

## ЕЩЕ РАЗ О РАДУГЕ

Е. Д. ТРИФОНОВ

Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург

### ONCE MORE ABOUT RAINBOWS

E. D. TRIFONOV

*The explanation of rainbow occupies an important place in the geometric and wave optics evolution. How scholar or student can give a simple quantitative analysis of this phenomenon is shown.*

*Объяснение радуги занимает важное место в истории развития геометрической и волновой оптики. В статье показано, как школьник или студент может получить простой количественный анализ этого явления.*

Как средь прозрачных облачных пелен  
Над луком лук соцветный и сокружный  
Посланицей Юноны вознесен,  
И образован внутренним наружный.

Данте

Радуга у всех на виду — она обычно наблюдается в виде двух окрашенных дуг (двух соцветных луков, о которых пишет Данте), причем в верхней дуге цвета располагаются в таком порядке сверху вниз: фиолетовый, синий, зеленый, желтый, красный, а в нижней дуге наоборот — от красного до фиолетового. Наверное, не все помнят объяснение этого явления как результат преломления и отражения солнечного луча в капле дождя. А большинство из тех, кто это помнит, не смогут активно провести достаточно элементарные вычисления для ее описания. Радуге посвящено много популярных изданий, например книга М. Миннарта [1] и книга Л.В. Тарасова [2]. В то же время в школьных учебниках и учебниках по общей физике этому явлению почти не уделяется внимания, хотя объяснения радуги занимают важное место в развитии геометрической и волновой оптики.

### ИСТОРИЯ ОБЪЯСНЕНИЯ РАДУГИ

Общая физическая картина радуги была уже четко описана Марком Антониом де Доминисом (1611). На основании опытных наблюдений он пришел к заключению, что радуга получается в результате отражения от внутренней поверхности капли дождя и двукратного преломления — при входе в каплю и при выходе из нее. Рене Декарт дал более полное объяснение радуги в своем труде “Метеоры” в главе “О радуге” (1635) [3]. Декарт пишет: “Во-первых, когда я принял во внимание, что радуга может появляться не только на небе, но также и в воздухе вблизи нас каждый раз, когда в нем находятся капли воды, освещенные солнцем, как это иногда можно видеть в фонтанах, мне легко было заключить, что она зависит от того, каким образом лучи света действуют на эти капли, а от них достигают нашего глаза; далее, зная, что эти капли шарообразны, и видя, что и при больших и при малых каплях радуга появляется

всегда одинаковым образом, я поставил себе целью создать очень большую каплю, чтобы иметь возможность лучше ее рассмотреть. Для этого я наполнил водой большой стеклянный сосуд, вполне круглый и вполне прозрачный и пришел к следующему выводу...”

Этот вывод повторяет и уточняет результат, полученный Доминисом. В частности, Декарт обнаружил, что вторая (внешняя) радуга возникает в результате двух преломлений и двух отражений. Он также качественно объяснил появление цветов радуги, сравнивая преломление света в капле с преломлением в стеклянной призме. Рисунок 1, поясняющий ход лучей в капле, взят из упомянутой выше работы Декарта. Но главная заслуга Декарта заключалась в том, что он количественно объяснил это явление, впервые используя закон преломления света: “Я еще не знал, почему цвета появляются лишь под известными углами, пока не взял перо и не вычислил подробно хода всех лучей, которые падают на различные точки водяной капли, чтобы узнать, под какими углами они могут попасть в наш глаз после двух преломлений и одного или двух отражений. Тогда я нашел, что после одного отражения и двух преломлений гораздо больше лучей, которые могут быть видны под углом от  $41^\circ$  до  $42^\circ$  (по отношению к солнечному лучу), чем таких, которые видны под каким-либо меньшим углом, и нет ни одного, который был бы виден под большим. Далее я нашел также, что после двух отражений и двух преломлений оказывается гораздо больше лучей, падающих в глаз под углом от  $51^\circ$  до  $52^\circ$ , чем таких, которые бы падали под каким-либо боль-

шим углом, и нет совсем таких, которые падали бы под меньшим”.

Таким образом Декарт не только вычисляет ход лучей, но и определяет угловое распределение интенсивности рассеянного каплями света. В следующем разделе мы покажем, как это можно сделать достаточно простыми средствами.

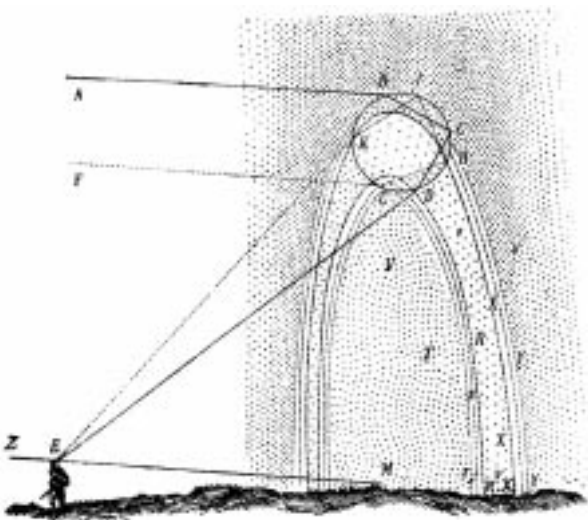
В отношении цветов теория радуги была дополнена Исааком Ньютоном. В известных “Лекциях по оптике” [4], которые были написаны в 70-х годах XVI века, но опубликованы уже после смерти Ньютона в 1729 году, приведено следующее резюме: “Из лучей, входящих в шар, некоторые выходят из него после одного отражения, другие – после двух отражений; есть лучи, выходящие после трех отражений и даже большего числа отражений. Поскольку дождевые капли очень малы относительно расстояния до глаза наблюдателя, то не стоит совсем рассматривать их размеры, а только углы, образуемые падающими лучами с выходящими. Там, где эти углы наибольшие или наименьшие, выходящие лучи наиболее сгущены. Так как различные роды лучей (лучи разных цветов) составляют различные наибольшие и наименьшие углы, то лучи, наиболее плотно собирающиеся у различных мест, имеют стремление к проявлению собственных цветов”.

Утверждение Ньютона о возможности не учитывать размеры капли, так же как слова Декарта о том, что при больших и малых каплях радуга появляется всегда одинаковым образом, оказалось неточным. Полная теория радуги с учетом дифракции света, которая зависит от соотношения длины волны света и размера капли, была построена лишь в XIX веке Дж.Б. Эри (1836) и Дж.М. Пернтером (1897).

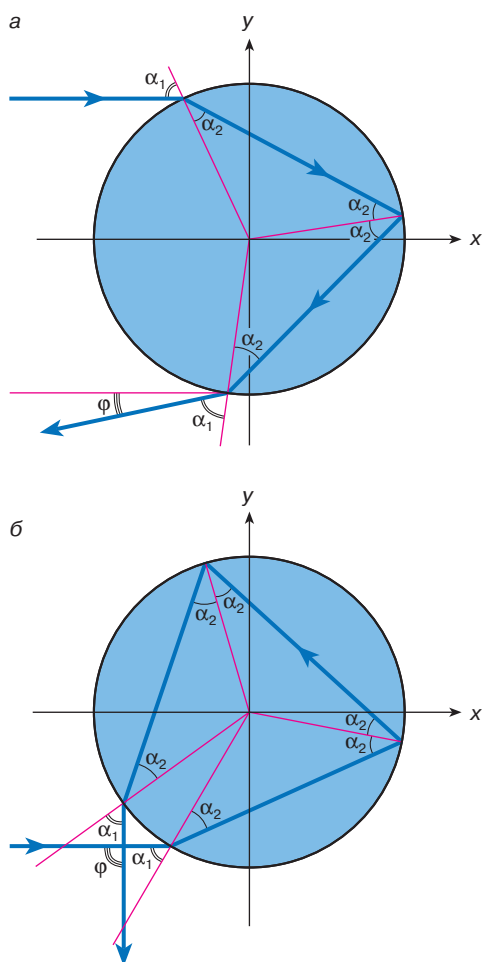
## ПРЕЛОМЛЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ЛУЧА В КАПЛЕ ВОДЫ

Рисунок Декарта, который мы воспроизвели как репликацию, обладает одним “методическим” несовершенством. Неподготовленному читателю может показаться, что обе радуги, внешняя и внутренняя, обусловлены разными способами отражения в одной и той же капле. Лучше было бы изобразить две капли: одну, относящуюся к нижней радуге, другую к верхней, оставив в каждой по одному способу отражения, как это показано на рис. 2. Для простоты восприятия в обоих случаях направление падающего на каплю солнечного луча принято за ось абсцисс. Координату  $y$ , характеризующую точку падения луча на каплю, будем называть прицельным параметром.

Из рис. 2, а видно, что падающий луч с одним отражением может быть воспринят наблюдателем, если только точка падения относится к верхней части капли



**Рис. 1.** Рисунок из работы Р. Декарта, поясняющий наблюдение радуги



**Рис. 2.** Ход лучей в капле воды: а – при одном отражении, б – при двух отражениях

( $y > 0$ ). Наоборот, при двух отражениях это окажется возможным для тех лучей, которые падают на нижнюю часть капли ( $y < 0$ ).

Предположим сначала, что капля находится в вертикальной плоскости, проходящей через положение Солнца и глаз наблюдателя. Тогда падающий, преломленные и отраженные лучи лежат в этой же плоскости. Если  $\alpha_1$  – угол падения, а  $\alpha_2$  – угол преломления, то из рис. 2, а и б угол вышедшего луча по отношению к падающему в первом случае будет равен

$$\varphi_1 = 4\alpha_2 - 2\alpha_1, \quad (1)$$

а во втором –

$$\varphi_2 = \pi - 6\alpha_2 + 2\alpha_1, \quad (2)$$

причем, согласно закону преломления:

$$\sin \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_1}{n},$$

где  $n$  в нашем случае показатель преломления воды. Кроме того, принимая условно радиус капли за единицу длины, имеем

$$\sin \alpha_1 = y, \quad \sin \alpha_2 = \frac{y}{n},$$

$$\sin \alpha_1 = -y, \quad \sin \alpha_2 = -\frac{y}{n}$$

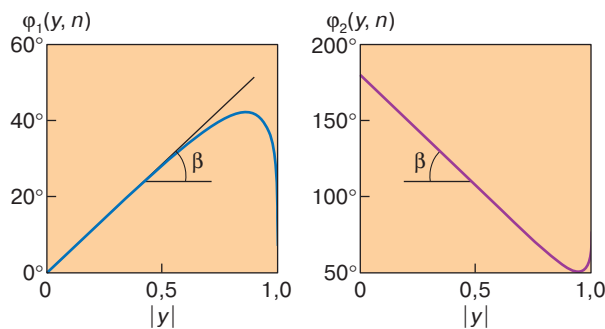
соответственно в первом и во втором случаях. Поэтому из (1) и (2) получаем

$$\varphi_1 = 4 \arcsin \frac{y}{n} - 2 \arcsin y, \quad y > 0, \quad (3)$$

$$\varphi_2 = \pi + 6 \arcsin \frac{y}{n} - 2 \arcsin y, \quad y < 0. \quad (4)$$

Эти два уравнения являются основными для дальнейшего рассмотрения. Нетрудно построить графики углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  как функций  $y$ . Они представлены на рис. 3 для показателя преломления  $n = 1,331$  (красный цвет). Мы видим, что при значении прицельного параметра  $y \approx 0,85$  достигается максимум угла  $\varphi_1$ , приблизительно равный  $42^\circ$ , а угол  $\varphi_2$  имеет минимум  $\sim 53^\circ$  при  $y \approx -0,95$ . Покажем, что этим экстремальным точкам соответствует максимум интенсивности отраженного каплей света.

Рассмотрим некоторый малый интервал изменения прицельного параметра (для определенности в первом случае)  $y, y + \Delta y$ . С помощью графика можно найти изменение угла  $\varphi$  на этом интервале  $\Delta \varphi$ . На рис. 3 видно, что  $\Delta \varphi = \Delta y \cdot \operatorname{tg} \beta$ , где  $\beta$  – угол, который касательная к графику в данной точке образует с осью абсцисс. Величина  $\Delta y$  пропорциональна интенсивности света  $\Delta I$ , падающего на каплю в этом интервале прицельного параметра. Эта же интенсивность света (точнее,



**Рис. 3.** Зависимость угла отражения луча, падающего на каплю, от прицельного параметра

пропорциональная ей величина) рассеивается каплей в угловом интервале  $\Delta\varphi$ . Мы можем написать  $\Delta I \sim \Delta y = \Delta\varphi \operatorname{ctg}\beta$ . Следовательно, интенсивность рассеянного каплей света, приходящаяся на единицу угла рассеяния, может быть выражена как

$$I(\varphi) = \frac{\Delta I}{\Delta\varphi} \sim \operatorname{ctg}\beta. \quad (5)$$

Так как в экстремальных точках  $\operatorname{ctg}\beta = \infty$ , то величина (5) обращается в бесконечность. Отметим, что положения этих экстремальных точек для различных цветов несколько отличаются, что и позволяет наблюдать радугу. Описанный эффект получен на основании геометрической оптики. В последнем разделе мы покажем, какое влияние на него оказывает дифракция света.

Угловое распределение интенсивности рассеянного света можно получить, если построить график зависимости  $\operatorname{ctg}\beta$  от угла  $\varphi$ . Вручную это можно сделать по графикам на рис. 3, но лучше, конечно, на компьютере. Для тех, кто знает, что такое производная, приведенные выше рассуждения можно свести к формуле

$$I(\varphi) = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^{-1}. \quad (6)$$

Ниже мы приводим программу построения этих графиков с помощью среды Маткад (MathCad).

$$y := 0,0001 \quad n := 1,331 \quad m := 1,343$$

$$f1(y, n) := \left(4 \arcsin\left(\frac{y}{n}\right) - 2 \arcsin(y)\right) \cdot \left(\frac{180}{3,1416}\right)$$

$$f2(y, n) := 180 - \left[\left(6 \left|\arcsin\left(\frac{y}{n}\right)\right| - 2 \left|\arcsin(y)\right|\right) \cdot \frac{180}{3,1416}\right]$$

$$df1(y, n) := \frac{d}{dy} f1(y, n)$$

$$I1(y, n) := \begin{cases} \frac{2}{|df1(y, n)|} & \text{if } df1(y, n) < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

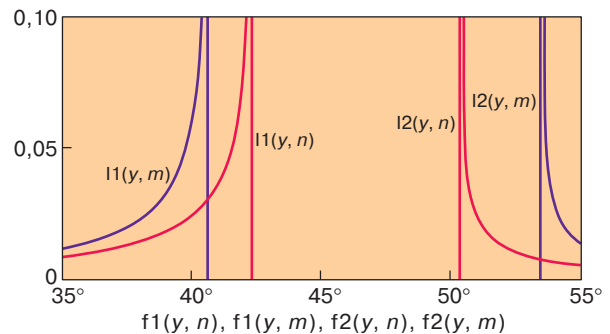
$$df2(y, n) := \frac{d}{dy} f2(y, n)$$

$$I2(y, n) := \begin{cases} \frac{2}{|df2(y, n)|} & \text{if } df2(y, n) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Эта программа очень лаконична и фактически повторяет формулы, приведенные в тексте. В первой строке задан интервал изменения модуля прицельного параметра  $[0, 1]$  с шагом  $0,0001$ ,  $n = 1,331$  и  $m = 1,343$  — показатели преломления воды для красного и фиолетового лучей соответственно. Далее приводятся две основные формулы для углов рассеяния (выраженные в

градусах), аналогичные формулам (3) и (4). Затем записываются команды вычисления производных от этих углов по прицельному параметру и, наконец, в соответствии с (6) задаются формулы для вычисления относительных интенсивностей. Для упрощения программы мы предполагаем здесь симметрию кривых на рис. 3 в окрестности экстремальных точек. С этим связано введенное условие “if” и дополнительный множитель 2.

Полученные таким образом графики интенсивности рассеянного света для первого и второго случаев изображены на рис. 4. При этом мы показываем кривые для двух значений показателя преломления, соответствующих красному и фиолетовому цветам.



**Рис. 4.** Угловое распределение интенсивности отраженного каплей монохроматического света, полученное с помощью геометрической оптики

Приведем значения углов, при которых достигаются максимумы интенсивностей красного и фиолетового лучей:

фиолетовый луч в первом случае  $40,65^\circ$ ,

красный луч в первом случае  $42,37^\circ$ ,

фиолетовый луч во втором случае  $53,48^\circ$ ,

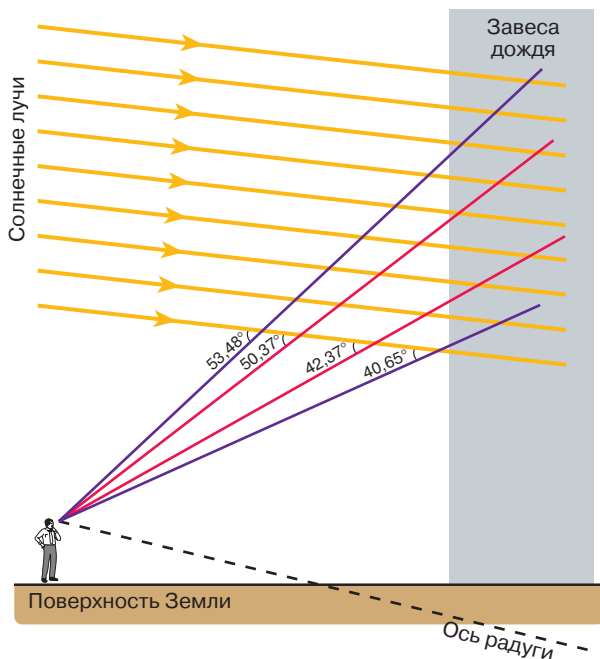
красный луч во втором случае  $50,37^\circ$ .

Видно, что яркие лучи, окрашенные в эти цвета, в рассматриваемом приближении хорошо разделены: в первом случае — на  $1,72^\circ$ , во втором — на  $3,11^\circ$ .

Таким образом, эффект радуги обусловлен тем, что под определенными углами возникают максимумы интенсивности рассеянного света и для разных цветов положения этих максимумов не перекрываются.

### КАК НАРИСОВАТЬ РАДУГУ

Теперь мы можем нарисовать схему наблюдения радуги. Такое построение выполнено на рис. 5. Сначала рисуем поверхность Земли и стоящего на ней наблюдателя. Перед наблюдателем находится завеса дождя (закрашенная серым цветом). Затем изображаем солнечные лучи,



**Рис. 5.** Схема наблюдения радуги

направление которых зависит от высоты Солнца над горизонтом. Через глаз наблюдателя проводим красные и фиолетовые лучи под указанными выше углами по отношению к солнечным лучам. Можно быть уверенным на основании результатов предыдущего раздела, что эти лучи возникнут в результате рассеяния на соответствующих каплях дождя. При этом, как следует из рис. 2, нижняя радуга обусловлена процессами рассеяния с одним отражением, а верхняя — с двумя отражениями. Обратите внимание на чередование цветов: фиолетовые лучи являются внешними, а красные — внутренними. Очевидно, что лучи других цветов в каждой радуге размещаются между красным и фиолетовым в соответствии со значениями показателей преломления.

Напомним, что мы пока рассматривали изображение радуги в вертикальной плоскости, проходящей через глаз наблюдателя и положение Солнца. Проведем прямую, проходящую через глаз наблюдателя параллельно солнечному лучу. Если вертикальную плоскость поворачивать вокруг указанной прямой, то ее новое положение для наблюдения радуги будет совершенно эквивалентно исходному. Поэтому радуга имеет форму дуги окружности, центр которой находится на построенной оси. Радиус этой окружности (как видно на рис. 5) приблизительно равен расстоянию наблюдателя до завесы дождя.

Отметим, что при наблюдении радуги Солнце не должно стоять слишком высоко над горизонтом — не более чем на  $53,48^\circ$ . Иначе картина лучей на рисунке будет поворачиваться по часовой стрелке, так что даже фиолетовый луч верхней радуги не сможет попасть в глаз наблюдателя, стоящего на Земле. Правда, это окажется возможным, если наблюдатель поднимется на некоторую высоту, например на самолете. Если наблюдатель поднимется достаточно высоко, то он сможет увидеть радугу и в форме полной окружности.

Данное описание радуги следует уточнить с учетом того, что солнечные лучи не строго параллельны. Это связано с тем, что лучи, падающие на каплю от разных точек Солнца, имеют несколько различные направления. Максимальное угловое расхождение лучей определяется угловым диаметром Солнца, как известно равным приблизительно  $0,5^\circ$ . К чему это приводит? Каждая капля испускает в глаз наблюдателя не столь строгой параллельности падающих лучей. Если бы угловой диаметр Солнца заметно превосходил угловое расстояние между фиолетовым и красным лучами, то цвета радуги были бы неразличимы. К счастью, это не так, хотя, несомненно, перекрывание лучей с разными длинами волн влияет на контрастность цветов радуги. Интересно, что конечность углового диаметра Солнца была уже учтена в работе Декарта.

### ПОПРАВКА НА ДИФРАКЦИЮ

Приведенное выше объяснение радуги было выполнено на основании геометрической оптики. Но известно, что свет имеет волновую природу и геометрическая оптика является лишь некоторым приближением. В этом разделе мы рассмотрим, насколько это приближение оправданно в нашем случае.

Дело в том, что понятие о бесконечно узком пучке лучей является абстракцией. Если свет падает на круглое отверстие диаметра  $a$ , то из-за волновой природы (вспомните принцип Гюйгенса—Френеля) прошедший пучок света будет расширяться и угловой размер его может быть охарактеризован так называемым дифракционным углом  $\lambda/a$  рад, где  $\lambda$  — длина волны рассматриваемого излучения. В нашем случае свет отражается от капли. Поэтому оценка дифракционного уширения, если принять диаметр капли равным 1 мм, а длину волны  $5 \cdot 10^{-5}$  см, будет  $5 \cdot 10^{-4}$  рад, или  $0,03^\circ$ .

Эту оценку легко было получить, но она является грубой. Из предыдущего объяснения радуги следует, что активными областями поверхности капли являются лишь те участки (меньшего размера), которые соответствуют экстремальным (минимальным или максимальным) значениям угла рассеяния  $\varphi$ . Поэтому полученное

выше дифракционное уширение является несколько заниженным.

Выполним более точную оценку дифракционного уширения. Для этого аппроксимируем (то есть приближенно заменим) кривую  $\varphi(y)$  в окрестности экстремальной точки параболой:

$$\varphi(y) \approx \varphi_0 + f \cdot (y - y_0)^2, \quad (7)$$

где  $\varphi_0$  – экстремальное значение угла рассеяния,  $y_0$  – значение прицельного расстояния, при котором достигается экстремальное значение угла  $\varphi$ ,  $f$  – подгоночный параметр. Из (7) следует, что

$$|y - y_0| = \sqrt{\frac{\varphi - \varphi_0}{f}}. \quad (8)$$

Заметим, что интервал  $|y - y_0|$  характеризует интенсивность падающего на него света и равен интервалу значений прицельного параметра, из которого выходит свет (обратите внимание на симметрию хода лучей на рис. 2), поэтому он определяет и дифракционный угол. Определим интервал угла рассеяния  $\varphi - \varphi_0$ , соответствующий интервалу прицельного параметра  $y - y_0$ , так, чтобы он был равен дифракционному углу. То есть поставим условие

$$\frac{\lambda}{2R_0|y - y_0|} = |\varphi - \varphi_0| = \Delta\varphi,$$

где  $R_0$  – радиус капли (напомним, что прицельный параметр  $y$  мы выражали в единицах радиуса капли).

Используя (8), получаем

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\lambda}{2R_0}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot f^{\frac{1}{3}}. \quad (9)$$

Параметр  $f$ , как мы уже отмечали, может быть приближенно определен по графикам на рис. 3. Те, кто знает дифференцирование, могут выразить его, как это следует из (7), в виде

$$f = 2 \frac{d^2\varphi}{dy^2}$$

в точке экстремума. При этом, конечно, надо дифференцировать не функцию, стоящую в правой части уравнения (7), а общие выражения для угла  $\varphi$ , даваемые исходными формулами (1) и (2). Вычисления приводят к следующим результатам:  $f = -4,126$  в первом случае и  $f = 24,313$  во втором. Используя эти данные, можно по формуле (9) вычислить дифракционные уширения пучков лучей в зависимости от радиуса капли. В таблице 1

**Таблица 1**

$R, \text{ мм}$	$\Delta\varphi_1$		$\Delta\varphi_2$	
	радианы	градусы	радианы	градусы
0,1	0,0370	2,11	0,0668	3,82
0,2	0,0232	1,33	0,0421	2,41
0,5	0,0126	0,72	0,0228	1,31
1,0	0,0079	0,45	0,0144	0,82

мы приводим результаты этих вычислений для красного луча ( $\lambda = 7 \cdot 10^{-7}$  м) в обеих радугах.

Видно, что при радиусе капли в 1 мм дифракционное уширение порядка половины градуса для первой радуги и около одного градуса для другой. Напомним, что угловая ширина первой радуги  $1,72^\circ$ , а второй  $3,11^\circ$ . С уменьшением радиуса капли происходит дифракционное уширение пучков лучей разных цветов и их перекрывание. Красный цвет радуги уже плохо различим при радиусе капли в 0,1 мм. Когда радиус капли достигает значения 0,02 мм, то все цвета полностью перекрываются и радуга становится белой.

Отступая немного в сторону от нашей основной темы – радуги, мы хотели бы сформулировать (вытекающее из предыдущего) следующее общее положение: *если на сферическое однородное тело падает пучок монохроматического света, то наиболее яркая часть рассеянного света сосредоточена в коническом слое, толщина которого ограничена лишь дифракционными поправками*. Попробуйте посчитать сами, какая будет угловая толщина такого слоя, если диаметр шара, наполненного водой, равен 1 м.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Миннарт М. Свет и цвет в природе. М.: Наука, 1969. 344 с.
2. Тарасов Л.В. Физика в природе. М.: Просвещение, 1988. 352 с.
3. Декарт Р. Рассуждение о методе (с приложениями Диоптрика, Метеоры, Геометрия). М.: Изд-во АН СССР, 1953. 656 с.
4. Ньютон И. Лекции по оптике. М.: Изд-во АН СССР, 1945. 280 с.

Рецензент статьи В.В. Михайлин

\*\*\*

Евгений Дмитриевич Трифонов, доктор физико-математических наук, профессор Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. Область научных интересов – теория твердого тела, квантовая нелинейная оптика. Автор более 100 работ и двух монографий.