для различных географических широт, вычислены М. Миланковичем

Эти относящиеся к обоим полугодиям кривые радиации и температуры нанесены на рисунке сплошной линией и линией из точек и штрихов; температурные кривые крайних месяцев даны только для широт 55—65° и изображены пунктиром и штриховой линией.

Отклонения полугодических количеств радиации, как это указано в § 39, были вычислены при помощи формул:

$$\Delta Q_s = \Delta W_s \Delta \varepsilon - m \Delta (e \sin \Pi),$$

$$\Delta Q_w = \Delta W_w \Delta \varepsilon + m \Delta (e \sin \Pi),$$

¹⁾ На основании формул (16) и (17) эти отклонения пропорциональны, так что, выбирая соответствующий масштаб, можно на графике отсчитать и ту и другую величину.

и, следовательно, состоят из наложения колебаний $\Delta \varepsilon$ и $\mp \Delta (e \sin \Pi)$ астрономических элементов, умноженных на коэффициенты ΔW_s или ΔW_w и m . Ход величин $-\Delta (e \sin \Pi)$ и $\Delta \varepsilon$ показан на рис. 18.

Которое из указанных слагающих колебаний окажется более ясно выраженным в кривых радиации и температуры, зависит от числовых значений коэффициентов ΔW_s , ΔW_w и m . Эти коэффициенты различны для различных географических широт. В более низких широтах в летних суммах радиации преобладает влияние члена $\Delta (e \sin \Pi)$, и здесь вековой

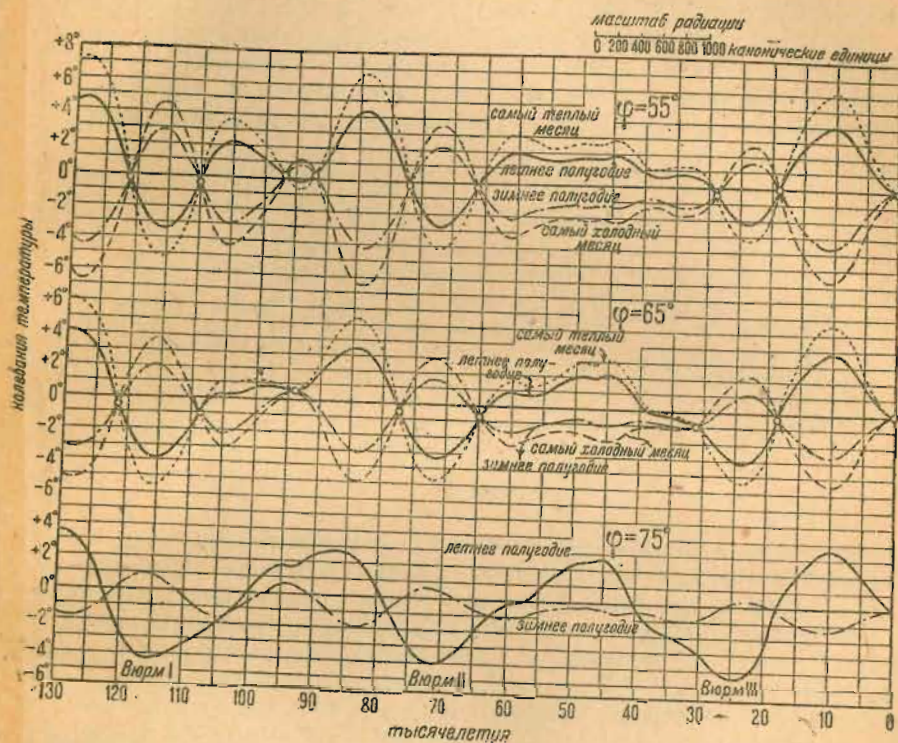


Диаграмма IV. Кривые векового хода радиации и температуры для различных географических широт, вычислены М. Миланковичем

ход колебаний радиации и температуры весьма похож на верхнюю кривую на рис. 18. С увеличением широты все более и более ясно выступает влияние члена $\varepsilon \Pi$, и на широте 75° оно оказывается преобладающим: здесь кривые радиации и температуры имеют форму, мало отличающуюся от нижней кривой рис. 18. На широте 55° и особенно на широте 65° оба слагающих колебания проявляются почти в одинаковой мере: здесь ясно выражено влияние всех трех астрономических элементов ε , ε и Π . Вековые колебания зимних количеств радиации и температуры обнаруживают следующее: из табл. 7 следует, что изменение наклона эклиптики не оказывает влияния на годовое количество радиации, получаемой широтой 44°, так что здесь всякое

увеличение облучения летом уравнивается уменьшением облучения зимой, и наоборот. По этой причине на данной широте вековая кривая количества радиации, полученной за зиму, является зеркальным изображением летней кривой. С весьма незначительными отклонениями так же обстоит дело и с широтой 45° , как это и видно на графике. С уменьшением, а особенно с увеличением, географической широты это соотношение меняется, как это ясно видно из кривых зимнего облучения широт 65° и 75° . На этой последней широте вековые колебания зимнего облучения и температуры сравнительно очень малы.

Интересно, что во время трех больших наступаний ледников вюрмской фазы оледенения, когда лета были очень холодными, эти отклонения не вызвали в этих широтах сколько-нибудь значительного потепления зим по сравнению с современными. Вследствие незначитель-

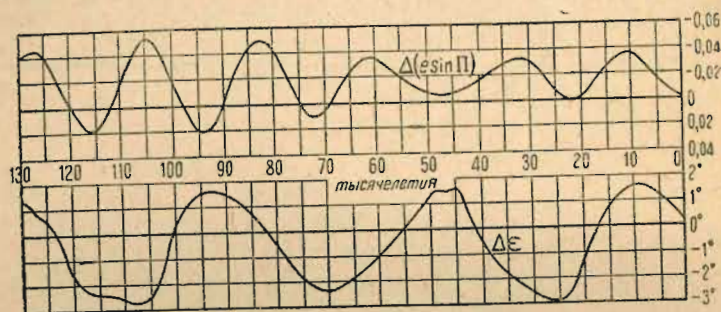


Рис. 18.

ного наклона эклиптики эти наступания отличались не только низкой летней температурой, но и вообще низкими годовыми температурами.

В южном полушарии изменения наклона эклиптики сказываются в том же самом направлении, как и в северном, но изменения величины $\Delta \varepsilon \sin II$ ведут к противоположным следствиям. В результате здесь кривая радиации для широты 25° является зеркальным изображением соответствующей кривой северной широты. Вековые колебания летнего облучения южной широты 75° благодаря преобладающему влиянию наклона эклиптики не на много будут различаться от колебаний той же северной широты. В промежуточных широтах кривая радиации в южном полушарии не будет похожа ни на соответствующую кривую северного полушария, ни на ее зеркальное изображение. Это ясно видно на рис. 19 на кривой, показывающей вековые колебания летнего облучения на 55° южной широты. Эта линия совершенно непохожа на кривую для такой же северной широты.

Из хода кривой можно сделать следующие выводы. Южное полушарие в более высоких широтах еще совсем недавно прошло через чрезвычайно длинный период времени с холодными летами, который, возможно, совершенно закончился лишь в исторические времена. После глубокого минимума лучистой энергии, имевшего место около 31-го тысячелетия до н. э., соответствовавшего минимуму рисской I фазы северного полушария, последующий подъем температуры около 17-го

тысячелетия остановился на одном уровне. Затем, прежде чем был достигнут современный уровень температур, около 12-го тысячелетия имел место второй минимум, бывший почти таким же глубоким, как минимум во время балтийской фазы оледенения северного полушария. Таким образом период очень холодных лет на южном полушарии продолжался почти 40 тысячелетий, и это обстоятельство должно было во всяком случае повести к обширным оледенениям; современный ледяной покров Антарктики является остатком этой холодной эпохи. Около 82-го и 106-го тысячелетий до н. э. в южном полушарии лета были также чрезвычайно холодными: минимум 106-го тысячелетия, как в этом можно убедиться из табл. 15, явился для более высоких широт южного полушария наиболее холодным за последние 600 тысячелетий.

Вековые колебания средних температур наиболее теплых и наиболее холодных месяцев года могут быть без особых затруднений вычислены при помощи формул (26). В этих формулах разности $\Delta \vartheta_s - \Delta \vartheta_w$ и $\Delta \vartheta_w - \Delta \vartheta_s$ выражают измеряемое по ординатам расстояние между упо-

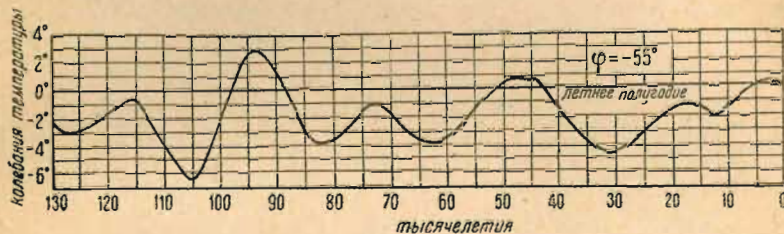


Рис. 19.

мянутыми кривыми; поэтому нужно измерить это расстояние, умножить его на 0,2764 и на полученный отрезок увеличить в положительном или в отрицательном направлении ординаты упомянутых кривых. Таким путем были построены кривые, нанесенные пунктиром и штриховой линией на диаграмме IV.

Все изображенные на диаграммах III и IV кривые можно, как мы это уже указывали, считать за кривые хода как радиации, так и температуры, употребляя при этом тот или иной масштаб. Однако оба эти представления не совсем равнозначущи. Кривые радиации, достигающей верхней границы атмосферы, не зависят от каких бы то ни было изменений на земной поверхности и, следовательно, остаются в силе для всего рассматриваемого промежутка времени; температурные же кривые сохраняют свой смысл только до того момента, пока изображаемые ими температурные колебания не повлекут за собой образования материкового льда.

§ 42. Ледниковые периоды. Если бы Земля обладала совершенно ровной поверхностью, то на ней, как и на Марсе ¹⁾, имелись бы полярные

¹⁾ Математическая климатология была весьма успешно применена к планете Марс; приведенные в „Théorie mathématique“ вычисления температуры поверхности Марса вполне удовлетворительно согласуются с позднейшими измерениями теплового излучения этой планеты. Об этом см. краткий доклад Шенберга „О температурах планет“ „Phys. Ztschr.“, 1925, стр. 870—898.

шапки, но не ледники, и она не проходила бы через ледниковые периоды, так как для возникновения оледенения необходимо наличие гор. Вследствие этого при числовом решении проблемы ледниковых периодов, к которому мы собираемся приступить, нам придется совершенно отбросить предположение о ровной земной поверхности и ввести в математические выражения векового хода температуры, наряду с элементами φ (географическая широта) и t (геологическая эпоха), еще третий элемент — высоту x рассматриваемой области над уровнем моря. Таким образом средняя температура ϑ_s летнего полугодия, о которой здесь главным образом идет речь, должна быть изображена как функция φ , x и t , т. е. в виде выражения

$$\vartheta_s(x) = f(\varphi, x, t). \quad (27)$$

На основании вышеизложенной теории мы имеем полную возможность написать соответствующие математические выражения. Однако прежде чем приступить к изучению аналитического выражения $f(\varphi, x, t)$, нам надо выяснить самый механизм явления ледниковых периодов.

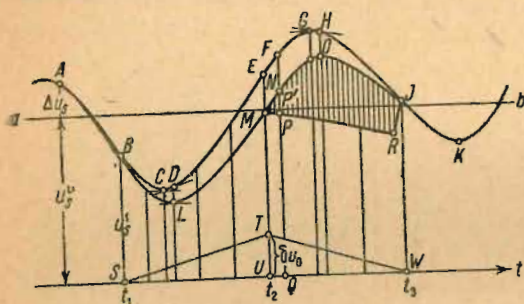


Рис. 20.

летнего полугодия через ϑ_s^0 . Начертим (рис. 20), согласно вышеизложенным формулам, диаграмму векового хода солнечной радиации и температуры для широты φ . Примем ось абсцисс за шкалу времени; проведем параллельно к этой оси на расстоянии ϑ_s^0 прямую $a-b$ и отложим от нее приведенные в табл. 15 вековые отклонения количества лучистой энергии ΔQ_s или соответствующие отклонения температуры $\Delta \vartheta_s = 0,0068 \Delta Q_s$. Полученная таким путем кривая $ABCDEF GHIK$ будет изображать вековой ход летней температуры ϑ_s или летнего количества радиации Q_s для широты φ , смотря по тому, будем ли мы пользоваться шкалой температуры или радиации. Под ϑ_s нужно подразумевать температуру, приведенную к уровню моря.

Если высота рассматриваемой области над уровнем моря нигде не превышает 100 м, то длительное оледенение этой области могло бы наступить только в том случае, если летняя температура ϑ_s в течение геологических эпох спустилась бы до нуля, что могло иметь место только в полярных областях. В этом случае данная область была бы захвачена наступающей и отступающей с течением веков полярной шапкой льда. Если же в рассматриваемой области имеются горные цепи или если она значительно возвышается над уровнем моря, то остающийся все лето снеговой покров сможет образоваться везде

в тех местах и в те времена, где и когда высота x области и время t будут удовлетворять уравнению

$$f(\varphi, x, t) = 0.$$

Если обозначить наибольшую высоту рассматриваемой области над уровнем моря через h_1 , то первые признаки оледенения наступят в момент t_1 , который будет удовлетворять уравнению

$$f(\varphi, h_1, t_1) = 0. \quad (28)$$

Этому моменту t_1 на диаграмме температуры (рис. 20) будет соответствовать точка B температурной кривой и приведенная к уровню моря летняя температура ϑ_s^1 . Само собой разумеется, что последняя будет выше температуры на высоте h_1 и, следовательно, $\vartheta_s^1 > \vartheta_s(h_1)$.

С возникновением сохраняющегося летом снегового покрова облечение рассматриваемой области претерпевает медленное, но весьма глубокое изменение. Дело в том, что вековое понижение летней температуры влечет за собой опускание границы снегов вниз, в результате чего все более и более обширные области окажутся под более мощным снежным и ледяным покровом, остающимся и на лето. Вследствие этого отражательная способность A рассматриваемой области будет увеличиваться и все большее количество солнечной радиации будет, таким образом, возвращаться в мировое пространство. Следовательно, при вычислении солярных температур придется снова вернуться к формуле (10), которая предусматривает такое изменение отражательной способности. Впоследствии будет показано, как в этом случае должен вычисляться вековой ход температуры; однако и в настоящий момент уже ясно, что соответствующая новым условиям температурная кривая в пункте B разойдется с первоначальной температурной кривой $ABCDEF$.

При понижении летней температуры рассматриваемой области площадь оледенения будет непрерывно возрастать до известного предела, зависящего от конфигурации области и амплитуды векового отклонения. К моменту t_2 , который будет определен впоследствии, будет достигнуто это предельное оледенение. К этому же моменту охлаждающее влияние снегового покрова достигает своего предельного значения $\delta \vartheta_0$, которое еще предстоит найти. Можно предположить, что между моментами t_1 и t_2 охлаждающее действие снегового покрова $\delta \vartheta$ увеличивается пропорционально протекшему времени. К моменту t_1 оно равнялось нулю, к моменту t_2 было $\delta \vartheta_0$. Следовательно, можно выразить это действие с помощью ординат прямой ST , если принять $\vartheta T = \delta \vartheta_0$ и S по шкале времени будет соответствовать моменту t_1 , а ϑ — моменту t_2 . В результате мы получим графическое изображение векового хода температуры области, покрываемой материковым льдом, если уменьшим ординаты кривой $BCDE$ на величину ординат прямой ST , т. е. если отложим последние от соответствующих точек кривой $BCDE$ вниз. Таким образом получится дуга кривой BLM , ординаты которой будут изображать среднюю температуру летнего полугодия, приведенную к уровню моря. Наименшая точка L этой кривой окажется не под наименьшей точкой C первоначальной кривой $BCDE$, а будет находиться, как это легко

понять, под точкой D , в которой касательная к кривой $BCDE$ будет параллельна ST . Однако точка L не соответствует предельному значению оледенения, хотя она и представляет собой самую нижнюю точку векового хода температуры, на уровне моря, так как с образованием ледяного покрова сюда присоединился еще один климатический фактор — изменение рельефа оледеневшей области. Это изменение может быть весьма значительным, так же как и влияние его на климат. Как мы уже говорили, в течение ледниковых периодов ледяной покров Северной Европы порой достигал толщины в 1 км, Северной Америки — 2 км. Следовательно, поверхность оледеневшей области находилась примерно на такой высоте над уровнем моря, даже если принять во внимание тектонические движения почвы и ее изостатическое опускание. Это означает, что поверхности ледяного покрова соответствовала летняя температура, пониженная на $7-14^\circ$ по сравнению с той, которая показана кривой BLM . Таким образом если обозначить через h_2 высоту ледяной поверхности над уровнем моря, то стаяние льда сможет начаться только тогда, когда на этой высоте поднимающаяся (благодаря вековому ходу) летняя температура $\vartheta_s(h_2)$ перейдет через нуль. Этот момент, который уже получил обозначение t_2 , может быть, следовательно, вычислен из уравнения

$$f(\varphi, h_2, t_2) = 0, \quad (29)$$

что и будет сделано в дальнейшем.

Только после момента t_2 мощность ледяного покрова начнет уменьшаться до момента t_3 (о вычислении которого речь будет впереди), когда лед окажется окончательно стаявшим. И здесь мы также можем предположить, что сокращение ледяного покрова в течение промежутка времени от t_2 до t_3 будет происходить пропорционально протекающему времени. По этой же причине и охлаждающее влияние ледяного покрова будет уменьшаться пропорционально времени. В момент t_2 это влияние равнялось $\delta\vartheta_0$, в момент t_3 оно будет равно нулю; поэтому можно выразить его ординатами прямой TW , причем точка W соответствует моменту t_3 . Так же как и раньше, мы можем получить графическое изображение векового хода температуры на уровне моря за промежуток времени от t_2 до t_3 , если уменьшим ординаты дуги кривой $EFGHI$ на величину ординат прямой TW . В результате у нас получится бы дуга кривой $MNOI$, наивысшая точка которой Q находилась бы под той точкой H кривой $EFGHI$, в которой проведенная к этой кривой касательная параллельна TW .

Расход солнечной радиации на таяние ледяного покрова, однако, не позволит температуре в вековом ходе подниматься по кривой $MNOI$. Здесь будет иметь место более медленное повышение температуры, которое примерно изображается дугой $MPRI$ и о расчете которого речь пойдет ниже. Таким образом соединение с первоначальной температурной кривой $EFGHI$ последует только в точке I . В момент t_3 , соответствующий этой точке, лед окончательно стаял, наступил конец ледникового периода и начался период межледниковый. Дальнейший ход температуры изображается дугой IK . Заштрихованная площадь $MPRIOM$ представляет собой, если при ее измерении пользоваться

шкалой времени и шкалой радиации, то количество радиации, которое пошло за промежуток времени от t_2 до t_3 на таяние льда. Если на основании геологических данных можно установить мощность ледяного покрова, то, как мы это покажем в дальнейшем, возможно вычислить ход температуры $MPRI$, а вместе с ним и момент t_3 . Описав в главнейших чертах механизм возникновения ледниковых периодов, мы можем перейти к числовым характеристикам этого явления.

Прежде всего требуется найти аналитическое выражение для функции, определенной уравнением (27). В § 33 и 34 раздела II было показано, что годовой ход температуры на высоте x выражается формулой

$$\vartheta(x, t) = \vartheta_m(x) + a_1 \beta(x) \cos \frac{2\pi}{T} [t - \varepsilon(x)], \quad (30)$$

где $\vartheta_m(x)$ означает среднюю годовую на высоте x , T — длину года, а время t отсчитывается от момента летнего солнцестояния, так как согласно формуле (179) количество радиации $W_1(t)$ достигает своего максимума при $t=0$. Величины $\varepsilon(x)$ и $\beta(x)$ для различных высот приведены на табл. 12. Кроме этого, выражение $\vartheta_m(x)$ дано формулами (193) и (194), т. е.

$$\vartheta_m(x) = \vartheta_T + b \left(e^{-\frac{x}{H}} - 1 \right), \quad (31)$$

$$b = \frac{1}{8} \frac{(1-A) a_0}{273^3 \sigma} kM, \quad (32)$$

причем ϑ_T означает среднюю годовую температуру для $x=0$. Ввиду того что речь идет о небольших высотах, выражение (31) может быть замечено следующим:

$$\vartheta_m(x) = \vartheta_m(0) + \frac{\partial \vartheta_m(0)}{\partial x} x,$$

т. е.

$$\vartheta_m(x) = \vartheta_T - \frac{b}{H} x. \quad (33)$$

Абсолютная средняя годовая температура для $x=0$, т. е.

$$\vartheta_T = 273 + \vartheta_T, \quad (34)$$

дана выражением (191), т. е.

$$\vartheta_T^4 = \frac{1}{2} (1-A) a_0 (1 + kM). \quad (35)$$

Из (32) и (35) следует, что

$$b = \frac{1}{4} \frac{\vartheta_T^4 kM}{273^3 (1 + kM)}.$$

Теперь вследствие (34), отбросив более высокие степени малого числа $\frac{\vartheta_T}{273}$, мы имеем

$$\vartheta_T^4 = 273^4 \left(1 + 4 \frac{\vartheta_T}{273} \right),$$

так что

$$b = \frac{273}{4} \left(1 + 4 \frac{\vartheta_T}{273} \right) \frac{kM}{1 + kM}.$$

Величина ϑ_T , как это легко понять, не оказывает какого-либо существенного влияния на коэффициент b . Если заменить ϑ_T какой-либо средней величиной и, так как речь идет о более высоких географических широтах, принять примерно $\vartheta_T = 0$, то получится

$$b = \frac{273}{4} \frac{kM}{1 + kM}. \quad (36)$$

Таким образом мы имеем

$$\vartheta(x, t) = \vartheta_T - \frac{b}{H} x + a_1 B(x) \cos \frac{2\pi}{T} [t - \varepsilon(x)].$$

Температура $\vartheta(x, t)$ колеблется в течение года около среднего значения $\left(\vartheta_T - \frac{b}{H} x \right)$ с амплитудой $a = a_1 B(x)$. Поэтому, как было показано при выводе уравнений (22), средние температуры $\vartheta_s(x)$ и $\vartheta_w(x)$ летнего и зимнего полугодий выражаются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_s(x) &= \vartheta_T - \frac{b}{H} x + \frac{2}{\pi} a_1 B(x), \\ \vartheta_w(x) &= \vartheta_T - \frac{b}{H} x - \frac{2}{\pi} a_1 B(x). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Согласно табл. 12 значение $B(x)$ на высоте 1 км равняется около $0,90 B(0)$, тогда как наблюдения дают мало отличающееся от него значение $0,92 B(0)$. Ввиду же того что речь идет о небольших разностях высот, можно, считая x в километрах, подставить

$$B(x) = B(0) (1 - 0,10 x).$$

Таким образом мы получим

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_s(x) &= \vartheta_T - \frac{b}{H} x + \frac{2}{\pi} a_1 B(0) (1 - 0,10 x), \\ \vartheta_w(x) &= \vartheta_T - \frac{b}{H} x - \frac{2}{\pi} a_1 B(0) (1 - 0,10 x). \end{aligned} \right\}$$

Для $x = 0$ мы получим

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_s &= \vartheta_T + \frac{2}{\pi} B(0), \\ \vartheta_w &= \vartheta_T - \frac{2}{\pi} B(0), \end{aligned} \right\}$$

и, исключая $a_1 B(0)$ из вышеприведенных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_s(x) &= \vartheta_s - \frac{b}{H} x - 0,10 (\vartheta_s - \vartheta_T) x, \\ \vartheta_w(x) &= \vartheta_w - \frac{b}{H} x + 0,10 (\vartheta_T - \vartheta_w) x, \\ \vartheta_T &= \frac{1}{2} (\vartheta_s + \vartheta_w). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Вместе с данными в § 34 значениями для k , M и H , выражая H в километрах и пользуясь формулой (36), мы получаем

$$\frac{b}{H} = 6,12,$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_s(x) &= \vartheta_s - 6,12 x - 0,10 (\vartheta_s - \vartheta_T) x, \\ \vartheta_w(x) &= \vartheta_w - 6,12 x + 0,10 (\vartheta_T - \vartheta_w) x. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Эти уравнения дают понижение летней и зимней температуры с высотой и дают хорошее совпадение с наблюдениями¹⁾. Из уравнений видно, почему понижение температуры с высотой летом значительнее, чем зимой; это объясняется тем, что в первом из вышеприведенных выражений последний член отрицателен, а во втором — положителен.

Вышеприведенное выражение для $\vartheta_s(x)$ и будет искомой функцией (27), если считать величины ϑ_s и ϑ_T функциями географической широты и времени, — функциями, ход которых дан табл. 15. Пользуясь ею, легко будет вычислить момент t_1 , т. е. начало ледникового периода. Если h_1 означает максимальную высоту данной области над уровнем моря, то $\vartheta_s(h_1) = 0$, т. е. t_1 выражается уравнением

$$\vartheta_s - 6,12 h_1 - 0,10 (\vartheta_s - \vartheta_T) h_1 = 0. \quad (40)$$

Лежащая на нисходящей ветви ABC точка B , абсцисса которой t_1 удовлетворяет условию (40), и является той точкой, в которой температурная кривая, соответствующая ледниковому периоду, ответвляется от температурной кривой периода межледникового.

Дальнейший ход температурной кривой обусловлен охлаждающим влиянием ледяного покрова. Для того чтобы дать аналитическое выражение влияния ледяного покрова, необходимо, как уже упоминалось, вернуться к формуле (10) настоящего раздела. Этой последней можно, пользуясь (12), придать вид

$$\Delta\vartheta = n \left[\frac{1-A}{1-A_0} W - W_0 \right]. \quad (41)$$

После момента t_1 A становится больше A_0 и вследствие этого, так как $0 < A_0 < 1$, $0 < A < 1$, дробь $\frac{1-A}{1-A_0}$ будет правильной и положительной, так что можно положить

$$\frac{1-A}{1-A_0} = 1 - \xi, \quad (42)$$

где $0 < \xi < 1$. Таким образом мы получаем

$$\Delta\vartheta = n (W - W_0 - \xi W);$$

$W - W_0 = \Delta W$, так что $W - W_0 - \xi W = \Delta W - \xi W_0 - \xi \Delta W$, причем членом $\xi \Delta W$ как более высокого порядка малости можно пренебречь. Таким образом мы получим

$$\Delta\vartheta = n \Delta W - n \xi W_0. \quad (43)$$

¹⁾ Köppen, Die Klimate der Erde, стр. 45, Berlin 1923.

Если применить эту формулу к расчету летней, зимней, и годовой температур и обозначить вековые отклонения этих температур с учетом влияния ледяного покрова через $\Delta\vartheta'_s$, $\Delta\vartheta'_w$ и $\Delta\vartheta'_T$ в отличие от выражений $\Delta\vartheta_s$, $\Delta\vartheta_w$, $\Delta\vartheta_T$ полученных при отсутствии ледяного покрова, то мы будем иметь

$$\Delta\vartheta'_s = 0,0068 \Delta Q_s - 0,0068 \xi Q_s^{\circ} = \Delta\vartheta_s - 0,0068 \xi Q_s^{\circ}, \quad (44)$$

$$\Delta\vartheta'_w = \Delta\vartheta_w - 0,0068 \xi Q_w^{\circ}, \quad (45)$$

$$\Delta\vartheta'_T = \Delta\vartheta_T - 0,0068 \xi \frac{Q_s^{\circ} + Q_w^{\circ}}{2}. \quad (46)$$

Эти формулы отличаются от прежних (16) и (17) наличием члена $-0,0068 \xi Q_{s,w}^{\circ}$, который выражает действие ледяного покрова. В этом члене ξ еще неизвестно; его числовое значение будет, очевидно, зависеть от площади оледенения рассматриваемой области. При полном оледенении обширных областей в их центре окажется максимальное числовое значение величины ξ . Это максимальное значение, которое мы обозначим ξ_0 , может быть вычислено на основании следующих соображений.

Рассматривая в § 21 баланс лучистой энергии, получаемой Землей, мы показали, что из всей лучистой энергии, попадающей на верхнюю границу атмосферы, около $\frac{1}{3}$ достигает земной поверхности в виде прямой и рассеянной радиации. Приняв среднюю отражательную способность земной поверхности в 0,08, мы получим, что 2,3% общего количества радиации, получаемой Землей, отражается от земной поверхности и, возвращаясь в мировое пространство, выпадает из теплового баланса Земли. Там же мы упоминали, что Аббот и Фауль определили отражательную способность покрытых снегом областей в 0,15 общего количества радиации, получаемой Землей.

Если на основании табл. 3 принять во внимание, что среднее годовое количество радиации, получаемой полярными областями, относится к радиации, получаемой всей земной поверхностью, как 3:5, то в отношении радиации, получаемой покрытыми снегом полярными областями земного шара, можно принять отражательную способность равной $\frac{5}{3} 0,15 = 0,25$. Непосредственные измерения альbedo снега дали бы, возможно, значительно ббльшую величину, однако мы будем придерживаться только что вычисленного значения, так как уменьшение отражательной и поглощающей способностей атмосферы в значительной степени зависит от побочных действий снежного покрова в виде возникновения антициклонов, сухости воздуха и уменьшения облачности. Принимая отражательную способность земной поверхности в 0,25 вместо взятых раньше 0,08, мы получим вместо потери 2,3% всего количества получаемой Землей радиации потерю $\frac{0,25}{0,08} \cdot 2,3\% = 7,2\%$, т. е. получится дополнительная потеря в 4,9%. Таким образом при сплошном снеговом покрове у нас получилось бы вместо

принятого до сих пор значения $A_0 = 0,400$ значение $A = 0,449$. Отсюда на основании (42) следует, что

$$\xi_0 = 0,08. \quad (47)$$

Согласно этому можно поставить

$$\xi = v \xi_0,$$

где v означает некоторое число, заключенное между 0 и ± 1 , которое мы будем называть степенью оледенения.

С началом оледенения, т. е. при $t = t_1$, v начинает возрастать от нуля до своего наибольшего значения v_0 , соответствующего максимальному оледенению в момент t_2 . В этот момент охлаждающее влияние снежного покрова выражается в

$$\delta\vartheta_0 = 0,0068 v_0 \xi_0 Q^{\circ},$$

т. е. вследствие (47)

$$\delta\vartheta_0 = 0,000544 v_0 Q^{\circ}. \quad (48)$$

Для периода времени t , лежащего между t_1 и t_2 , это действие будет равняться

$$\delta\vartheta_s = \frac{\delta\vartheta}{t_2 - t_1} (t_2 - t).$$

Для ядра области оледенения будем считать $v_0 = 1$. С этим значением мы получим для $\varphi = 50^{\circ}$ следующие максимальные числа: для лета $-8^{\circ},2$, для зимы $-3^{\circ},1$. Летом охлаждающее действие значительно больше, чем зимой, так как летом большее количество солнечной радиации отражается снежным покровом. Произведенные наблюдения показали, что для данной широты и в зимнее время охлаждающее действие снежного покрова равно 7° , что заставляет считать значение ξ в действительности ббльшим, чем только что вычисленное; однако мы будем его придерживаться из-за уже упомянутых побочных влияний.

Если нам известны степень оледенения v_0 рассматриваемой области и высота поверхности ледяного покрова над уровнем моря h_2 , то можно вычислить и момент t_2 , к которому оледенение достигнет своего наибольшего распространения. При этом мы воспользуемся выражением (39), в котором отбросим последний член, так как h_2 может быть известно только приблизительно. Согласно этой формуле летняя температура на высоте x , с учетом охлаждающего влияния снежного покрова, дается выражением

$$\vartheta_s(x) = \vartheta_s - \delta\vartheta_0 - 6,12 x.$$

Эта температура для $x = h_2$ будет равна нулю, т. е. мы имеем

$$\vartheta_s - \delta\vartheta_0 - 6,12 h_2 = 0. \quad (49)$$

Лежащая на восходящей ветви $CDEF$ кривой $BCDEFGH$ точка, ордината ϑ_s которой удовлетворяет написанному условию, и является искомой точкой E этой кривой; точка M кривой $LMNO$ лежит на $8\vartheta_0$ ниже.

Все сказанное определяет вполне однозначно ветвь BLM температурной кривой $BLMNOI$. Для того чтобы определить остальную

часть этой кривой, нужно принять во внимание следующее. Если бы момент t_3 был нам известен, то этим самым нам была бы дана дуга $MNOI$ кривой, получающаяся благодаря охлаждающему действию ледяного покрова. Для ее определения нужно было бы только вычесть из ординат кривой $EFGHI$ отрезок

$$\delta\vartheta = \frac{\delta\vartheta_0}{t_3 - t_2} (t_3 - t),$$

который равен ординате прямой TW . При вычислении же t_3 , как мы уже говорили, нужно принять во внимание и то количество радиации, которое пошло на таяние ледяного покрова, вследствие чего вместо кривой температуры $MNOI$ у нас получится другая, изображенная дугой $MPRI$. Этот ход температуры, а вместе с ним и момент t_3 могут быть вычислены следующим образом. Возьмем сначала произвольный выбранный момент t_3 , вследствие чего у нас получится линия $MNOI$.

Величина $\vartheta_s(h_2, t_2)$, представляющая собой температуру на поверхности ледяного покрова в момент t_2 , согласно (49) равна нулю; вследствие этого, приведенная к уровню моря и выраженная ординатами $\vartheta M = \vartheta_s(0, t_2)$ температура момента t_2 должна быть выше нуля. В течение произвольного, достаточно короткого промежутка времени Δt , выраженного отрезком ϑQ оси абсцисс, количество радиации, изображаемое элементом площади MPN , пойдет на таяние льда; при этом дуга кривой MP ввиду своей незначительности может быть принята за прямую. Это количество может быть определено следующим образом. Если превратить плоскость MPN , границы которой, за исключением точки P , можно заменить отрезком MP' , параллельным оси абсцисс, в прямоугольник с основанием Δt и если высота этого прямоугольника, определенная при помощи масштаба температур, равна $\Delta\vartheta_s$, то вследствие (13) и (14) соответствующее этой разнице температур количество радиации будет равно

$$\Delta W_e = \frac{\Delta\vartheta_s}{170}.$$

Это количество радиации понадобится за промежуток времени от t_2 по $(t_2 + \Delta t)$ на единицу поверхности (1 см^2) и на единицу времени (1 мин.) для таяния льда. За этот промежуток времени, следовательно, всего будет поглощено количество тепла, равное

$$\Delta Q = \frac{1}{2} \Delta W \Delta t.$$

Мы делим здесь на два, так как таяние льда происходит только в течение летнего полугодия. Если измерять время Δt тысячелетиями, то для вычисления разности Δt в минутах она должна быть умножена на $1000 \cdot 526\,000$. Таким образом мы получим

$$\Delta Q = \frac{526\,000\,000}{2 \cdot 170} \Delta\vartheta_s \Delta t = 1\,550\,000 \Delta\vartheta_s \Delta t \text{ кал.}$$

За счет этого количества тепла часть ледяного покрова растает, и его мощность уменьшится на величину Δh , измеряемую в километ-

рах. Если принять, что удельный вес льда равен 0,90, то количество растаявшего льда на 1 см^2 будет равно $0,90 \cdot 100\,000 \Delta h = 90\,000 \Delta h \text{ г}$. На таяние 1 г льда требуется 80 кал. Часть растаявшего льда, которую мы обозначим η , испарится, так как только в пограничных областях талая вода может стекать. Ввиду того что скрытая теплота испарения воды равняется примерно 600 кал, то таяние и унос каждого грамма льда потребуют около $(80 + 600\eta)$ кал. При понижении ледяного покрова на $\Delta h \text{ км}$ требуется на 1 см^2 поверхности количество теплоты, равное $(80 + 600\eta) 90\,000 \Delta h \text{ кал}$, и это количество должно равняться вычисленному ранее ΔQ . Таким образом мы получим

$$\Delta h = \frac{17,2 \Delta\vartheta_s \Delta t}{80 + 600\eta}.$$

Во время таяния льда температура воздуха у поверхности ледяного покрова не изменяется. Следовательно, если бы ледяной покров не опускался, то ход температуры MPR (рис. 20) изображался бы прямой, параллельной оси абсцисс; однако ввиду того что ледяной покров за элемент времени Δt опустился на Δh , разность температуры PP' , учитывая наибольшие члены выражения (39), должна быть равной $6,12 \Delta h$ для того, чтобы температура на поверхности ледяного покрова оставалась неизменной. Благодаря этому у нас получится точка P . Таким путем, положив в основу какое-либо предварительно взятые значение t_3 , можно шаг за шагом определить ход температуры $MPRI$. При этом непосредственно перед моментом t_3 весь ледяной покров должен оказаться растаявшим, т. е. количество теплоты, представляемое площадью $MPRI$, должно быть равным количеству теплоты, требующемуся для таяния и уноса ледяного покрова. В конце вычисленного таким образом хода температуры получается крутой подъем температуры RI , переходящий в кривую $GHIK$. Если принятое для момента значение не отвечает этому условию, то расчет должен производиться с более подходящим значением для t_3 до тех пор, пока поставленное условие не будет выполнено. Такое совершенное определение хода температуры в действительности удастся провести лишь в исключительных случаях, когда имеется достаточно данных относительно рельефа местности, обусловленной им степени следования и мощности ледяного покрова, добытых геологическими исследованиями. Однако независимо от возможности практического проведения подобного расчета все вышесказанное достаточно выяснило механизм явления ледниковых периодов, так что мы можем сделать отсюда следующие выводы.

В течение последних 600 тысячелетий, и именно в девять периодов времени, обозначаемых как гюнцская I и II, миндельская I и II, рисская I и II и вюрмская I, II и III фазы, средняя температура летнего полугодия в умеренных и полярных зонах северного полушария, в результате вариаций астрономических элементов и изменений в облучении Земли, понижалась на $4-5^\circ$, тогда как средняя температура наиболее теплого месяца была на $5-7^\circ$ ниже, чем в наше время. В результате такого понижения летней температуры снеговая линия переместилась и находилась в среднем на $700-800 \text{ км}$ ниже, чем теперь. Благодаря

этому обширные области очутились под ледяным покровом, не исчезающим летом, и ледники начали свое наступление в долинах. Это обстоятельство повлекло за собой дальнейшее понижение летней температуры оледеневших областей, дальнейшее опускание снеговой линии и большее распространение материкового льда. Эффект этой второй причины падения летней температуры, т. е. охлаждающего действия ледяного покрова, даже если учитывать противодействующие ему побочные влияния, в центральных частях оледеневших областей оказывается почти вдвое сильнее эффекта первичной причины, так что здесь общее перемещение снеговой линии вниз достигло почти 2 км. Вследствие этого обширные области Северной Европы и Северной Америки оказались погребенными под слоем льда толщиной около 1 км; далее к югу эта участь постигла все области, где наличие горных хребтов способствовало описанному выше процессу оледенения. С наступлением более теплых лет ледяной покров быстро стаял там,

где он был менее мощен и где его охлаждающее действие было не так сильно, т. е. в пограничных областях оледенения. На графике температуры этих областей точка соединения обеих ветвей кривой температур I , изображенная на рис. 20, была достигнута уже в восходящей ветви CG , так что здесь вековая температурная кривая получила изображенную на рис. 21 форму.

Таким образом в пограничных областях температурная кривая

$ABLI\bar{G}$ отличается от кривой радиации $ABCIG$ только частью BLI , т. е. только более резко выраженным минимумом. Мы уже показали, что кривая радиации $ABCIG$ не меняет своего вида, если представляемые ею изменения количества радиации заменить для наглядности фиктивными изменениями широты, так как при одной и той же разности в количестве радиации более высоким широтам соответствует и более значительное колебание широты. Этим и объясняется, почему изображаемые таким образом вековые изменения облучения Земли столь точно совпадают с результатами геологического исследования окраинных областей.

В центрах областей, покрытых материковым льдом, дело обстояло совершенно иначе. Здесь охлаждающее действие ледяного покрова выразилось наиболее сильно, и здесь мощность ледяного покрова порой достигала величины порядка 1 км и больше. Следствия этого яснее всего можно представить себе с помощью конкретного примера. С этой целью возьмем изображенную на диаграмме IV температурную кривую для $\varphi = +65^\circ$. Мы видим из нее, что около 115-го тысячелетия до н. э. средняя температура летнего полугодия была на 4° ниже, чем в наше время. Это соответствует (не учитывая изменения в количестве осадков, которые мы здесь не можем рассматривать) перемещению границы

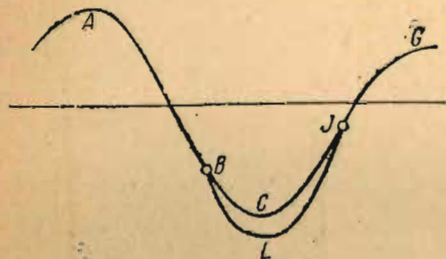


Рис. 21.

снегов на 650 м. Если в результате, как этого и следовало ожидать, обширные области оказались под ледяным покровом, то в них согласно формуле (48), где нужно считать $v_0 = 1$, $Q_0^0 = 13454$; охлаждающее действие ледяного покрова составляет $\delta\theta_0 = 7^\circ,3$, что и повело к дальнейшему перемещению снеговой линии. Таким образом общее перемещение снеговой линии составило 1850 м. Так как в настоящее время на этой широте снеговая линия лежит ниже 1850 м над уровнем моря, то в те времена обширные области Северной Европы и Северной Америки были погребены под материковым льдом. С наступлением более теплых летних периодов таяние ледяного покрова могло начаться лишь там, где летняя температура поднималась выше нуля. Там, где поверхность ледяного покрова находилась на высоте 1000 м над уровнем моря, таяние льда, вследствие того что охлаждающее действие ледяного покрова равнялось $7^\circ,3$, а понижение летней температуры на высоте 1000 м равнялось $6^\circ,1$, могло иметь место только в том случае, если температура на уровне моря и при отсутствии ледяного покрова оказывалась выше $13^\circ,4$. Максимум температуры, наблюдавшийся между 115-м и 92-м тысячелетиями, был весьма незначительным и превышал современную температуру едва на 1° , так что в те времена таяние ледяного покрова указанной выше мощности могло происходить только в тех областях, где в настоящее время температура на уровне моря выше $12^\circ,4$. Во всех остальных областях ледяной покров благодаря своей высоте был защищен от таяния. Только во время наступившего между 92-м и 79-м тысячелетиями более значительного подъема температуры таяние льдов могло начаться в большем масштабе. Можно приблизительно определить мощность ледяного покрова, стаявшего под влиянием волн теплых лет, прошедшей между 92-м и 79-м тысячелетиями. Этой волне соответствовал и промежуток времени в $\Delta t = 13$ тысячелетиям и средняя разность температуры в $\Delta\theta = 1^\circ,6$, так что согласно формуле (50) и принимая $\eta = 2/3$, мы получим $\Delta h = 0,75$ км. Эта волна, следовательно, смогла уничтожить ледяной покров мощностью в 750 м. Если же толщина ледяного покрова была мощнее или, что еще вероятнее, если в этих широтах в наше время летняя температура на уровне моря ниже $12^\circ,4$, то лед не мог стаять и исчезнуть. В этом случае, как видно из диаграммы, происходило слияние первого и второго, а нередко и третьего наступания ледникового периода вюрмской ледниковой фазы в единую ледниковую эпоху.

Подобное вычисление и с таким же результатом можно произвести и для остальных трех ледниковых периодов, а также и для области Альп. В центральных частях оледеневших областей, где высота над уровнем моря и мощность ледяного покрова были достаточно велики, периоды упомянутых девяти минимумов количества радиации объединялись в четыре ледниковые эпохи, установленные Пенком, отделяющиеся друг от друга тремя межледниковыми периодами.

Это обстоятельство имело обратное влияние на форму температурных кривых окраинных областей, так как оно немного усилило минимум второй фазы, о чем мы уже говорили.

В широтах полярной зоны, как это видно из диаграммы температуры для $\varphi = +75^\circ$, температурные минимумы были выражены гораздо резче, чем в более низких широтах, а температурные максимумы, наоборот, более слабо. Кроме того, если принять во внимание, что в столь высоких широтах летние температуры в настоящее время также значительно ниже, то станет ясно, что здесь, при известных условиях, могло произойти слияние гюнцской и миндельской фаз оледенения и образование из них одной ледниковой эпохи, а также слияние рисской и вюрмской фаз. Слияние всех четырех фаз оледенения могло произойти только там, где поверхность ледяного покрова лежала настолько высоко, что даже в период высшего максимума облужения таяние льда не могло иметь места, пример чему мы в настоящее время видим в Гренландии. Обычно же и в высоких широтах оба упомянутых крупных ледниковых периода Гюнц-Миндель и Рисс-Вюрм разделялись долгим межледниковым периодом, продолжавшимся в низких широтах почти 200 тысячелетий и отличавшимся тремя периодами особо жарких лет.

Таким образом резюмируя все вышеизложенное, можно сказать, что в окраинных областях все волны векового хода облужения, особенно же упомянутые девять минимумов радиации, отразились весьма ясно; в центральных же частях оледеневших областей дело нередко доходило до слияния близко лежащих друг к другу минимумов радиации и образования четырех общих ледниковых периодов. На крайнем севере имело место и объединение этих четырех ледниковых периодов попарно в две долгие ледниковых эпохи.

В результате всего сказанного можно считать, что все вопросы, связанные с явлением ледниковых периодов, нашли исчерпывающее объяснение в изменениях облужения Земли, вызванных возмущающим влиянием планет. Ледниковая эпоха со всеми своими разнообразными фазами протекала именно так, как это можно вывести из хода этих возмущений; поэтому-то эта часть истории Земли и получила свою астрономическую хронологию.

§ 43. Обзор результатов раздела III. Заключительные выводы. Самая мысль, что рука об руку с изменением наклона эклиптики должно идти и изменение земного климата, берет свое начало от школы пифагорейцев; астрономические же теории ледниковых периодов были впервые изложены в работе Адемара, опубликованной в 1842 г. В § 37 мы даем краткий исторический обзор наиболее интересных из этих теорий и показываем, почему они не имели успеха. При научной постановке этой проблемы, как это было доказано уже в разделе I, необходимо принять во внимание одновременно все три астрономических элемента: эксцентриситет земной орбиты, наклон эклиптики и долготу перигелия. В соответствии с этим в § 38 подробно разбираются все сделанные до настоящего момента числовые расчеты вековых изменений этих элементов, и в табл. 13 приводятся результаты самых последних вычислений, произведенных для настоящей работы В. Мишковичем, директором астрономической обсерватории в Белграде. Эти расчеты основаны на уравнениях Леверрье, тогда как расчеты облужения Земли, приводимые автором в „Théorie

mathématique“, в книге Кеппена-Веенера и в только что вышедшей работе Эберля, произведены на основании расчетов Пильгрима, пользовавшегося уравнениями Стоквелла. В § 39 результаты произведенного автором заново на основе данных Леверрье-Мишковича расчета векового хода облужения Земли сведены в форме обширной табл. 15; таблица эта представляет собой изложенную математическим языком историю изменений количества солнечной радиации за последние 600 тысячелетий. Таким образом астрономическая теория климатических колебаний может быть построена на двух, независимых друг от друга расчетах количеств радиации, благодаря чему возможен их взаимный контроль.

В § 40 приводятся результаты исследований климатологов и геологов, выяснивших, как отразился вековой ход облужения на климатической картине геологического прошлого. Основой для этих исследований послужили уже упоминавшиеся более старые расчеты облужения, проведенные автором, тогда как новые вычисления, приводимые в табл. 15, послужили в качестве контроля при изучении этих результатов наблюдений. Выводы, вытекающие из всего изложенного в § 40, настолько обширны и значительны, что мы обращаем на них особое внимание заинтересованных читателей, тем более, что для их понимания не требуется математических знаний.

Из § 40 можно заключить следующее. Исследования Кеппена, Зергеля, Граманна и Эберля показали, что вычисленный автором ход облужения оставил ясные следы на земной поверхности. Все фазы этого хода облужения и в особенности девяти минимумов радиации обозначенных на диаграмме радиации, как Гюнц I, Гюнц II, Миндель I, Миндель II, Рисс I, Рисс II, Вюрм I, Вюрм II и Вюрм III, отражены наиболее резко в Средней Германии и в отложениях ледниковой эпохи северных предгорий Альп. Соответствие вычислений с геологическими данными распространяется не только на последовательность, но и на интенсивность этих колебаний радиации.

Далее, в § 41 изучаются детали векового хода облужения и попутно, на основании выведенной в разделе II теории, выясняется соответствующий ему ход температуры. При этом оказывается, что до тех пор, пока дело не доходит до оледенения рассматриваемой области, вековые колебания температуры пропорциональны вековым колебаниям облужения и что при выборе соответствующего масштаба вековая температурная кривая тождественна с вековой кривой радиации. Благодаря этому оказалось возможным дать общее графическое изображение векового хода облужения и векового хода температуры, что и сделано на диаграммах III и IV.

Если облужение земной поверхности падает вследствие изменчивости астрономических элементов, а вместе с ним падает и летняя температура, то, как это показано в § 42, параллельно этому идет и понижение снеговой линии. Если эта последняя спустилась до уровня местности в рассматриваемой области, то при дальнейшем понижении летней температуры все более и более обширные пространства будут покрываться льдом, не становящим и летом, и ледники смогут проникать все дальше и дальше в долины. За последние 600 тысячелетий это

явление повторялось в Европе и Северной Америке особенно резко девять раз. Вследствие распространения снегового покрова и связанного с этим его охлаждающего действия летняя температура, как это можно проверить и численно, падала еще ниже, и обширные области оказывались под ледяным покровом, мощность которого в Северной Европе порой достигала 1 км, а в Северной Америке даже 2 км.

С наступлением периода более теплых лет, начало и продолжительность которого можно точно проследить при помощи кривой радиации, ледяной покров быстро стаял в окраинных областях оледенения, и, как мы уже говорили выше, в климатической картине этих областей весьма ясно отразились все фазы хода облучения, т. е. все девять упомянутых минимумов радиации и даже малые вторичные минимумы. В центрах оледенения периоды смежных минимумов облучения сливались таким образом, что здесь можно различить только четыре известных ледниковых периода Пенка. В полярной зоне эти четыре периода объединились в две больших ледниковых эпохи, отделенных друг от друга только долгим межледниковым периодом между миндельской и рисской фазами оледенения, отличавшимися своей продолжительностью и особенно теплыми летами.

Таким образом, исходя из векового хода облучения Земли, механизм которого был исследован в разделе I, и пользуясь развитой в разделе II математической теорией климата, можно восстановить картину ледниковой эпохи, вполне совпадающую с результатами геологических изысканий.

Несмотря на эти интересные выводы, нельзя закрывать глаза на то, что разрешение указанной проблемы ледниковых периодов поставило перед нами новый вопрос, а именно: почему вековой ход облучения, так ярко иллюстрируемый отложениями четвертичного периода, не вызвал в течение более ранних геологических эпох в Европе таких же оледенений, как за последние 600 тысячелетий. Правда, современные аналитические средства небесной механики не позволяют нам точно проследить вековой ход облучения до тех отдаленных времен геологического прошлого; но уже из общих законов этой науки следует, что и в ту эпоху упомянутые астрономические элементы были подвержены подобным же изменениям. С возрастанием же продолжительности рассматриваемого промежутка времени, естественно, увеличивается и вероятность случаев более интенсивного совместного действия этих элементов и больших амплитуд в ходе облучения.

Для объяснения этого странного явления у нас в настоящее время имеются два пути. На один из них вступила теория Вегенера о перемещении материков и полюсов. Основной предпосылкой этой теории является изменчивость положения континентов на земном шаре. Вследствие этого географическая широта какого-либо пункта земной поверхности становится величиной переменной, тем более, что перемещение материков не может остаться без влияния на положение земных полюсов. Согласно этому географическая широта φ , принимаемая во всех предыдущих вычислениях за постоянную величину, должна стать величиной переменной. Однако при современном состоянии науки невозможно хотя бы приблизительно определить

вековые изменения величины φ для различных пунктов земной поверхности, не говоря уже о том, чтобы дать их числовой расчет, как это было сделано для изменений упомянутых трех астрономических элементов. Все указывает на то, что изменения величины φ происходят гораздо медленнее, чем колебания трех упомянутых астрономических элементов. Это доказывается уже тем обстоятельством, что вековой ход облучения в Европе за последние 600 тысячелетий не претерпел сколько-нибудь значительных нарушений и протекал так, как это было вычислено математически. И только для более отдаленных времен, — главным образом тех, для которых мы не можем объяснить отсутствие ледниковых периодов, изменение географических широт Европы могло бы проявиться более ясно и дать удовлетворительное объяснение этого явления.

По исследованиям Вегенера и Кеппена, на самом деле, становится весьма правдоподобным, что на границе между третичной и четвертичной эпохами началось резкое возрастание географических широт в Европе, благодаря чему эти местности должны были подвергнуться оледенению. Таким образом это отсутствие ледниковых периодов становится сильной опорой для теории Вегенера. В отношении упомянутых широтных изменений надо еще отметить следующее. Если в результате изменений широты имело место какое-либо изменение облучения Земли и ее температуры, то оно в диаметрально противоположных четвертях земного шара должно происходить в одинаковом смысле, а смежных с ними — в противоположном. Повидимому, так оно и было на самом деле: считается, что Япония и Южная Америка в более давнем четвертичном периоде были теплее, чем до и после него, Австралия же и Новая Зеландия, так же как Европа и Северная Америка, — холоднее. Точно так же в каменноугольную эпоху Южная Африка и Южная Америка были гораздо холоднее, а лежащие смежно с ними под теми же градусами долготы, но по ту сторону экватора, Европа и Северная Америка — значительно теплее, чем в настоящее время.

Другой путь для объяснения того факта, что в предчетвертичную эпоху отсутствовали ледниковые периоды, таков: принимавшаяся до сих пор вековая неизменяемость большой полуоси земной орбиты является лишь приближенной, поскольку мы отбрасываем в наших разложениях степени манссы выше второй. Следовательно, строго говоря, полуось земной орбиты a также изменяема, хотя, вероятно, в весьма слабой степени. Однако если речь идет о чрезвычайно долгих промежутках времени, как в данном случае, то эти изменения, несмотря на то, что их границы, несомненно, весьма тесны, в итоге могли бы иметь немаловажное значение. Если при этом получатся изменения, доходившие до 2% современного значения полуоси земной орбиты, то вызываемые ими изменения облучения Земли будут величиной того же порядка, как и изменения, вызванные остальными тремя астрономическими элементами. В этом случае при вычислении векового хода облучения для очень длинных промежутков времени необходимо наряду с тремя элементами e , e и Π учитывать еще и четвертый — a ; этот последний элемент, имеющий весьма длинный период, перед на-

ступлением четвертичной эпохи, возможно, свел на-нет влияние остальных трех элементов. Математическое разрешение этого вопроса является чрезвычайно трудной проблемой небесной механики, в настоящее время ставшей весьма актуальной.

Вышеизложенная теория колебаний климата дает нам возможность ответить также и на интересный вопрос о климатах будущего. Все необходимые для изучения этого вопроса предварительные данные мы имеем в современной климатической и географической картине земной поверхности. Однако в настоящей работе мы не имели возможности заняться этой проблемой, которая будет разобрана нами в другом месте.

ЛИТЕРАТУРА

Настоящая книга является развитием следующей работы:

Milankovitch, „Théorie mathématique des phénomènes thermiques, produits par la radiation solaire“, Paris 1920 (обозначается в тексте кратко „Théorie mathématique“...), которая впервые дала систематическое математическое исследование всего комплекса тепловых явлений, зависящих от лучистой энергии Солнца, применив его к изучению климата в Земли и палеоклимата, а также к изучению тепловых условий других планет.

Благодаря такой широкой постановке вопроса могли быть использованы лишь очень немногие прежние работы в этой области, если не считать классических трудов по небесной механике и сферической астрономии, а также капитальных исследований Шварцшильда и Эмдена, приведенных ниже.

Все эти замечания относятся и к данной переработке.

В следующем перечне литературы приведены все достойные упоминания работы, связанные с разработанными в этой книге проблемами.

К разделу I.

Halley, A discourse concerning the proportional heat of the sun in all latitudes, „Philosoph. Trans, т. XVII, 169.

Lambert, Pyrometrie oder vom Maasse des Feuers und der Wärme, Berlin 1779.

Meech, On the relative intensity of the heat and light of the sun, „Smithsonian Contributions“, т. IX, Wash. 1856.

Wiener, Über die Stärke der Bestrahlung der Erde durch die Sonne in den verschiedenen Breiten und Jahreszeiten, „Ztschr. f. Mathem. u. Physik“, т. XXII, 1877.

Hargreaves, Distribution of solar radiation on the surface of the earth and its dependence on astronomical elements, „Trans. of Camb. Philosoph. Soc.“, т. XVI, 1896.

Milankovitch, Über die Verteilung der Sonnenstrahlung auf der Erdoberfläche. „Berichte der königl. Serbischen Akademie“, т. CXL, 1913.

Milankovitch, Kalorische Jahreszeiten und deren Anwendung im paläoklimaten Problem, там же, т. CIX, 1923.

К разделу II.

Bouguer, Traité d'optique sur la gradation de la lumière, Ouvrage posthume, publiée par l'abbé Lacaille, Paris 1760.

Lambert, Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrarum, Augustae Vindelicorum (Augsburg) 1760.

Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822.

Poisson, Théorie mathématique de la chaleur, Paris 1835.

Thomson, W. On the reduction of observations of underground temperatures, „Trans. of R. Soc. of Edinburgh“, т. XXII, 1860.

Angot, Recherches théoriques sur la distribution de la chaleur à la surface du globe, „Annales du Bureau Centr. Mét. de France“, Mémoires de 1883, Paris 1885.

Zenker, Die Verteilung der Wärme auf der Erdoberfläche, Berlin 1888.

Zenker, Der thermische Aufbau der Klimate aus den Wärmewirkungen der Sonnenstrahlung und des Erdinneren, Halle 1895.

Schwarzschild, Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre, „Nachr. d. Königl. Ges. d. Wiss. Göttingen“, 1906.

Kühl, Der jährliche Gang der Bodentemperatur in verschiedenen Klimaten, „Gerlands. Beitr. zur Geophysik“, T. VIII, 1907.

Emden, Über das Strahlungsgleichgewicht und die atmosphärische Strahlung, „Münch. Sitzungsber.“, 1913.

Milankovitch, Zur Theorie der Strahlenabsorption in der Atmosphäre, „Annalen der Physik“, T. 43, 1914. „Annales of the astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution“, T. II, 1908; T. III, 1913; T. IV, 1922.

Milankovitch, Die Oszillationen der Temperatur in den verschiedenen Schichten der Atmosphäre, „Ber. d. Königl. Serb. Akad.“, T. CXXXIV, 1929.

К разделу III.

Lagrange, Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale de Berlin, 1781—1782. Напечатано в V томе „Oeuvres de Lagrange“, Paris 1870.

Laplace, Traité de Mécanique Céleste, 5 томов, 1-е изд.; Paris 1798—1825; 4-е изд.; Paris 1878—1882.

Adhémar, Révolutions de la mer, déluges périodiques, Paris 1842, 2-е изд., Paris 1860.

Leverrier, Recherches astronomiques, „Annales de l'Observatoire impérial de Paris“, T. T. I et II, 1855—1856.

Stockwell, Memoir on the secular variations of the elements of the eight principal planets, „Smithsonian Contributions“, T. XVIII, Washington 1873.

Croll, Climate and time in their geological relations, a theory of secular changes of the earth's climate, London 1875.

Croll, Discussion on climate and cosmology, London 1889.

Darwin G. H., On the influence of geological changes of the earth's axis of rotation, „Philosoph. Trans. of the Society“, ч. I, T. 167, 1877.

Darwin G. H., On the precession of a viscous spheroid and on the remote history of the earth, там же, ч. II, T. 170, 1879.

Обе последние работы напечатаны в собрании сочинений:

Darwin G. H., Scientific Papers, T. III и T. II, 1910 и 1908.

Schiaparelli, De la rotation de la terre sous l'influence des actions géologiques, Mémoire, présentée à l'Observatoire de Poulkovo à l'occasion de sa fête semi-séculaire, Спб., Академия наук, 1889.

Ball, Astronomical theory of the glacial period. The cause of an Ice Age, London 1891.

Culverwell, A mode of calculating a limit to the direct effect of great eccentricity of the earth's orbit on terrestrial temperatures, showing the inadequacy of the astronomical theory of Ice Age and Genial Ages, „Philosoph. Mag.“, T. 38, 1894.

Harzer, Die säkularen Veränderungen der Bahnen der grossen Planeten, Leipzig 1895.

Ekholm, On the variation of climate, „Quarterly Journal of Royal Meteorological Society“, T. 27, 1901.

Pilgrim, Versuch einer rechnerische Behandlung der Eiszeit, „Jahreshefte d. Vereins f. vaterländische Naturkunde im Württemberg“, T. 60, 1904.

Pilgrim, Die Berechnung der Eiszeiten auf astronomisch-physikalischen Grundlage, Там же, T. 84, 1928.

Hann, Handbuch der Klimatologie, T. I, Stuttgart 1908.

Milankovitch, Über die Frage der astronomischen Theorien der Eiszeit. Köppen-Wegener, Die Klimate der geologischen Vorzeit, Berlin 1924.

Soergel, Die Gliederung und absolute Zeitrechnung der Eiszeitalters, Berlin 1925.

Hopfner, Mathematische Grundlagen zu einer astronomischen Theorie der Klimaschwankungen. „Gerlands Beiträge zur Geophysik“, T. XV, XVI, 1926—1927.

Graham, Über die Ausdehnung der Vereisungen Norddeutschlands und ihre Einordnung in die Strahlungskurve, „Leipziger Sitzungsberichte“, T. LXXX, 1928.

Wegener, Die Entstehung der Kontinente und Ozeane, Braunschweig 1929 (4-е изд.). Есть русский перевод: А. Вегенер, Происхождение материков и океанов, М. 1925.

Eberl, Die Eiszeitfolge im nördlichen Alpenvorlande, Augsburg 1930.

Milankovitch, Astronomische Theorie der Klimaschwankungen, „Berichte der Königl. Serb. Akad.“ 1930.

Добавление

А. Хргиан

КЛИМАТЫ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ЭПОХ И ПЕРЕМЕЩЕНИЕ МАТЕРИКОВ

Как уже было указано раньше, современная математическая теория колебаний климата, так блестяще проверенная и подтвержденная изучением отложений четвертичного периода, не может помочь проследить с такой же уверенностью климаты более древних периодов. Для этого нам нехватает прежде всего надежной астрономической основы, так как точность формул небесной механики в применении к таким отдаленным временам быстро уменьшается.

Нет сомнения, что климатические колебания и даже возникновение обширных оледенений имели место то тут, то там в течение различных геологических эпох (таковы, например, обширные ледники, существовавшие в южном полушарии в течение каменноугольного периода); но эти колебания, рассмотренные выше, в более ранние эпохи были перекрыты гораздо более глубокими изменениями климата, связанными с движением материков, перемещением полюсов и изменением географических широт.

Совершенно ясно, что если широта какого-либо места могла изменяться с каменноугольного периода до нашего времени на 40—50°, то тогдашний и теперешний климаты не имеют между собой ничего общего. Начиная с четвертичного периода по наше время, положение полюса изменилось лишь немного, и широты в средней Европе почти не изменились; поэтому здесь на первый план выступили астрономические причины колебаний климата. Этим объясняется успех предыдущих исследований и прекрасное согласование кривой хода солнечной радиации с геологическими явлениями. Изучая же климаты более ранних эпох, мы не можем пренебречь влиянием движения полюсов, а во многих случаях оно даже выступает на первый план.

Здесь не место излагать детали изящной и убедительной теории перемещения материков Вегенера — читатель найдет подробное изложение ее в известной книге А. Вегенера („Происхождение материков и океанов“, М.-Л., 1925). Сущность этой теории состоит, как известно, в том, что все материки — Америка, Европа, Африка, Австралия — в давно прошедшие времена составляли одно целое и только постепенно эта общая материковая глыба раскололась, и материки разошлись в разные стороны от центрального материка (Африки), как бы плывя по океану. Раньше всех откололись Австралия и Индия, затем Антарктика и, позднее всего, между юрским и меловым периодами, от Африки отделилась Южная Америка, причем береговые линии их и до сих пор

до такой степени сходны, что оба материка можно было бы плотно прижать один к другому без значительных щелей и разрывов.

На основе этой теории оказалось возможным построить схему климатов различных геологических эпох, которая по своей простоте и наглядности говорит сама за себя и служит в то же время веским доказательством перемещения материков. Когда Вегенер составил свои карты расположения материков в различные периоды, нанес на них места нахождения следов древних оледенений (морен и др.), сухих климатов (соли, гипса, песчаников, см. ниже) и влажных климатов и сравнил с теми данными о температуре и климате, которые дает нам изучение растительного и животного миров тех эпох, то оказалось, что в каждую эпоху на всем земном шаре можно проследить те главные климатические зоны, которые знакомы нам и теперь. На картах прежде всего обнаружались две полосы пустынь или степей, разделенные поясом влажных климатов, идущим вдоль большого круга земного шара. Этот круг в те времена, очевидно, являлся экватором. На тех картах, на которых можно было распознать полярные области, они лежали на расстоянии 90° от этого влажного пояса и на расстоянии 60° от ближайшей сухой полосы. Эти климатические зоны, во всем похожие на наши, конечно, занимали в течение геологических эпох совершенно иное положение, чем теперь, и перемещались по земной поверхности, следуя за перемещением полюсов по ней; но во всяком случае всегда существовали: пояс экваториальных дождей, пояс пустынь, умеренный пояс и „полярная шапка“. Даже в деталях распределение климатов обнаруживает многие знакомые нам черты: например, на восточных побережьях материков пояс пустынь прерывался, как это наблюдается и теперь в Восточной Азии, под действием влажных летних муссонов.

Конечно, другая конфигурация материков, другое распределение морских течений вносили свои изменения в систему климатов; размеры „полярной шапки“ были непостоянны, и она то отступала, то наступала вновь, не говоря уже о перемещении центра оледенения — полюса; но все же сходство с современностью дает нам в руки ключ к изучению климатов давно прошедших эпох. В свою очередь, это распределение климатических зон помогло установить положение полюсов в те или иные периоды и даже начертить кривые, описанные северным и южным полюсами по отношению к материкам.

Климат какой-либо местности в определенную эпоху зависел прежде всего от той климатической зоны, в которую попадала эта местность, т. е. от ее широты. Поэтому для того чтобы знать историю климата с древнейших времен, надо прежде всего знать „вековой ход широт“. После работ Вегенера мы знаем, что материка перемещались не как одно целое, а двигались в различном направлении и с различной скоростью. Поэтому можно начертить кривую перемещения полюса по отношению к определенному материка, — так сказать, кривую его относительного движения. Ниже дана табличка координат полюсов в различные эпохи, отнесенная к современной градусной сети Африки, начиная с каменноугольного периода и кончая нашим временем. Наиболее вероятные положения полюсов были следующие:

Северный полюс	Каменно-угольный период	Пермский период	Триасовый период	Юрский период	Меловой период	Эоцен	Миоцен	Начало четвертичного периода
Широта	30° N	35° N	50° N	47° N	47° N	45° N	75° N	70° N
Долгота	145° W	115° W	125° W	132° W	140° W	160° W	150° W	60° W

Южный полюс	Каменно-угольный период	Пермский период	Триасовый период	Юрский период	Меловой период	Эоцен	Миоцен	Начало четвертичного периода
Широта	30° S	35° S	50° S	47° S	47° S	45° S	75° S	70° S
Долгота	35° E	65° E	55° E	48° E	40° E	20° E	30° E	120° E

На рис. 22 изображен этот путь полюсов, отнесенный к Африке; остальные континенты нанесены как в их теперешнем положении, так и (штриховой линией) в положении, которое они занимали в каменноугольный период.

Очень трудно оценить в числах точность приведенных здесь координат полюса; можно полагать, что здесь возможны ошибки около 2° ; почти наверное ни в одном случае ошибка не превышает 5° .

Карты Вегенера позволяют без затруднений для любого заданного места найти последовательные значения его географической широты. Таким образом мы имеем прекрасный способ проследить всю последовательность климатов, которые сменились в этом месте в течение геологических эпох. Очень интересно знать для ряда точек земного шара изменения их широты — этот важнейший фактор изменения климата. Ниже дана табличка широт 27 пунктов, начиная с каменноугольного периода. При этом жирным шрифтом набраны широты тех мест, которые на 20° и более лежали ближе к экватору, чем теперь; точкой же отмечены те места, широта которых была на 20° и более больше ее современного значения. Таким образом мы на основании этой таблицы имеем наглядное представление о том, в каком отношении геологический климат отличался от современного. Таблица показывает, например, что в Северной Америке и Северной Азии и особенно в Европе большинство геологических периодов было теплее, чем в наше время, и что в Южной Азии, Южной Америке, Южной Африке и Австралии наблюдалось как раз обратное явление. Если бы геология зародилась не в Европе, а в Африке или Австралии, то едва ли могло возникнуть неправильное представление о постепенном охлаждении Земли.

	Каменно-угольн. период	Пермская эпоха	Триасовый период	Юрская эпоха	Меловая эпоха	Эоцен	Миоцен	Начало четвертичного периода	Наше время
Северн. Америка:									
Гора св. Илии	50	66.	78	75	74	58	78	66	60
Сан-Франциско	32	58	52	50	42	32	50	59.	38
Нью-Йорк	0	18	20	18	12	11	38	62	41
Сан-Луи	15	32	32	30	29	18	42	66.	39
Мексико	8	30	22	19	12	10	26	47.	19
Европа:									
Шпицберген	24	32	42	40	40	38	65	70	79
Лейпциг	0	13	20	19	18	15	39	53	51
Мадрид	9	14	16	13	10	0	30	50	40
Азия:									
Новосибирские о-ва	32	35	50	45	52	45	68	60	75
Иркутск	22	12	28	29	31	37	54	37	52
Токио	36	19	30	33	40	48	48	24	36
Батавия	-30.	-50.	-40.	-37.	-33.	-8	-13	-26.	-6
Коломбо	-82.	-69.	-68.	-69.	-70.	-58.	-24.	-18	7
Южная Америка:									
Панама	-10	15	6	0	-2	-17	6	31.	9
Арика	45.	-20	-30	-35	-42.	-45.	-20	5	-18
Рио-де-Жанейро	-63.	-40	-42.	-45	-50.	-62.	-24	1	-22
Пунта-Аренас	-55	-45	-60	-62	-63	-63	-57	-31	-53
Африка:									
Каир	-30	-15	-8	-10	-12	-15	14	27	30
Камерун	-46.	-29.	-27.	-28.	-32.	-40.	-10	11	4
Капштадт	-72.	-52	-	-65.	-70.	-80.	-51	-28	-34
Мадагаскар (середина)	-80.	-65.	-60.	-65.	-65.	-61.	-40.	-26	-19
Австралия:									
Перт	-78.	-72.	-67.	-70.	-70.	-40	-46	-51.	-32
Кап-Йорк	-43.	-70.	-60.	-55.	-41.	-15	-28	-40.	-11
Гобартоун	-55	-71	-76	-70	-60	-40	-55	-69	-43
Кристчерч	-41	-60	-68.	-58	-50	-22	-41	-57	-44
Антарктика:									
О-ва Сеймур	-55	-50	-68	-67	69-	-67	-64	-40	-64
Г. Эребус	-60	-64	-80	-75	68-	-53	-80	-80	-77

Отложения прошлых геологических эпох хранят в себе бесчисленные следы влияния климата тех времен. Ископаемые породы — растения и животные — во время своего образования или жизни были тесно связаны с климатом и позволяют судить о температуре, осадках и прочих метеорологических явлениях в те эпохи.

Ярче всего выражены следы больших оледенений суши, не говоря уже о том, что ископаемый лед в некоторых местах сохранился, погребенный под мощным слоем моренных отложений или торфа; моренные глины, валуны, ледниковые шрамы на подстилающих поверх-

ностях являются каждый раз неоспоримым доказательством существования в прошлом ледников.

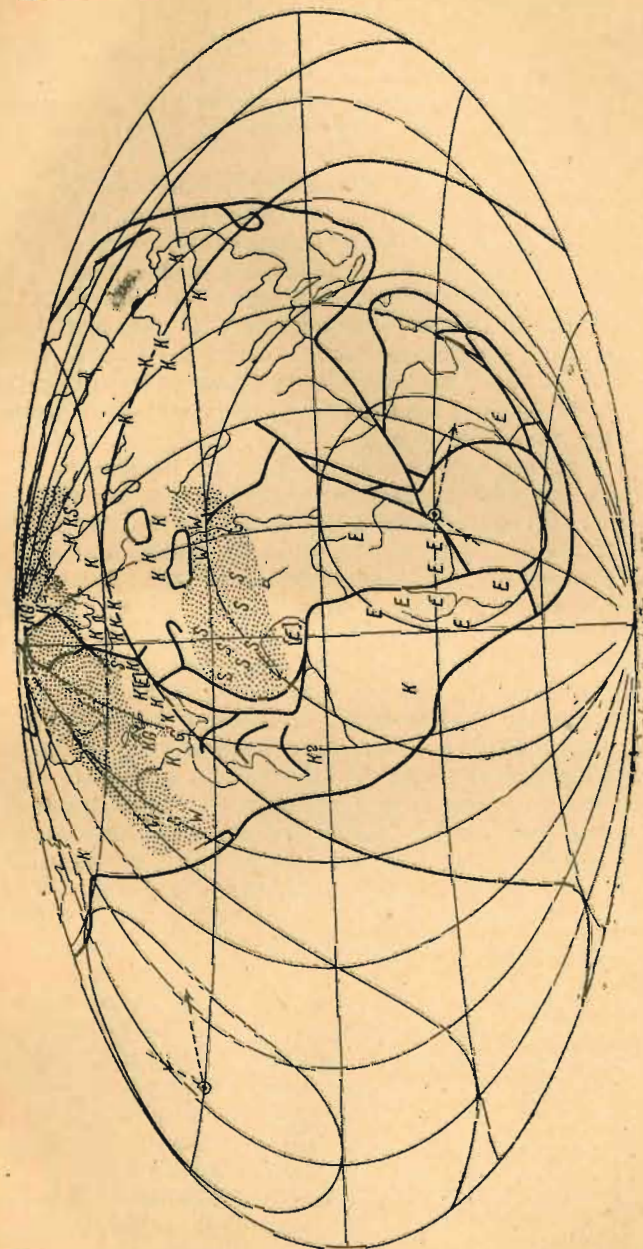


Рис. 22.

Другим важным свидетелем климатов прошедших времен является каменный уголь. Так как он образовывался из торфа, то, несомненно,

он является доказательством существования обширных болот, т. е. влажного и, вероятно, теплого климата. Многие авторы считают торфяные болота характерными только для умеренных климатов; но в настоящее время нет никакого сомнения, что в экваториальном поясе условия для образования мощных слоев торфа очень благоприятны. Слои каменного угля сохраняют в себе, кроме того, остатки многочисленных растений и деревьев, которые дают прекрасное представление о флоре этой эпохи.

Важнейшим остатком сухих климатов геологического прошлого являются отложения соли и гипса, а также песчаники, тесно связанные и в наше время с поясом пустынь и так называемыми конскими широтами. В климате, в котором испарение преобладает над осадками, соленые озера (остатки отступивших морей, вследствие так называемых трансгрессий) постепенно высыхают, причем сначала из них выкристаллизовываются менее растворимые соли, как гипс, затем поваренная соль и далее соли калия и магния. Пласты соли и гипса встречаются в отложениях всех эпох и позволяют установить положение пояса пустынь в соответствующий период.

О пустынях свидетелем ствуют и песчаники, доказывающие отсутствие растительности и носящие нередко отпечатки следов животных и даже дождевых капель. Песчаные дюны и барханы тоже говорят нам о сухом климате, хотя далеко не всегда; так, в наше время они наблюдаются на побережьях Северного и Балтийского морей, где климат — умеренный и влажный. Зато расположение этих дюн позволяет узнать направление дующих во время их образования господствующих ветров.

Растения и животные являются несколько менее надежными свидетелями климата прошлого, так как они могут сами отчасти приспособляться к изменениям температуры, влажности и пр. Зная условия их жизни в наше время, мы не можем с полной уверенностью утверждать, что их потребности были такими же и в наиболее отдаленные геологические эпохи. Однако многочисленные и разнообразные растительные и животные остатки позволяют нередко очень детально восстановить карту климатических зон для какого-либо момента. Годовые кольца ископаемых деревьев доказывают, что и в те времена вегетационный период ежегодно прерывался зимой или сухим временем года. Обычно годовые кольца доказывают наличие умеренного климата.

Многое могут сказать нам о климате и остатки животных. Так, крупные хо однокровные пресмыкающиеся могли жить только в теплом или даже тропическом климате и т. д. Далее известно, что кораллы, строящие свои атоллы, барьеры, рифы и пр., могут расти и развиваться только в теплых морях, где температура не падает ниже 22°, что соответствует примерно температуре воздуха в самый холодный месяц около 18°. Таким образом холодное Гумбольдтово течение у берегов Южной Америки оттесняет границу распространения коралловых известняков почти до самого экватора, в то время как западнее, в Тихом океане, они распространены от 28° северной широты до 28° южной широты. Находя коралловые известняки в геологических отложениях, можно, следовательно, составить себе представление

о температуре морей в то время и о существовании теплых и холодных течений.

Пользуясь всеми этими свидетельствами о климате прошлых эпох, геологи и геофизики с большей или меньшей точностью восстановили ту цепь изменений климата, которая наблюдалась на Земле с древнейших времен. Но прежде чем перейти к изучению схем климатов в ту или иную эпоху, мы должны для более легкой ориентировки привести здесь названия последовательных геологических периодов в том порядке, как мы наблюдаем геологические наслоения, т. е. начиная от нашего времени.

- | | | | |
|----------------------|---|--|--|
| А. Кайнозойская эра. | 1. Аллювий | } Четвертичная эпоха. | |
| | 2. Диловий (ледниковый период, плейстоцен) | | |
| | 3. Третичная эпоха: | а) Плиоцен
б) Миоцен
в) Оligоцен
г) Эоцен
д) Палеоцен | |
| В. Мезозойская эра. | 4. Меловой период: | а) Сенон
б) Турон
в) Сеноман
г) Гольт
д) Неокон | |
| | 5. Юрский период: | а) Белая Юра (Мальм)
б) Бурая Юра (Доггер)
в) Черная Юра (Ливас) | |
| | 6. Триасовый период: | а) Кейпер
б) Раковистый известняк
в) Пестрый песчаник | |
| | 7. Пермский период: | а) Цехштейн
б) Красный лежень | |
| С. Палеозойская эра. | 8. Каменноугольный период: | а) Продуктивный слой
б) Кульм | |
| | 9. Девонский период | | |
| | 10. Силурийский период | | |
| | 11. Кембрийский период | | |
| | 12. Докембрийский период (алгонкии и т. д.) | | |
| | D. Архейская эра, | (гнейсы, кристаллические сланцы, не содержащие органических остатков) | |

У нас здесь нет места, чтобы рассмотреть по порядку климатические условия всех эпох, и мы остановимся только на наиболее характерных и важных моментах истории климата.

Вегенер составил свои карты распределения материков, начиная с каменноугольного периода, для которого наблюдения позволяют впервые установить довольно точно положение полюса, экватора и климатических зон (в том числе и довольно обширных полярных зон, много-

численные следы которых обнаружены в Средней и Южной Африке, Южной Америке, Австралии и т. д.). Заметим здесь, что только в каменноугольном периоде наблюдалось оледенение обширных пространств; в его отложениях найдены ледниковые морены, ледниковые шрамы, проведенные вмержшими в движущийся лед камнями на подстилающей поверхности, моренные глины и пр. Все это — не следы отдельных горных ледников, а скорее свидетели огромной глыбы материкового льда, покрывавшей околополярные холодные области. Детальное изучение этих отложений как будто указывает на то, что ледники каменноугольного периода наступали 2—3 раза, совершенно так же, как это наблюдалось в Европе позднее, в четвертичную эпоху.

В каменноугольный период все материки еще составляли единую глыбу, которая только позднее раскололась и дала начало современным шести частям света. Южный полюс находился недалеко от Южной оконечности Африки, к которой примыкали Австралия, Антарктика и Южная Америка; неудивительно поэтому, что эти страны, так удаленные теперь друг от друга, находились тогда одновременно под полярной ледяной шапкой (см. рис. 22).

В этот период впервые наблюдается богатая жизнь на суше, в особенности богатая растительность. Многочисленные остатки этой растительности в виде мощных слоев каменного угля очень облегчают задачу изучения климатов того времени. Наиболее значительные залежи каменного угля в это время образовались на земной поверхности приблизительно вдоль большого круга, полюс которого совпадает с центром области оледенения. Нет сомнения, что эти слои угля произошли из огромных торфяных болот экваториальной зоны дождей там, где растительный мир развивался особенно пышно. Экватор проходил в это время через Мексику, восточные штаты Северной Америки (около того места, где сейчас стоит Нью-Йорк), далее через Среднюю Германию, Украину и пересекал северную часть Каспийского моря. Пройдя через Центральную Азию, он выходил к океану там, где в наше время стоит Нанкин.

В согласии с этим коралловые известняки были найдены в каменноугольных отложениях Ирландии и Испании; они доказывают, что эти страны в то время омывались очень теплыми морями, так как кораллы требуют для своего развития довольно высокой температуры воды.

Отложения каменного угля этой эпохи находятся в Северной Америке, Европе, СССР и Китае и позволяют не только установить положение экватора, но и проследить его постепенное перемещение (в Европе и Азии — к северу). Так, в Китае наиболее мощные слои угля, относящиеся к началу каменноугольного периода, найдены в южных провинциях — Сычуане; в конце этого периода образовались те пласты, которые найдены в северных провинциях — в Чжили и Манчжурии.

Остатки окаменелых деревьев, сохранившихся в каменном угле в этой зоне, не обнаруживают годовых колец; следовательно, экваториальный климат этих стран имел всегда ровную температуру и равномерные осадки, и рост дерева продолжался непрерывно круглый год.

Отложения соли и песчаники позволяют довольно точно установить положение сухих зон в каменноугольный период. Одна из этих зон находилась в Северной Африке, в Сахаре (там, где и сейчас находится величайшая пустыня мира), другая, более обширная занимала весь север Америки и Европы до самого Урала. Об этом говорят, например, мощные слои гипса в каменноугольных отложениях Шпицбергена и известные залежи соли на северном Урале. Здесь проходил пояс пустынь, где соль выкристаллизовывалась из соленых озер, морских мелких заливов и т. д. так, как это происходит сейчас в азиатских степях или на берегах Каспия. Действительно, в это время от Англии через Среднюю Европу до Урала простиралось соленое окраинное море, сначала сообщавшееся с океаном, находившимся на севере, затем отделившееся от него и постепенно высохнувшее благодаря сухому климату. При этом наблюдается любопытная смена слоев солей, выкристаллизовавшихся из морской воды; так как гипс CaSO_4 труднее растворим в теплой воде, то он осаждается сильнее всего летом; наоборот, поваренная и калиевые соли труднее растворимы в холодной воде, и в значительных количествах выкристаллизовываются зимой. Такие „годовые слои“, действительно, наблюдаются в каменноугольных отложениях и доказывают, что в зоне пустынь в это время происходила ясно выраженная смена времен года.

За пределами сухих зон в этот период были расположены, как этого и следовало ожидать, умеренно-влажные субполярные зоны. Они отмечены тоже многочисленными месторождениями каменного угля (например, в Южной Америке, Индии и т. д.). Так как температура здесь была гораздо ниже, чем под экватором, то и растительность здесь была менее продуктивна и слои угля гораздо менее мощны.

Раньше думали, что каменноугольный период отличался особенно жарким климатом и богатой углекислотой атмосферой. Эта идея возникла потому, что именно в Европе были найдены остатки богатой тропической растительности тех времен, и она даже привела к ложному выводу, что Земля тогда вообще имела более высокую температуру. Теперь мы должны отказаться от этого мнения, так как мы видели, что в каменноугольный период существовали те же климатические зоны, как и в наше время, но только они были иначе расположены. Некоторые части Земли в то время определенно имели полярный климат и были покрыты ледниками.

Таким образом на примере каменноугольного периода мы видели, как может быть восстановлена система климатов этих давнопрошедших времен с помощью данных геологии, геофизики и ботаники. Не имея места столь же подробно разбирать климат следующих за каменноугольным периодом, мы перейдем к ближайшему к нам четвертичному периоду, климат которого изучен, понятно, лучше остальных как с помощью математической теории соларного климата, так и по геологическим признакам.

В течение четвертичного периода положение полюсов приближалось постепенно к современному; материки имели уже знакомое нам расположение. Северный полюс в это время находился над Гренландией и еще во время миндельской фазы оледенения был на 5° ближе

к Европе, чем теперь, т. е. широты в Европе были на 5° больше. Это обстоятельство, несомненно, оказало свое влияние на обширное оледенение Европы. Карта (рис. 23), заимствованная у Кеплена-Вегенера, дает представление о метеорологических условиях Европы в это время. Обширный ледник на Скандинавском полуострове являлся, понятно, центром высокого давления (как, например, в наше время Антарктика). Второй, небольшой максимум давления находился над Альпами с их



Рис. 23.

мощными ледниками (не нанесен на карту). Во всей Средней Европе господствовали восточные ветры, выносившие из околледниковых областей массы лёсса и образовавшие здесь настоящие серповидные барханы, ориентированные с востока на запад. Лёссы и барханы доказывают, что ледниковые периоды были сравнительно бедны осадками. По всей вероятности область тундр, непосредственно окружавшая большой скандинавский и меньший альпийский центры оледенения, прямо переходила в довольно сухую травянистую степь. Такое соседство в наше время почти нигде не наблюдается, так как тундра

и степь везде разделены поясом лесов; оно может иметь место только у границ холодного антициклона. Наоборот, межледниковые периоды отличались более влажным климатом (об этом говорят остатки болот таежные в горных областях Альп) и вызвали к жизни растительность, очень похожую на знакомую нам растительность средних широт. В Средней Европе в это время росли на месте тундр и степей ледникового периода леса из ели, сосны, дуба, черной ольхи, бука, липы, тополя и т. д. Некоторые растительные остатки указывают даже на более теплый климат по сравнению с нашим; так, виноградная лоза и магнолия не растут теперь в северной части Германии в диком виде там, где они росли в течение межледниковых периодов.

Остатки рододендрона, не переносящего засухи, доказывают, что в это время количество осадков было не менее 1000 мм.

Север Америки в четвертичный период был занят обширным ледником, который в районе Великих озер достигал 38° северной широты. Центр оледенения, откуда растекался лед, находился вначале над Гудзоновым заливом, затем над Лабрадором. Этот ледник имел тоже ряд наступаний и отступаний, которые нетрудно отождествить с соответствующими ледниковыми периодами Европы, т. е. согласовать с кривой хода облужения Земли.

Вне области оледенения и в Северной Америке находятся обширные отложения четвертичного лёсса, вынесенного из районов ледниковых морен сильными антициклонными ветрами. В этой умеренной части Северной Америки четвертичный период был богат осадками, и уровень вод, например, в озерах Великого бассейна (бессточной области между Сьеррой-Невадой и Скалистыми горами) стоял гораздо выше, чем в наше время, когда мы имеем здесь уже полосу субтропических полупустынь. Это большое количество осадков объясняется тем, что благодаря более южному положению полюса и близости огромного ледника главные пути циклонов не проходили через Нью-Фаундленд и Великие озера, как теперь, а были оттеснены большим антициклоном к югу и следовали вдоль берегов Мексиканского залива. Во время межледниковых периодов отступление холодного антициклона позволяло вновь движущимся минимумам давления проникать далее к северу. Таким образом северная граница сухих областей ритмически колебалась параллельно отступанию и наступанию ледника, даже независимо от изменения положения полюса. Эти колебания границы сухих субтропиков были заметны не только в Америке: в четвертичном периоде не только Каспийское и Аральское моря занимали гораздо большее пространство, но и уровень озер Центральной Азии стоял от 10 до 75 м выше современного; на сухом теперь острове Скиросе (в греческом Архипелаге) рос рододендрон, требующий очень влажного климата. Все это объясняется более южным положением пояса пустынь в Европе и Средней Азии.

Любопытно, что в четвертичном периоде Аляска и северо-восточная Азия обладали более теплым климатом, чем теперь. Там, где мы видим в наше время обширнейшие в мире ледники (например Маласпина), тогда находились только незначительные массы льда на отдельных вершинах. Те отложения ископаемого льда, которые мы находим

сейчас под защитой позднейших наслоений торфа и пр. на севере Сибири и на Новосибирских о-вах, несомненно, имеют древнее происхождение (относятся к миоценовому периоду). В них сохранились трупы животных (мамонтов, носорогов), попавших в трещины и полости этого погребенного льда; но нет сомнения, что и мамонты и найденная там растительность четвертичного периода могли жить только в климате, значительно более теплом, чем господствующий там теперь; мы знаем, например, что для древесной растительности нужна летняя температура не ниже 10° (тогда, как на Новосибирских о-вах средняя температура июля около 3°).

Восточная Азия имела в четвертичном периоде несколько более теплый климат, чем теперь, прежде всего благодаря измененному положению полюса (широты были меньше, чем в наше время, примерно на 15°). Это подтверждают и некоторые остатки животных и растений, найденные в Японии.

В начале четвертичного периода Южная Америка, также и ее антипод (восточная Азия), обладала более теплым климатом; но к концу этого периода, когда полюс пришел почти в то же положение, которое он занимает в наше время, на южной оконечности американского материка образовались довольно значительные ледники. Как легко видеть из таблиц Миланковича, в южном полушарии последнее большое оледенение должно было иметь место значительно позднее, чем вюрмская фаза северного полушария, приходясь примерно за 30 000 лет до нашего времени, так что можно считать, что в районе Огненной Земли ледники ледникового периода отступили совсем недавно. Австралия и Новая Зеландия являются антиподом Европы и Америки, и, следовательно, изменения широт вели в них к одинаковым следствиям. Совершенно так же мы должны ожидать, что там наблюдались и ледниковые периоды. Однако Австралийские Альпы и Голубые горы вдвое ниже европейских, и в четвертичном периоде их широта никогда не превышала 60° ; так что оледенение было здесь незначительным, ослабляясь еще близостью моря. Не может быть и речи о наличии больших пространств материкового льда в Австралии в четвертичный период.

Остатки животных, очень похожих на современных, доказывают, что в Австралии в те времена господствовал теплый или умеренный климат.

В настоящее время трудно сомневаться в том, что перемещения полюсов и материков в геологические эпохи в той или иной мере имели место. Не говоря о других многочисленных доказательствах, без этого допущения было бы бесконечно трудно привести в систему и объяснить все те свидетельства о климате геологических периодов, которые нам известны. С точки зрения описательных наук перемещения полюса можно считать доказанными.

Не так давно (1932—1933) Миланкович, этот неутомимый исследователь палеоклимата, сделал попытку построить теорию перемещений полюсов, исходя из понятий классической механики. Приняв, что центр тяжести всех материковых глыб оставался неподвижным (упрощая задачу), Миланкович нашел, что полюс Земли в течение геологических эпох должен был описать кривую примерно от Гавайских о-вов через

Аляску к его современному положению, чтобы в будущем сместиться к устью Печоры. В пользу этого вывода говорят геологические данные в такой же мере, как и имя автора; но теория Миланковича вызвала такие ожесточенные нападки ряда исследователей (бросающие, правда, больше всего тень на их авторов), что сейчас еще преждевременно говорить с уверенностью о физических обоснованиях перемещения полюсов.