Введение в физику гидросферы

2025 Лекция №4

Носов Михаил Александрович

кафедра физики моря и вод суши

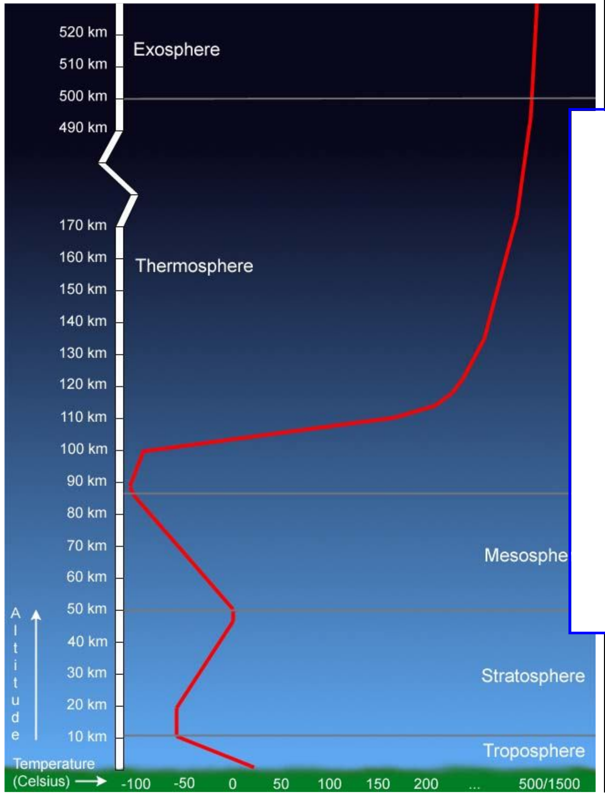
отделение геофизики

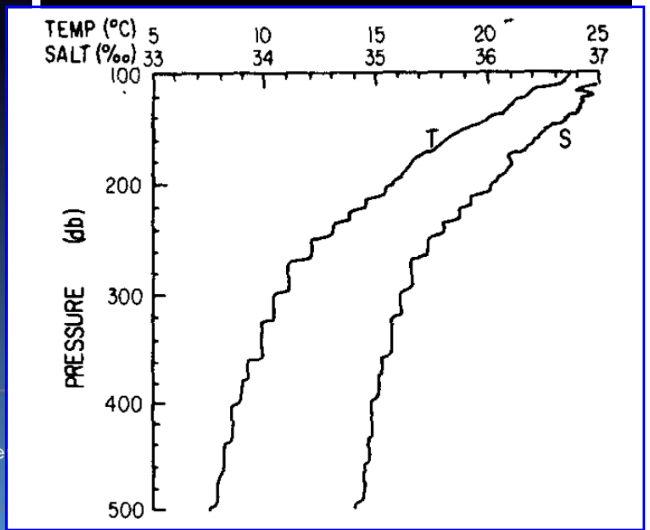
физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова

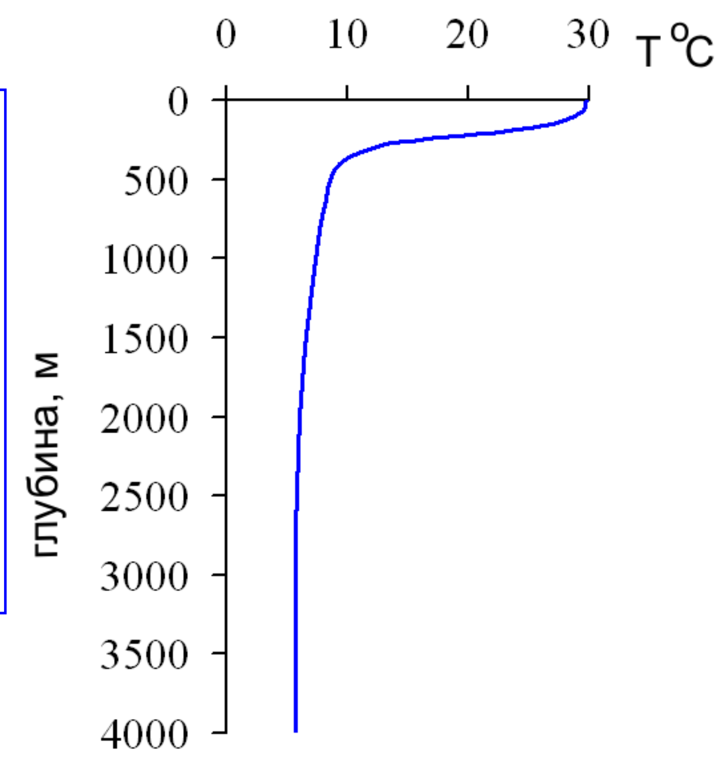
Устойчивость стратификации

Стратификация –

(лат. stratum настил слой+ facere делать) распределение по вертикали слоев воды или воздуха с различной плотностью, температурой, соленостью, etc.







Геофизическая гидродинамика – динамика бароклинной жидкости (газа) в поле силы тяжести на неравномерно прогретой, вращающейся сфере (геоиде)

Большинство крупномасштабных течений атмосферы и гидросферы происходят в условиях баланса сил:

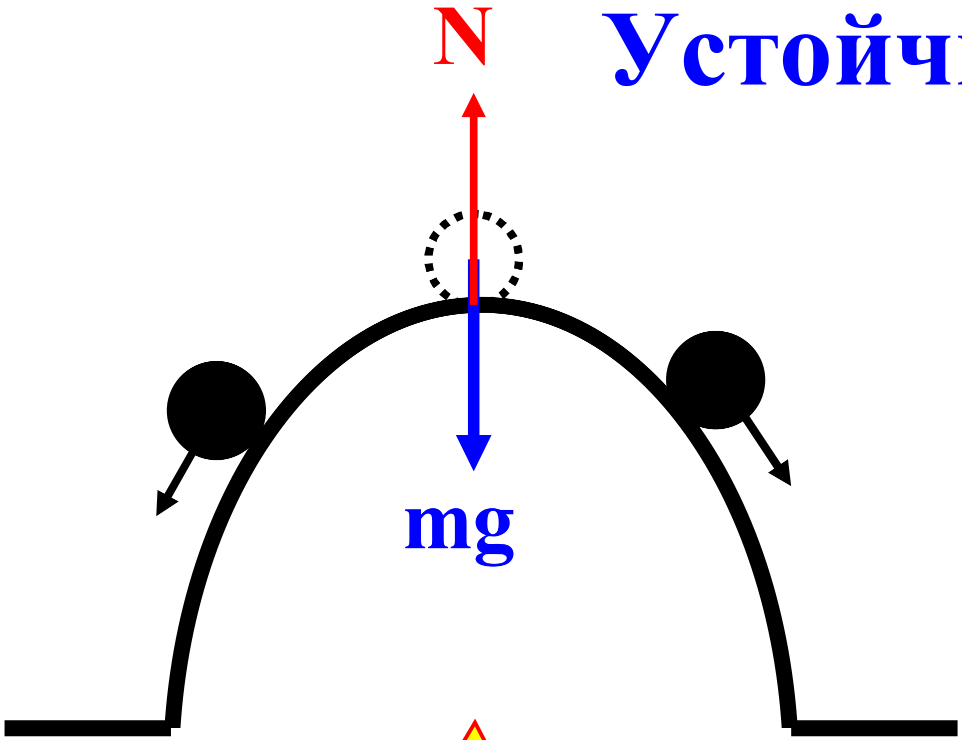
<u>по вертикали:</u> **гидростатический баланс**

сила градиента давления = сила тяжести

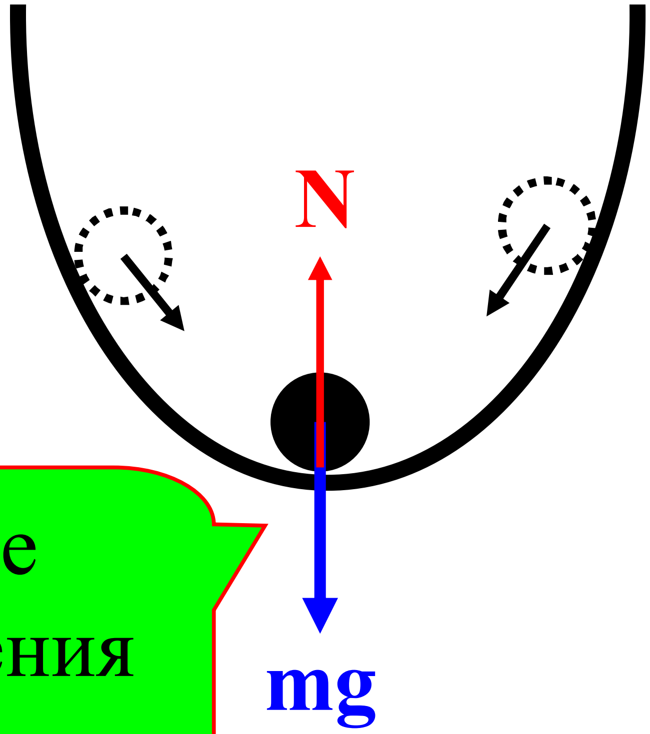
<u>по горизонтали:</u> геострофический баланс

сила градиента давления = сила Кориолиса

Устойчивость

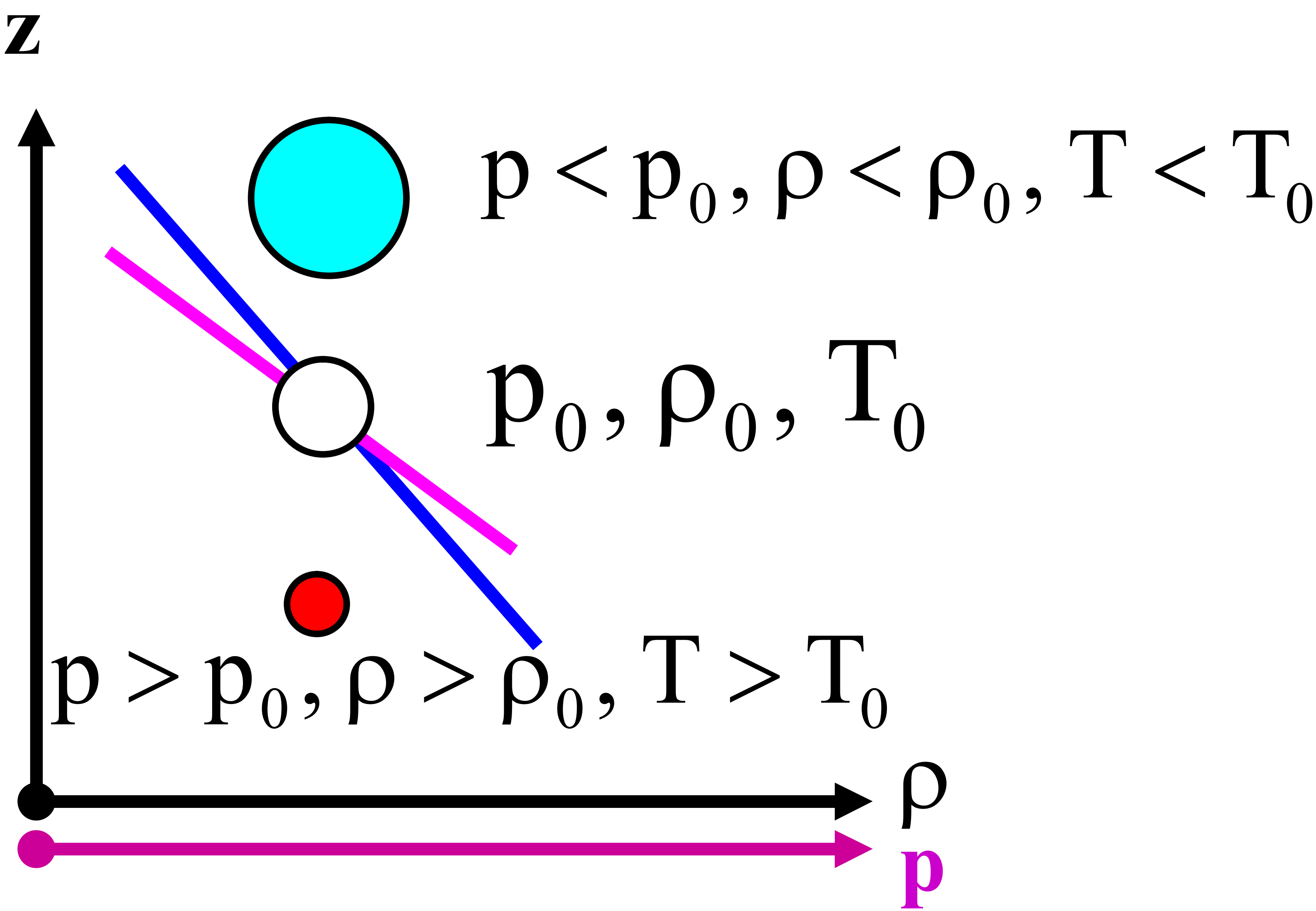


Малые возмущения нарастают со временем



Малые возмущения затухают

Нейтральное состояние



Нейтральное состояние

$$\left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{\text{нейтр}} = \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s = \left(\frac{d\rho(p(z))}{dz}\right)_s = \left(\frac{d\rho}{dp}\right)_s \frac{dp}{dz}$$

$$\left(\frac{d\rho}{dp}\right)_s = \frac{1}{c^2}$$

скорость звука

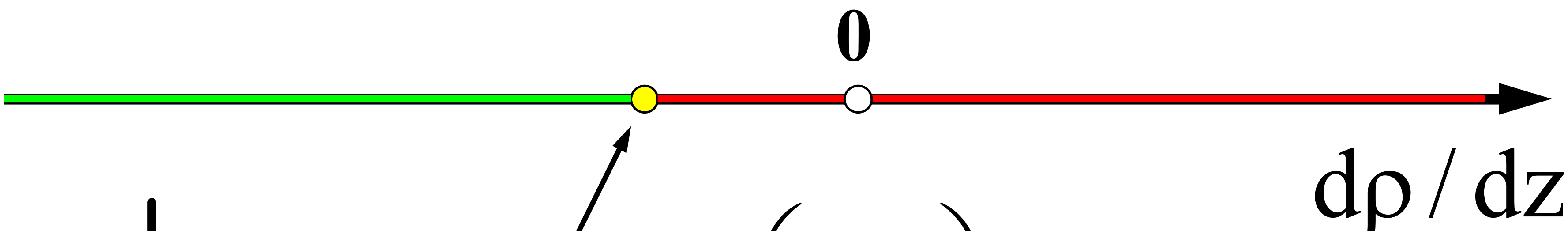
$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

закон гидростатики

$$\boxed{\left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{\text{нейтр}} = -\frac{\rho g}{c^2}}$$

Критерий устойчивости

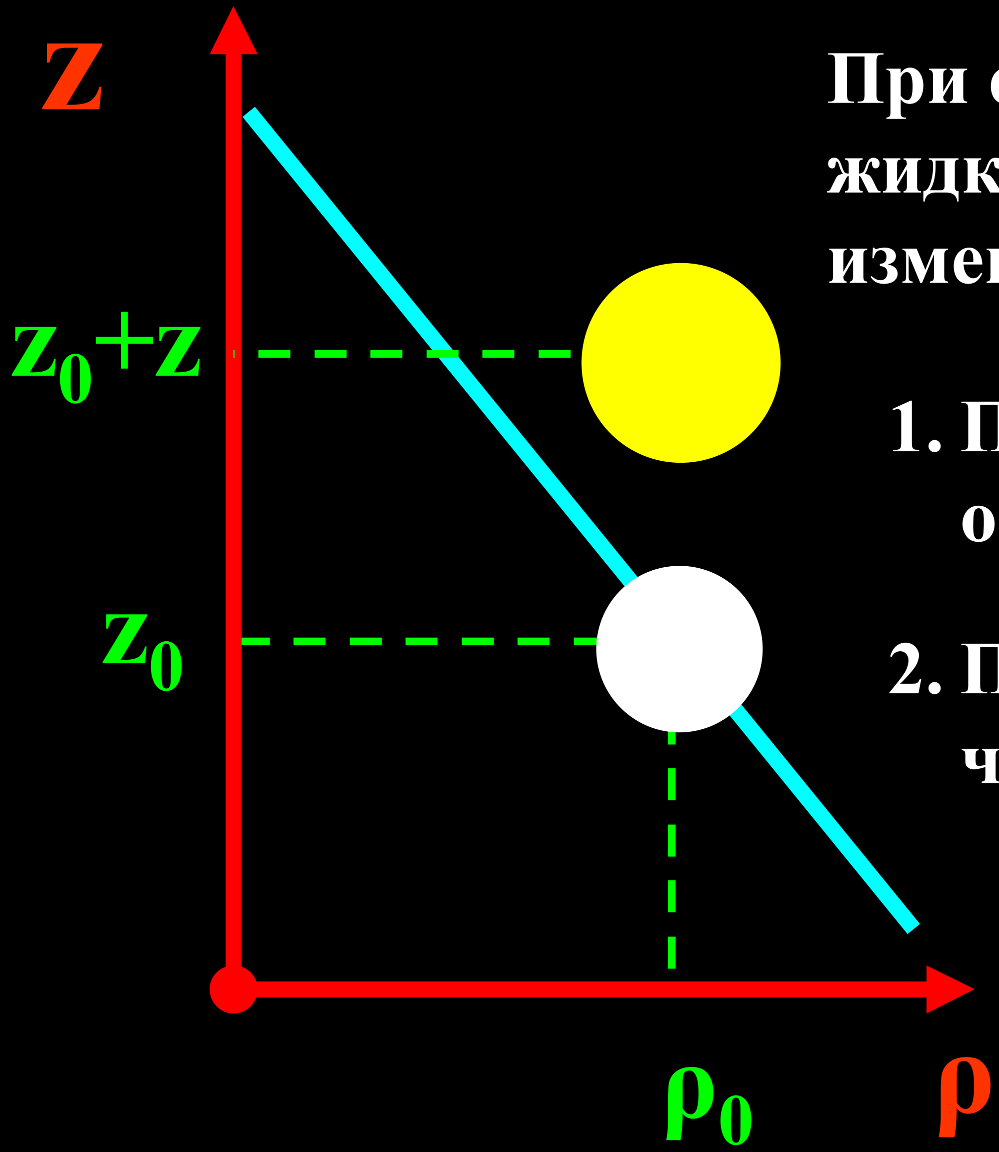
устойчивое состояние	**нейтральное состояние**	**неустойчивое состояние**
$\dfrac{d\rho}{dz} < \left(\dfrac{d\rho}{dz}\right)_s$	$\dfrac{d\rho}{dz} = \left(\dfrac{d\rho}{dz}\right)_s$	$\dfrac{d\rho}{dz} > \left(\dfrac{d\rho}{dz}\right)_s$



$$\left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{\text{нейтр}} = -\frac{\rho g}{c^2} \equiv \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s$$

адиабатический градиент

Частота малых колебаний устойчиво стратифицированной жидкости (газа)



При ее смещении частицы жидкости по вертикали на z изменяются:

1. Плотность окружающей среды
2. Плотность самой частицы

$$m\ddot{z} = F_{Apx} - mg$$

$$dV = dxdydz$$

$$\rho dV\ddot{z} = dVg\left(\rho_{среды} - \rho_{частицы}\right)$$

$$\ddot{z} = g\left(\rho_{среды} - \rho_{частицы}\right)/\rho$$

$$\rho_{среды} = \rho_0 + \frac{d\rho}{dz}z$$

$$\rho_{частицы} = \rho_0 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s z$$

$$\ddot{z} - \frac{g}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s\right)z = 0$$

$$\ddot{z} - \frac{g}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s\right)z = 0$$

$$\ddot{z} + N^2 z = 0$$

Частота Вяйсяля-Брента

в океане / атмосфере

$$N \sim 10^{-4} - 10^{-1}\,\text{Гц}$$

$$N^2 = -\frac{g}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s\right)$$

или

$$N^2 = -\frac{g}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dz} + \frac{\rho g}{c^2}\right)$$

$$\ddot{z} + N^2 z = 0 \qquad N = \sqrt{-\frac{g}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dz} + \frac{\rho g}{c^2}\right)}$$

N – действительная величина

Устойчивая стратификация

$$z(t) = A \cdot \sin(N \cdot t) + B \cdot \cos(N \cdot t)$$

N – мнимая величина

Неустойчивая стратификация

$$z(t) = A \cdot \exp(N \cdot t) + B \cdot \exp(-N \cdot t)$$

Уравнения гидродинамики

Уравнение состояния

$$\rho = \rho(p, T, \ldots)$$

парциальное давление водяного пара

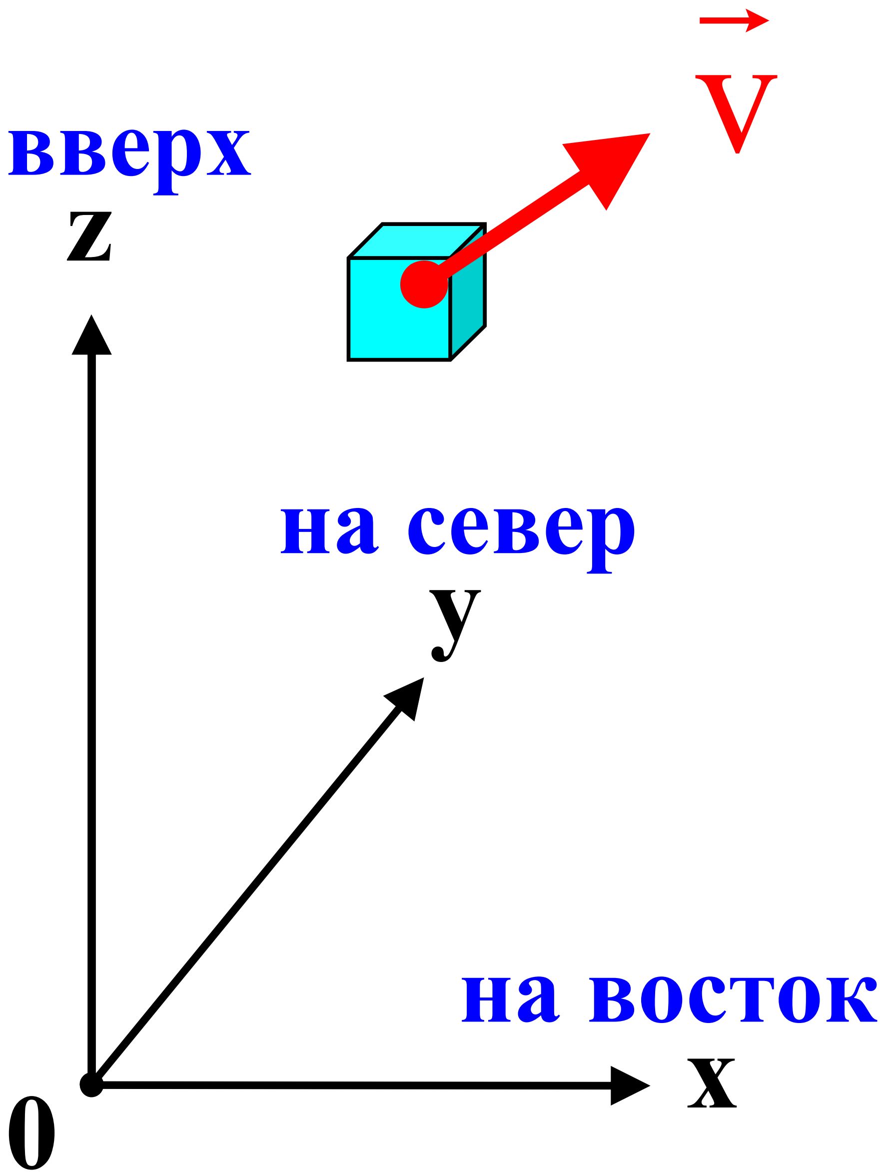
воздух

$$\rho = \rho(p, T, e)$$

соленость

вода

$$\rho = \rho(p, T, s)$$



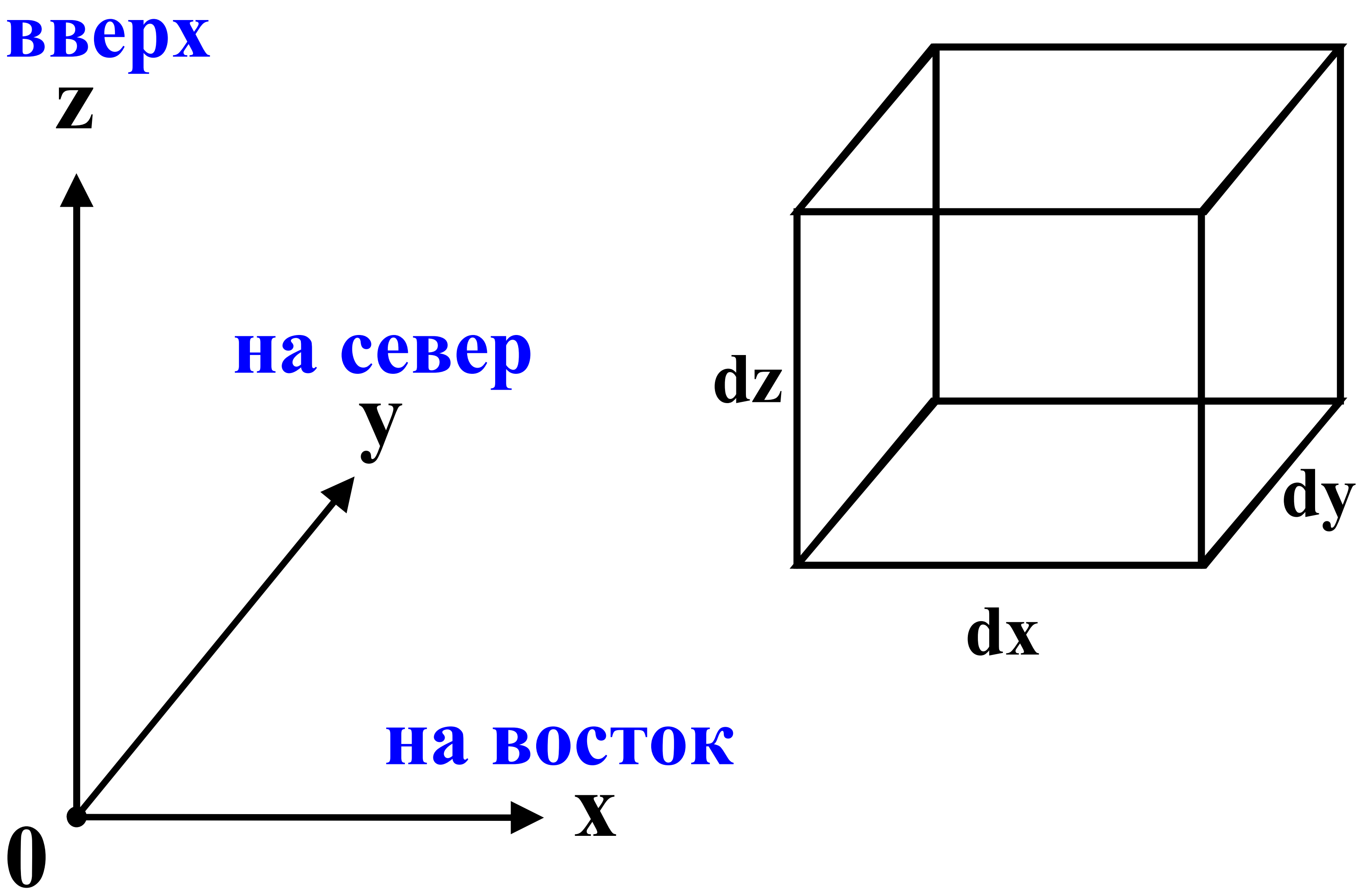
$$\vec{v} = \left(u_x, u_y, u_z\right)$$

$$\vec{v} \equiv \left(u, v, w\right)$$

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

$$p = p(x, y, z, t)$$

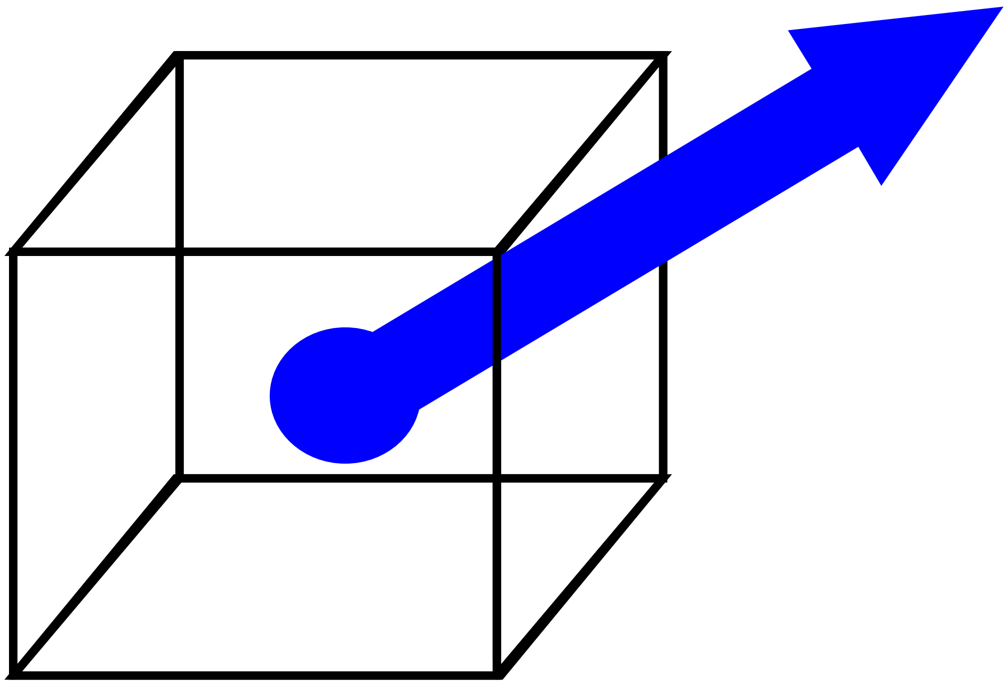
$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$



вверх
z
на север
y
на восток
x
0
dz
dy
dx

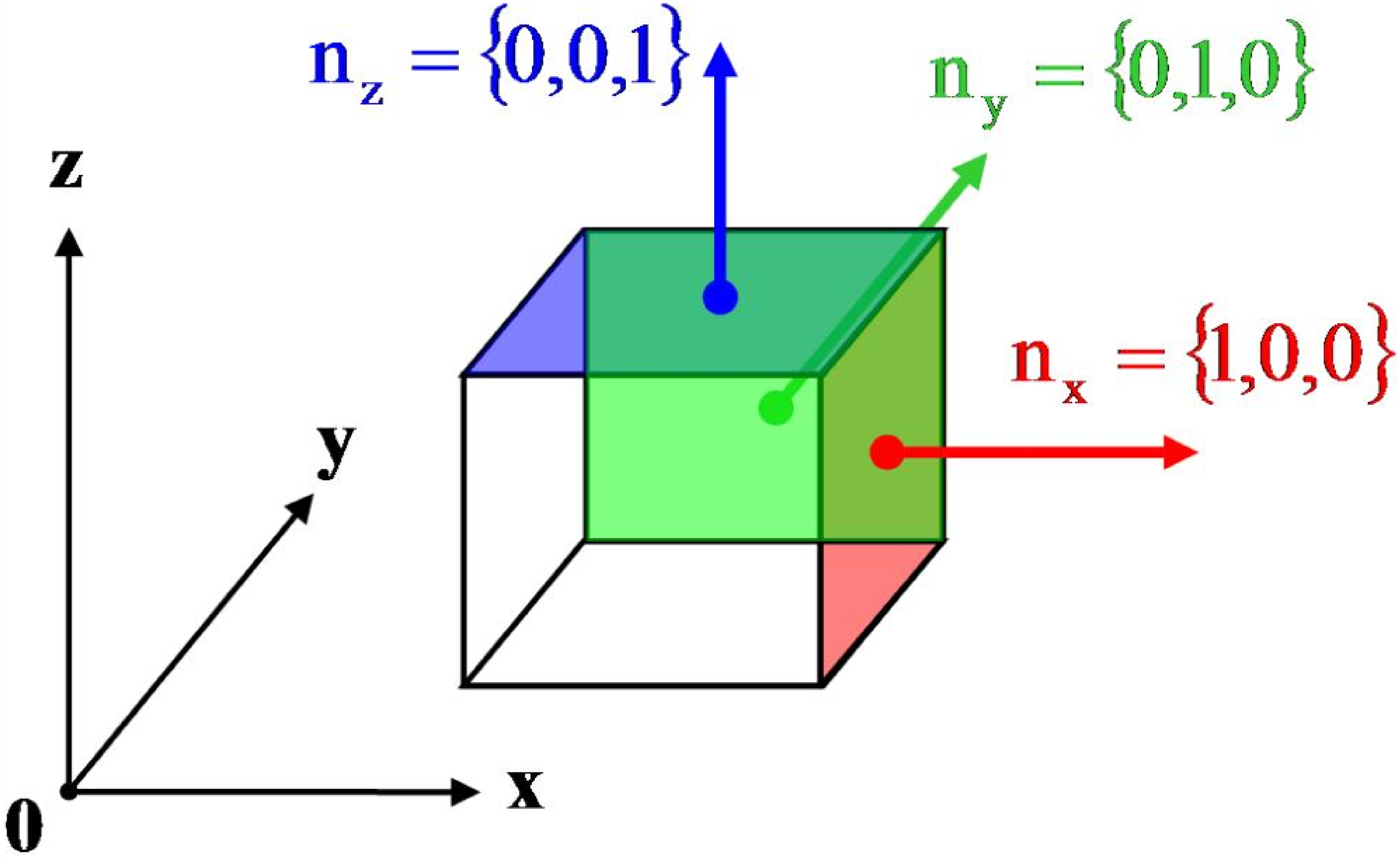
Массовые силы

$$F_{масс} \sim dm = dx\ dy\ dz\ \rho$$



- сила притяжения (Земля, Луна, Солнце, …)
- силы инерции (Кориолиса, центробежная)

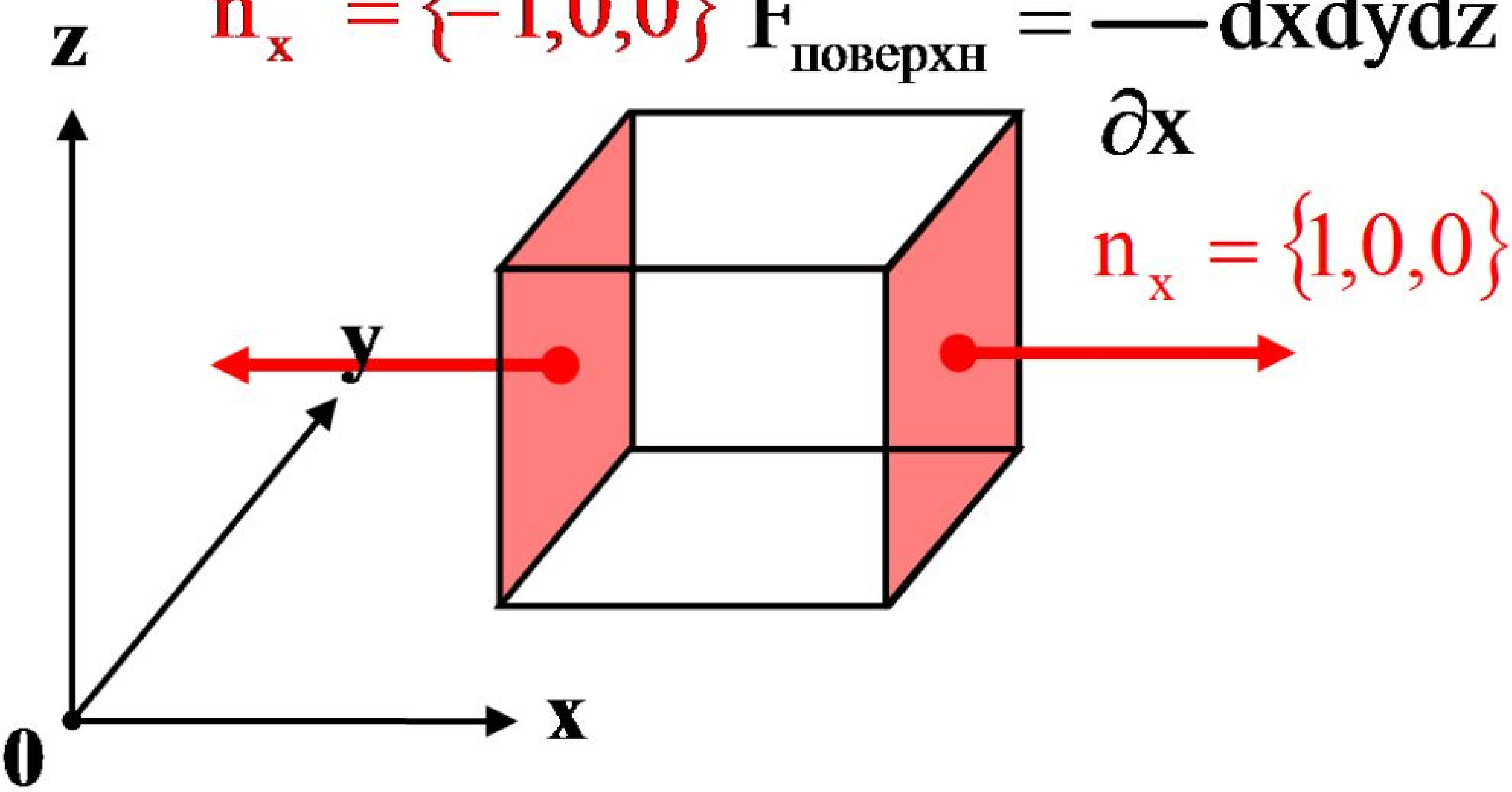
«Поверхностные» силы



«Поверхностные» силы

$$F_{\text{поверхн}} = \left[\tau(x+dx) - \tau(x)\right]dydz$$

$$n_x' = \{-1,0,0\} \quad F_{\text{поверхн}} = \frac{\partial\tau}{\partial x}dxdydz$$



$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{масс} + \sum \vec{F}_{поверхн}$$

$$dx\,dy\,dz\,\rho$$

$$\sim dx\,dy\,dz\,\rho$$

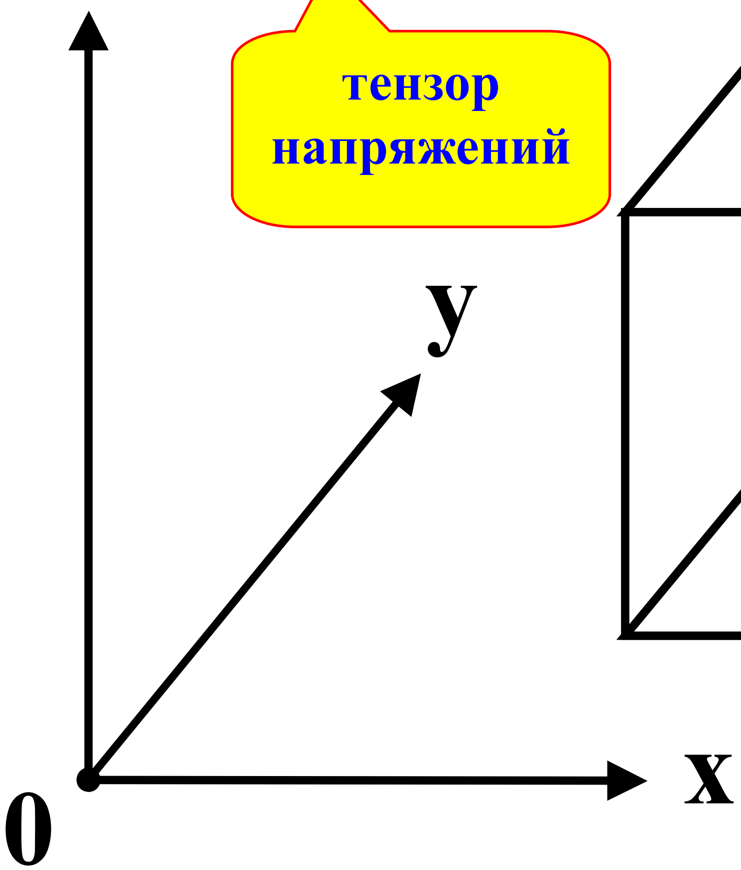
$$"\frac{\partial \tau}{\partial x}"\,dxdydz$$

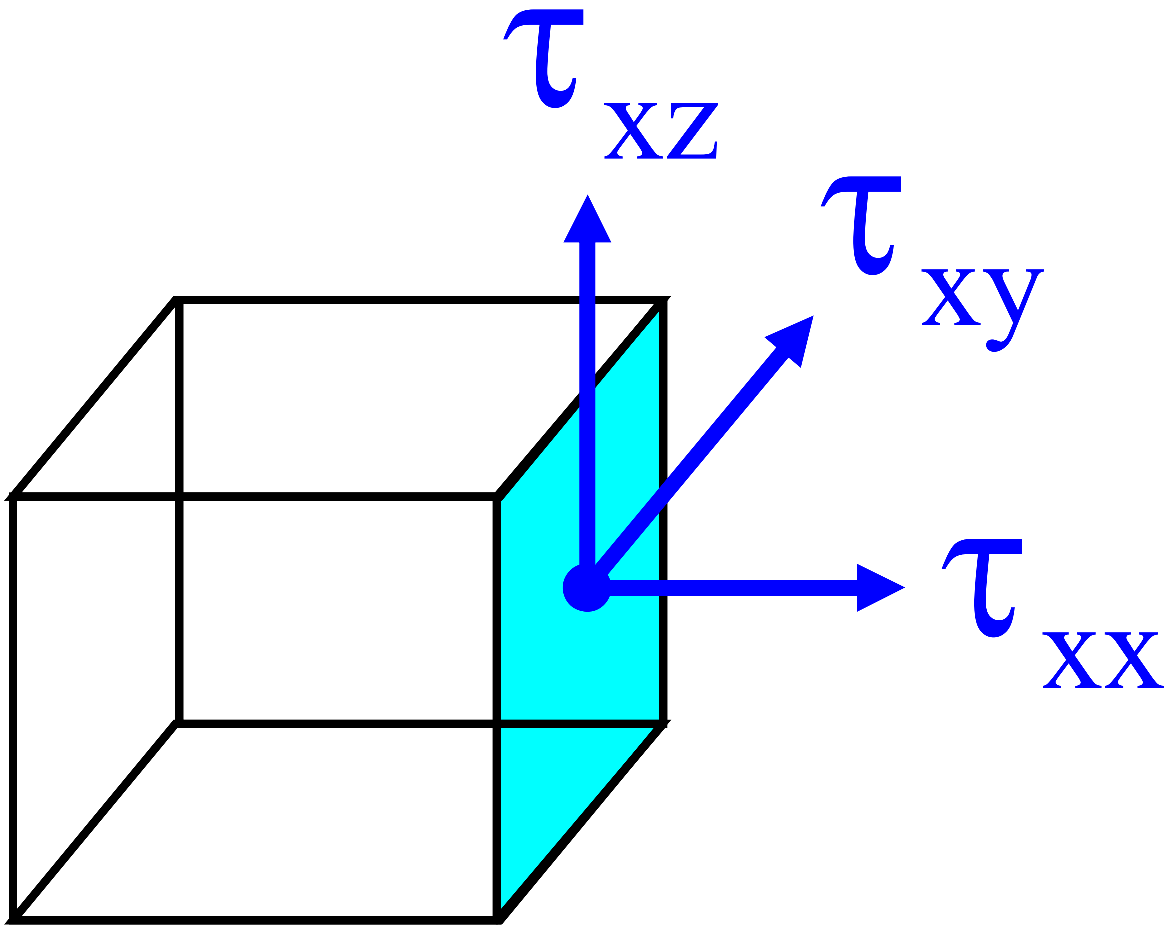
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] + \frac{1}{\rho}"\frac{\partial \tau}{\partial x}"$$

«Поверхностные» силы

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

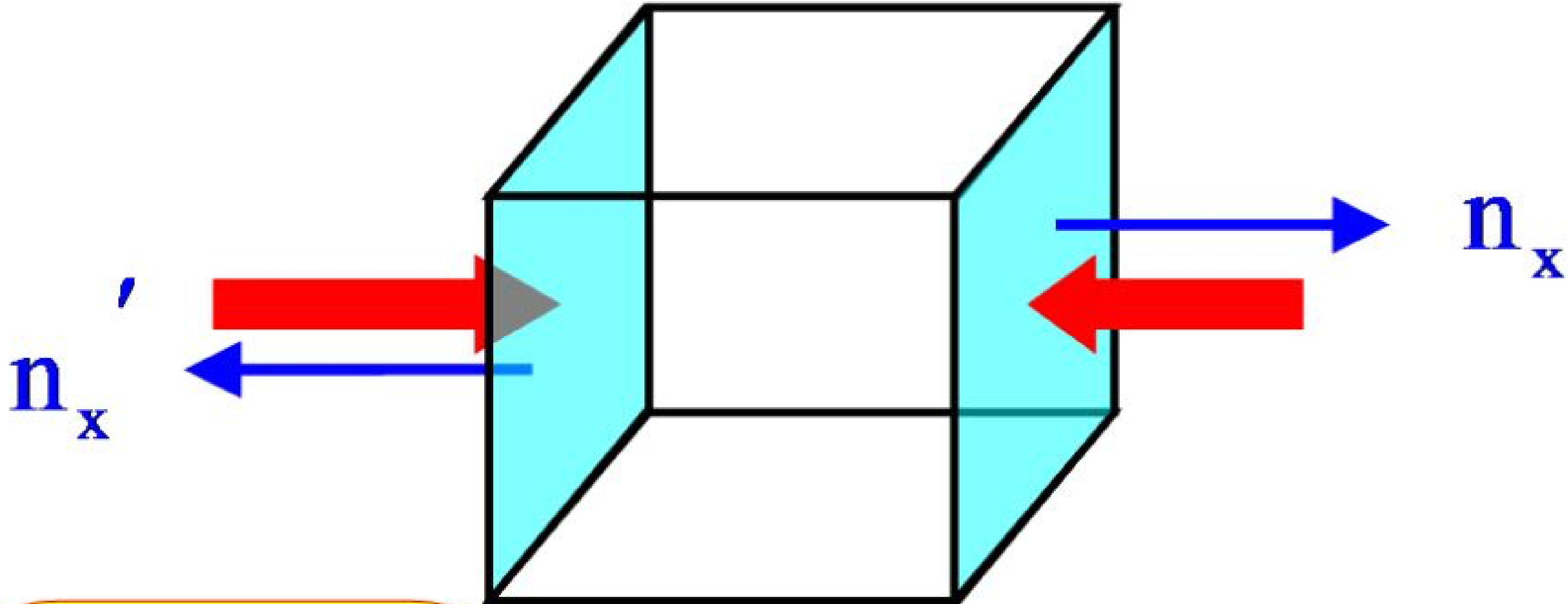
тензор напряжений





Сила градиента давления

$$p(x, y, z)\,dy\,dz$$



$$p(x + dx, y, z)\,dy\,dz$$

напряжение действует в направлении противоположном нормали!

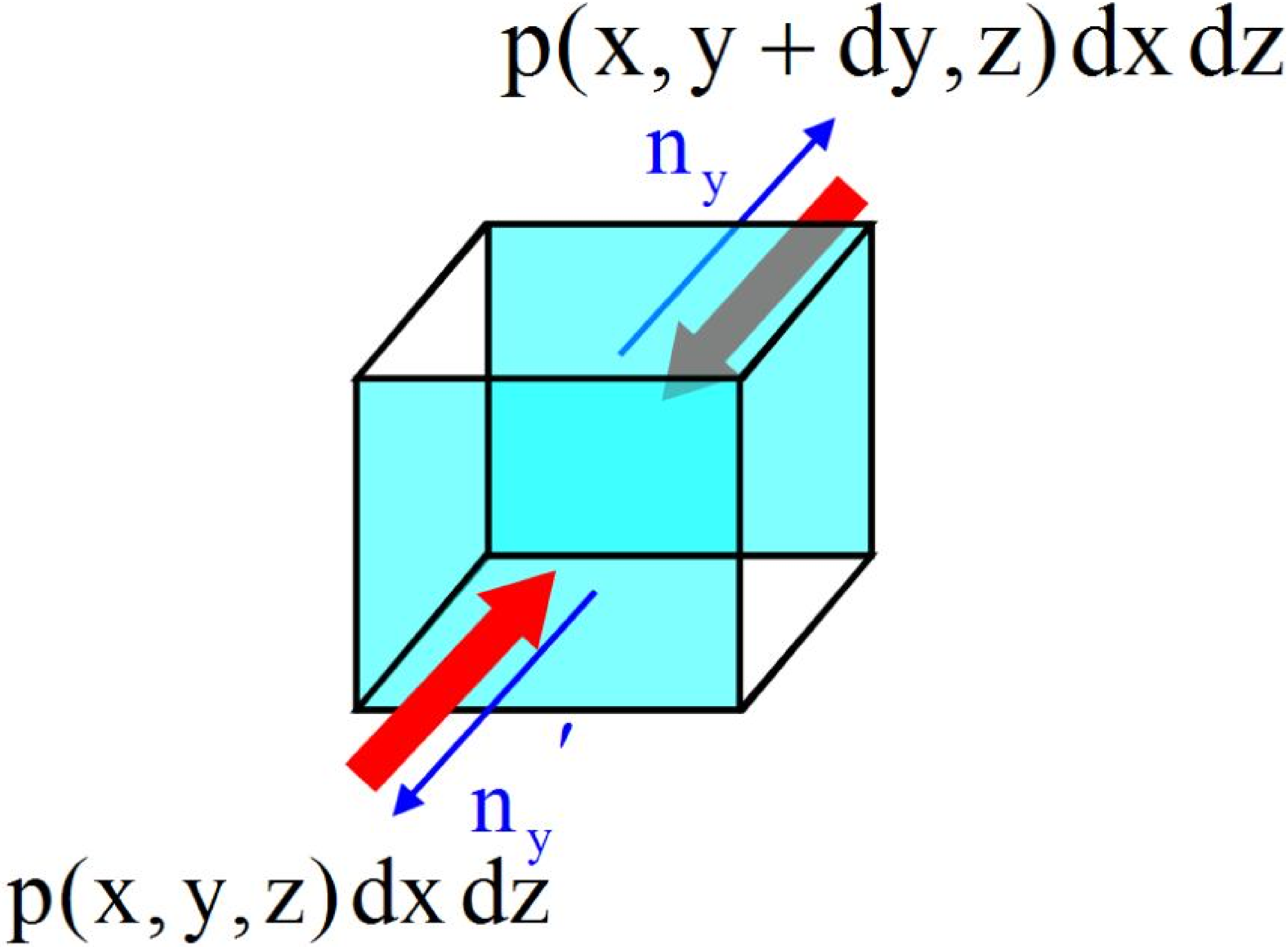
Сила градиента давления
(x - компонента)

$$\left[p(x,y,z) - p(x+dx,y,z)\right] dy\,dz =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$

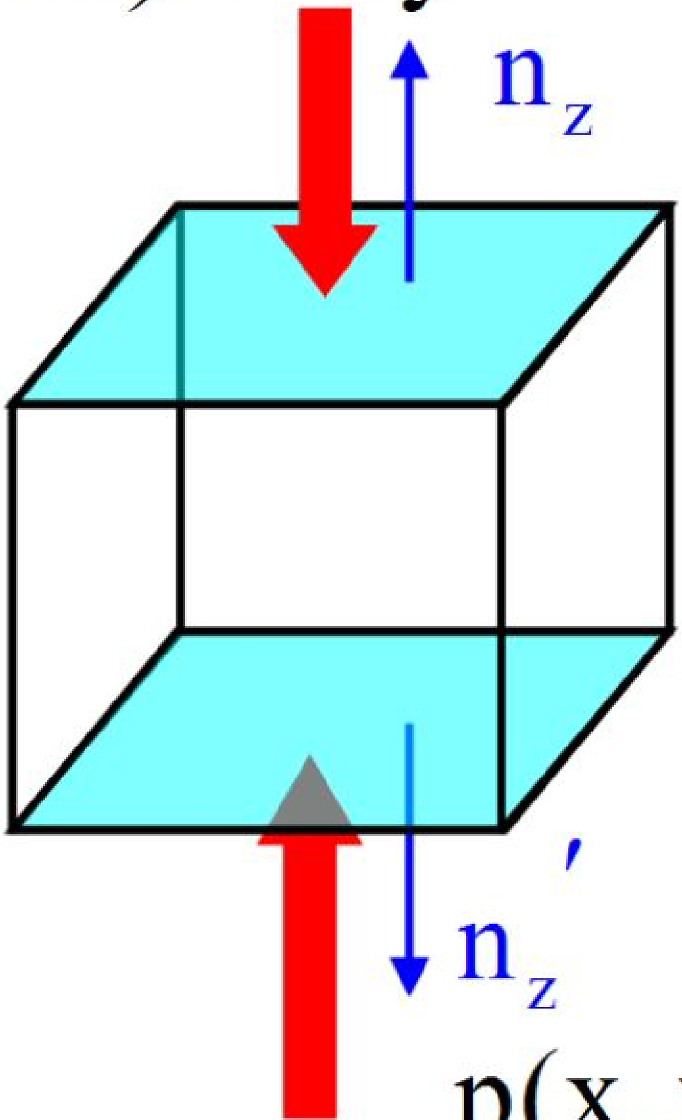
$$\underbrace{dx\,dy\,dz\,\rho}_{dm}\,a_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$

$$a_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$



$p(x, y + dy, z)\,dx\,dz$
n_y
n_y'
$p(x, y, z)\,dx\,dz$

$$p(x, y, z + dz)\, dx\, dy$$



$$p(x, y, z)\, dx\, dy$$

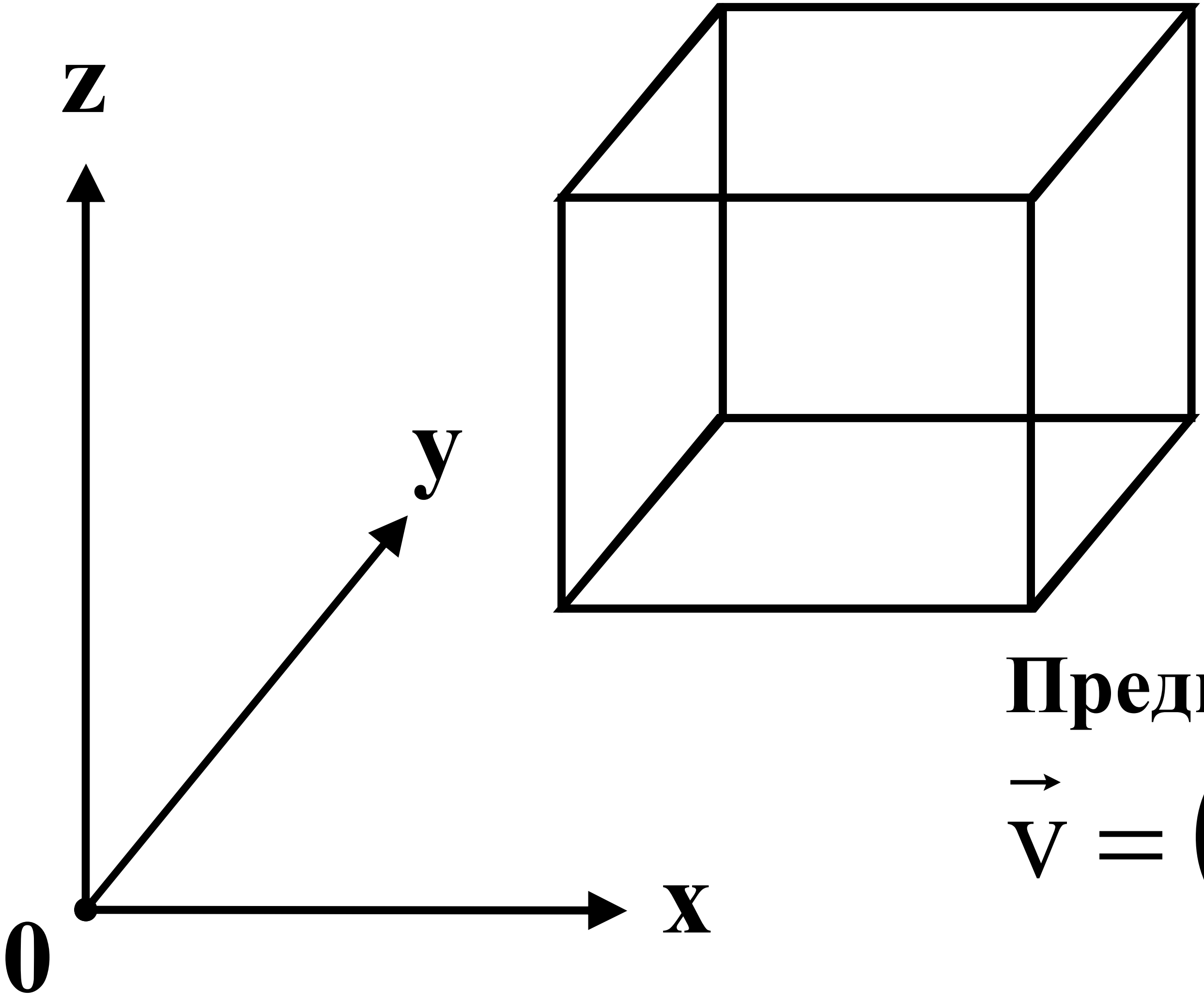
Сила градиента давления

$$a_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \vec{F}^{\,grad\,p} = -\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{grad}\,p$$

$$a_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad \vec{F}^{\,grad\,p} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$$

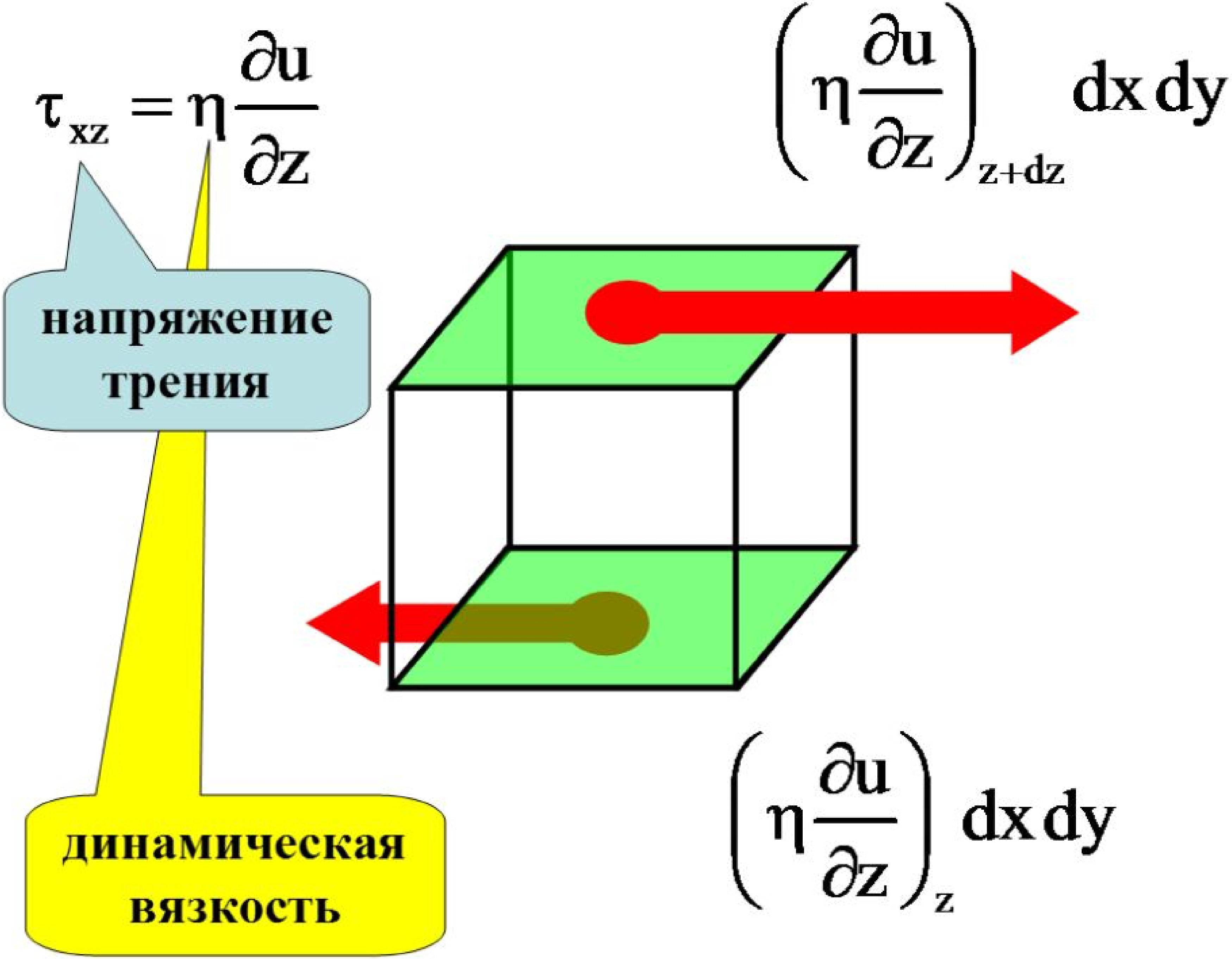
$$a_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad \vec{\nabla} \equiv \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

Сила вязкого трения

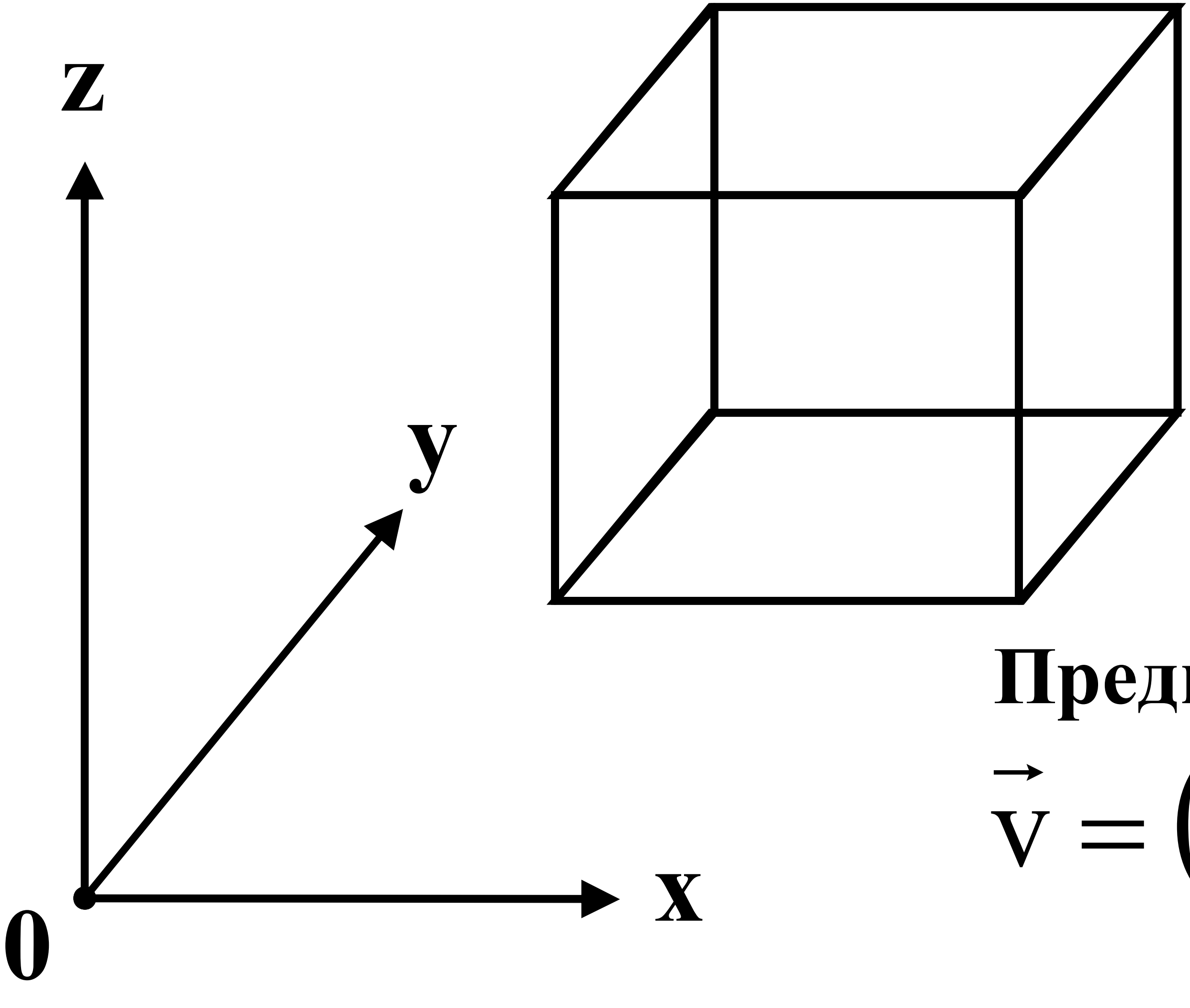


Предположим, что

$$\vec{v} = \left(u(z), 0, 0\right)$$


$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial u}{\partial z}$
напряжение трения
динамическая вязкость
$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z+dz} dx\,dy$
$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z} dx\,dy$

Сила вязкого трения

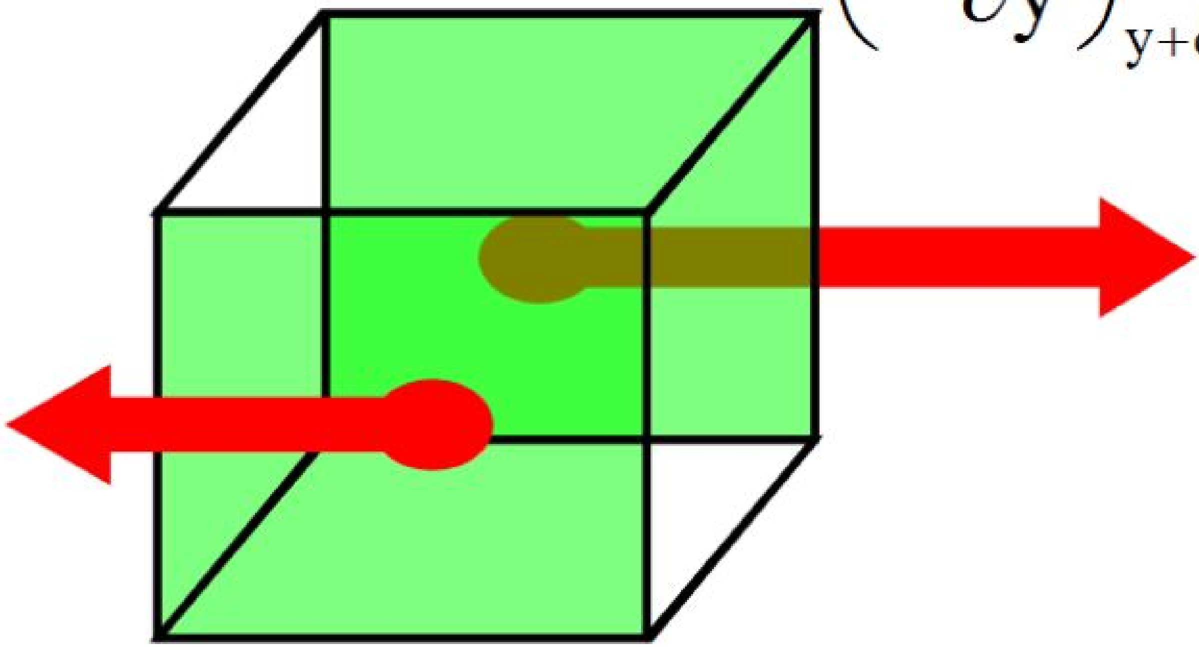


Предположим, что

$$\vec{v} = \left(u(y), 0, 0\right)$$

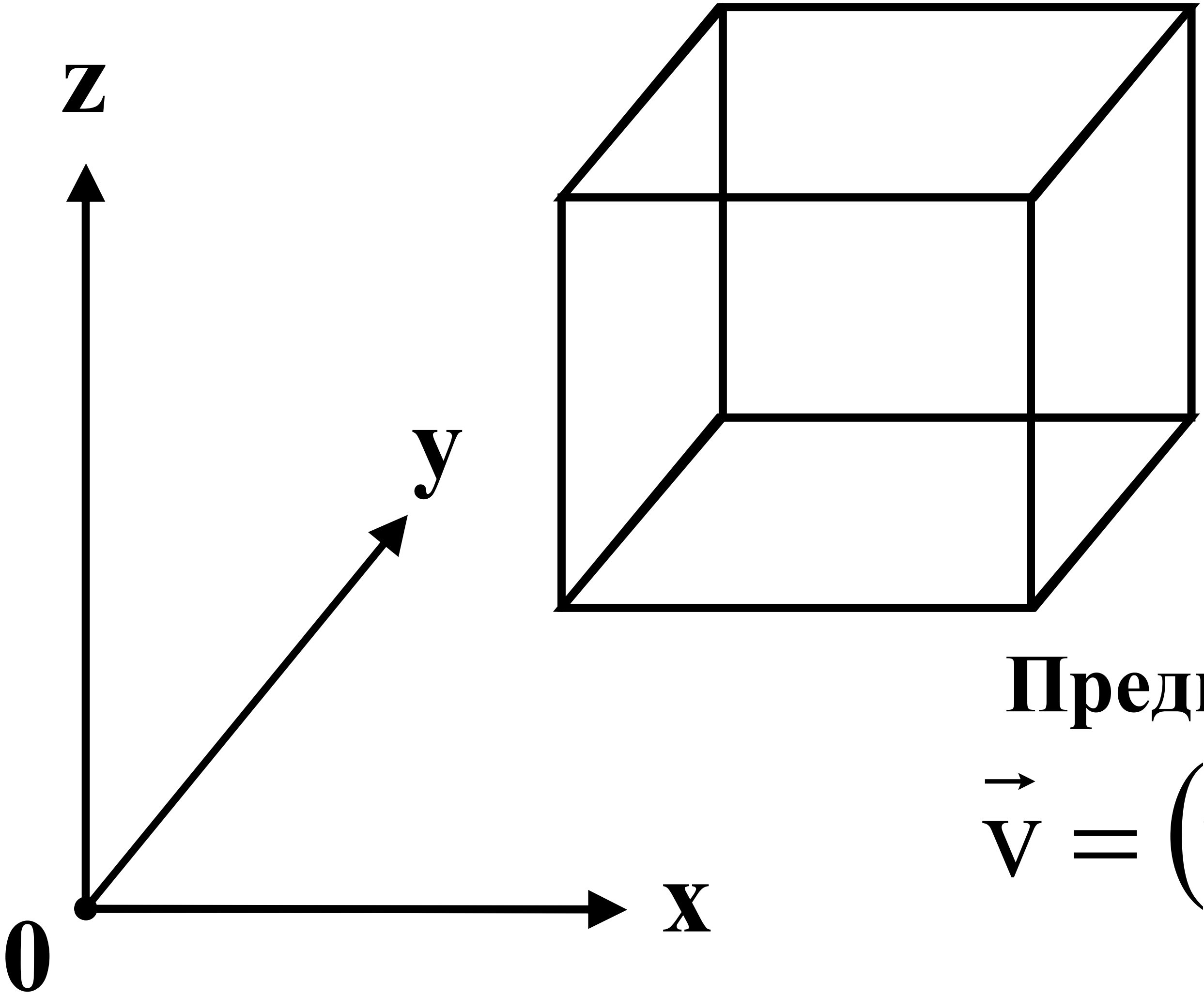
$$\tau_{xy} = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y+dy} dx\, dz$$



$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y} dx\, dz$$

Сила вязкого трения

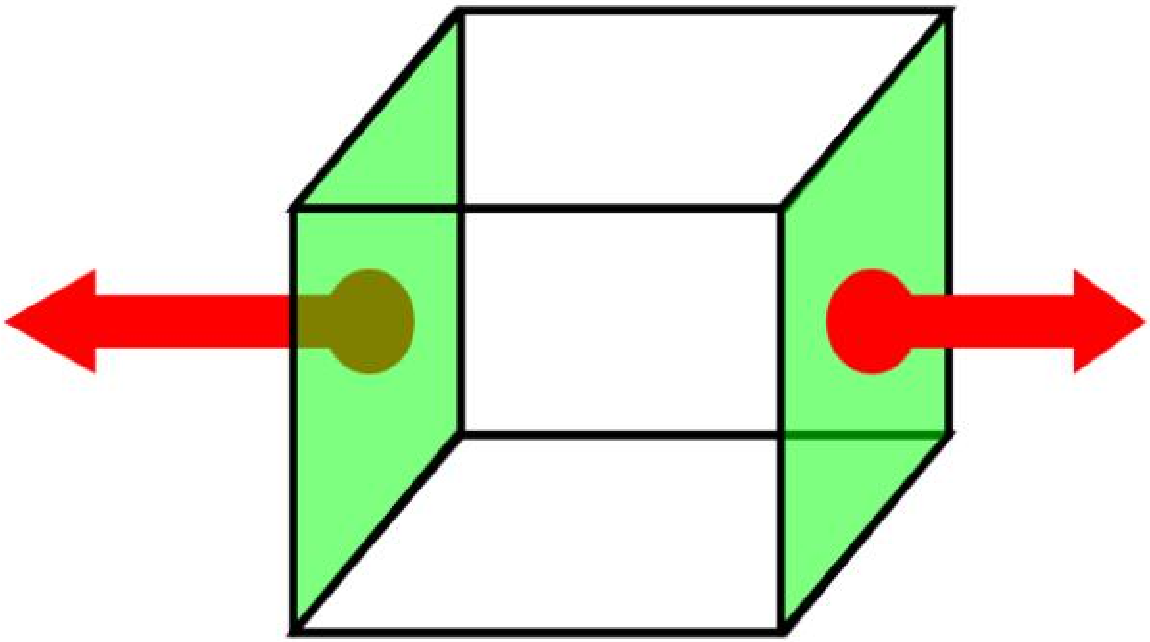


Предположим, что

$$\vec{v} = \left(u(x), v, w\right)$$

$$\tau_{xx} = \eta \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} dy\, dz$$



$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x} dy\, dz$$

Сила вязкого трения

$$F_x^{\text{вязк.трения}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$F_x^{\text{вязк.трения}} = \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \frac{\eta}{\rho}\Delta u = \nu\Delta u$$

кинематическая вязкость

Для сжимаемой жидкости!!!

Вторая вязкость

$$\vec{F}^{\text{вязк.трения}} = \nu\Delta\vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$$

	η, кг/с·м	ν, м^2/с
вода	10^{-3}	10^{-6}
воздух	$2\cdot 10^{-5}$	$15\cdot 10^{-6}$

$$\nu_{\text{глицерин}} \approx 680\cdot 10^{-6}\ \text{м}^2/\text{с}$$

$$\nu_{\text{мантии}} \approx 10^{17}\ \text{м}^2/\text{с}$$

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{масс} + \sum \vec{F}_{поверхн}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right) \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v}$$

сила тяжести

сила Кориолиса

сила градиента давления

сила вязкого трения

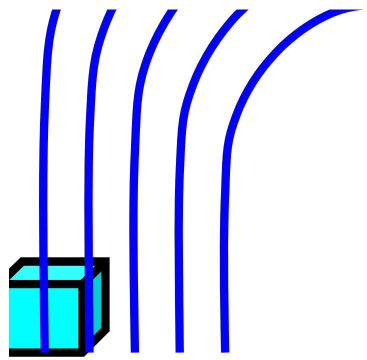
$$\vec{v} = \vec{v}\big(x(t), y(t), z(t), t\big)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v}$$

полная производная

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$



уравнение Навье-Стокса

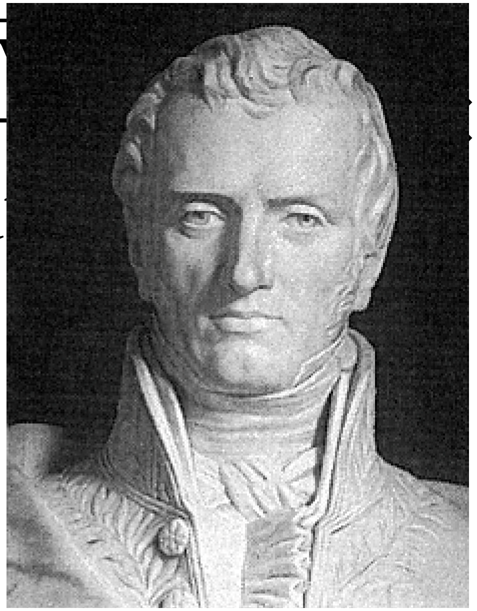
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$$

3 уравнения

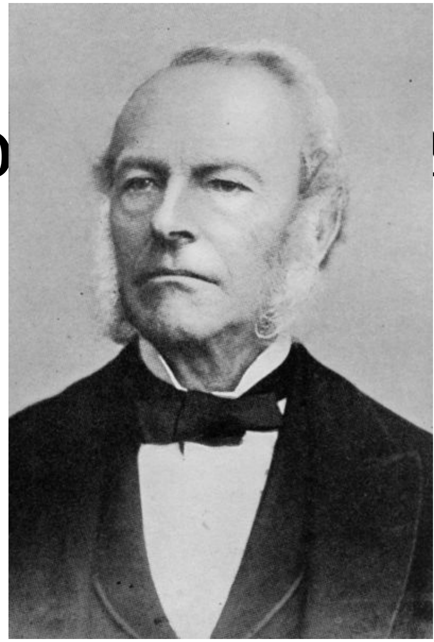
5 неизвестных функций

уравнение
Навье-Стокса

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \ldots \vec{\omega} \ldots \Delta\vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$$



Анри Навье
1785-1836
французский
механик и инженер

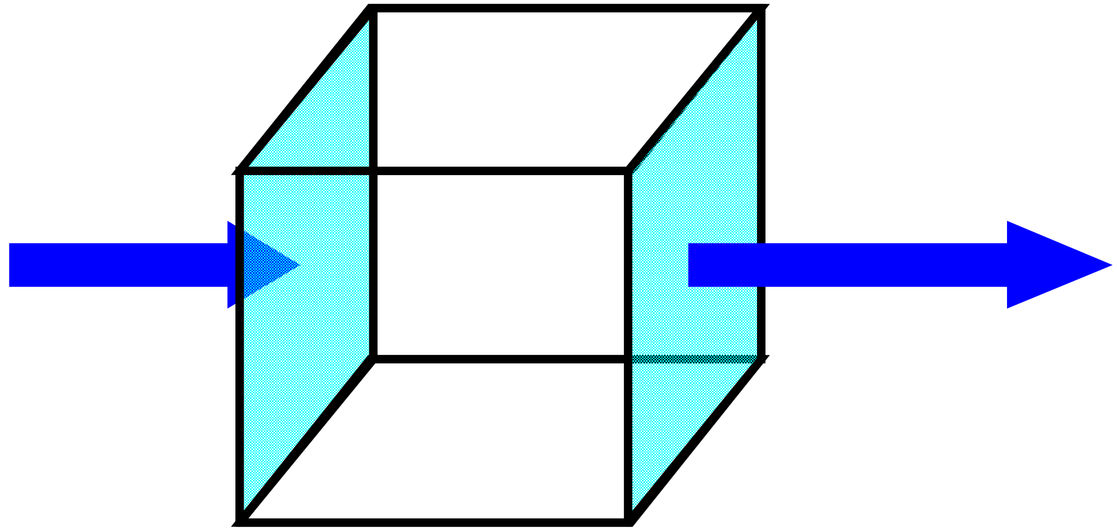


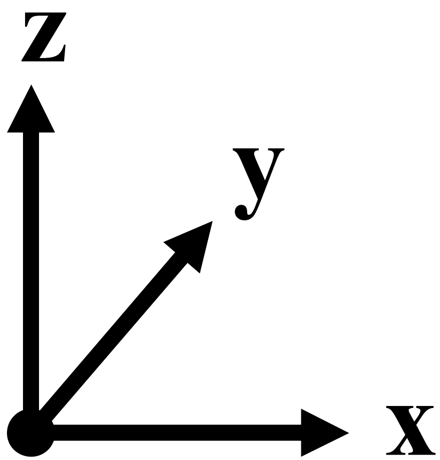
Джордж Стокс
1819-1903
английский физик и
математик

...стных функций

Уравнение неразрывности (закон сохранения массы)

$$\rho(x)u(x)dydz$$





$$\rho(x+dx)u(x+dx)dydz$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = dxdydz\frac{\partial \rho}{\partial t} =$$

$$= -\left[\rho(x+dx)u(x+dx) - \rho(x)u(x)\right]dydz$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial[\rho u]}{\partial x} - \frac{\partial[\rho v]}{\partial y} - \frac{\partial[\rho w]}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left[\rho\vec{v}\right] = 0$$

уравнение неразрывности

Система уравнений гидродинамики (аэрогидромеханики)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0$$

5 уравнений

уравнение Навье-Стокса

уравнение неразрывности

5 неизвестных функций

$$\rho = \rho(p)$$

уравнение состояния

Система уравнений гидродинамики
+уравнение переноса температуры
+уравнение переноса соли/водяного пара

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right) T = \chi \Delta T$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right) s = \vartheta \Delta s$$

$$\rho = \rho(p, T, s)$$

система остается замкнутой!!!

Система уравнений гидродинамики
+уравнение переноса температуры
+уравнение переноса соли/водяного пара

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right) T = \chi \Delta T$$

Можно ли решить эту систему?!

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right) s = \vartheta \Delta s$$

$$\rho = \rho(p, T, s)$$

необходимы граничные и начальные условия

Граничные условия на поверхностях, ограничивающих область решения задачи

условие прилипания

$$\vec{v} = 0 \quad \textbf{или} \quad \vec{v} = \vec{v}_0$$

заданное напряжение (поток импульса)

$$\eta \frac{\partial u}{\partial z} = \tau$$

заданное давление

$$p = p_0$$

заданный поток тепла

$$-C\rho\chi \frac{\partial T}{\partial z} = Q$$

заданная температура

$$T = T_0$$

Граничные условия на поверхностях, ограничивающих область решения задачи

Поверхности могут быть подвижными и неизвестными, т.е. их положение определяется из решения задачи

<u>Примеры:</u>

- **волны на поверхности воды**
- **течения с возможностью фазовых переходов (лед-вода, мантия-ядро Земли)**
- **размыв или выветривание**
- **etc.**

Начальные условия (при t=0)

$$\vec{v} = \vec{v}_0(x, y, z)$$

$$p = p_0(x, y, z)$$

$$T = T_0(x, y, z)$$

$$s = s_0(x, y, z)$$

«высокая» теория

геофизическая практика

Проблема ассимиляции данных наблюдений в численные модели

Основные подходы к упрощению уравнений гидродинамики

Приближение №1:
«среда с постоянной плотностью (в.т.ч. несжимаемая)»

$\boxed{\rho = \rho_0 = \mathrm{const}}$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2\left[\vec{v}\times\vec{\omega}\right] + \nu\Delta\vec{v} + \cancel{\left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v}}$$

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \mathrm{div}\left(\rho\,\vec{v}\right) = 0$$

$\rho = \rho(p)$

ρ_0

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$

Приближение №1: «среда с постоянной плотностью»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] + \nu \Delta \vec{v}$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

В крупномасштабных течениях атмосферы и океана H << L
$\Rightarrow$ $w_{верт} \ll u_{гориз}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{u_{гориз}}{L}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} \sim \frac{w_{верт}}{H}$$

$$\boxed{\left|w_{верт}\right| \sim \frac{H}{L}\left|u_{гориз}\right|}$$

Приближение №2:
«стационарное течение»

$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] + \nu \Delta \vec{v} + \boxed{+\left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}}$$

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \operatorname{div}\left(\rho\, \vec{v}\right) = 0$$

$$\rho = \rho(p)$$

Приближение №3:
«идеальная (невязкая) жидкость»

понижается порядок уравнения

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] + \cancel{\nu \Delta \vec{v}} + \cancel{\left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0$$

$$\rho = \rho(p)$$

Изменение граничного условия:

«прилипание» → «непротекание»

$$\{v_\tau = 0,\ v_n = 0\} \rightarrow \{v_n = 0\}$$

Приближение №4:
«идеальная жидкость постоянной плотности, линейное приближение»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{\left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v}} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right]$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

если $\left\{\begin{matrix} \vec{v}_1, p_1 \\ \vec{v}_2, p_2 \end{matrix}\right\}$ – решения системы, то $\Rightarrow$

$A\vec{v}_1 + B\vec{v}_2, Ap_1 + Bp_2$ – решения системы

где A, B – константы

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

2. Геострофическое приближение

strophe (греч.) – вращение, поворот

Крупномасштабные течения атмосферы и океана обычно происходят в условиях гидростатического (по вертикали) и геострофического (по горизонтали) баланса

$$z: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] = 0$$

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

$$\cancel{\frac{dw}{dt}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

$$\boxed{\begin{gathered} \left| w_{верт} \right| \sim \frac{H}{L} \left| u_{гориз} \right| \\ H << L \end{gathered}}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \;\Rightarrow p(z) = p_0 - \rho_0 g\, z$$

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

2. Геострофическое приближение

strophe **(греч.) – вращение, поворот**

Крупномасштабные течения атмосферы и океана обычно происходят в условиях гидростатического (по вертикали) и геострофического (по горизонтали) баланса

$$z: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] = 0$$

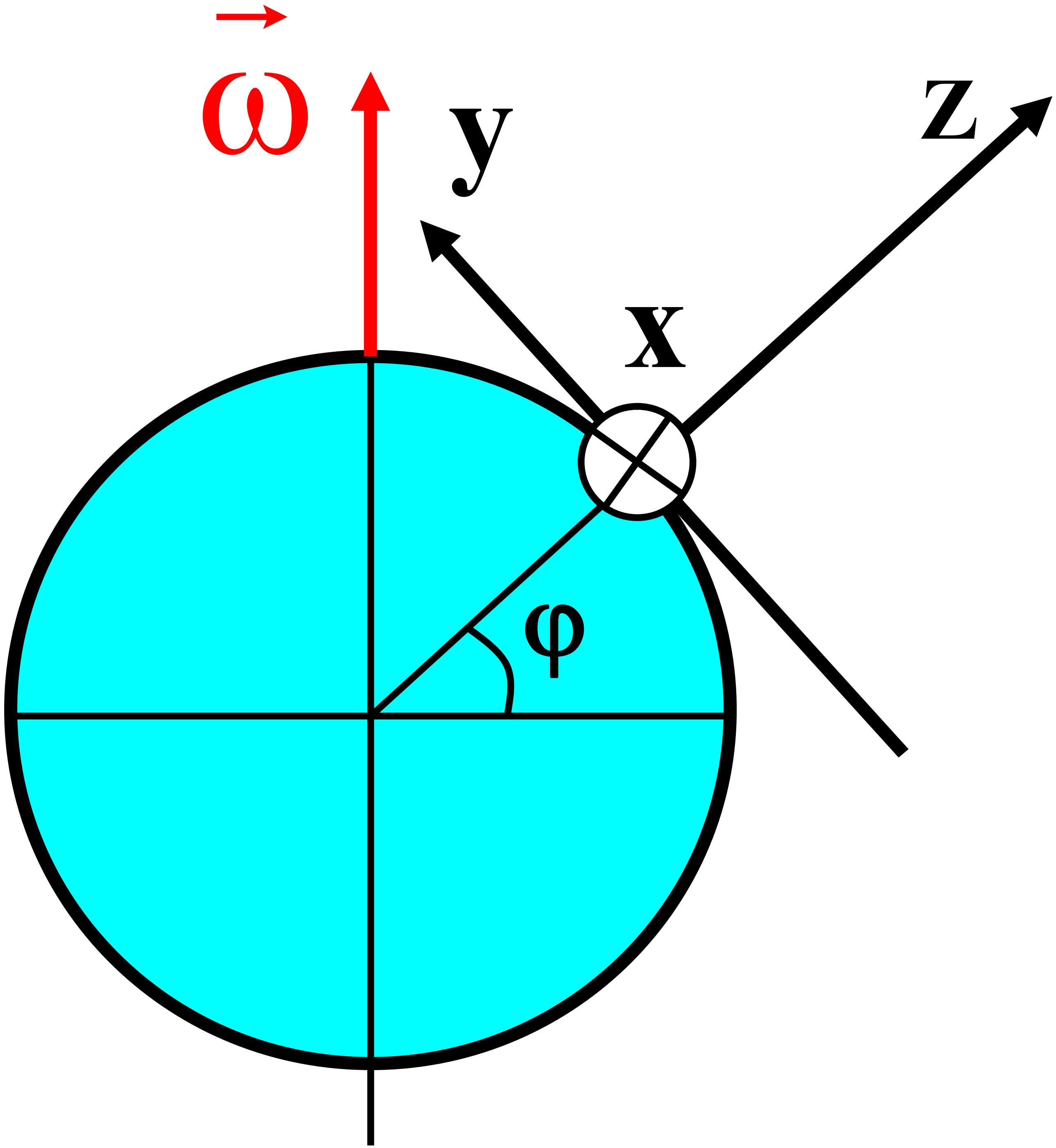
«Геофизические» приближения:

2. Геострофическое приближение

$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{\left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v}} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \cancel{\vec{g}} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right]$$

$$\operatorname{div}\left(\vec{v}\right) = 0$$

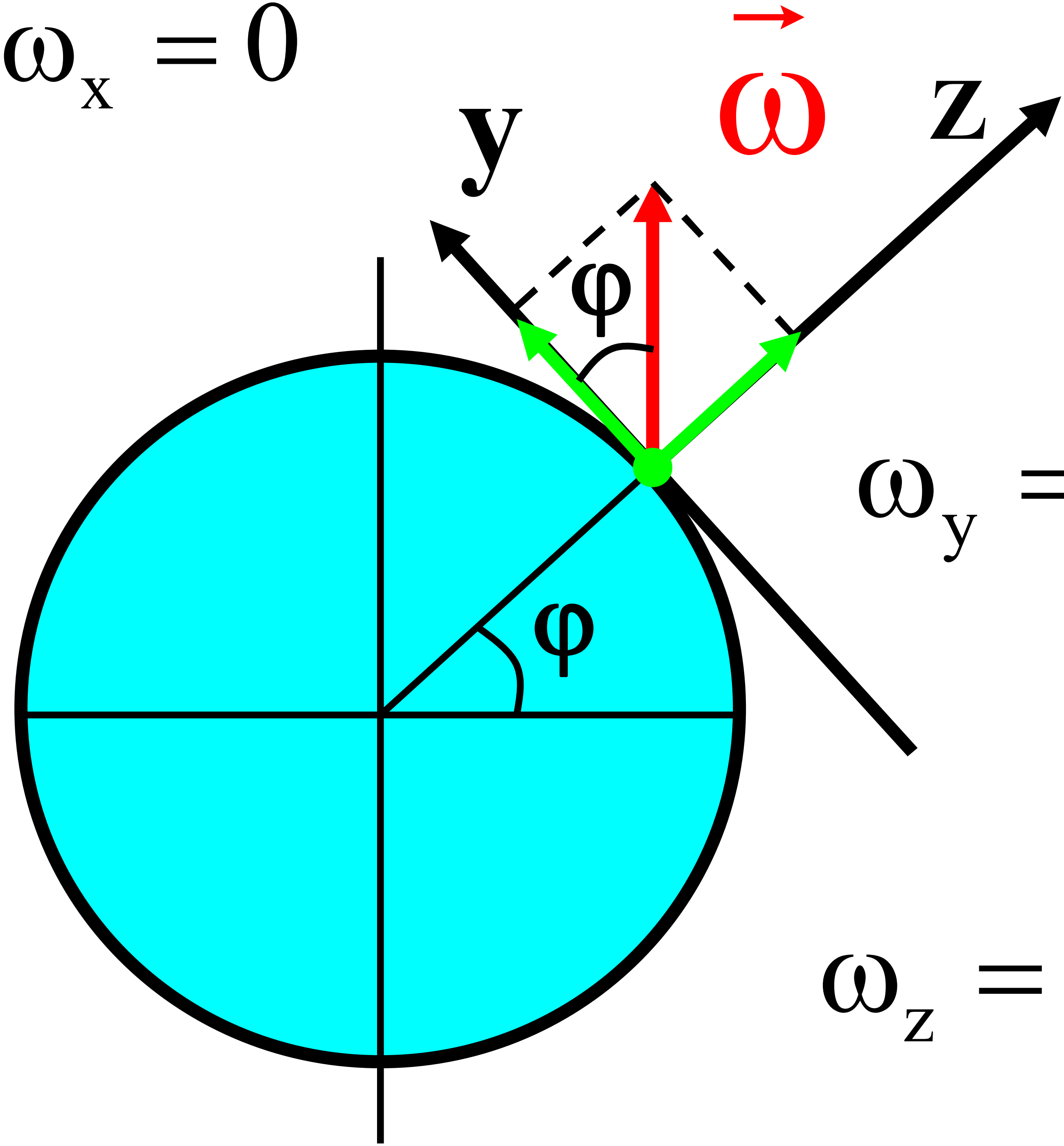
по горизонтали не действует!



$\vec{\omega}$
y
Z
X
φ

$$\omega_x = 0$$

$$\boxed{\omega \equiv |\vec{\omega}|}$$



$$\omega_y = \omega \cos \varphi$$

$$\omega_z = \omega \sin \varphi$$

$$\vec{v} = (u, v, w)$$

$$\vec{\omega} = \left(0, \omega \cos \varphi, \ \omega \sin \varphi\right)$$

$$2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] = 2\begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = 2\begin{pmatrix} v\omega_z - w\omega_y \\ w\omega_x - u\omega_z \\ u\omega_y - v\omega_x \end{pmatrix} =$$

$$= 2\begin{pmatrix} v\omega \sin \varphi - w\omega \cos \varphi \\ -u\omega \sin \varphi \\ u\omega \cos \varphi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2v\omega \sin \varphi \\ -2u\omega \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = (u, v, w)$$

$$\vec{\omega} = (0, \omega \cos \varphi,$$

традиционное приближение

1. $w << \{u, v\}$

2. $F_z^{Кор} = 0$

$$2[\vec{v} \times \vec{\omega}] = 2\begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & \\ \omega_x & \omega_y & \end{vmatrix} = \ldots v\omega_x \ldots =$$

$$= 2\begin{pmatrix} v\omega \sin\varphi - w\omega\cos\varphi \\ -u\omega\sin\varphi \\ u\omega\cos\varphi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2v\omega\sin\varphi \\ -2u\omega\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2\left[\vec{v}\times\vec{\omega}\right]\approx\begin{pmatrix} 2v\omega\sin\varphi \\ -2u\omega\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f\,v \\ -f\,u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f = 2\omega\sin\varphi$$

параметр Кориолиса

Масштаб времени течения

$$\tau = \frac{L}{U}$$

Copyright © 2008, Elsevier Inc. All rights reserved.

Carl-Gustaf Rossby
Swedish-US meteorologist
1898-1957

Кибель Илья Афанасьевич
советский математик гидромеханик и метеоролог
1904-1970

Период вращения

$$T$$

Число Россби (Кибеля-Россби)

$$\frac{T}{\tau} = \frac{T \cdot U}{L} \equiv R_o$$

Число Россби

$$R_o = \frac{T \cdot U}{L}$$

Неподвижный (относительно Земли) бассейн

$$R_o = \frac{24 \cdot 60 \cdot 60[\text{с}] \times 0.01[\text{м}/\text{с}]}{0.3[\text{м}]} \approx 3000$$

эффекты вращения незначительны

эффекты вращения существенны

Вращающийся бассейн

$$R_o = \frac{3[\text{с}] \times 0.01[\text{м}/\text{с}]}{0.3[\text{м}]} = 0.1$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

$$\frac{U}{T} \sim \frac{U}{L/U}$$

геострофическое приближение работает при

$$R_o << 1$$

$$U \cdot f$$

$$f = 2\omega \sin \varphi$$

на экваторе $R_o \to \infty$

число Кибеля-Россби

$$R_o = \frac{\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|}{\left|2[\vec{v} \times \vec{\omega}]\right|} \sim \frac{\frac{U}{L/U}}{U \cdot f} = \frac{U}{L \cdot f}$$

Оценка числа Россби для природных условий

$$\boxed{R_o = \frac{U}{L \cdot f}}$$

$$f = 2\omega \sin\varphi = \frac{4\pi}{T}\sin\varphi \sim 10^{-4}\,c^{-1}$$

геострофическое приближение

сидерический период вращения Земли 23 ч 56 мин 4.0905 с

$$f_{max} \approx 1.458 \cdot 10^{-4}\,c^{-1}$$

хорошо работает

$$R_o = \frac{1[м/с]}{10^6[м]\times 10^{-4}[c^{-1}]} \approx 0.01$$

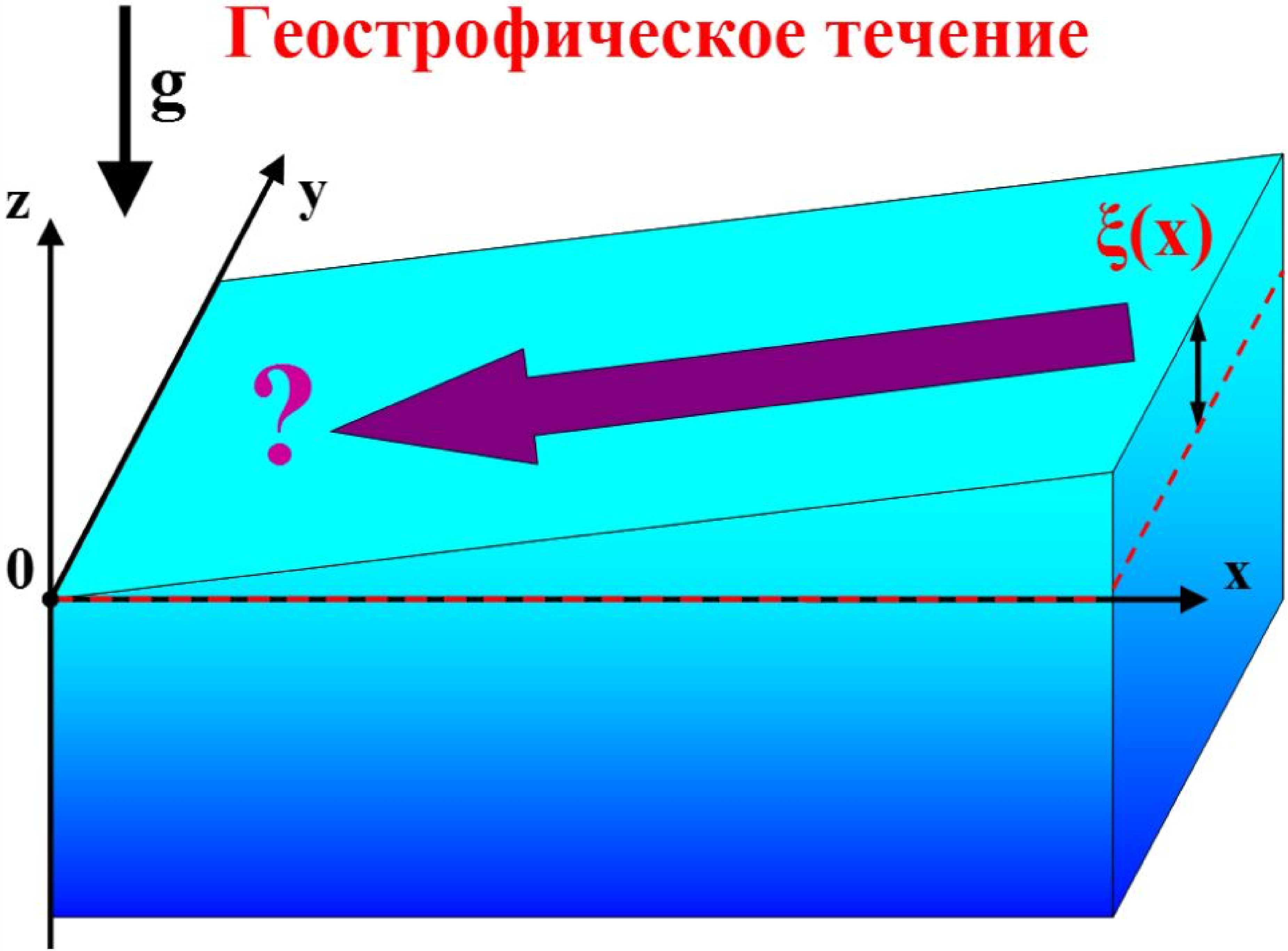
работает

$$R_o = \frac{1[м/с]}{10^5[м]\times 10^{-4}[c^{-1}]} \approx 0.1$$

плохо работает

$$R_o = \frac{1[м/с]}{10^4[м]\times 10^{-4}[c^{-1}]} \approx 1$$

Геострофическое течение



Геострофическое и гидростатическое приближения

$$x: \quad -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + f\,v = 0 \qquad f = 2\omega \sin\varphi$$

$$\vec{v} = (u, v)$$

$$y: \quad -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} - f\,u = 0$$

$$p = p_{\text{атм}} + \rho_0 g(\xi - z)$$

$$z: \quad -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \quad \Bigg| \int_z^{\xi} dz$$

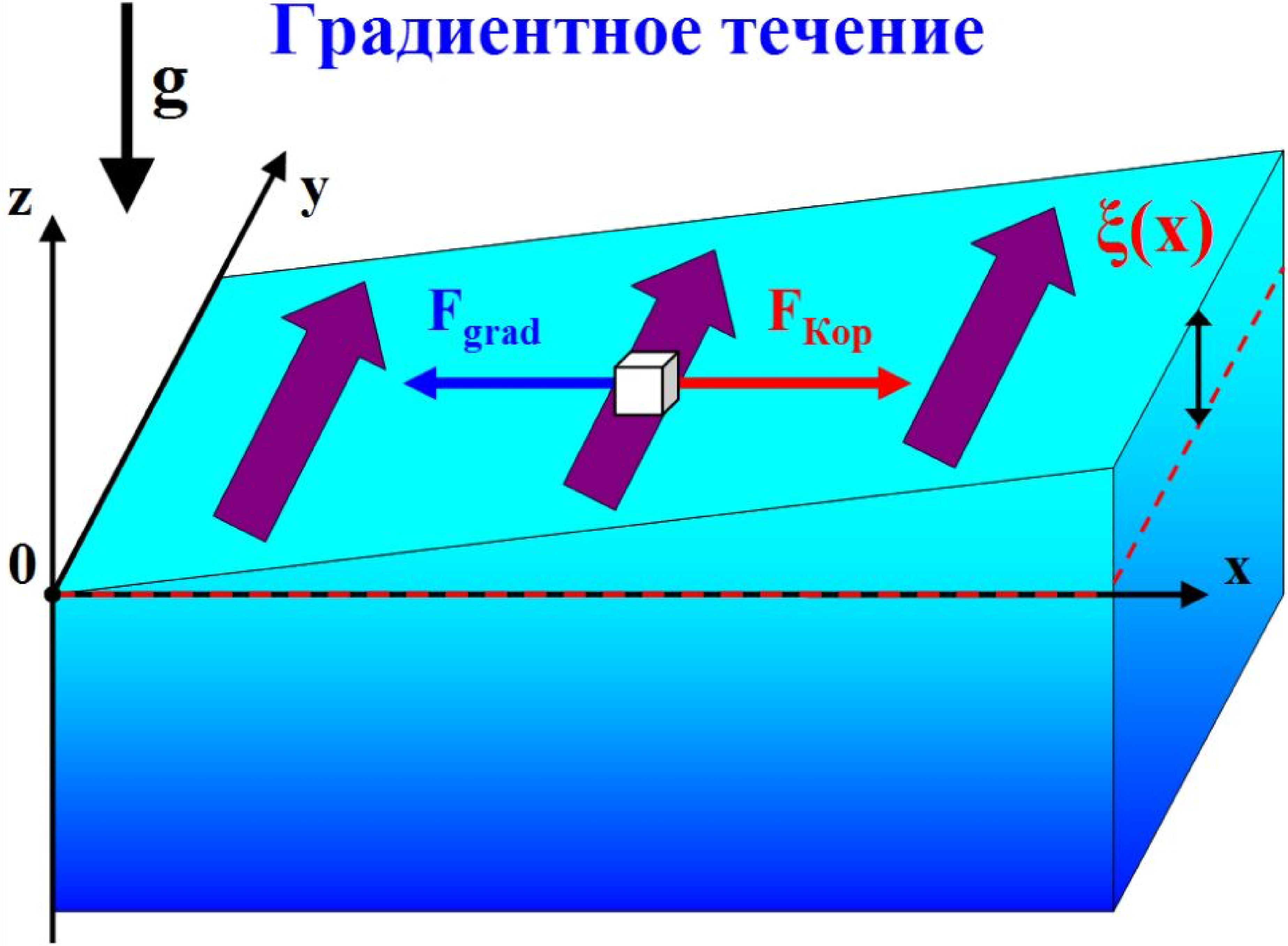
$$x: \quad -g\frac{\partial \xi}{\partial x} + f\,v = 0$$

$$\xi = \xi(x)$$

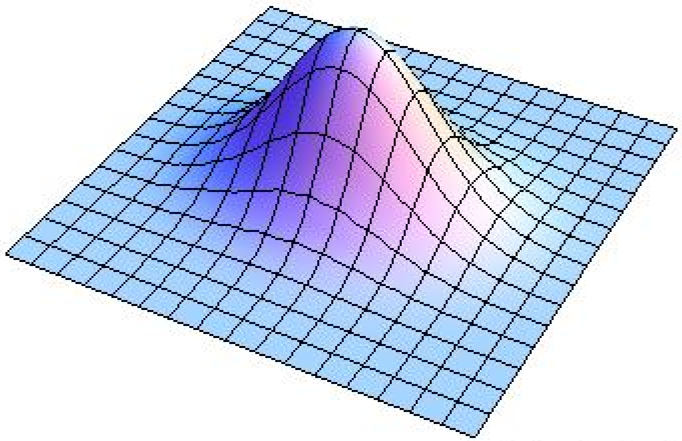
$$y: \quad -g\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_{=0} - f\underbrace{u}_{=0} = 0$$

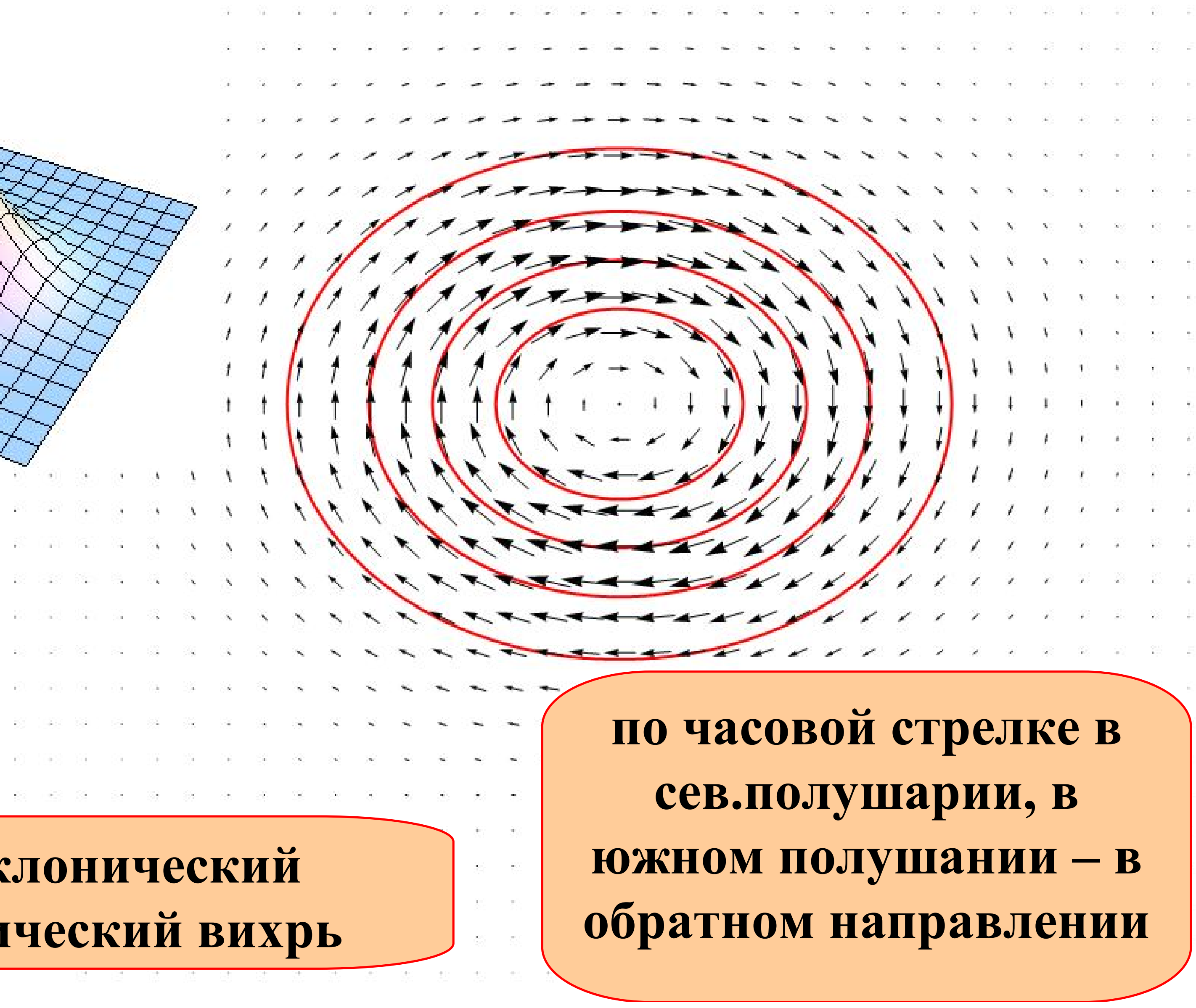
$$\boxed{\begin{aligned} x: &\quad u = 0 \\ y: &\quad v = \frac{g}{f}\frac{\partial \xi}{\partial x} \end{aligned}}$$

Градиентное течение



Геострофическое течение вблизи области **поднятия** уровня (Сев.полушарие)

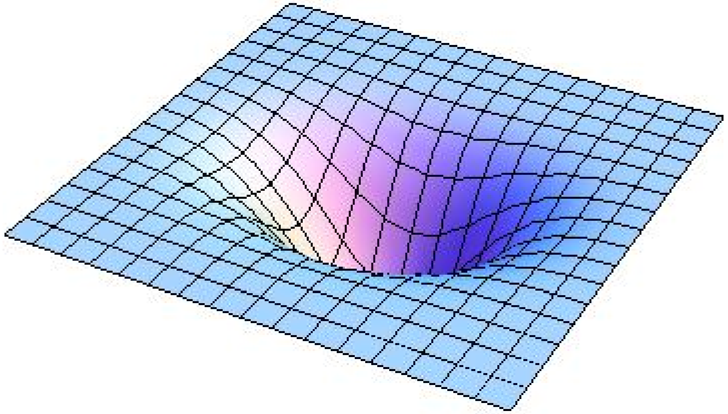


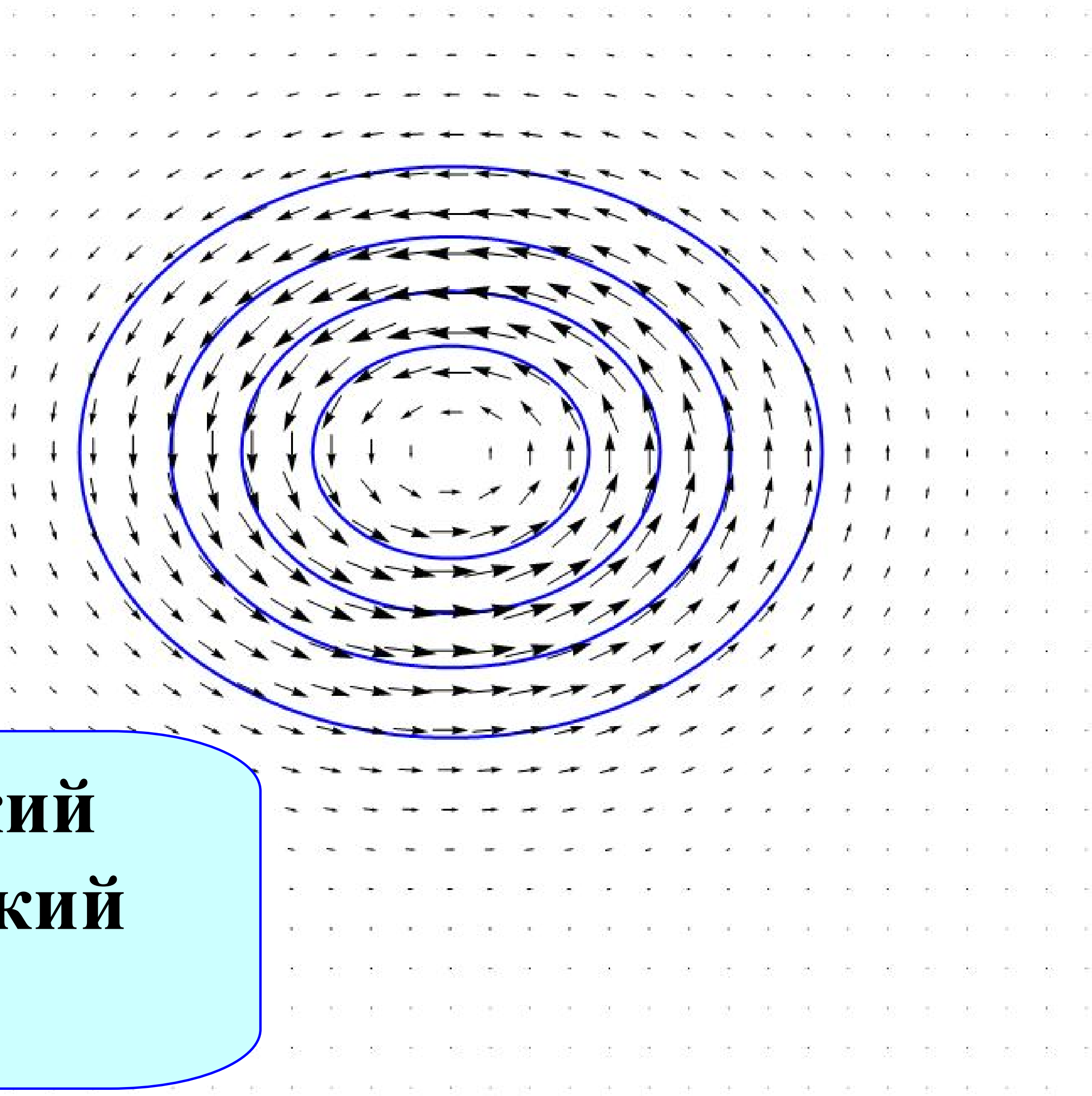


антициклонический геострофический вихрь

по часовой стрелке в сев.полушарии, в южном полушании – в обратном направлении

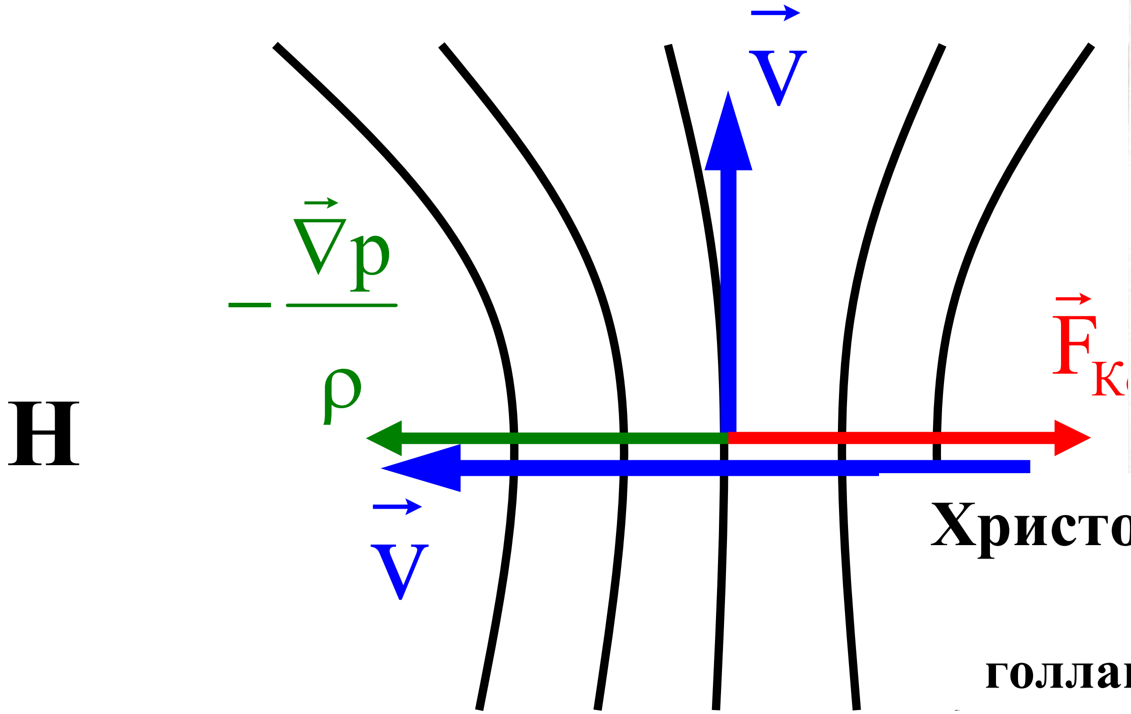
Геострофическое течение вблизи области понижения уровня (Сев.полушарие)





циклонический геострофический вихрь

Геострофический ветер

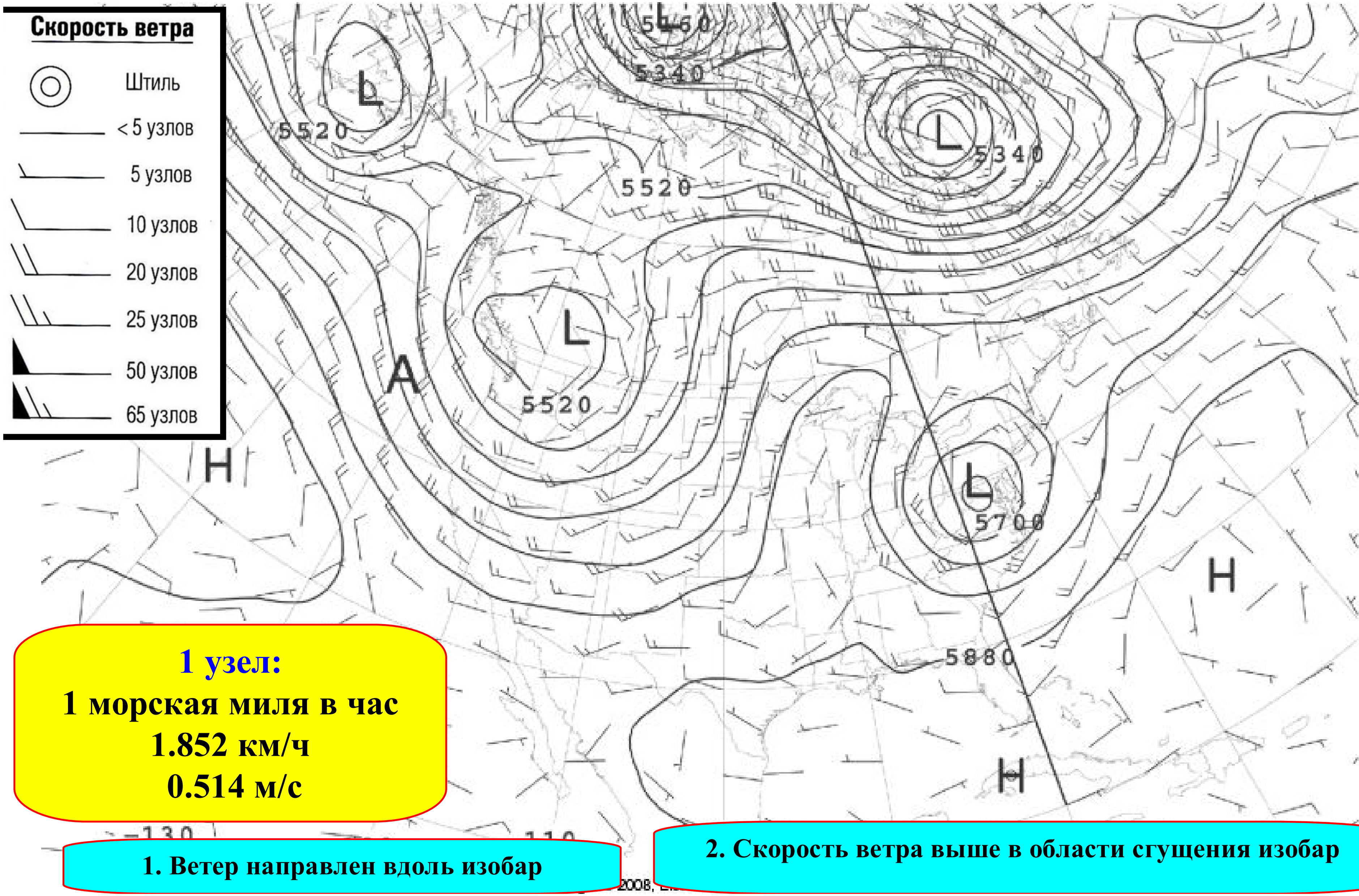


Христофор Бёйс-Баллот
1817-1890
голландский метеоролог

Правило Бейс-Балло, 1857 (Бёйс-Баллот):

«Если в северном полушарии вы встанете спиной к ветру, зона депрессии будет слева от вас, а в южном полушарии – наоборот»

Поля атмосферного давления (изолинии) и скорости ветра на высоте 500 мбар (≈ 5.5 км)



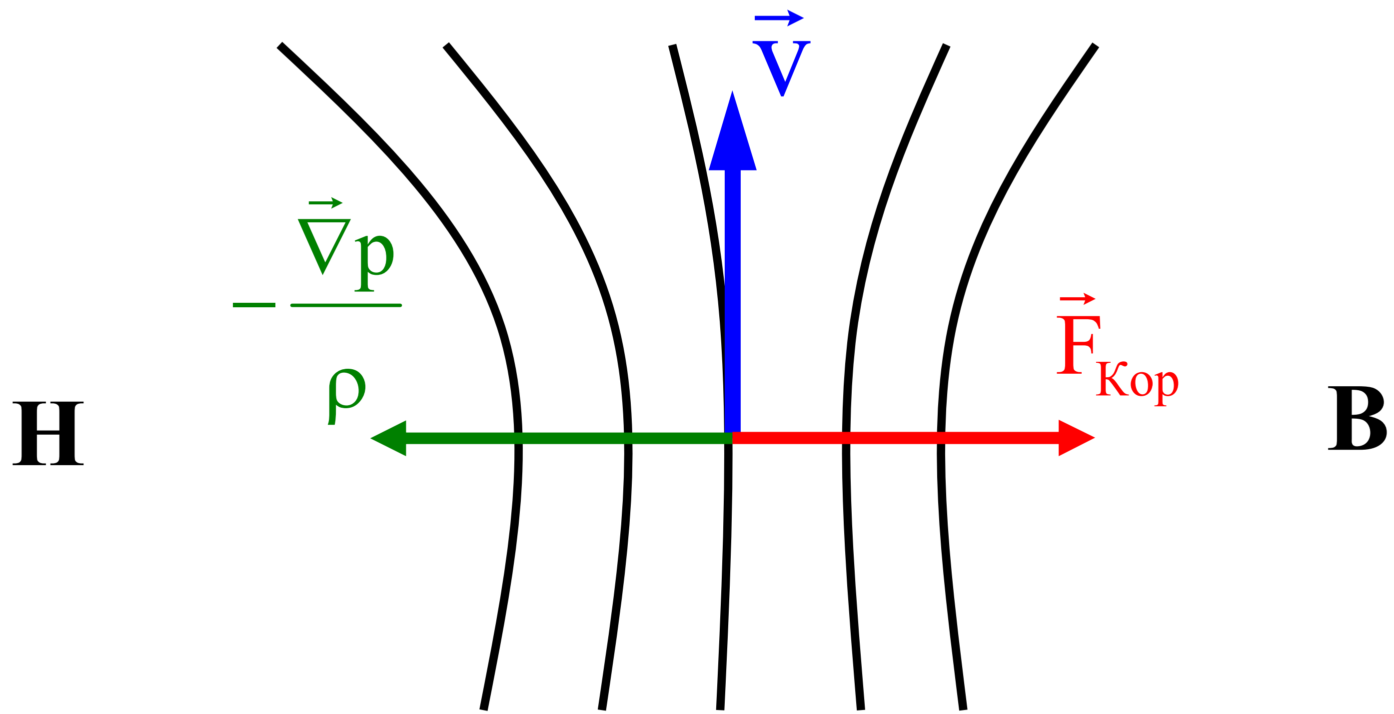
1 узел:
1 морская миля в час
1.852 км/ч
0.514 м/с

1. Ветер направлен вдоль изобар

2. Скорость ветра выше в области сгущения изобар

Геострофический ветер/течение

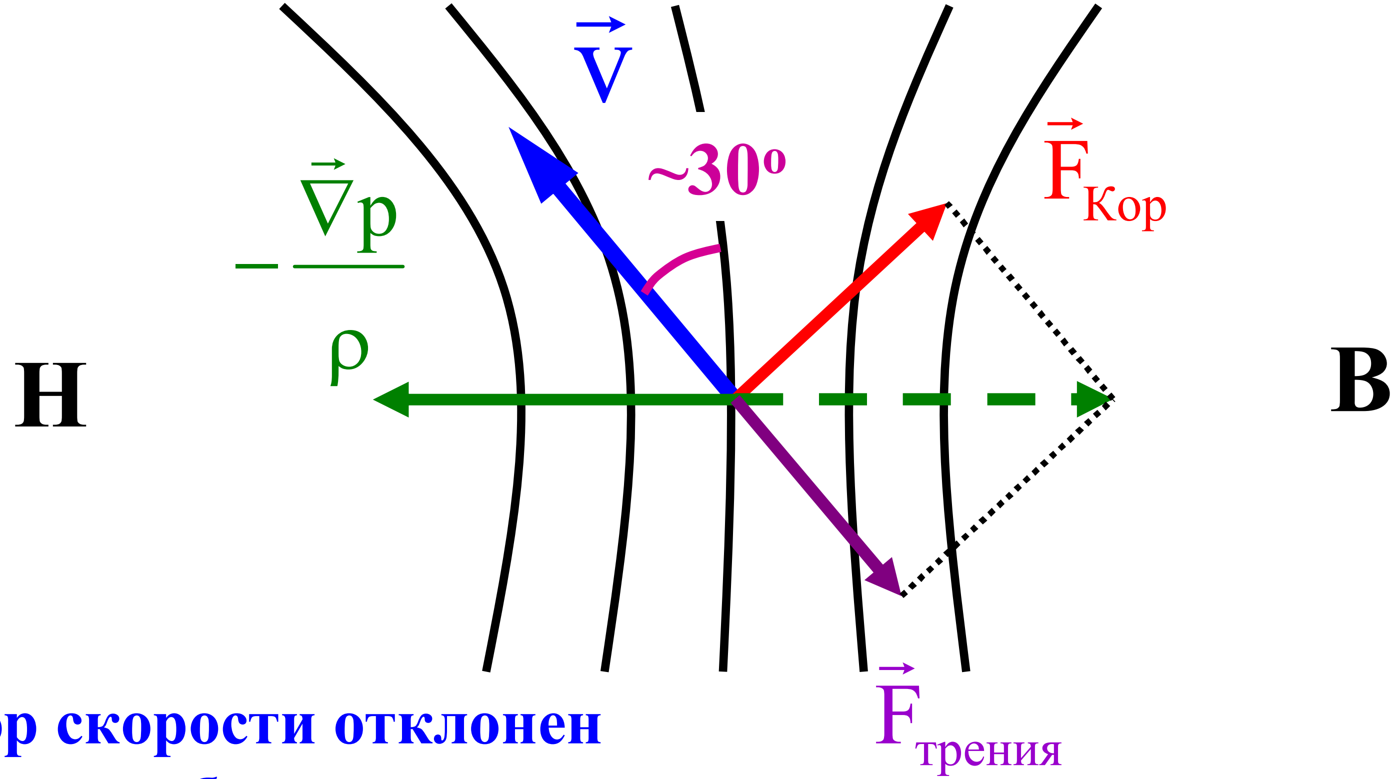
(Сев. полушарие)



Движение строго вдоль изобар!!!

Ветер/течение с учетом сил трения

(Сев. полушарие)

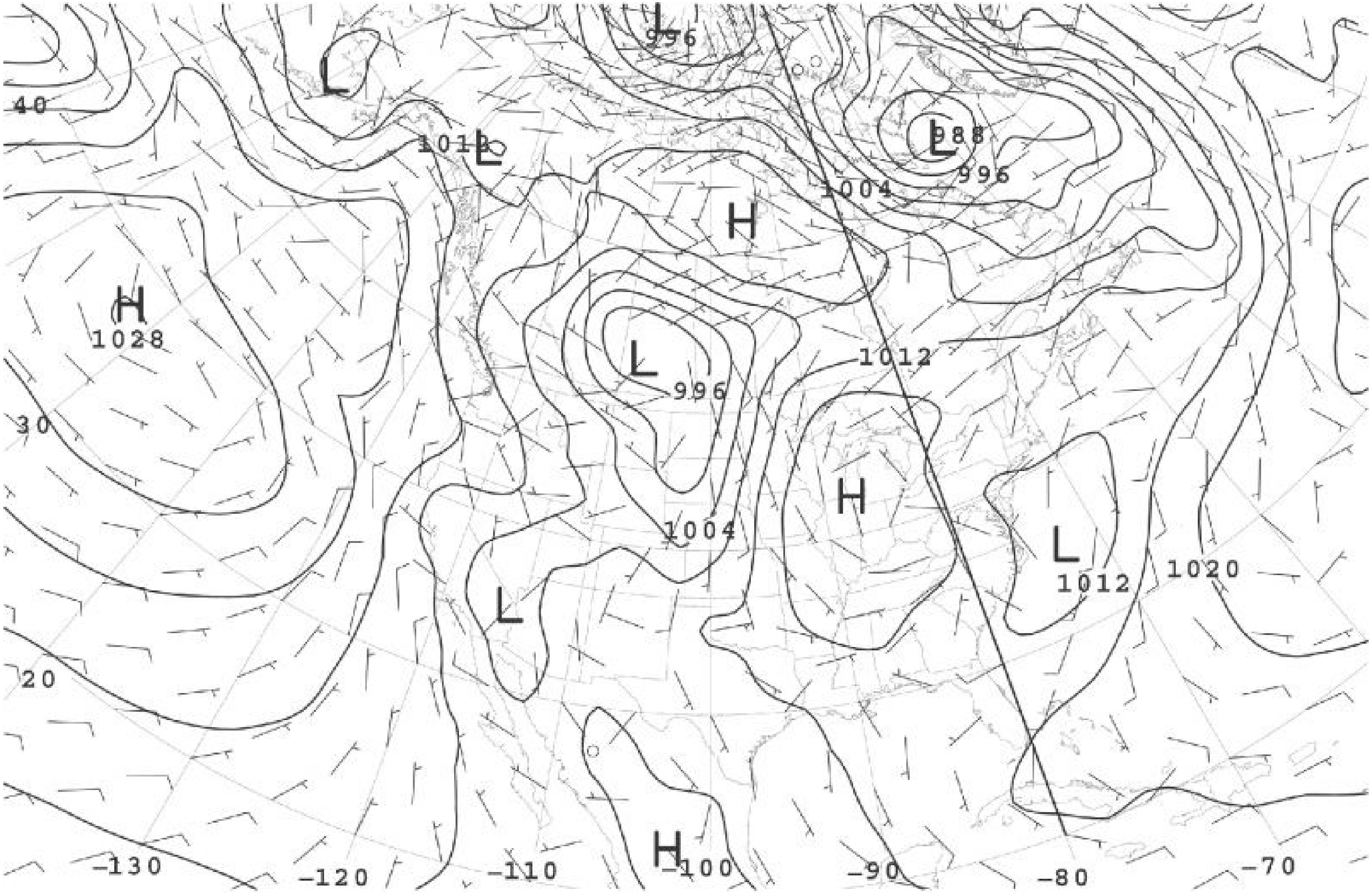


Вектор скорости отклонен влево от изобары

Отклонение существенно до высот ~1500 м

Отклонение у поверхности земли ~30°

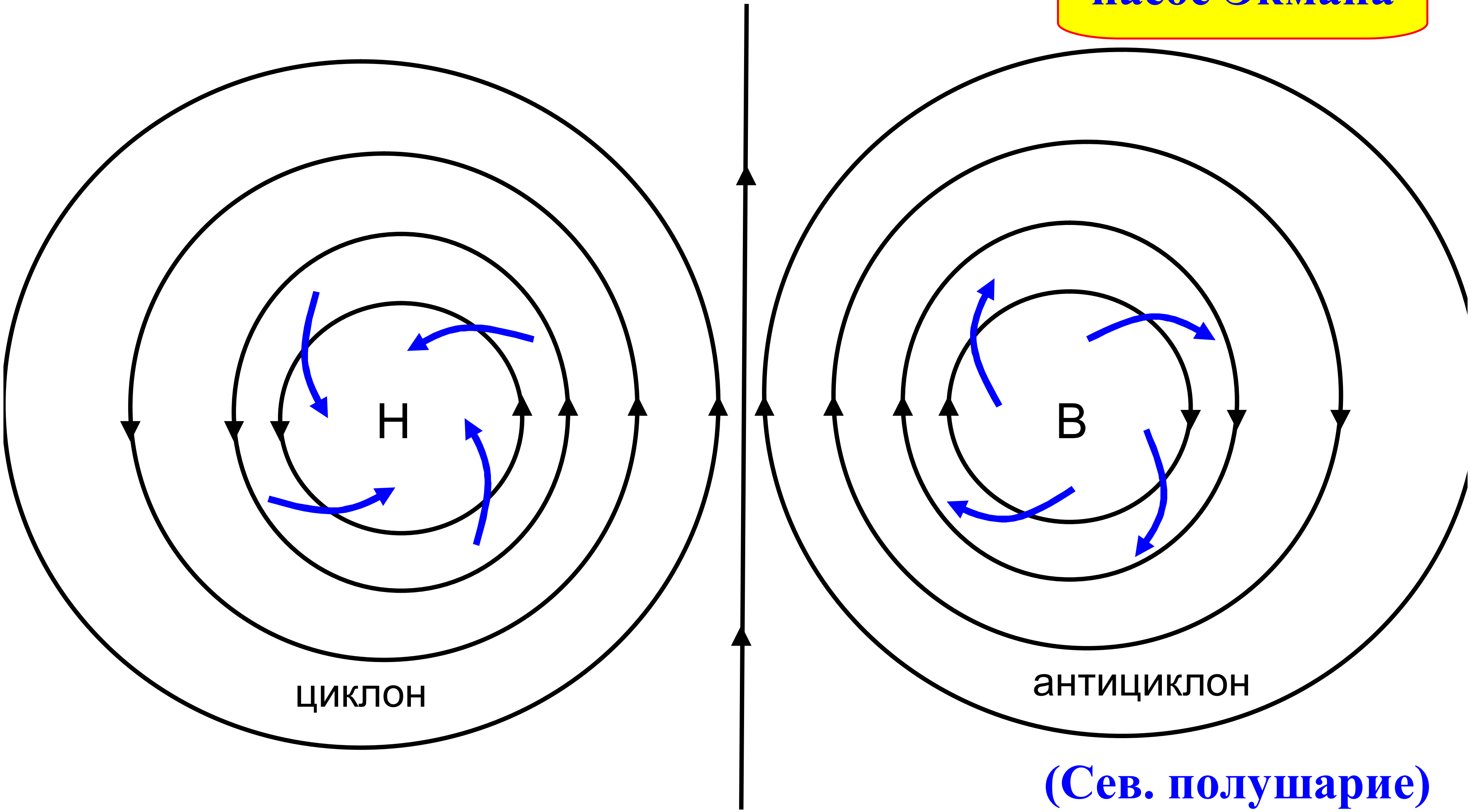
Поля атмосферного давления (изолинии) и скорости ветра у поверхности земли



Copyright © 2008, Elsevier Inc. All rights reserved.

У поверхности земли, где сила трения велика, происходит заток воздуха в область низкого давления и отток воздуха из области высокого давления

насос Экмана



(Сев. полушарие)

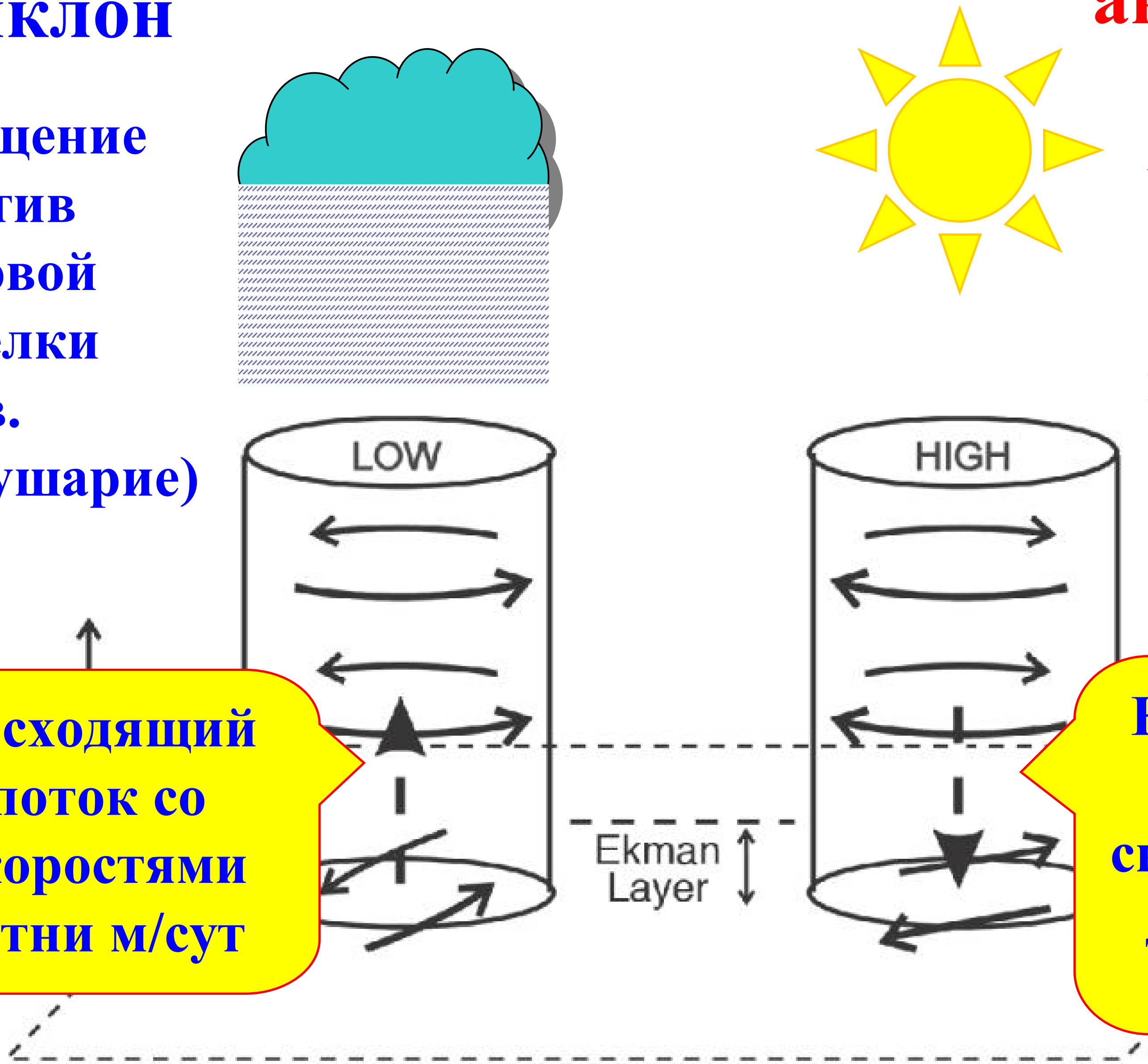
Синоптические вихри

циклон

вращение против часовой стрелки (Сев. полушарие)

антициклон

вращение по часовой стрелке (Сев. полушарие)



Восходящий поток со скоростями сотни м/сут

Нисходящий поток со скоростями от десятков до сотен м/сут

Copyright © 2008, Elsevier Inc. All rights reserved.