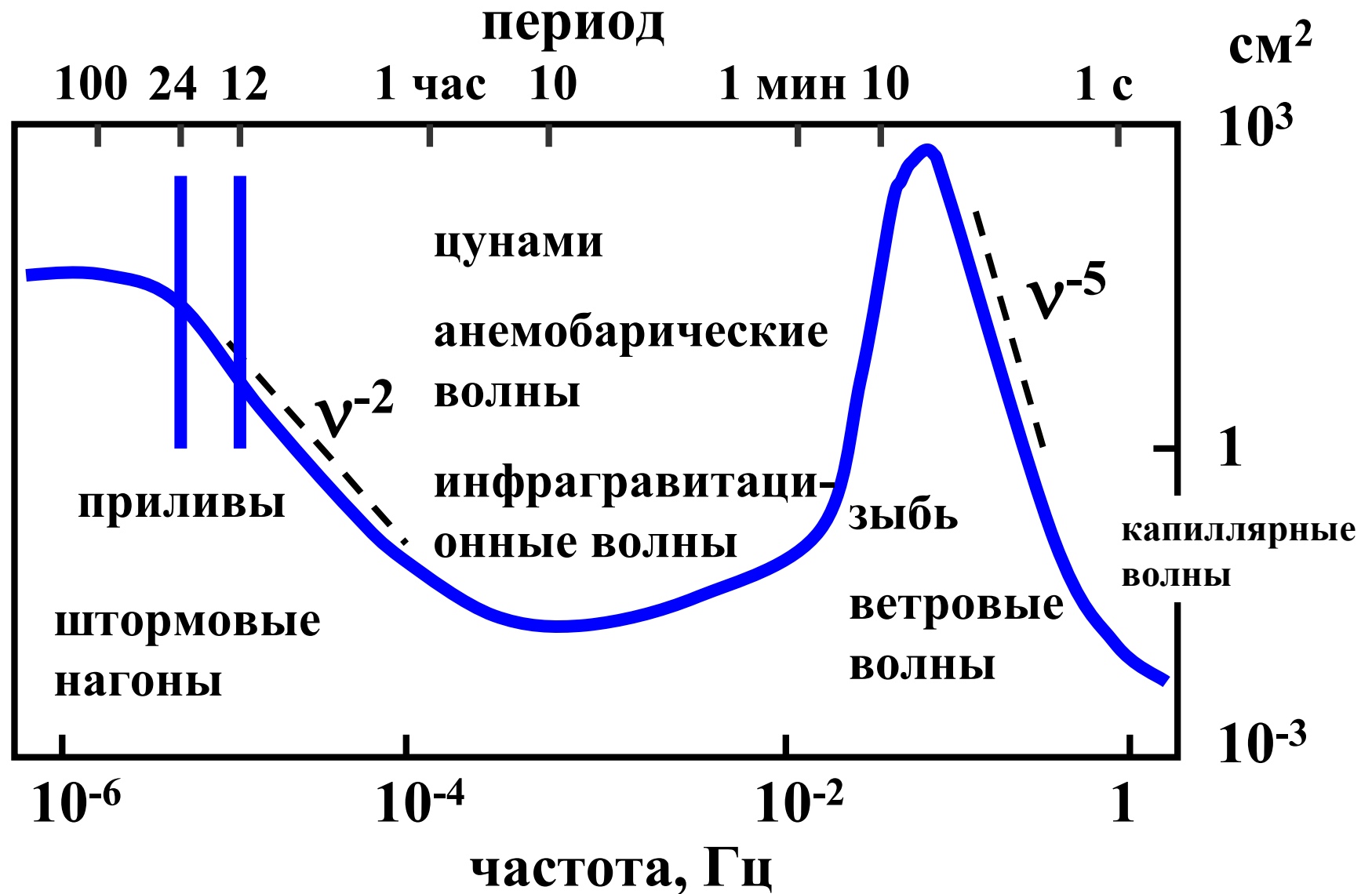
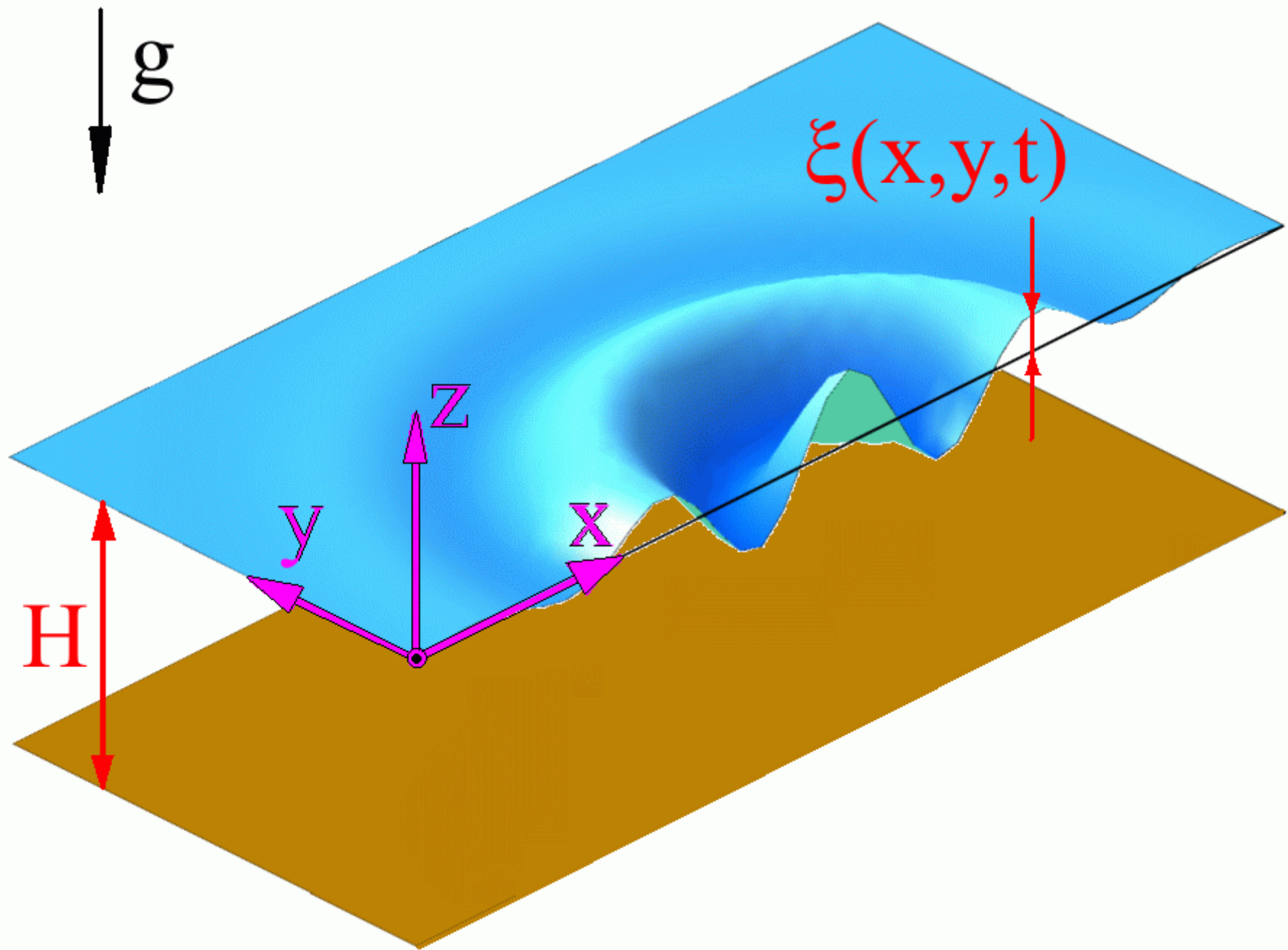


Гравитационные поверхностные ВОЛНЫ

Спектр гравитационных поверхностных волн в океане



**Математическое
описание волновых
движений**



$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{\left(\vec{v}, \vec{\nabla} \right) \vec{v}} = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + \cancel{\nu \Delta \vec{v}}$$

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\rho = \text{const}$$

Система уравнений для описания линейных гравитационных волн

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Граничные} \\ \text{условия:} \\ p|_{z=0} = p_{\text{атм}} \\ w|_{z=-H} = 0 \end{array}$$
$$\vec{v} \equiv (u, v, w)$$

Линейная теория

ДЛИННЫХ ВОЛН

ИЛИ

теория “мелкой воды”

($\lambda \gg H$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

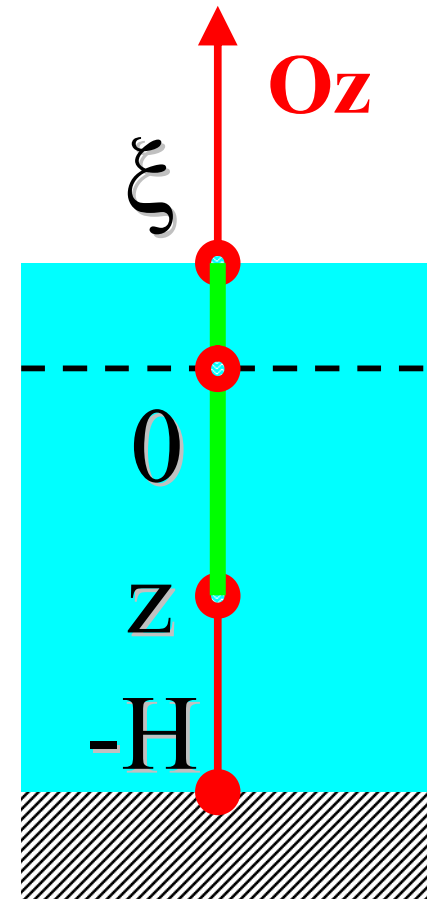
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

приближение
гидростатики

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad |w| \sim \frac{H}{\lambda} |u_{\text{гориз.}}|$$

$$p(\xi) = p_{\text{atm}} = \text{const}$$

$$\int_z^\xi dz \left| \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \right.$$



$$p(\xi) - p(z) = -\rho g \xi + \rho g z$$

$$p(x, y, z, t) = p_{\text{atm}} + \rho g \xi(x, y, t) - \rho g z$$

$$p(x, y, z, t) = p_{\text{atm}} + \rho g \xi(x, y, t) - \rho g z$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

 \Rightarrow

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

 \Rightarrow

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$(u, v) \neq f(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\int_{-H}^{\xi} dz$$

$$|\xi| \ll H$$

$$(H + \cancel{\xi}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + w(\xi) - w(-H) = 0$$

$$H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

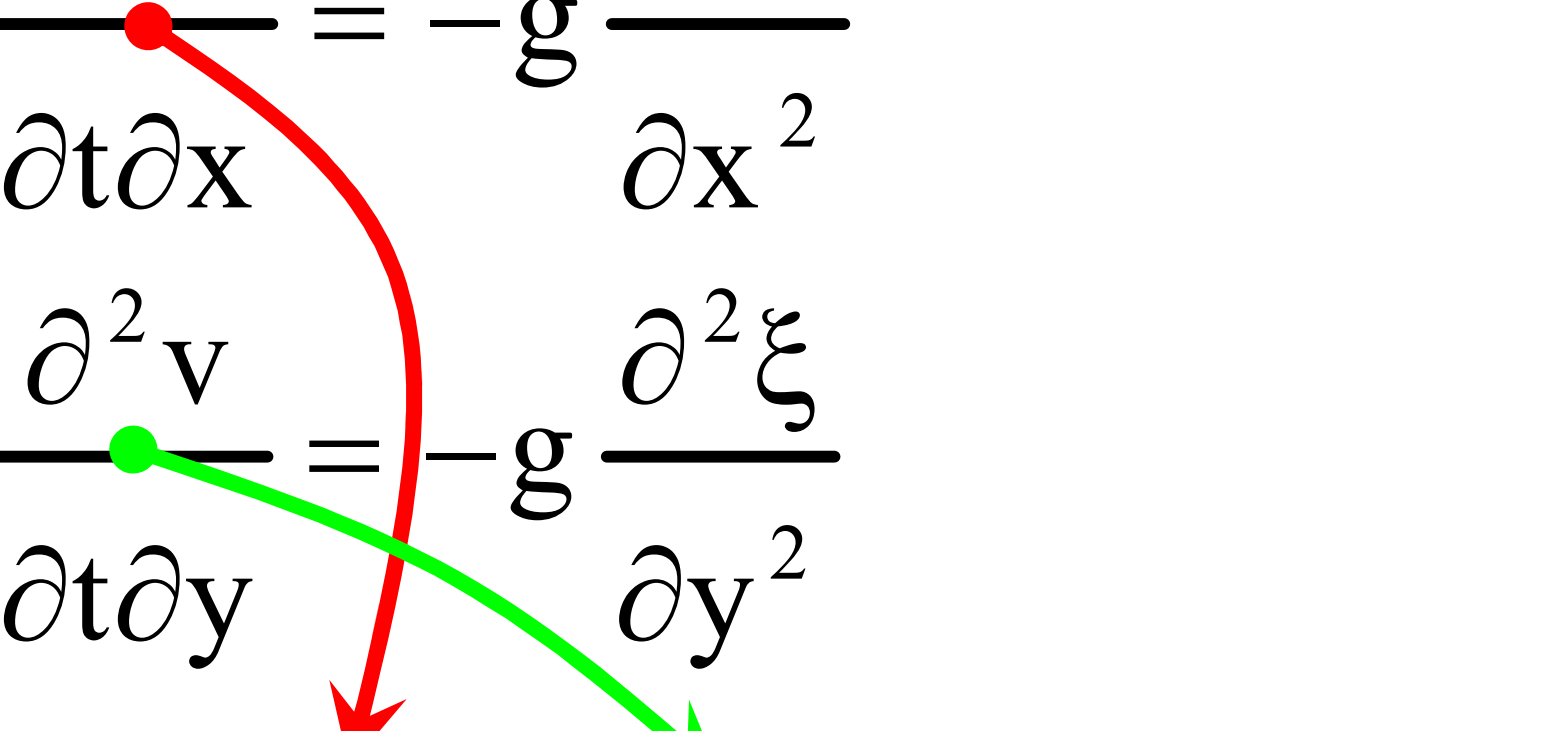
$$\frac{\partial}{\partial y}$$

$$H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -g \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} = -g \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$



A red arrow points from the red dot in the first equation to the first term in the third equation. A green arrow points from the green dot in the second equation to the second term in the third equation.

$$H \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)$$

$$c = \sqrt{gH}$$

**скорость
длинных волн**

Одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Решение:

$$\xi(x, t) = f(x \pm c \cdot t)$$

Скорость
распространения
волны – НЕ РАВНА
скорости движения
частиц воды!!!



Wow! We
can't outrun
this wave !



$c \approx 200 \text{ м / с}$

$c \approx 800 \text{ км / ч}$



$H = 4000 \text{ м}$

$$c = \sqrt{gH}$$

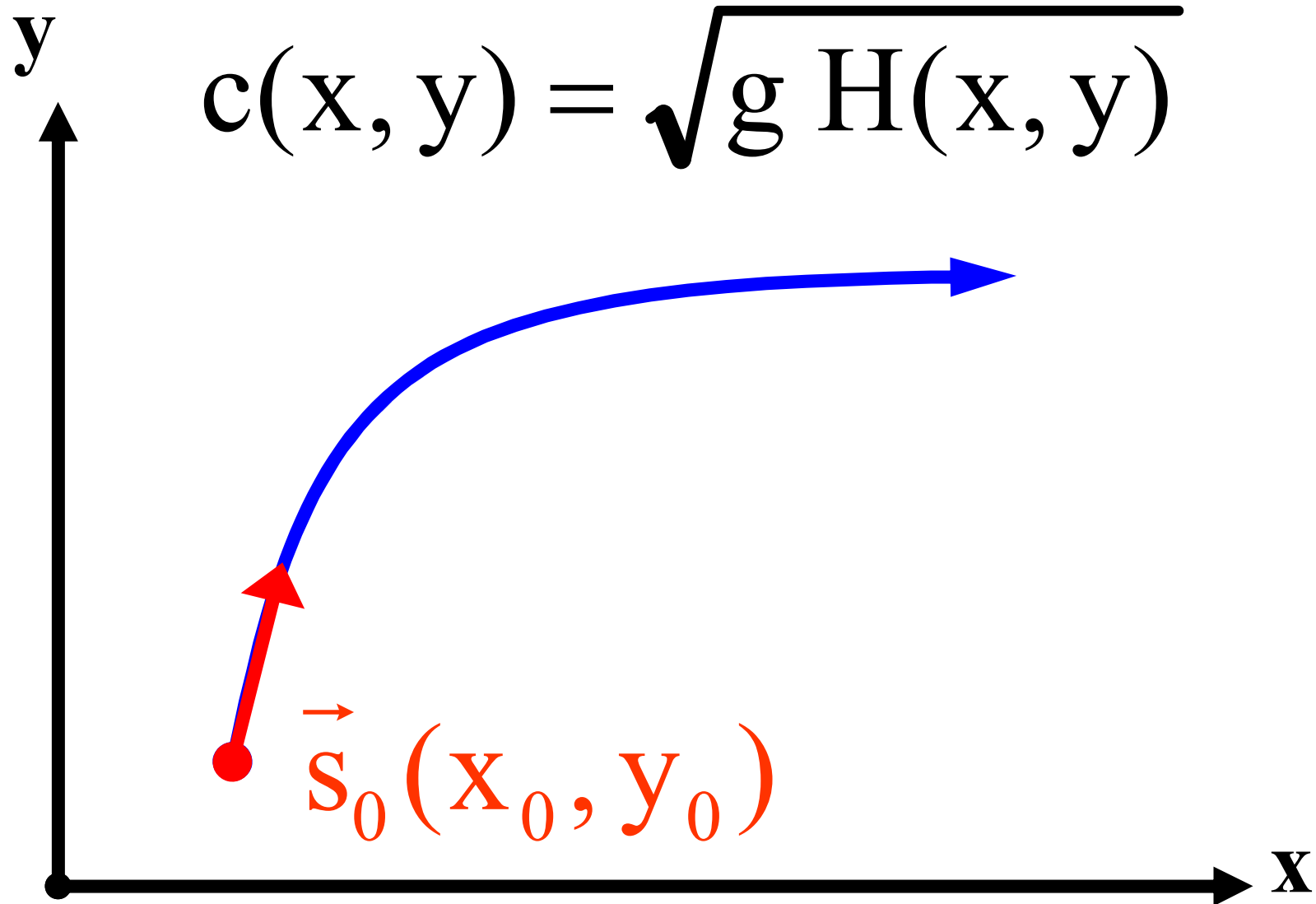
Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \operatorname{div} [c^2(x, y) \operatorname{grad} \xi]$$

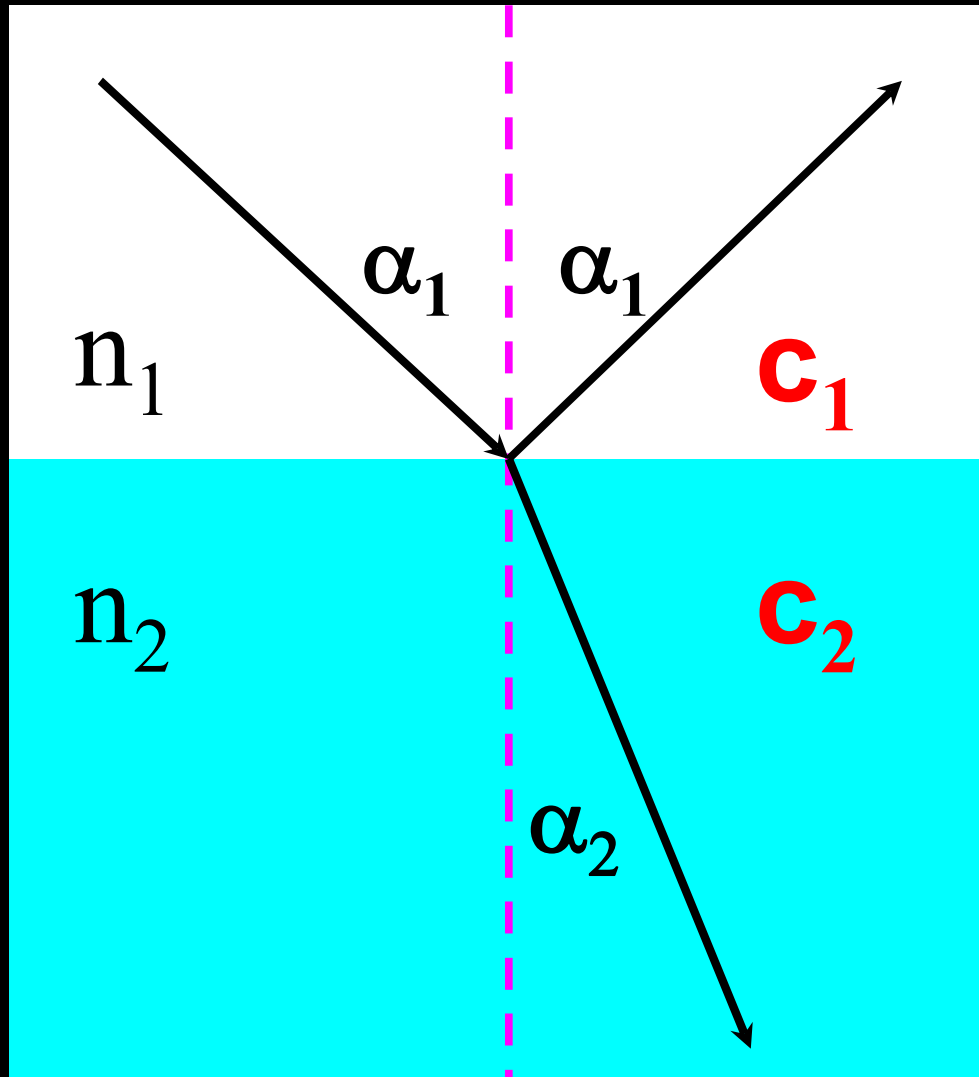
$$c = \sqrt{gH(x, y)}$$

**топография дна влияет на
распространение длинных волн !**

Приближение «геометрической оптики»



Закон Снеллиуса



$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$n = c_0 / c$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Рефракция



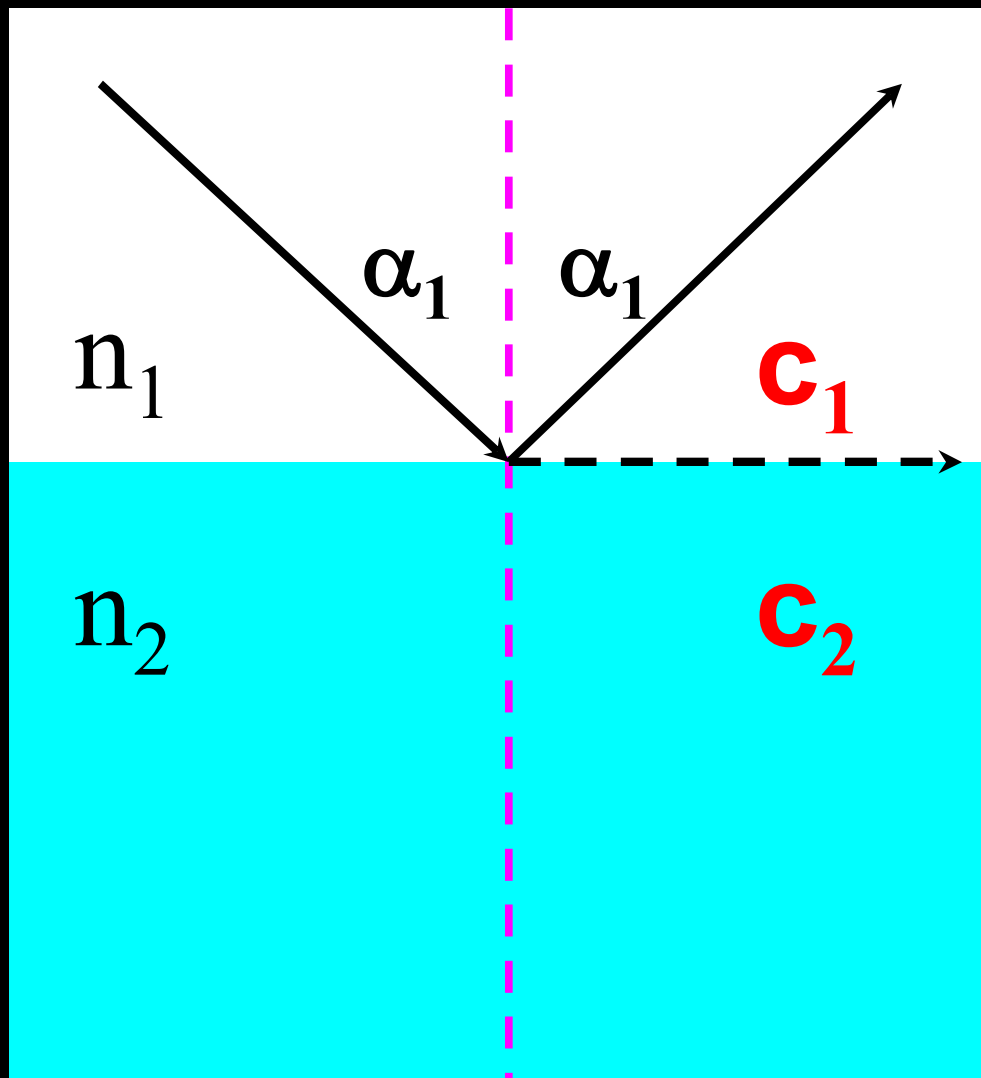
$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2}$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2}$$

$$\frac{\sin \alpha(z)}{c(z)} = \text{const}$$

Рефракция – изменение направления волновых лучей в среде c (плавно) изменяющейся в пространстве скоростью

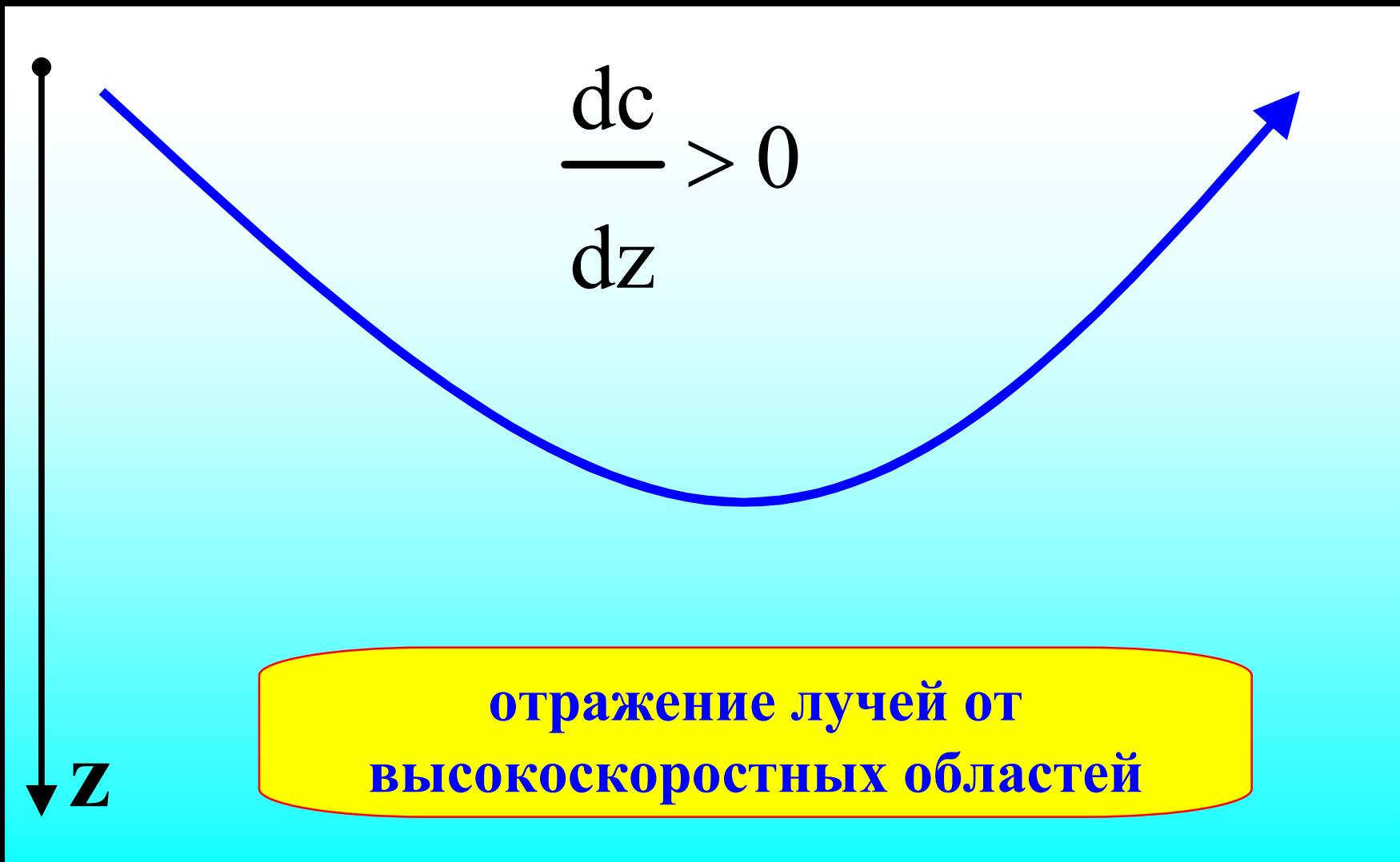
Полное внутреннее отражение

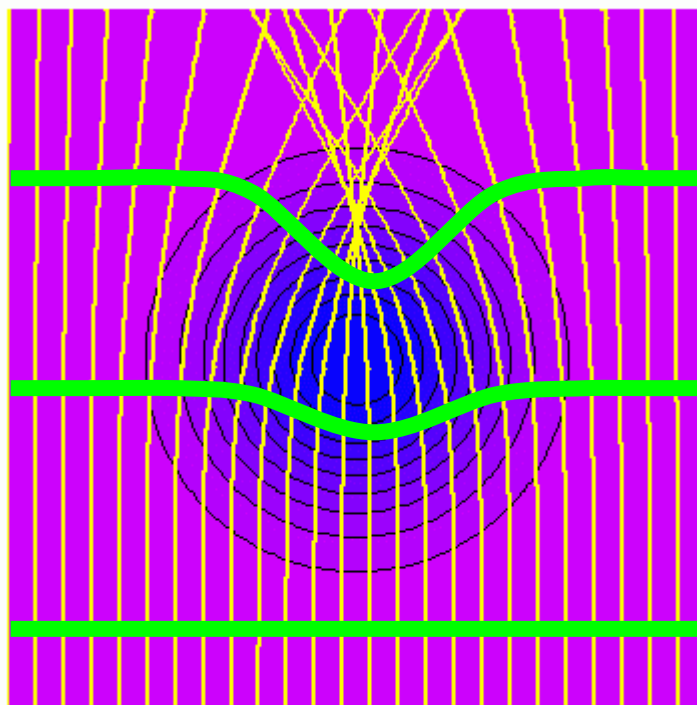
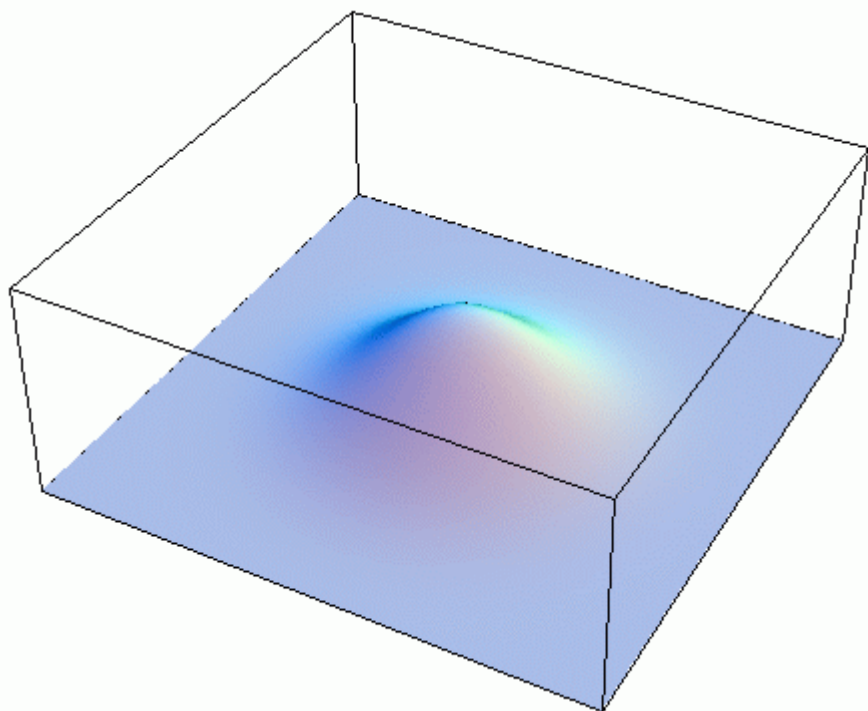


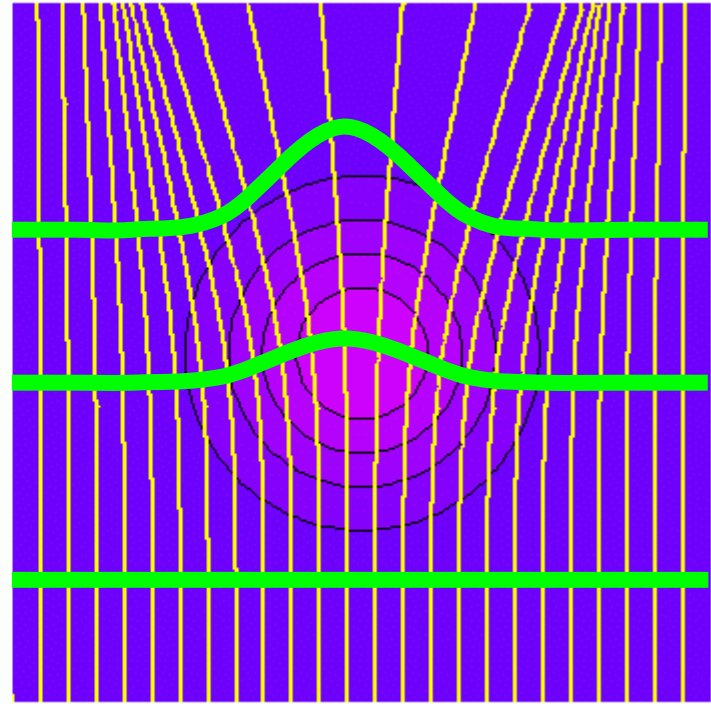
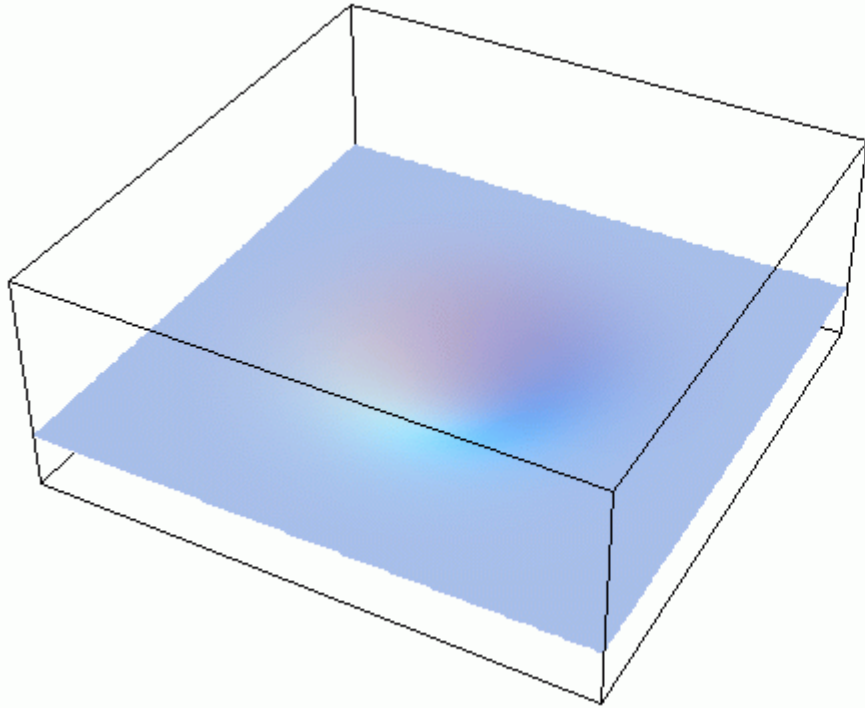
$$n_2 < n_1$$

$$c_2 > c_1$$

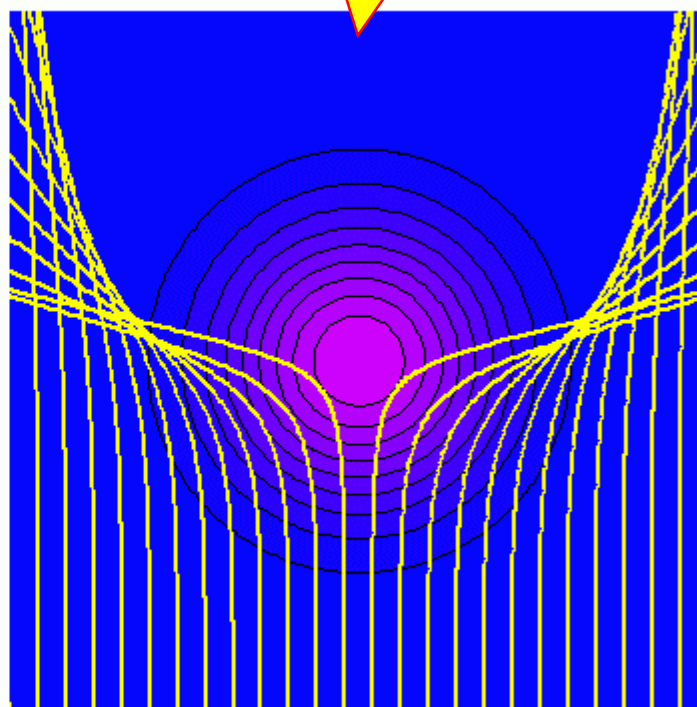
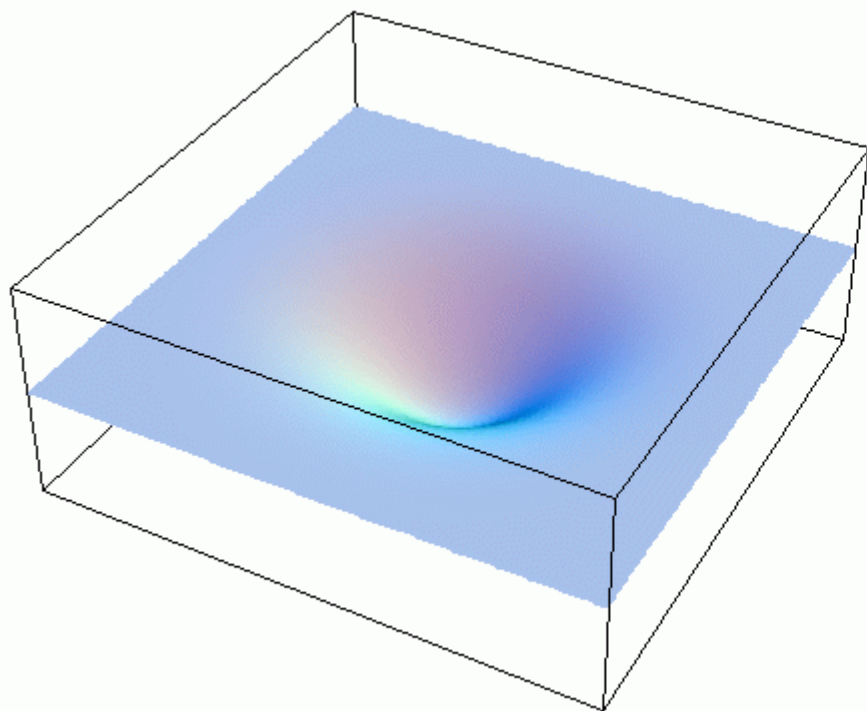
Полное внутреннее отражение



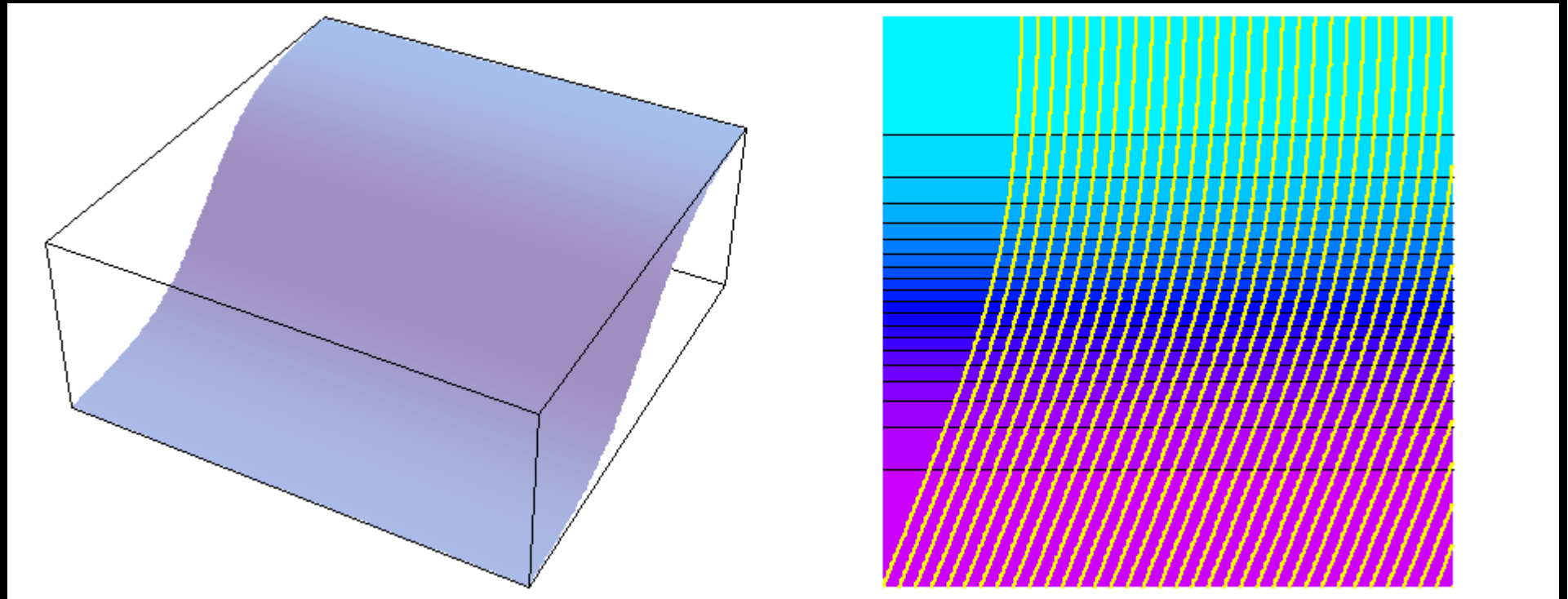




Зона тени

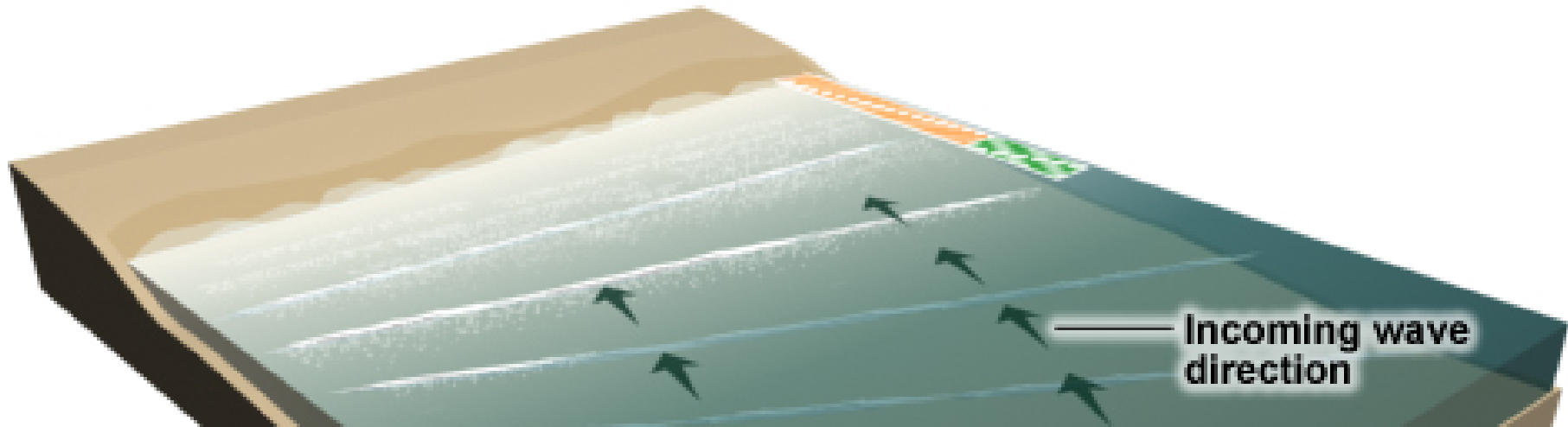


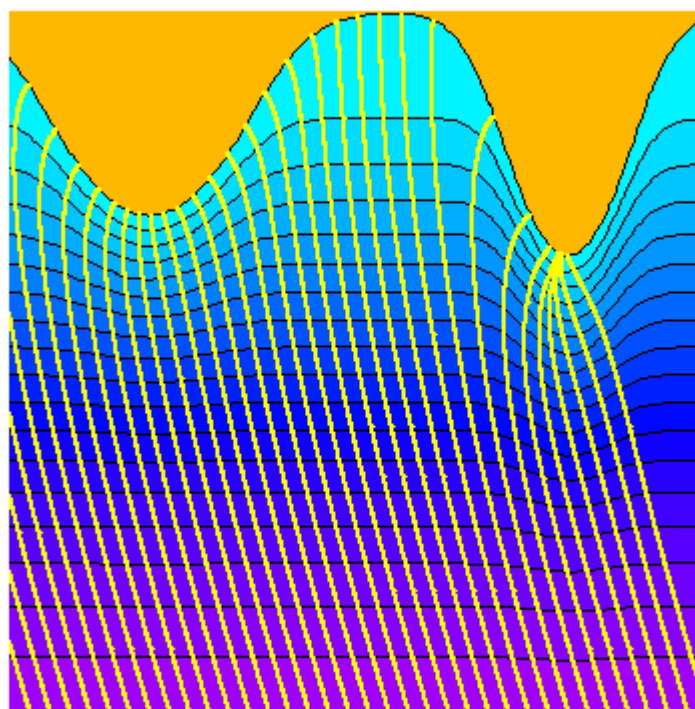
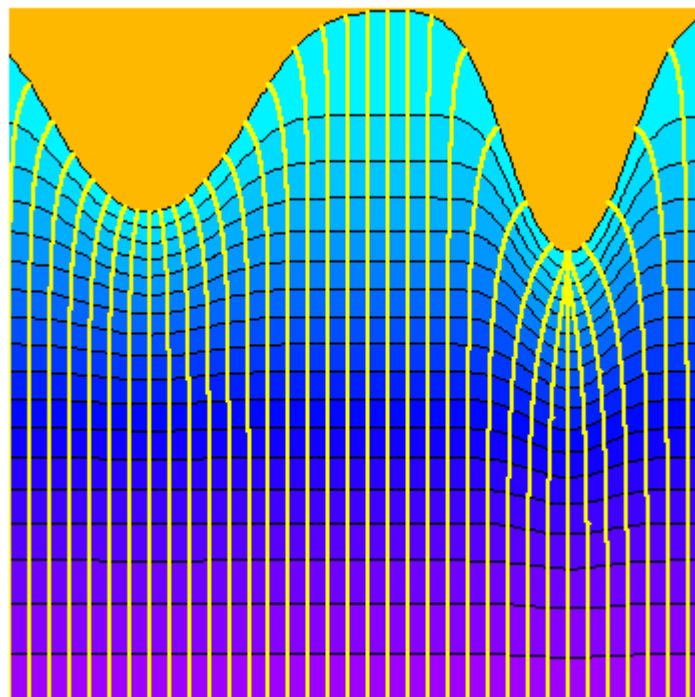
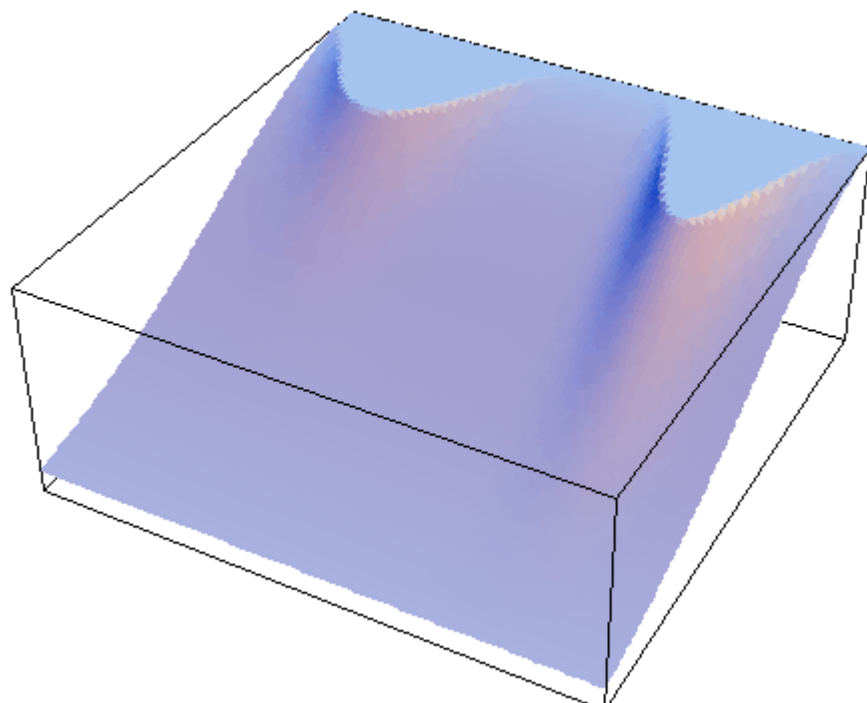
Рефракция волн в прибрежной зоне



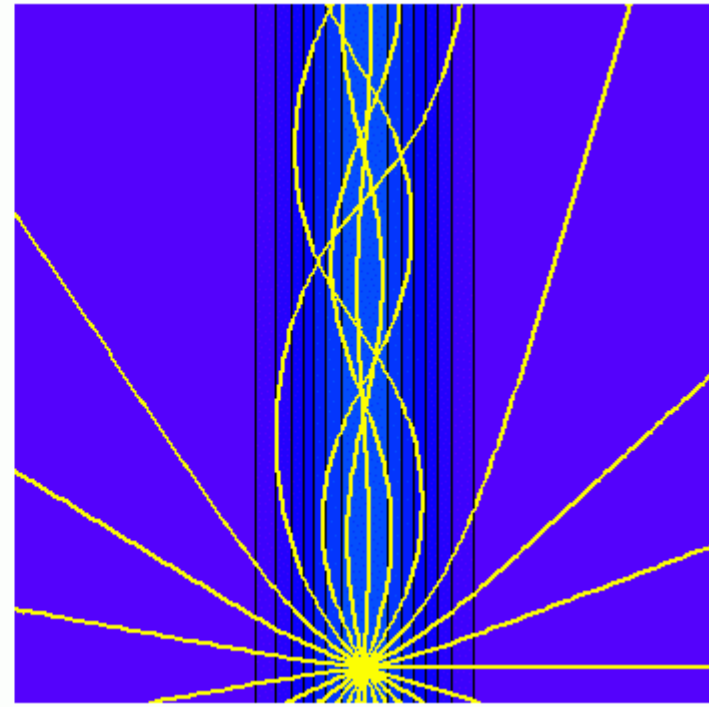
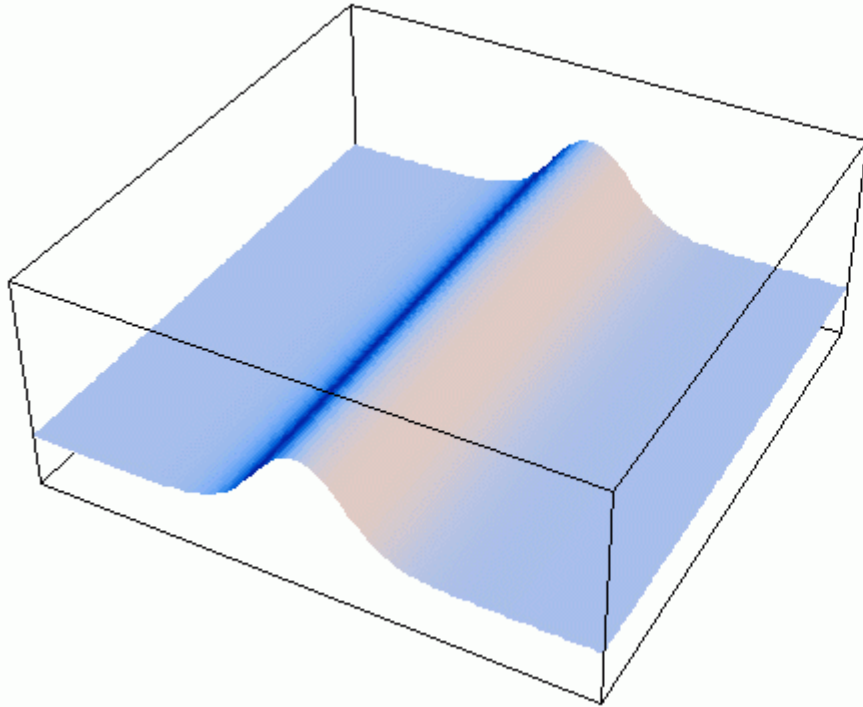
**Волновые лучи подходят к
побережью по нормали**

Refraction



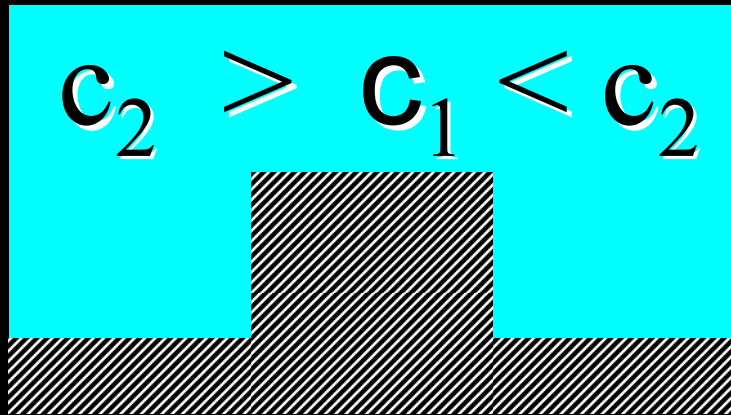


Захват волн подводными хребтами

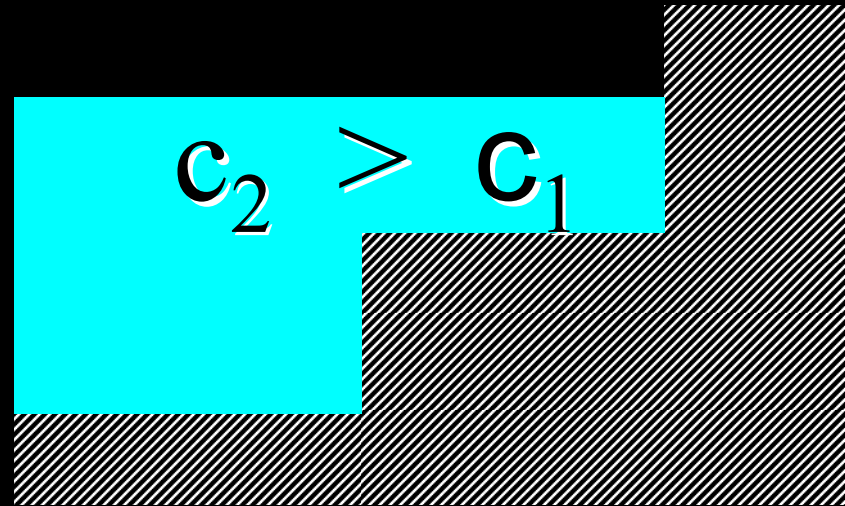


Захваченные волны

ПОДВОДНЫЙ
хребет



МАТЕРИКОВЫЙ
склон и берег



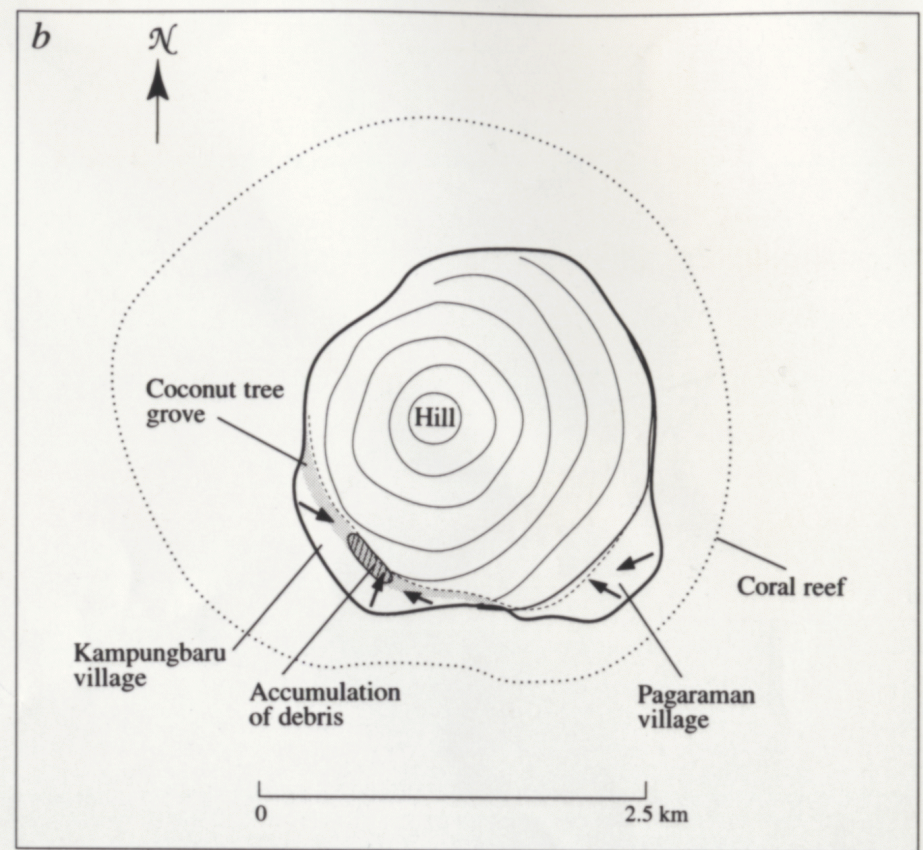
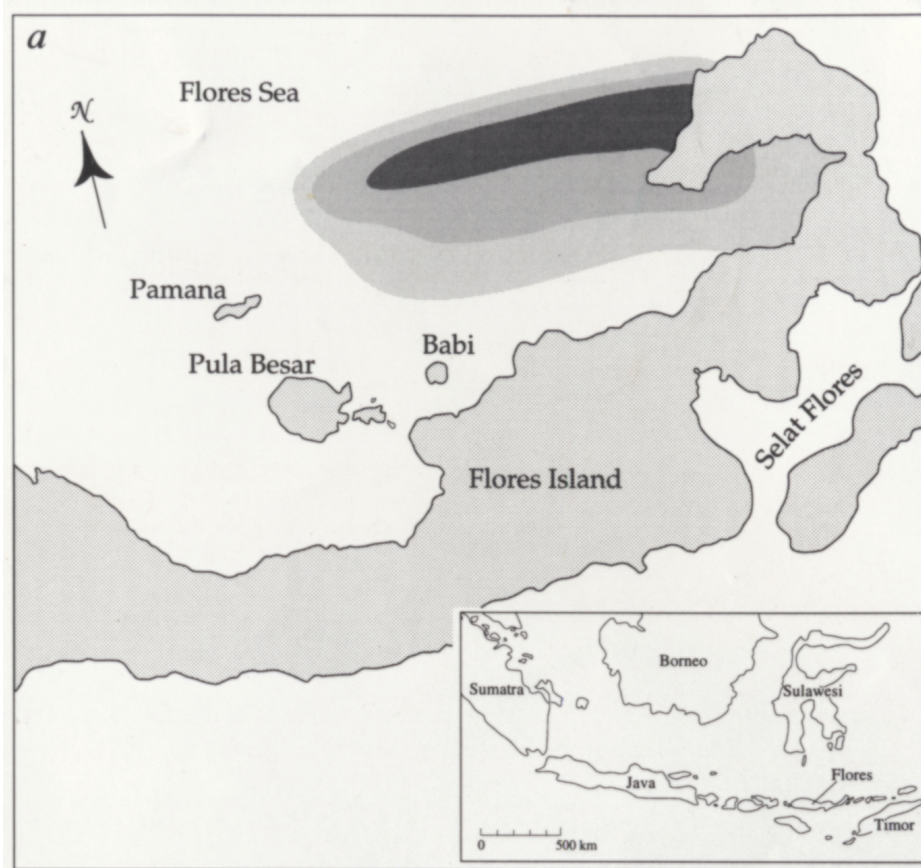


FIG. 1 a, Babi Island is located ~5 km offshore from Flores Island, Indonesia. Although detailed sea bottom sounding data are not available, the underwater slope from the island is steep: the 100-m-deep contour around the island is very close to the shore, one sounding in the narrow gap between Babi and Flores is 241 m deep, and the 860-m sounding point in the Flores Sea is 10 km from the island. The shaded areas in the Flores Sea, which represent 3-m, 2-m and 1-m contours, respectively, are estimated vertical tectonic displacement of sea floor where tsunamis were generated¹⁰. b, Details of Babi Island. Near the

middle of the south shore, there is a small tidal flat which separates Kampungbaru village (on the west side) from Pagaraman village (on the east side). Both villages were completely destroyed by the tsunamis. The tsunami run-up directions, indicated by solid arrow marks, were estimated from the directions of tree falls and debris accumulations (based on field notes taken by H.Y. and F. Imamura during the survey in 1992–93). The maximum tsunami run-up heights are 5.6 m in Pagaraman and 7.1 m in Kampungbaru, respectively.

from H. Yeh et al, 1994

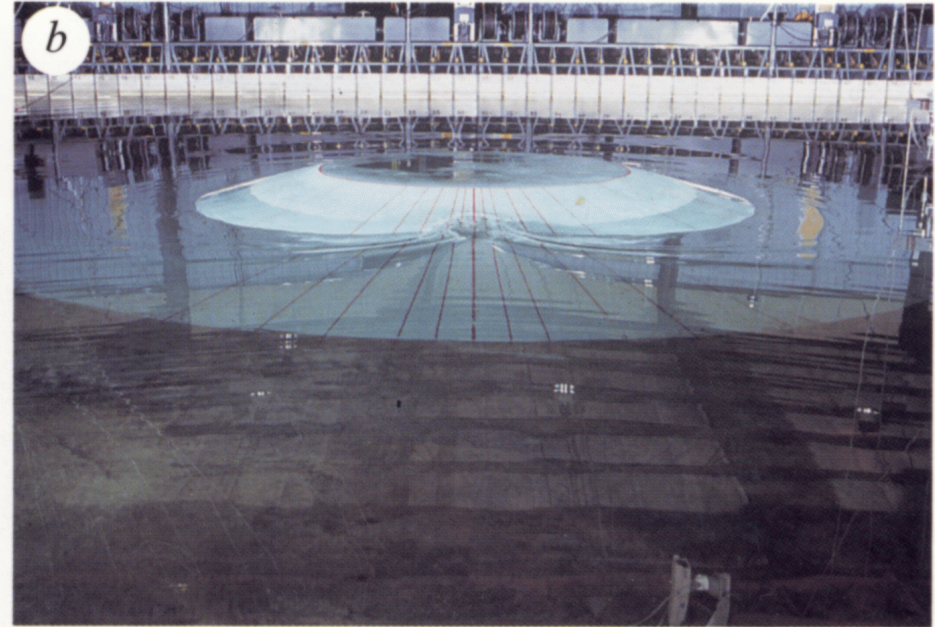
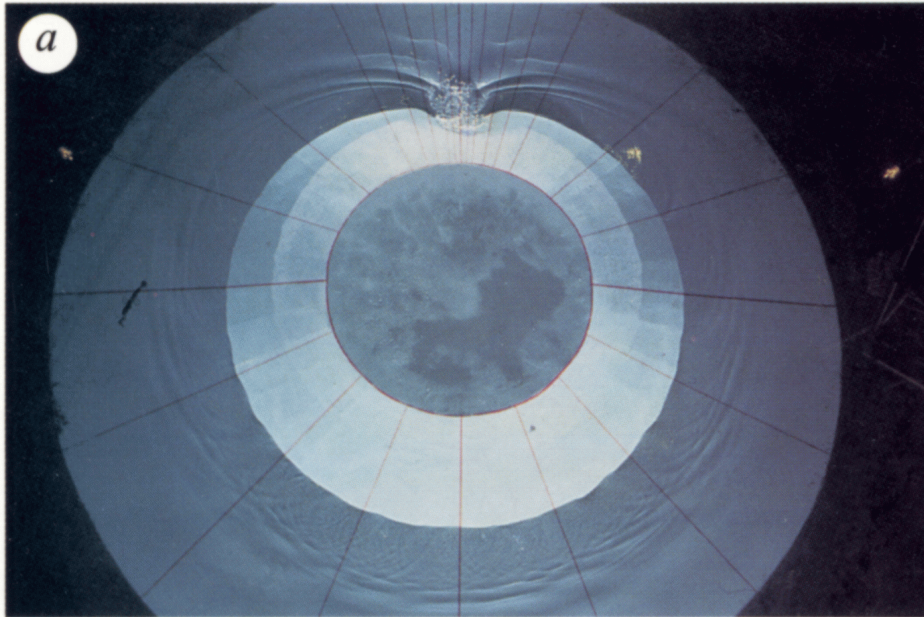
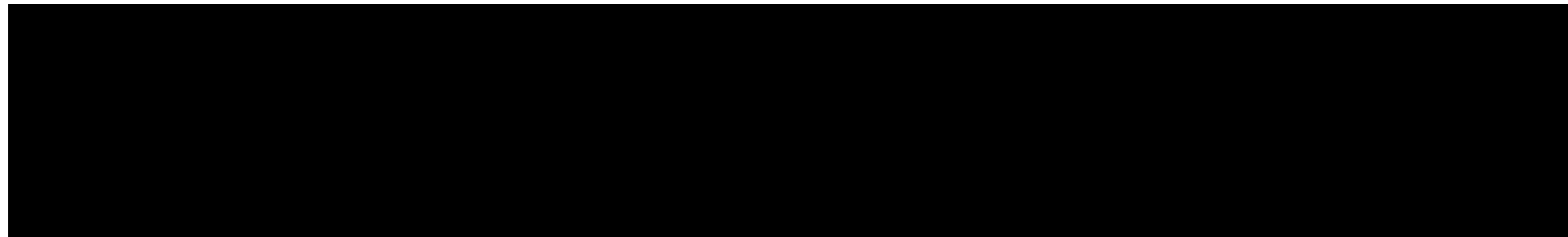
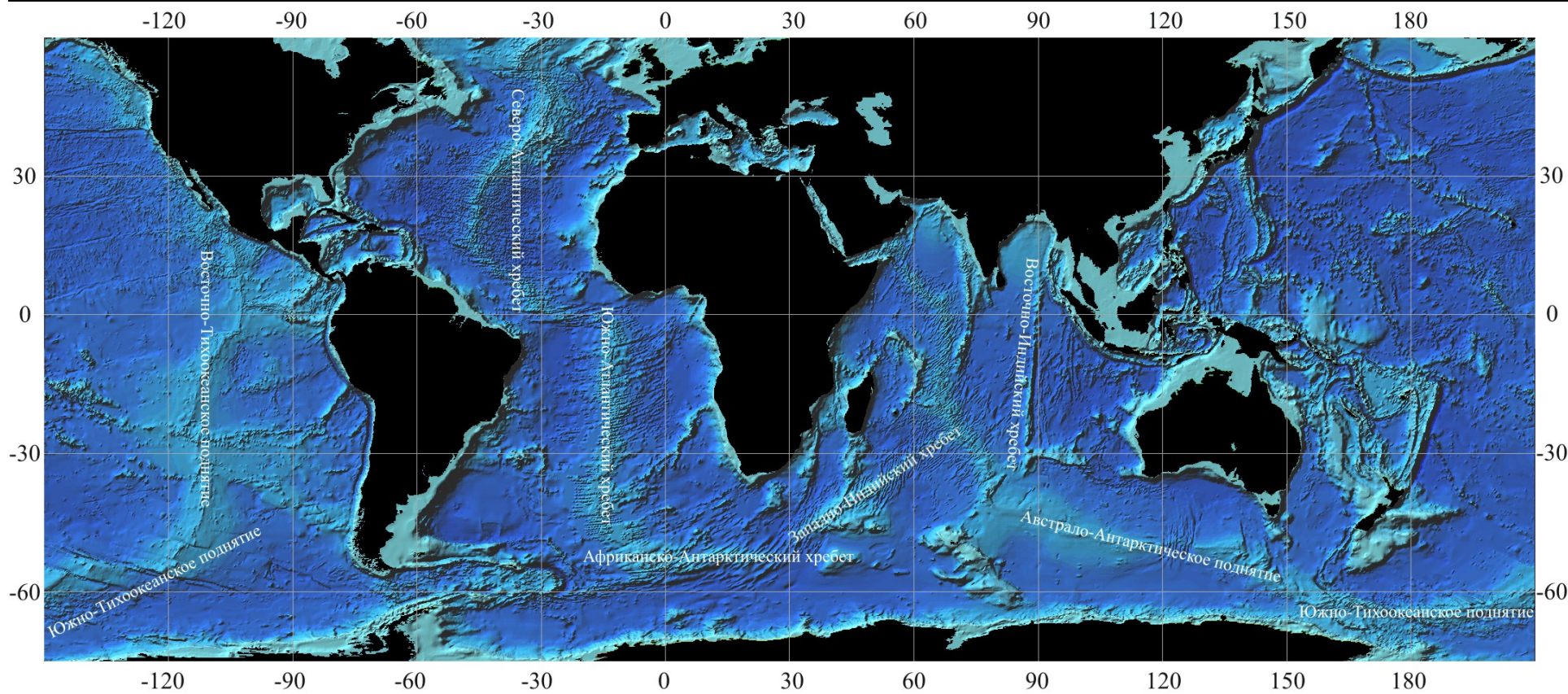
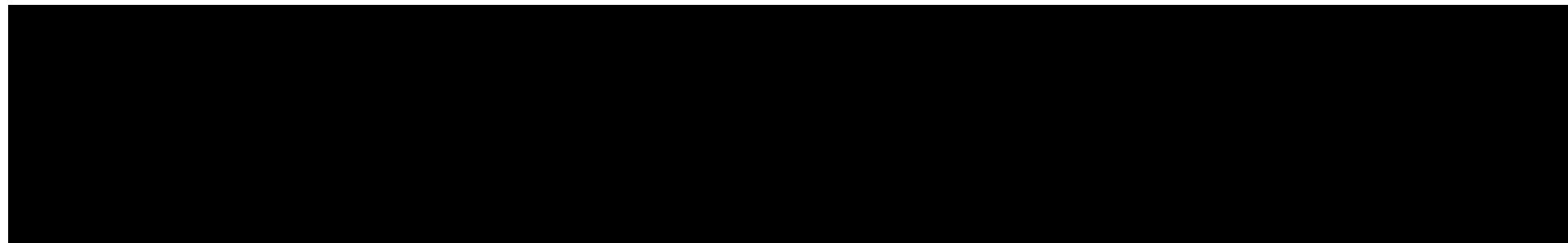


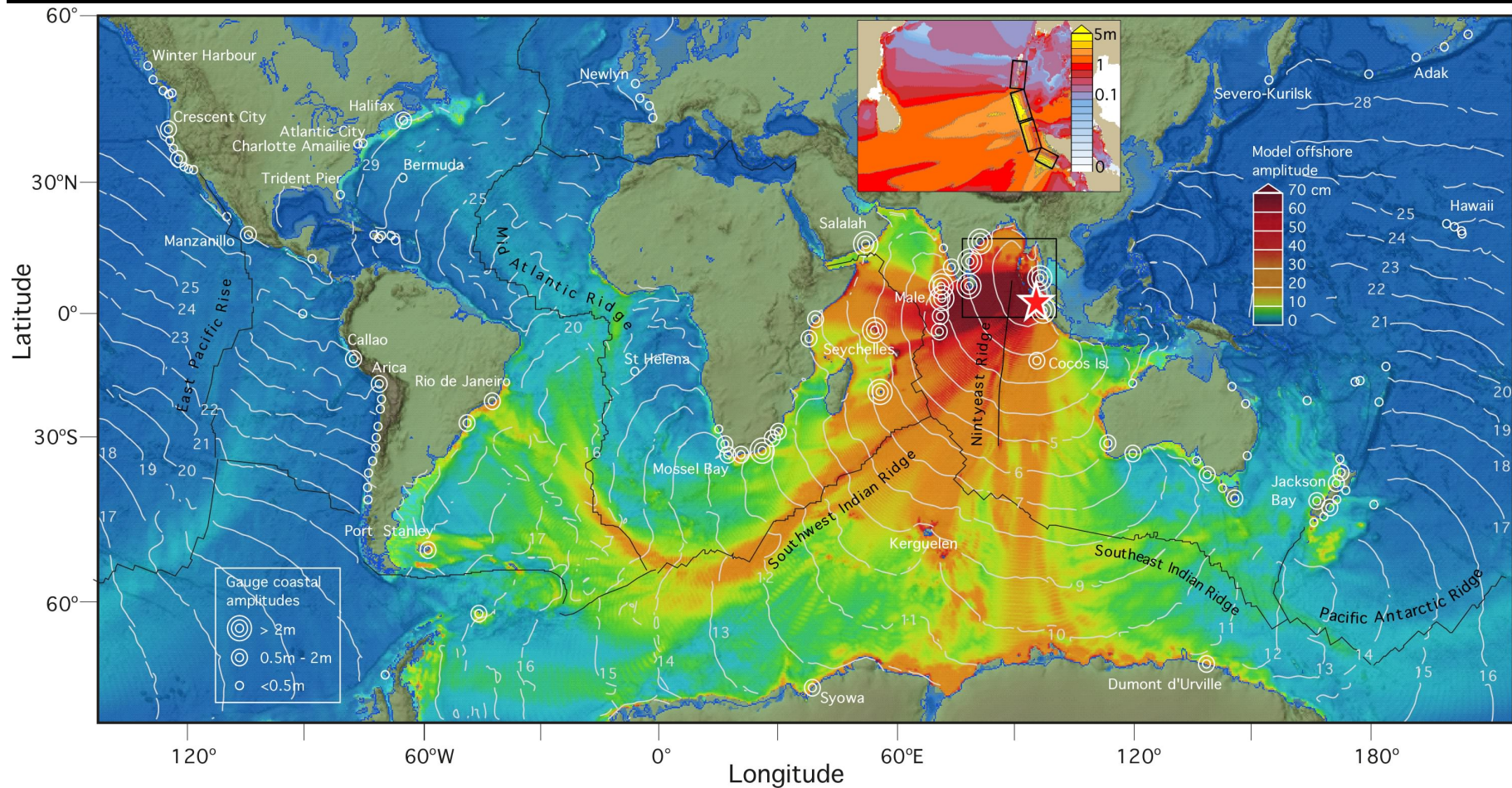
FIG. 3 Views of wave run-up onto the rear side of the cone-shaped island in the laboratory model. *a*, Top view; the wave struck the island from the bottom of the photograph. *b*, Wave paddles are visible beyond

the island. To generate a solitary wave in a precisely controlled manner, the hydraulic powered electro-servo system was used to set the vertical paddles in motion in the horizontal direction.

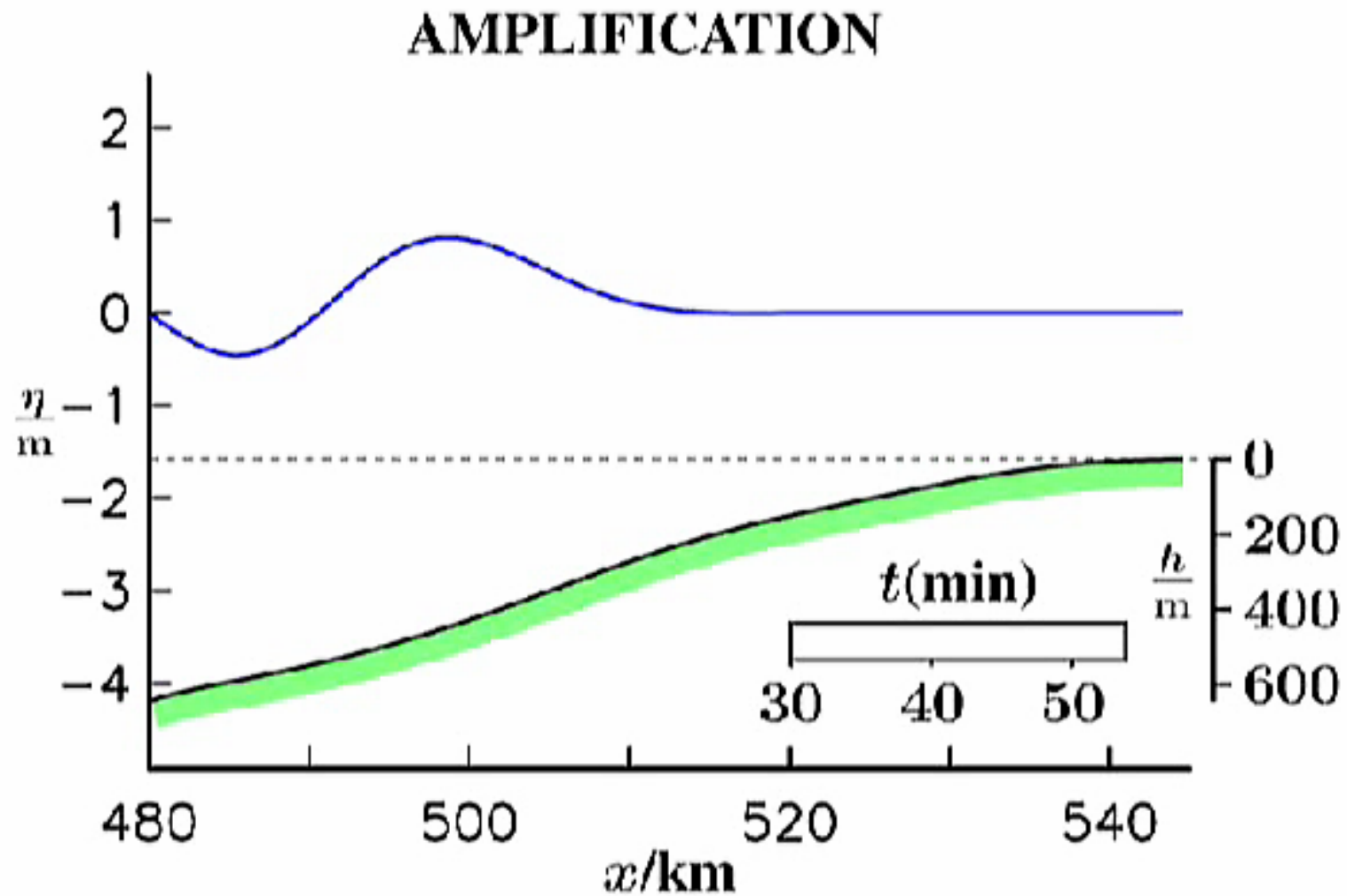
from H. Yeh et al, 1994



Распределение максимальных амплитуд цунами 26.12.2004



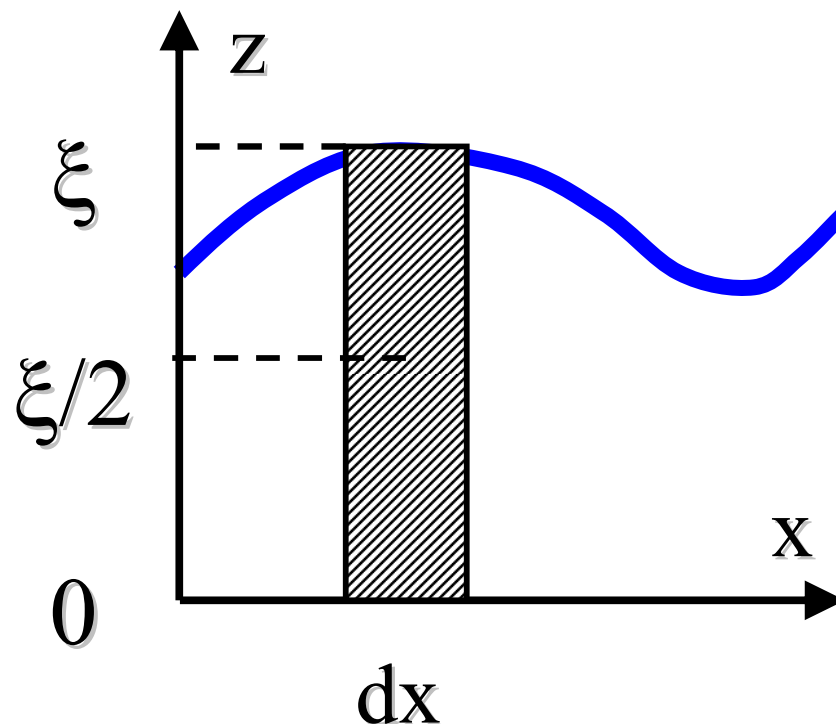
Закон Грина (закон "1/4")



Закон Грина (закон "1/4")

$$dW_p = "mgh"$$

$$dW_p = \rho \xi dx g \frac{\xi}{2}$$



$$W_k = W_p$$

**ТОЛЬКО ДЛЯ ВОЛН МАЛОЙ
АМПЛИТУДЫ (ЛИНЕЙНЫХ)**

$$dW = 2dW_p = \rho g \xi^2 dx$$

$$dW = \rho g \xi^2 dx$$

будем рассматривать
синусоидальную волну
длины λ и амплитуды ξ_0

$$W = \rho g \int_x^{x+\lambda} \xi^2 dx$$

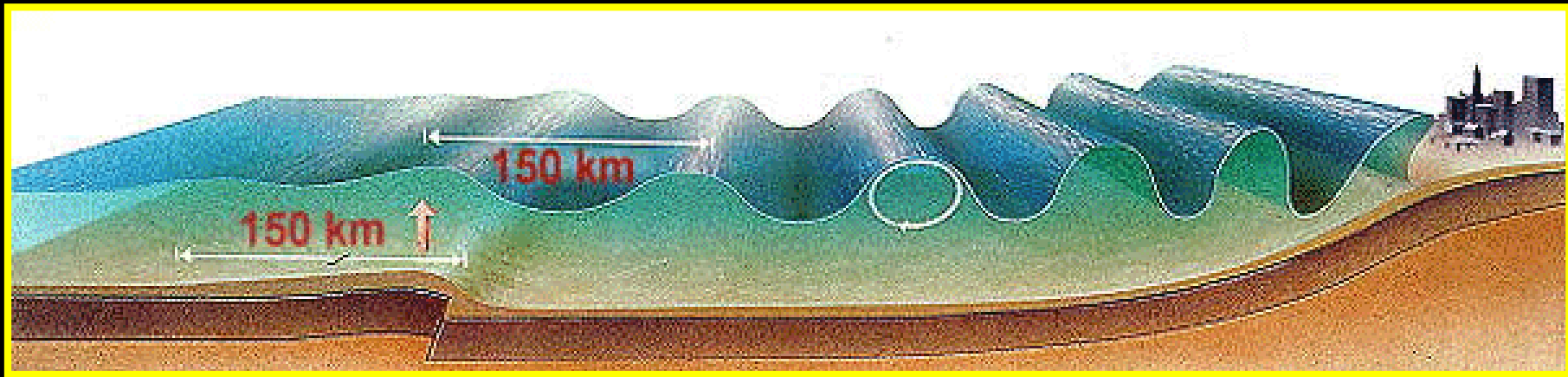
$$dx = \sqrt{gH} dt$$

$$W = \rho g \int_t^{t+T} \xi^2 \sqrt{gH} dt$$

**Закон
Грина**

$$\rho g \xi_0^2 \sqrt{gH} C_0 = \text{const}$$

$$\xi_0 H^{1/4} = \text{const}$$



Цунами 15 июня 1896 разрушило порт Санрику (Япония) и прибрежные поселения на протяжении 275 км, погибло 28 тыс. человек.

Волна не была замечена рыбаками, находившимися в 40 км от побережья!!!

Линейная теория
длинных волн или
“мелкой воды”

$$|\xi| \ll H$$

$$H \ll \lambda$$

Приближение гидростатики

$$c = \sqrt{gH} \neq f(\lambda)$$

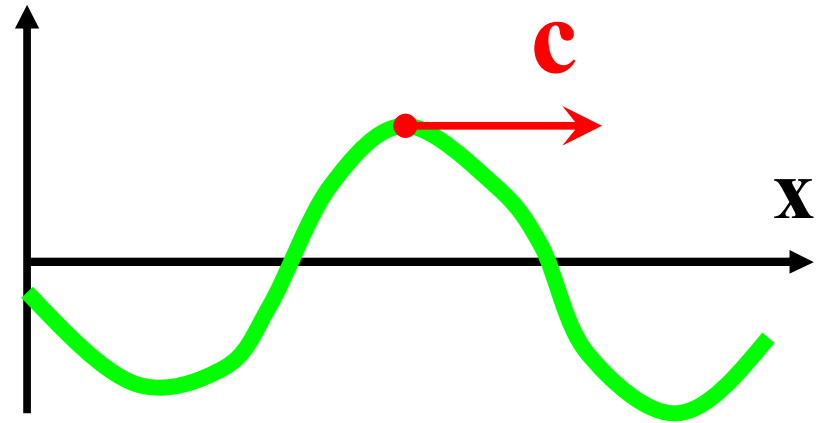
$$(u, v) \neq f(z)$$

Фазовая скорость волн

$$\cos(\omega t - kx)$$

$$(ct - x)$$

$$(t - x/c)$$



$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T}$$

$$c = \omega / k$$

Дисперсионное
соотношение

$$\omega = \omega(k)$$

Недиспергирующие волны

$$\omega = c k, \quad c = \text{const} \neq f(k)$$

не зависит от λ

Диспергирующие волны

$$\omega = c k, \quad c = c(k)$$

зависит от λ

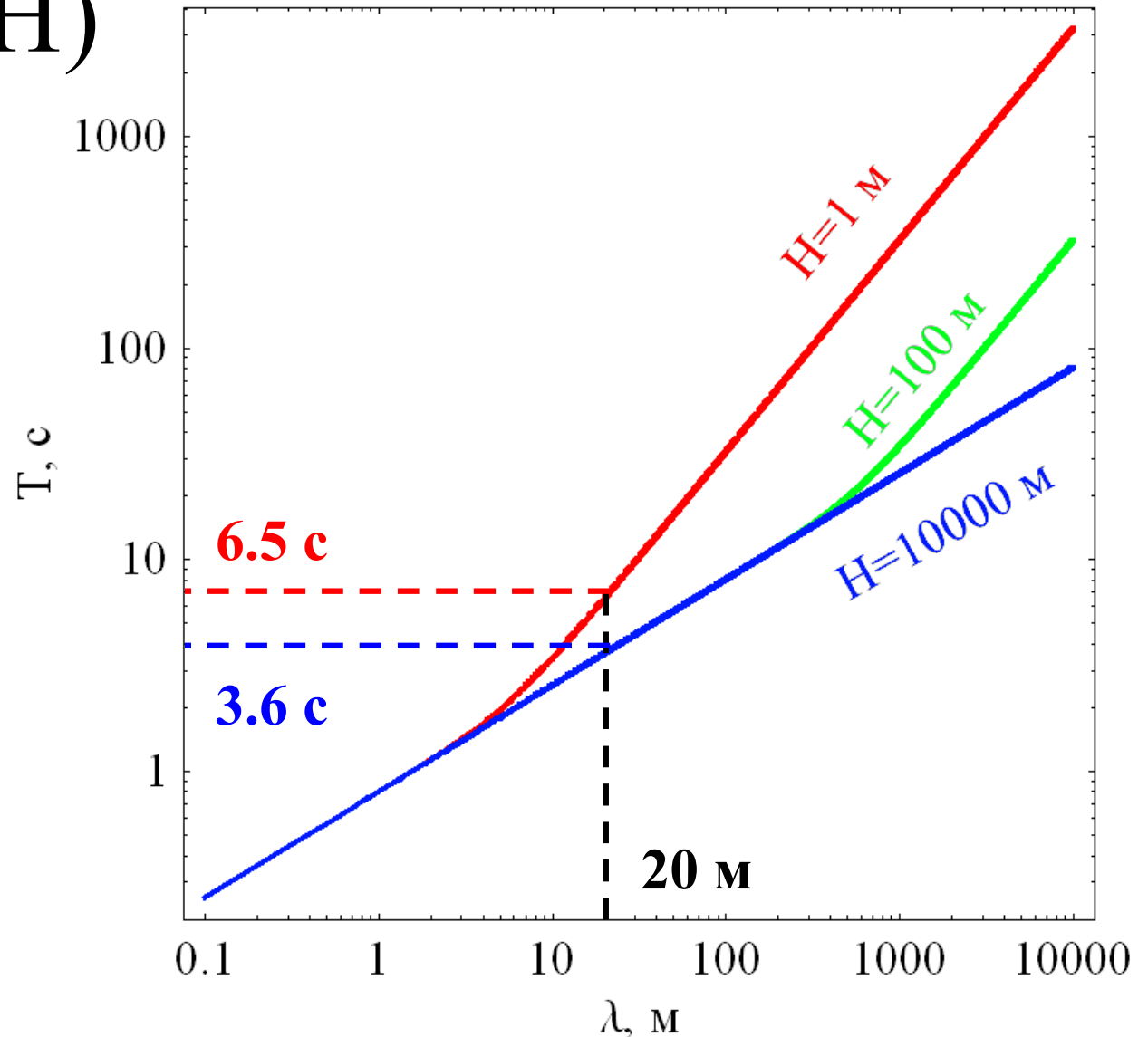
Дисперсионное соотношение для волн на воде

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH)$$

однозначная
связь между
циклической
частотой и
волновым
числом

ИЛИ

между
периодом и
длиной волны



Дисперсионное соотношение для гравитационно-капиллярных волн

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\alpha}{\rho} k^3 \right) \text{th}(kH)$$

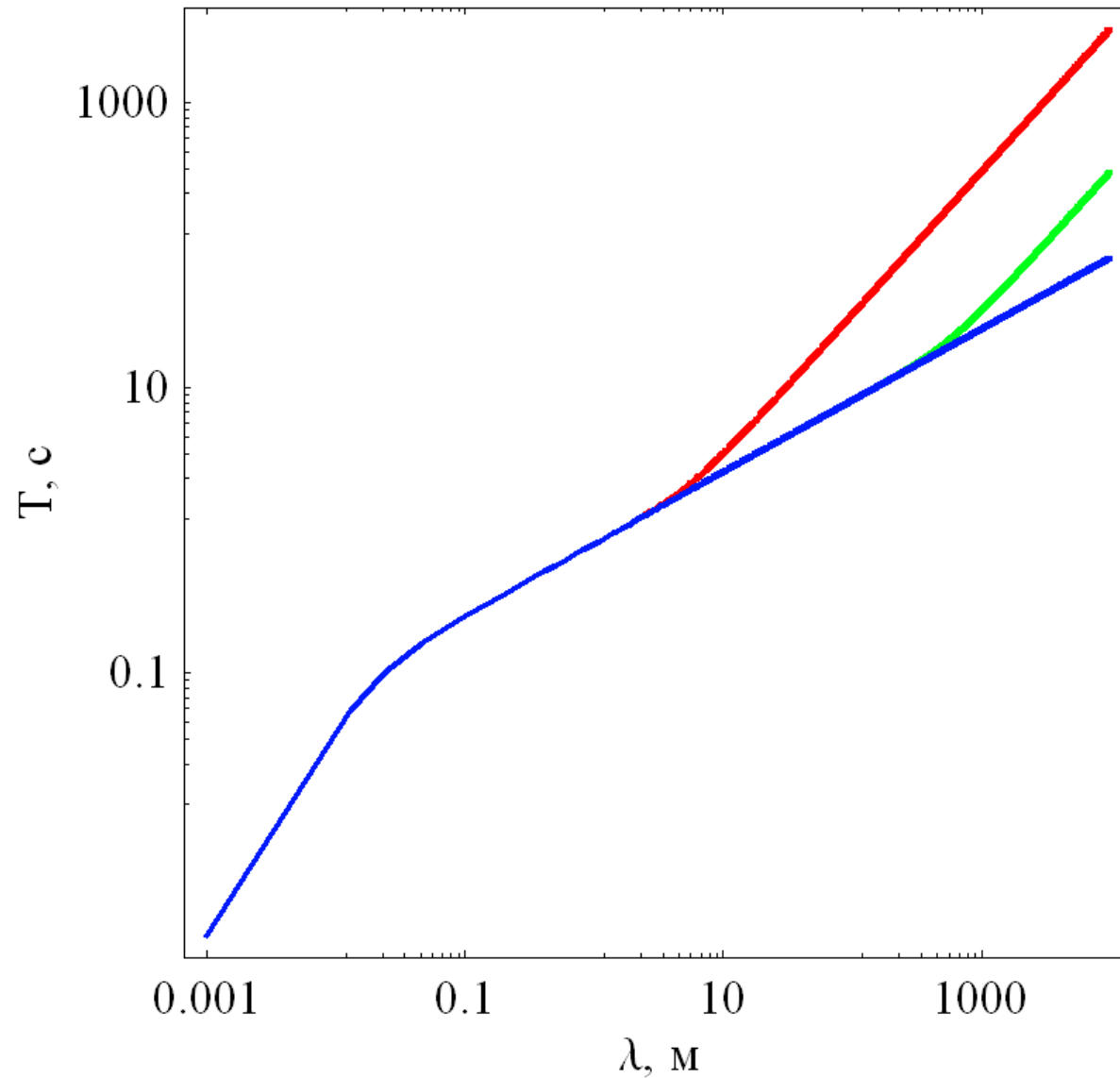
$$\alpha \approx 0.075 \text{ Н/м}$$

при $t = 20^\circ \text{C}$

$$p_1 - p_2 = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

формула
Лапласа

Дисперсионное соотношение для гравитационно-капиллярных волн



Пределные случаи

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH)$$

«Глубокая вода»

$$H/\lambda \gg 1$$

$$kH = \frac{2\pi}{\lambda} H \gg 1$$

$$\omega^2 = gk$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (\operatorname{th} z) = 1$$

Пределные случаи

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH)$$

«Мелкая вода»

$$H/\lambda \ll 1$$

$$kH = \frac{2\pi}{\lambda} H \ll 1$$

$$\omega^2 = gH k^2$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

при $z \ll 1$

$$\operatorname{th} z \approx z$$

Пределные случаи

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH)$$

«Глубокая вода»

$$\omega^2 = gk$$

$$\omega = \sqrt{gk}$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

Волны на «глубокой воде»
подвержены дисперсии

Пределные случаи

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH)$$

«Мелкая вода»

$$\omega^2 = gH k^2$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH}$$

$$\omega = \sqrt{gH} k$$

Волны на «мелкой воде»
не подвержены дисперсии

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi}}$$

объясняет
явление
«мертвая
зыбь»

$$\lambda = 1 \text{ м} \Rightarrow c \approx 1.3 \text{ м/с}$$

$$\lambda = 10 \text{ м} \Rightarrow c \approx 4 \text{ м/с}$$

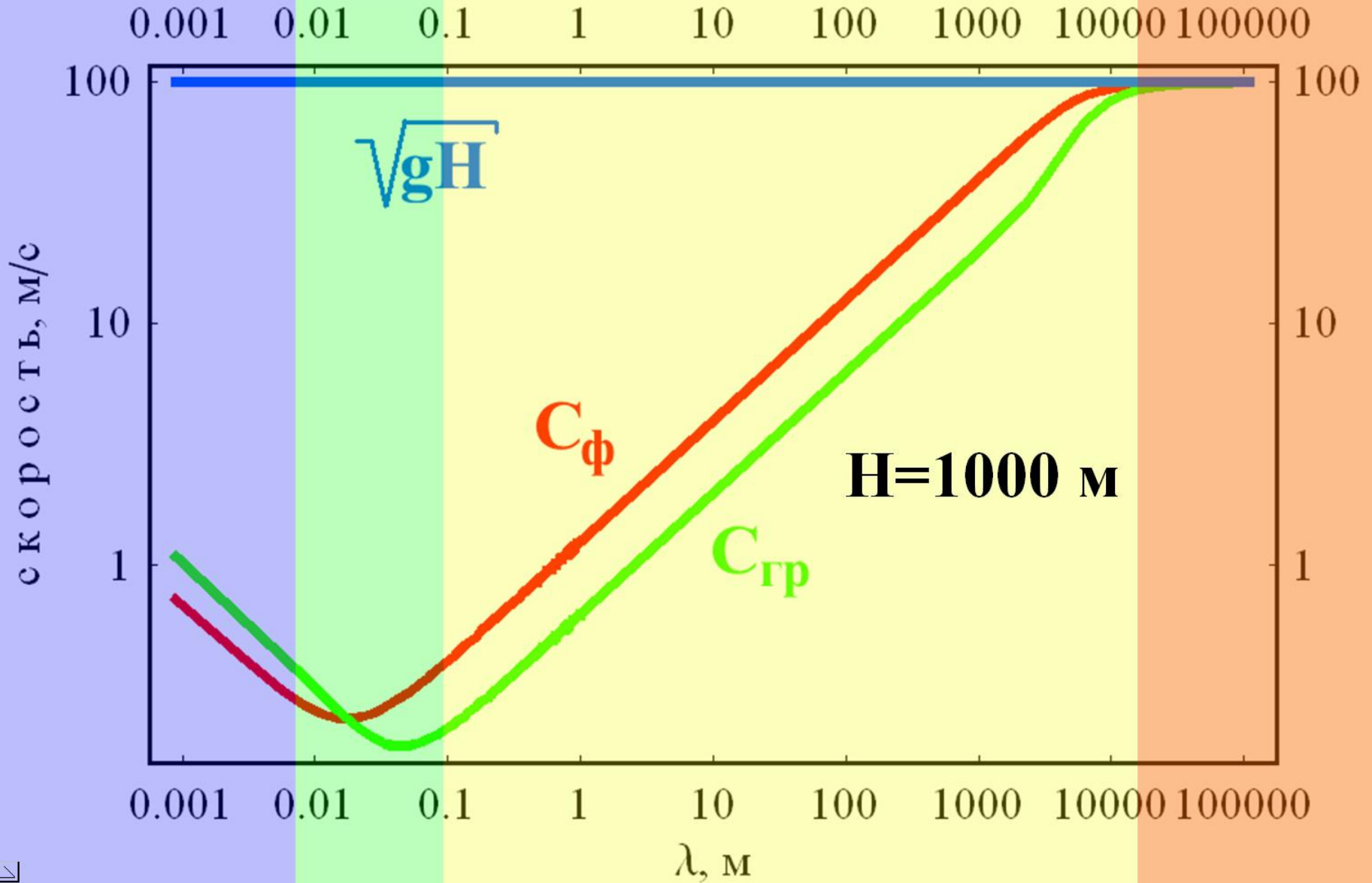
$$\lambda = 100 \text{ м} \Rightarrow c \approx 13 \text{ м/с}$$

капиллярные

гравитационные

гравитационно-капиллярные

длинные



АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

1877 «Теория звука» Лорда Рэля

1826, Daniel Colladon, Charles Sturm, первое измерение скорости звука на Женевском озере

Исаак Ньютон, 1687, первое математическое описание звуковых волн

1490, Леонардо да Винчи: «...погрузив трубу одним концом в воду и прижав другой ее конец к уху, можно услышать корабли, идущие вдали...»

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{(\vec{v}, \nabla) \vec{v}} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} + \cancel{\nu \Delta \vec{v}} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \end{array} \right. \quad \text{для сжимаемой жидкости}$$

**Вторая
вязкость**

$$\cancel{\nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \end{array} \right.$$

Система для описания
линейных упругих
волн в идеальной
жидкости/газе

Предположения:

\vec{v}' - малая
величина

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' \quad \vec{v}_0 = 0$$

$$\frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho_0} = \vec{g}$$

$$p = p_0 + p' \quad p' \ll p_0$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad \rho' \ll \rho_0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \implies \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla}(p_0 + p')}{\rho_0 + \cancel{p'}} + \vec{g}$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = \cancel{\frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho_0}} - \frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} + \cancel{\vec{g}}$$

$-\vec{g}$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial (\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_0 + \rho') \vec{v}' = 0$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_0 \vec{v}' + \cancel{\rho' \vec{v}'}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\vec{\nabla} F)}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{\nabla} F = 0 \end{array} \right.$$

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho' = c^2 \rho'$$

скорость звука

**потенциал
скорости**

$$\vec{v}' = \vec{\nabla} F$$

$$\frac{\partial(\vec{\nabla}F)}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla}p'}{\rho_0} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{p'}{\rho_0}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{\nabla} F = 0$$

ΔF

Волновое уравнение

$$\vec{v}' = \vec{\nabla} F$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - c^2 \Delta F = 0$$

$$p' = -\rho_0 \frac{\partial F}{\partial t}$$

Граничные условия (1)

ρc

акустическая жесткость

$$\rho c = 1.26 \cdot 340 \approx 430 \text{ кг / м}^2 \cdot \text{с}$$

воздух

отражение $R = -1$

$$p' = 0$$

$$\rho c = 1000 \cdot 1500 \approx 1.5 \cdot 10^6 \text{ кг / м}^2 \cdot \text{с}$$

вода

отражение $R = 1$

$$w' = 0$$

$$\rho c = 3000 \cdot 4000 \approx 12 \cdot 10^6 \text{ кг / м}^2 \cdot \text{с}$$

дно

Граничные условия (2)

$$\rho c = 1.26 \cdot 340 \approx 430 \text{ кг / м}^2 \cdot \text{с}$$

воздух

отражение $R = -1$

$$p' = 0$$

$$\rho c = 1000 \cdot 1500 \approx 1.5 \cdot 10^6 \text{ кг / м}^2 \cdot \text{с}$$

вода

преломление $R < 1$

$$w_1 = w_2, \quad p_1 = p_2$$

$$\rho c = 3000 \cdot 4000 \approx 12 \cdot 10^6 \text{ кг / м}^2 \cdot \text{с}$$

дно

Граничные условия (3)

$$\rho c = 1.26 \cdot 340 \approx 430 \text{ кг / м}^2 \cdot \text{с}$$

воздух

рассеяние

$$\rho c = 1000 \cdot 1500 \approx 1.5 \cdot 10^6 \text{ кг / м}^2 \cdot \text{с}$$

вода

**рассеяние и
преломление**

$$\rho c = 3000 \cdot 4000 \approx 12 \cdot 10^6 \text{ кг / м}^2 \cdot \text{с}$$

дно