Введение в физику гидросферы

2025 Лекция №7

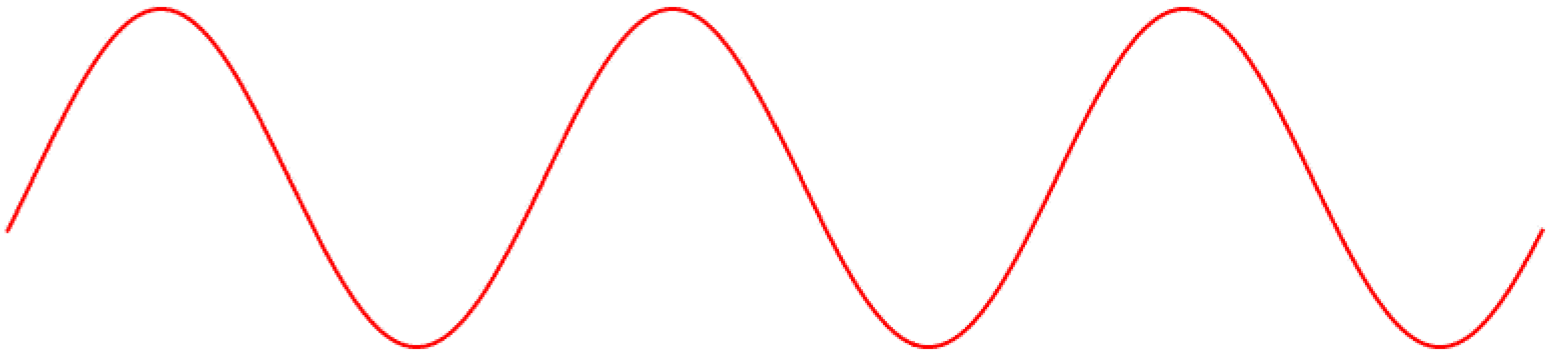
Носов Михаил Александрович

кафедра физики моря и вод суши
отделение геофизики
физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова

Волновые движения в гидросфере

Волны – изменения некоторой совокупности физических величин (полей), способные перемещаться (распространяться), удаляясь от места их возникновения, или колебаться внутри ограниченных областей пространства

[Физическая энциклопедия]

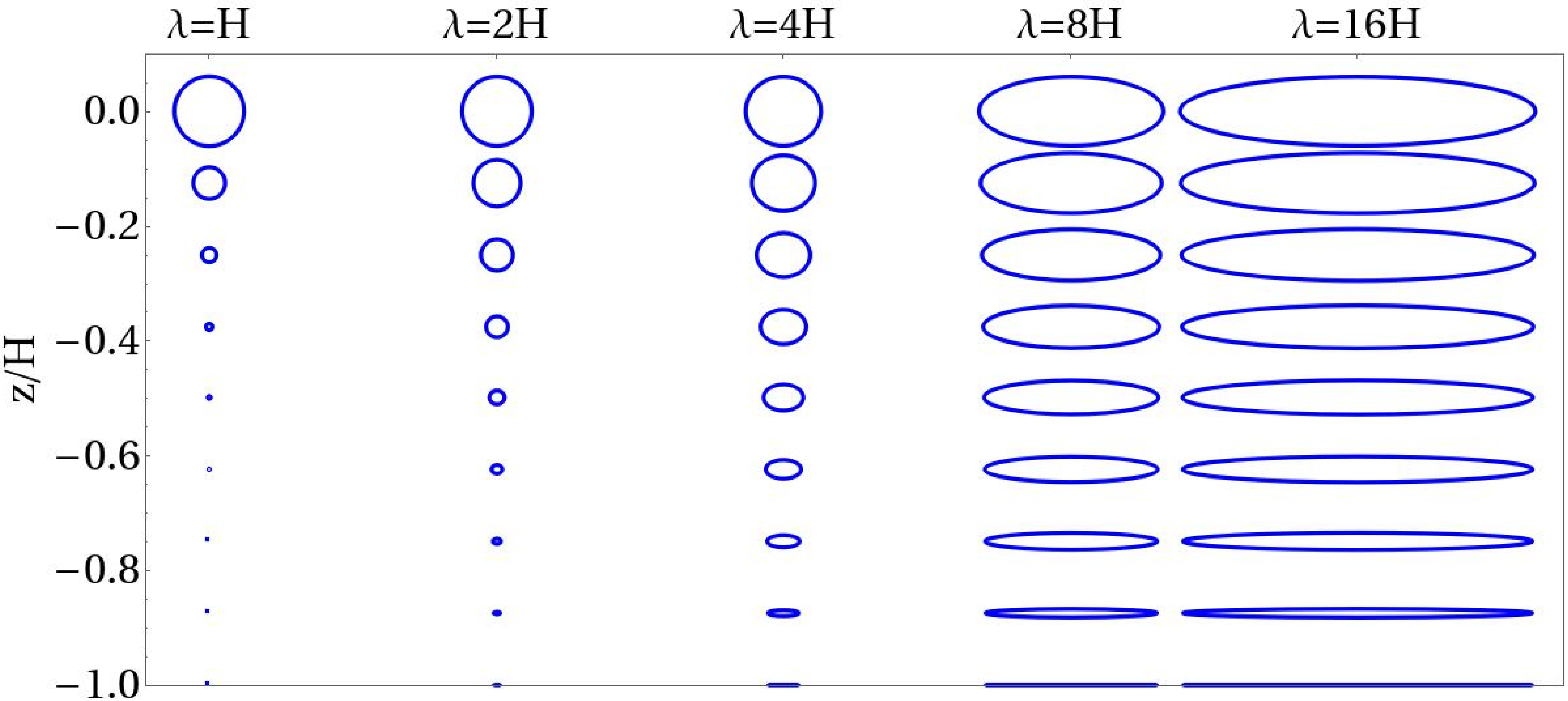


ТИПЫ ВОЛН

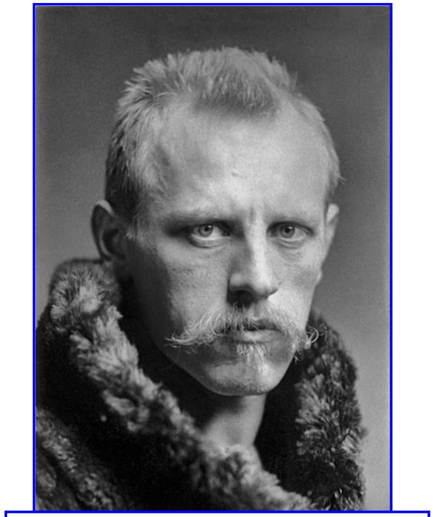
(классификация по типу возвращающей силы)

сила тяжести	гравитационные поверхностные и внутренние
сила поверхностного натяжения	капиллярные
сила упругости	(гидро)акустические
сила Кориолиса	гироскопические (инерционные)

Траектории частиц в поверхностных волнах малой амплитуды



Эффект «мертвой воды»



Фритьоф Нансен
(1861 –1930)
норвежский
полярный
исследователь

«Мы почти не двигались с места … и будто тащили всю воду за собой. Что мы ни делали, - круто поворачивали, лавировали, описывали полный круг и пр., - все напрасно. Лишь только машина переставала работать, судно тотчас же останавливалось, точно схваченное чем-то за корму». (“Фрам в полярном море“)

типы волн в океане

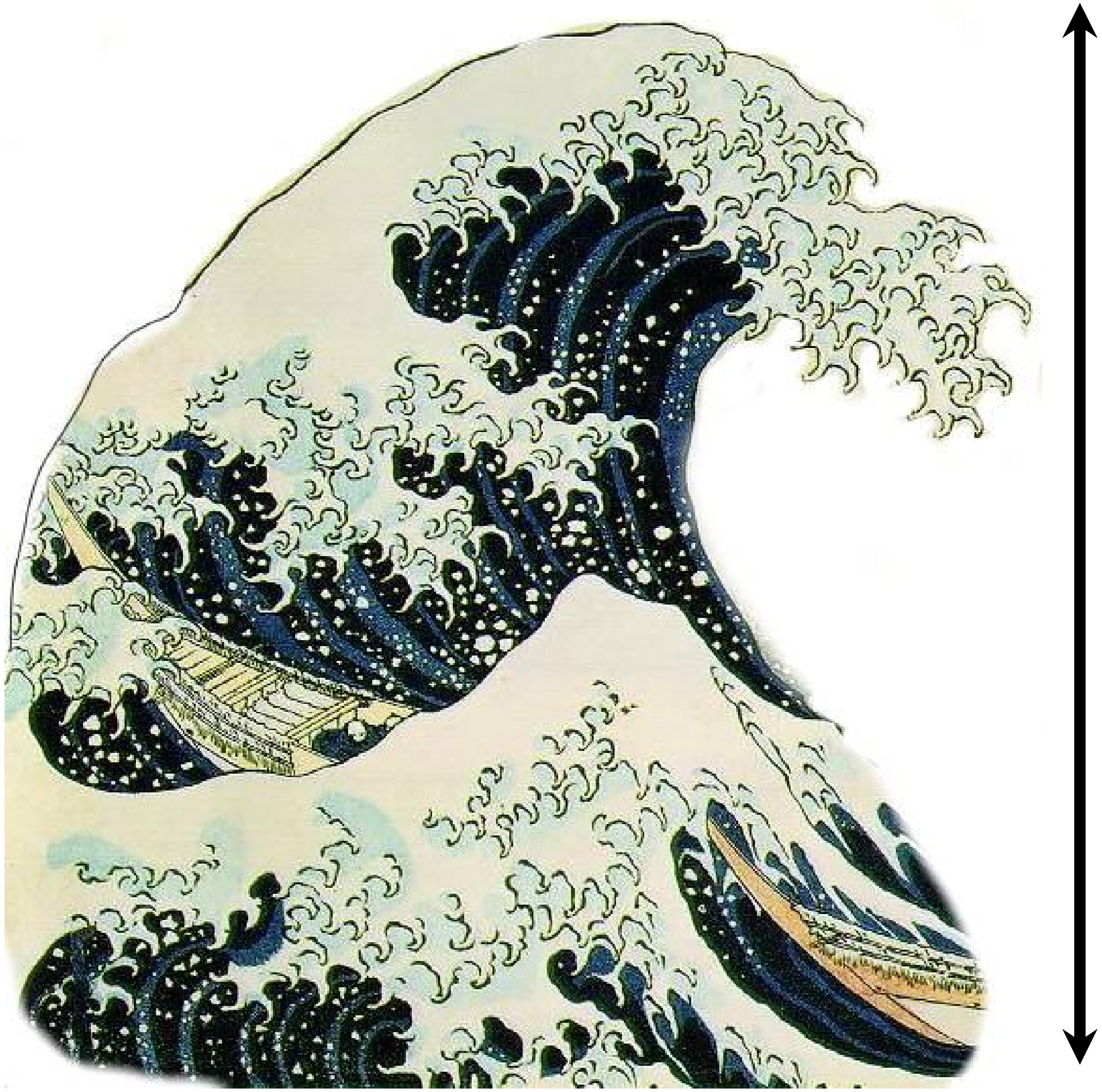
(классификация по причине возникновения)

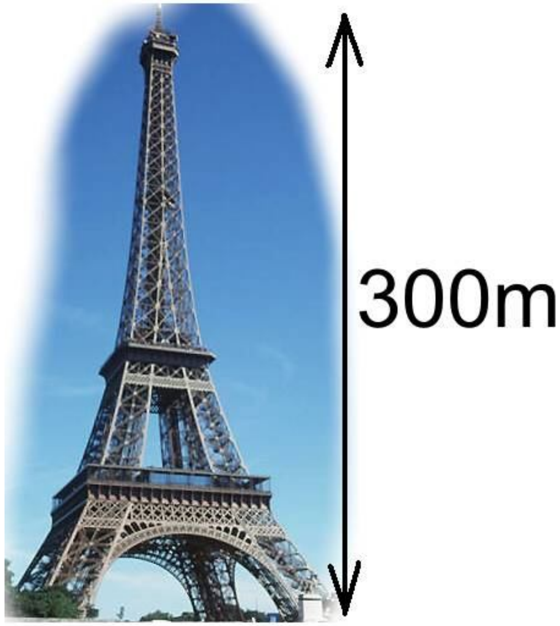
- ветровые
- приливные
- анемобарические
- сейсмические (цунами)
- оползневые (цунами)
- штормовые нагоны
- корабельные
- …

фото Т.К. Пинегиной

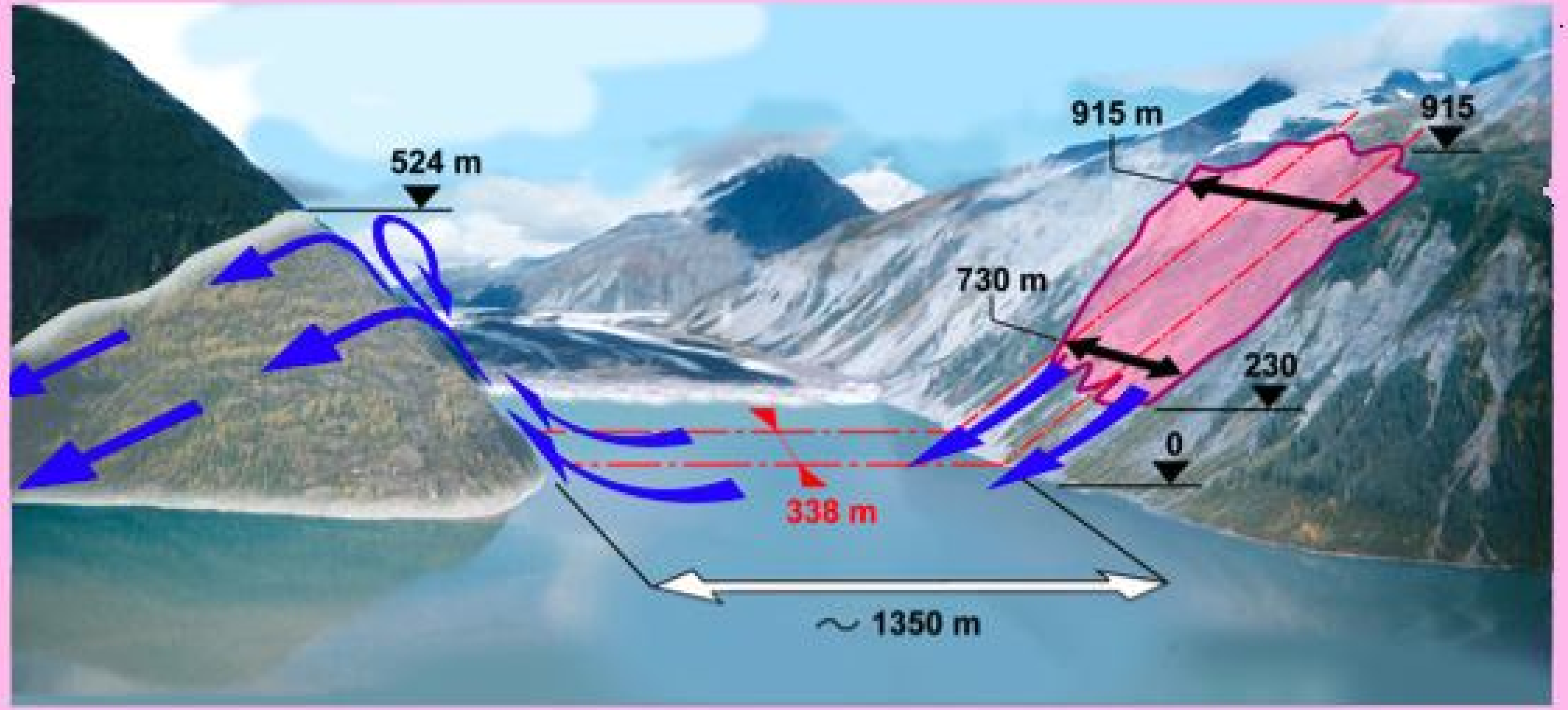
Бухта Литуйя, Аляска, 9 июля 1958 г

оползень объемом ~0.3 км^3





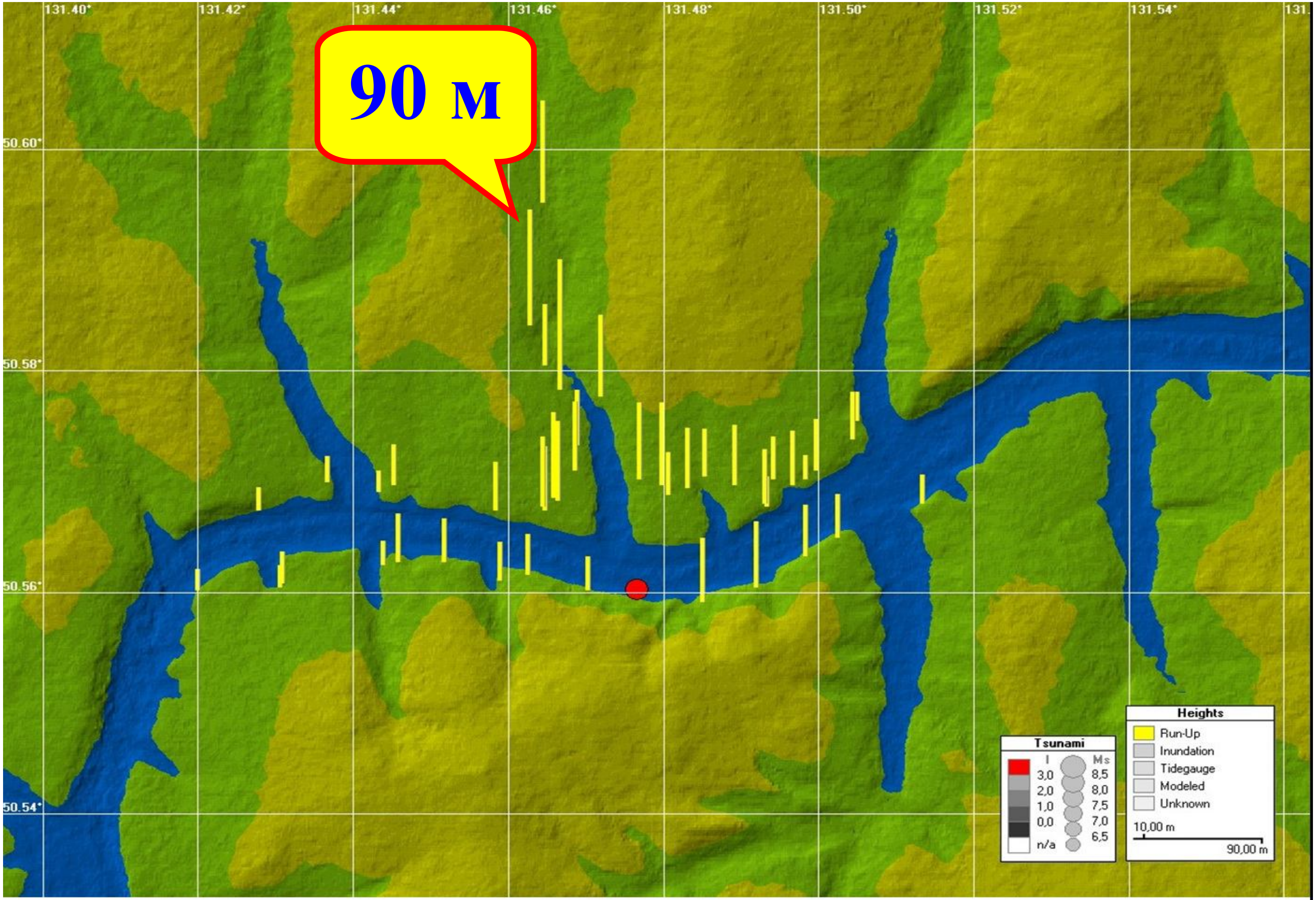
Бухта Литуйя, Аляска, 9 июля 1958 г оползень объемом ~0.3 км^3



Следы воздействия цунами по берегам залива Литуя

«Ледяное» цунами в Бурейском вдхр. 11.12.2018

Общий вид чаши отрыва и тела оползня. Снимок с квадрокоптера «Фантом-4» А.Н.Остроухова (ИВиЭП ДВО РАН) от 19.06.2019.



Визуализация измеренных высот заплеска в графической оболочке PDM/TSU

типы волн в океане

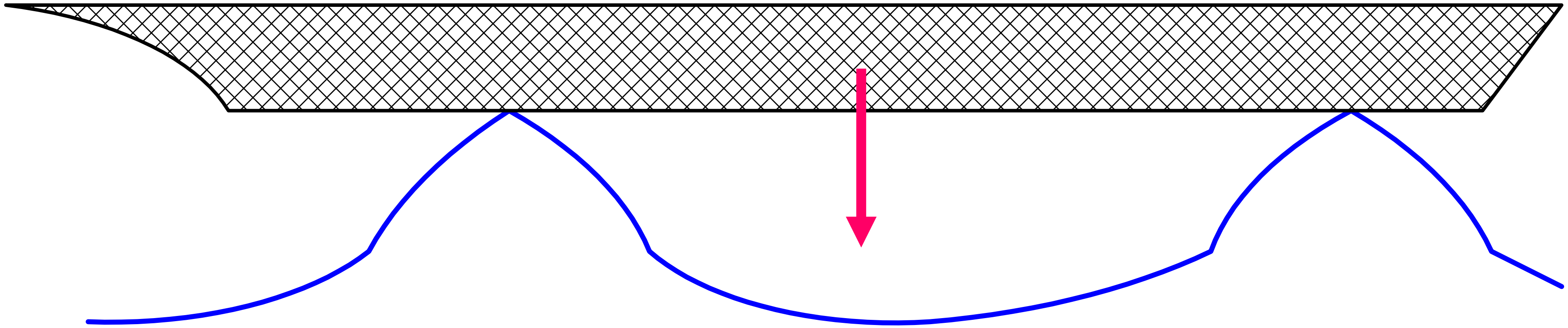
(названия волновых явлений)

- Пororoка (Амазонка)
- Риссага (о.Менорка)
- Абики (о.Кюсю)
- сейши
- “волны-убийцы”
- солитоны
- захваченные волны
- зыбь
- бор
- …

«Волны-убийцы»

Последовательные кадры (с интервалом 2 сек) подхода волны к берегу; ее высота достигла 25 м (Ванкувер, Канада)

“World Gloria”



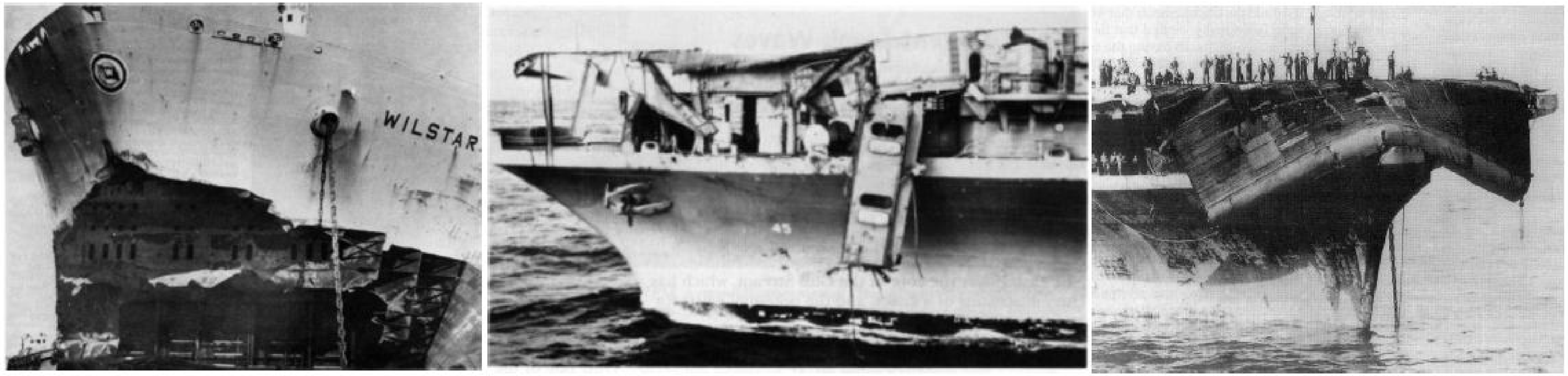


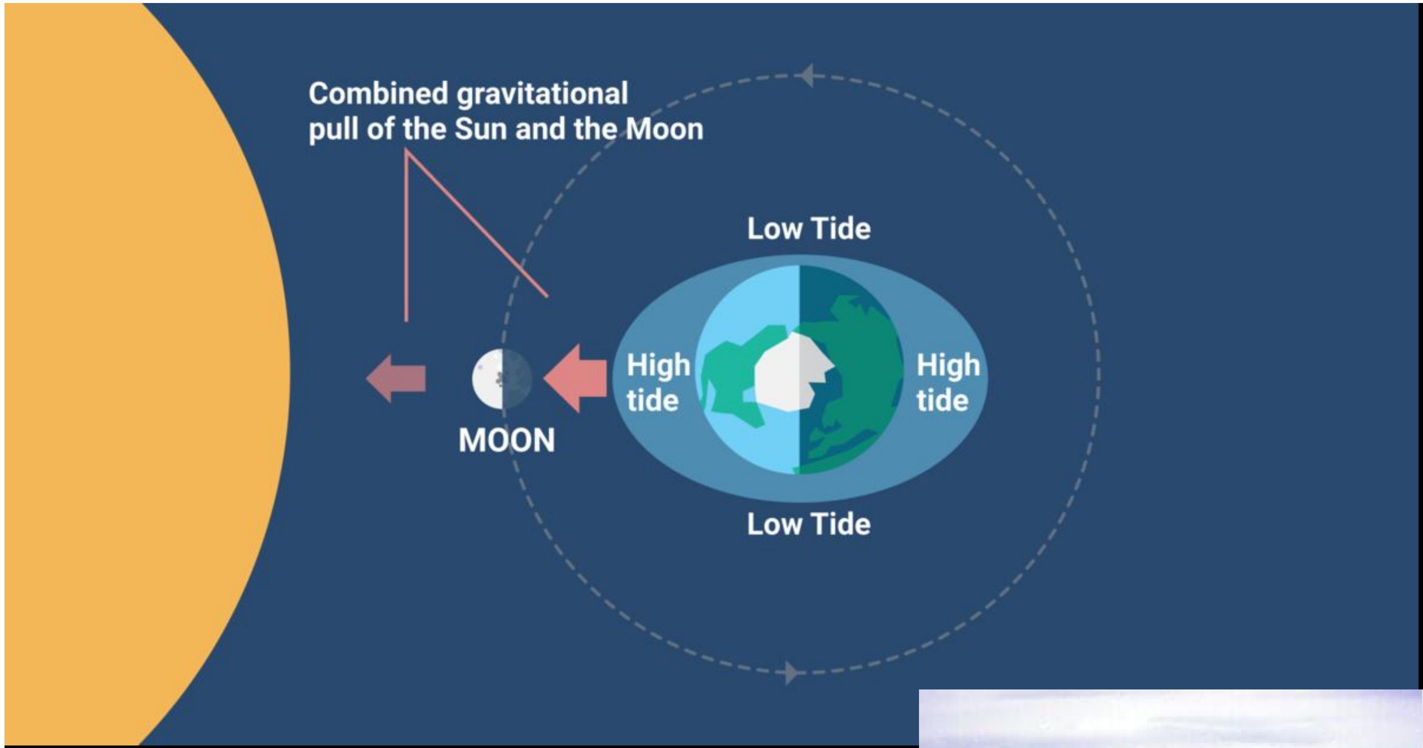
Рис. 1. Фотографии повреждений, вызванных экстремальными волнами

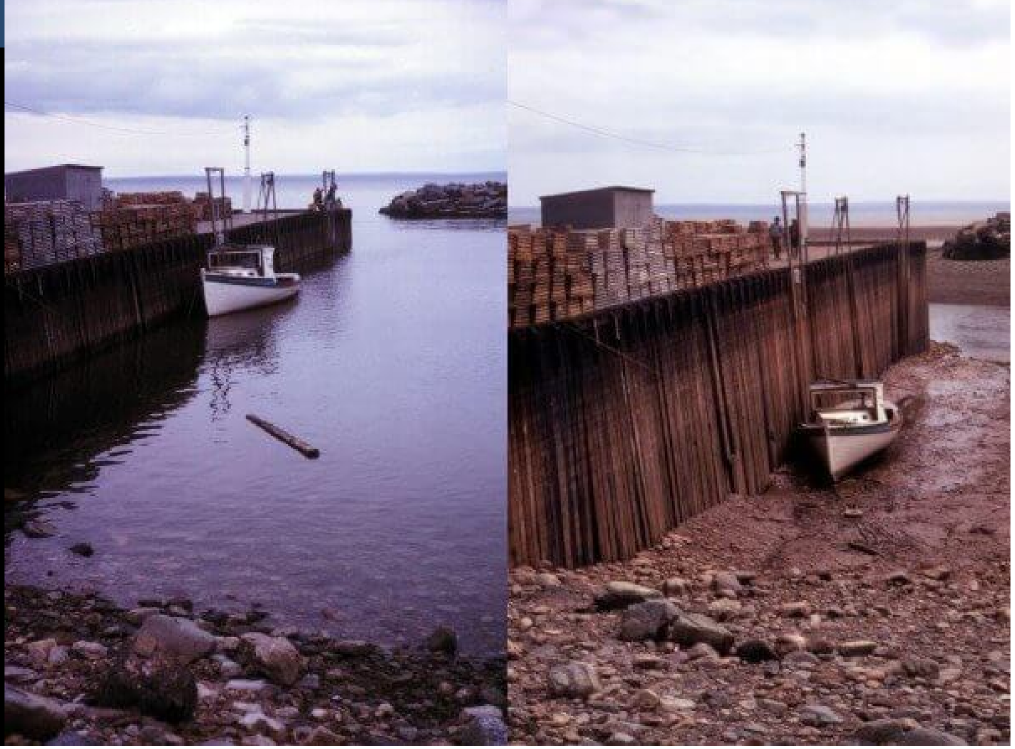
а *б* *в*

Рис. 2. События с аномально высокими волнами: *а* — тонущий танкер «Prestige» (2002 г.); *б* — фотография, сделанная на танкере «Esso Languedoc» у берегов Дурбана в 1980 г; *в* — фотография «стены воды»

[Слюняев, 2017]

Приливные волны





High tide (left) and low tide (right) in the Bay of Fundy in Canada. Image credit: Wikimedia Commons, Tttrung. Photo by Samuel Wantman.

Поророка (pororoca) на р. Амазонка

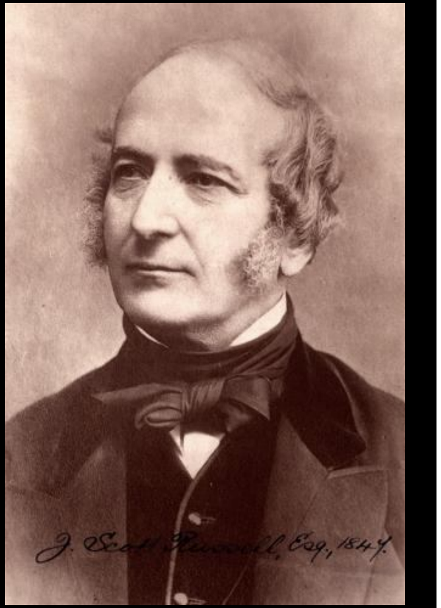
Риссага (бухта Сьютаделла)

Риссага

Риссага

Солитон

Открытие солитона (1834 г.)

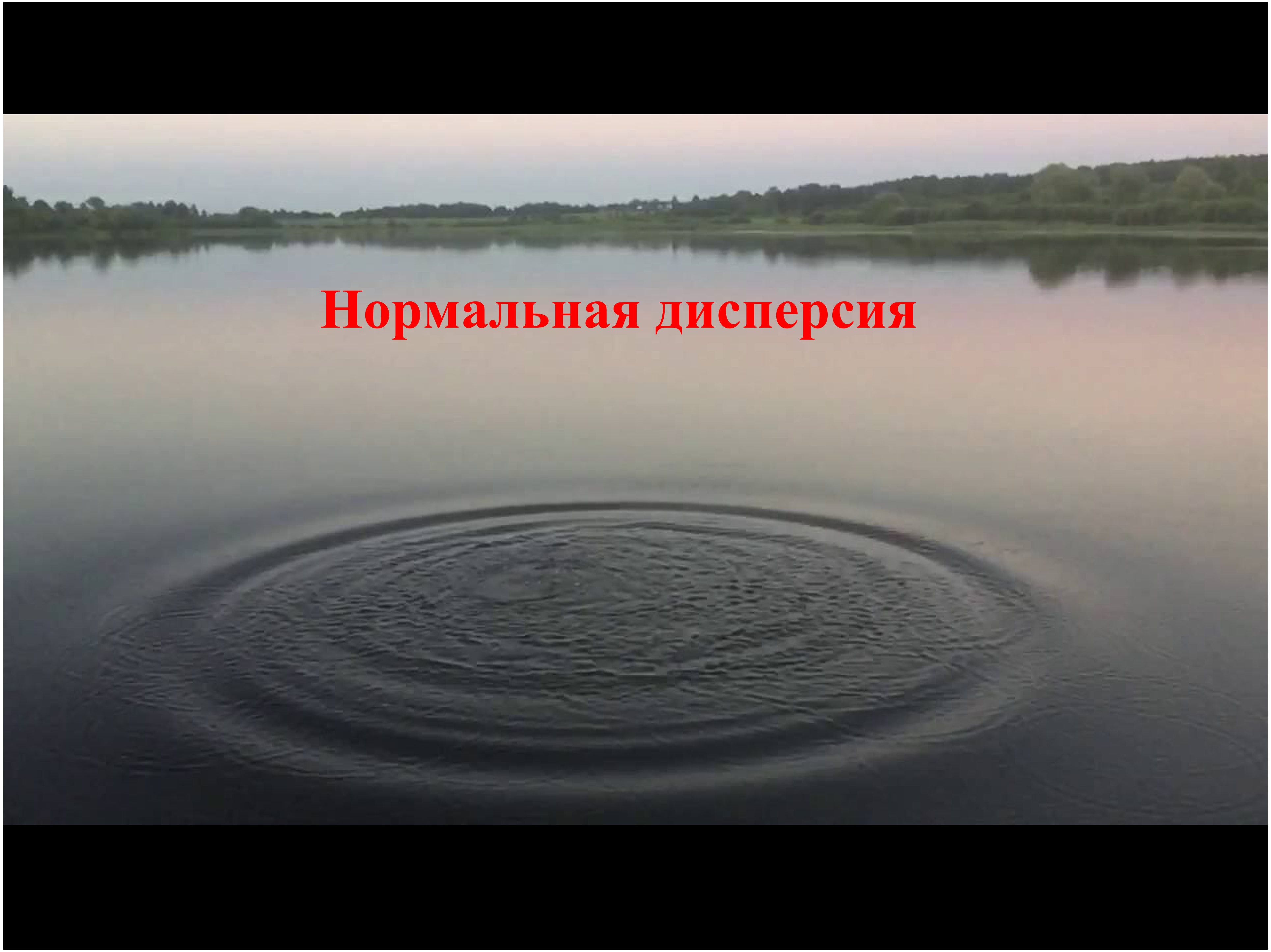


Джон Скотт Рассел

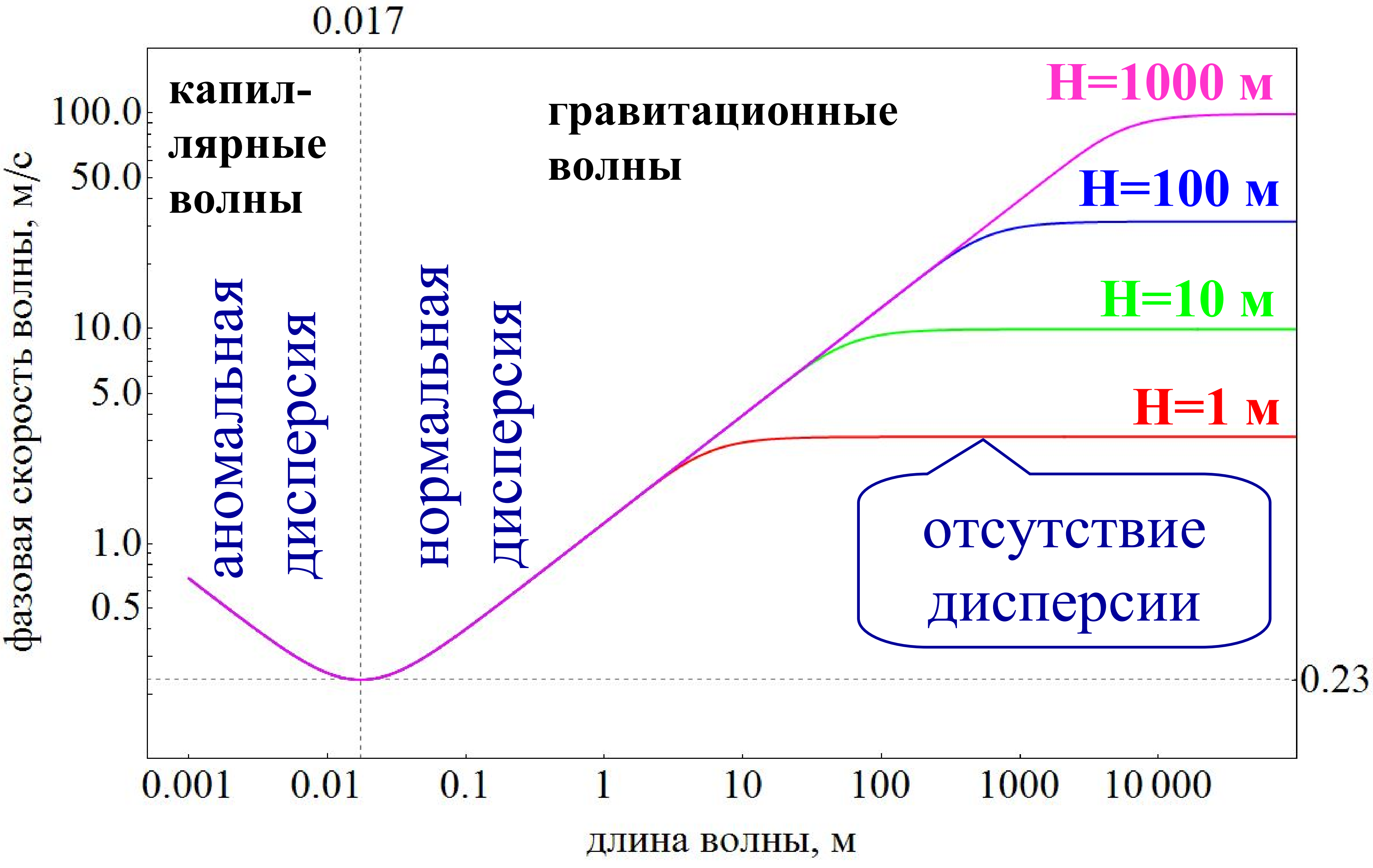
(1808-1882)

Аномальная дисперсия

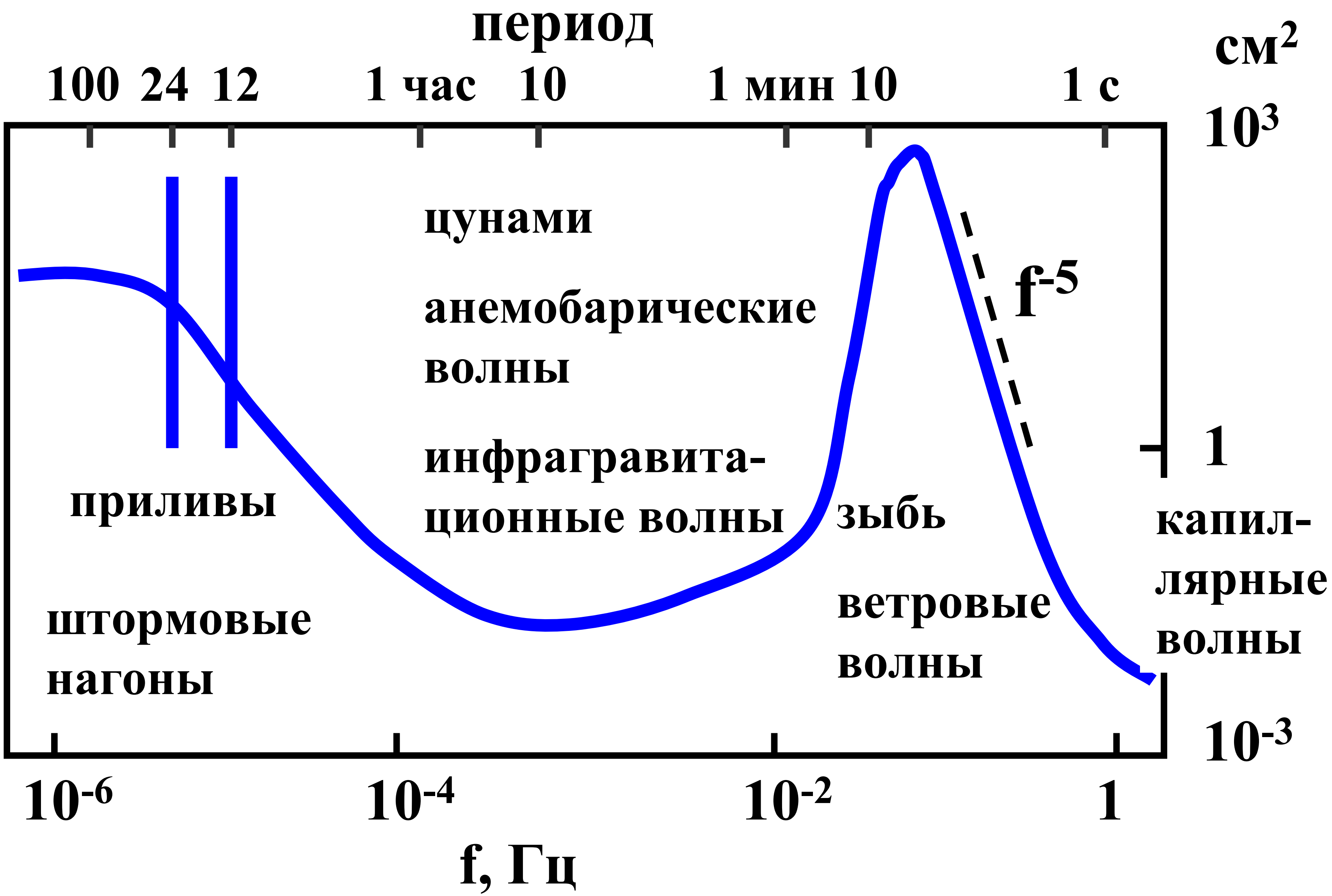
Нормальная дисперсия



Фазовая скорость поверхностных волн на воде как функция длины волны и толщины водного слоя H



Спектр гравитационных поверхностных волн в океане



Математическое описание волновых движений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \xcancel{\left(\vec{v},\vec{\nabla}\right)\vec{v}} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + \xcancel{2[\vec{v}\times\vec{\omega}]} \\ \qquad\qquad + \nu\Delta\vec{v} + \xcancel{\left(\varsigma + \dfrac{\nu}{3}\right)\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{v}} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho\,\vec{v}\right) = 0 \end{cases}$$

Система уравнений для описания линейных волн без учета вращения Земли и сил вязкого трения

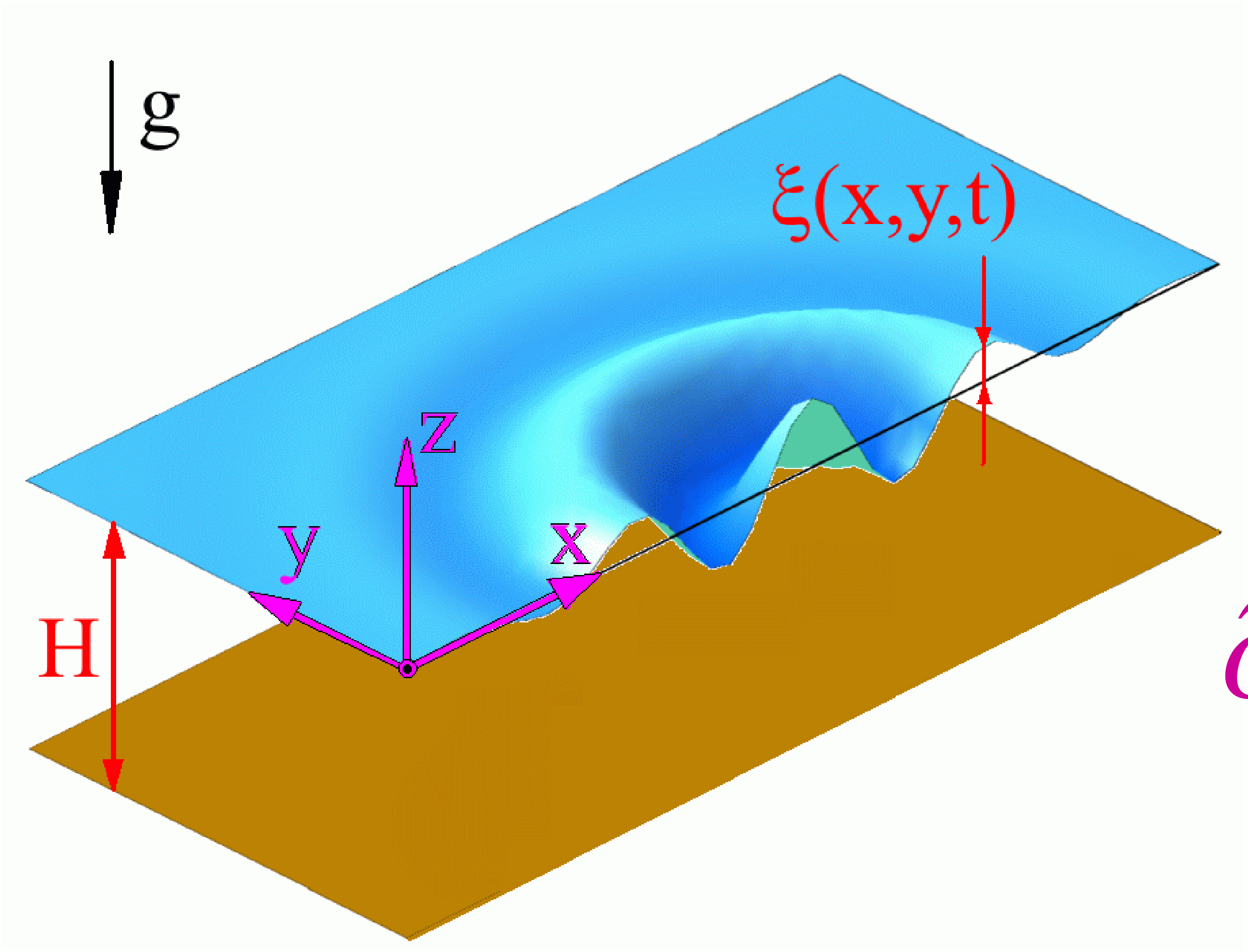
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0 \end{cases}$$

Гравитационные волны

Акустические волны

$$\vec{v} \equiv (u, v, w)$$

Постановка задачи о поверхностных гравитационных волнах



$$H = \mathrm{const}$$

Граничные условия:

поверхность “вода-воздух”

$$p = p_{\text{атм}}$$

$$\partial\xi / \partial t = w$$

поверхность дна

$$w = 0$$

Линейная теория длинных гравитационных волн или теория “мелкой воды” (λ >> H)

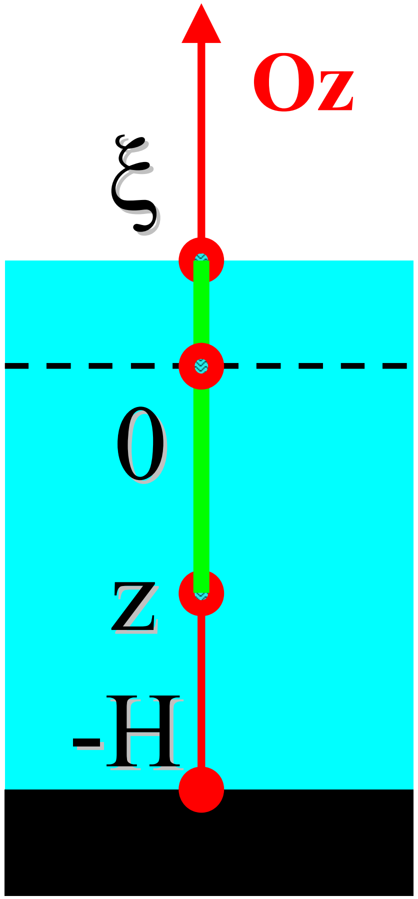
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \Rightarrow \quad |w| \sim \frac{H}{\lambda}|u_{\text{гориз.}}|$$

$$\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

приближение гидростатики

$$p(\xi) = p_{\text{атм}} = \text{const}$$

$$\int\limits_{z}^{\xi} dz \left| \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, g \right.$$



$$p(\xi) - p(z) = -\rho g \xi + \rho g z$$

$$p(x, y, z, t) = p_{\text{атм}} + \rho g \xi(x, y, t) - \rho g z$$

$$\boxed{p(x,y,z,t)} = p_{\text{атм}} + \rho g \xi(x,y,t) - \rho g z$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$(u, v) \neq f(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \Bigg| \int_{-H}^{\xi} dz$$

$$|\xi| << H$$

$$(H+\cancel{\xi})\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\boxed{w(\xi)}-\underset{\substack{\downarrow\\ \mathbf{0}}}{\boxed{w(-H)}}=0$$

$$H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial \xi}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}$$

$$H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -g \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} = -g \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$

$$H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t}\right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Волновое уравнение для описания длинных гравитационных волн

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \underset{c^2}{\boxed{gH}} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)$$

Смещение поверхности воды

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \xi$$

$$c = \sqrt{gH}$$

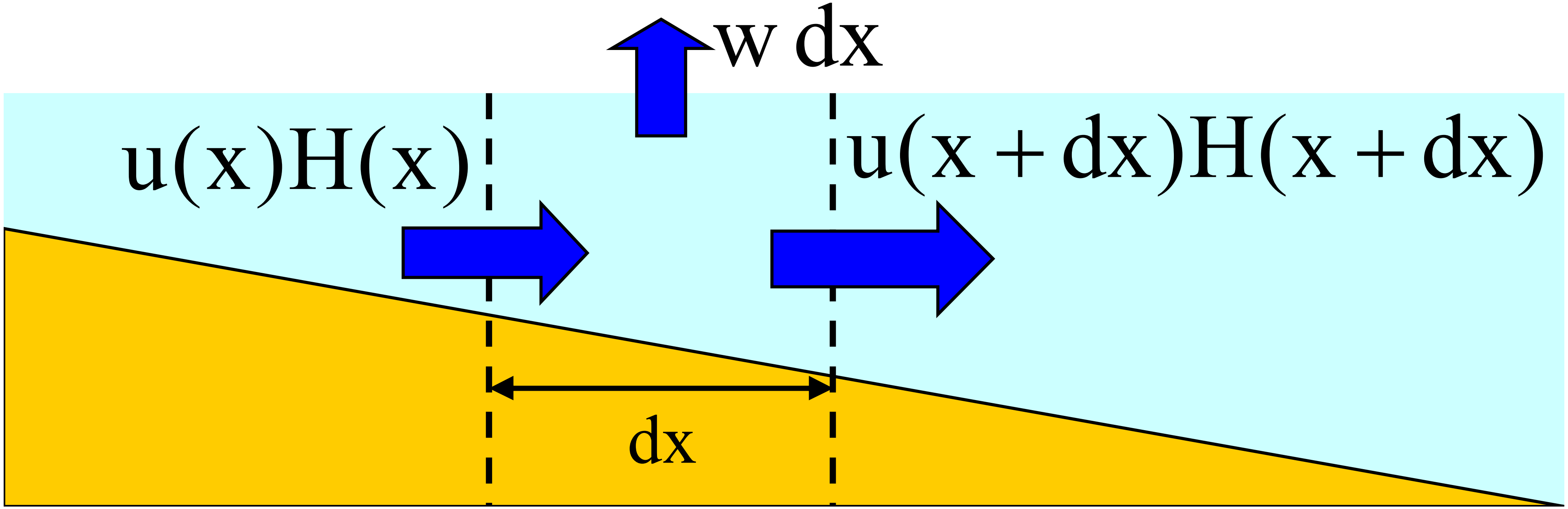
скорость длинных волн

Случай переменной глубины: H=f(x,y)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad \Rightarrow \mathrm{div}\vec{V}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$\vec{V}\equiv(u,v)$ **- вектор горизонтальной скорости**

div **- горизонтальный оператор**



$$\operatorname{div}\vec{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Bigg| \int_{-H}^{\xi} dz$$

$$\operatorname{div}\left[\vec{V}(H + \cancel{\xi})\right] + w(\xi) - \overset{=0}{w(-H)} = 0$$

$$\operatorname{div}\left[H\vec{V}\right] + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad \Bigg| \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -g\vec{\nabla}\xi \quad \times H, \operatorname{div}$$

линейные уравнения мелкой воды

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

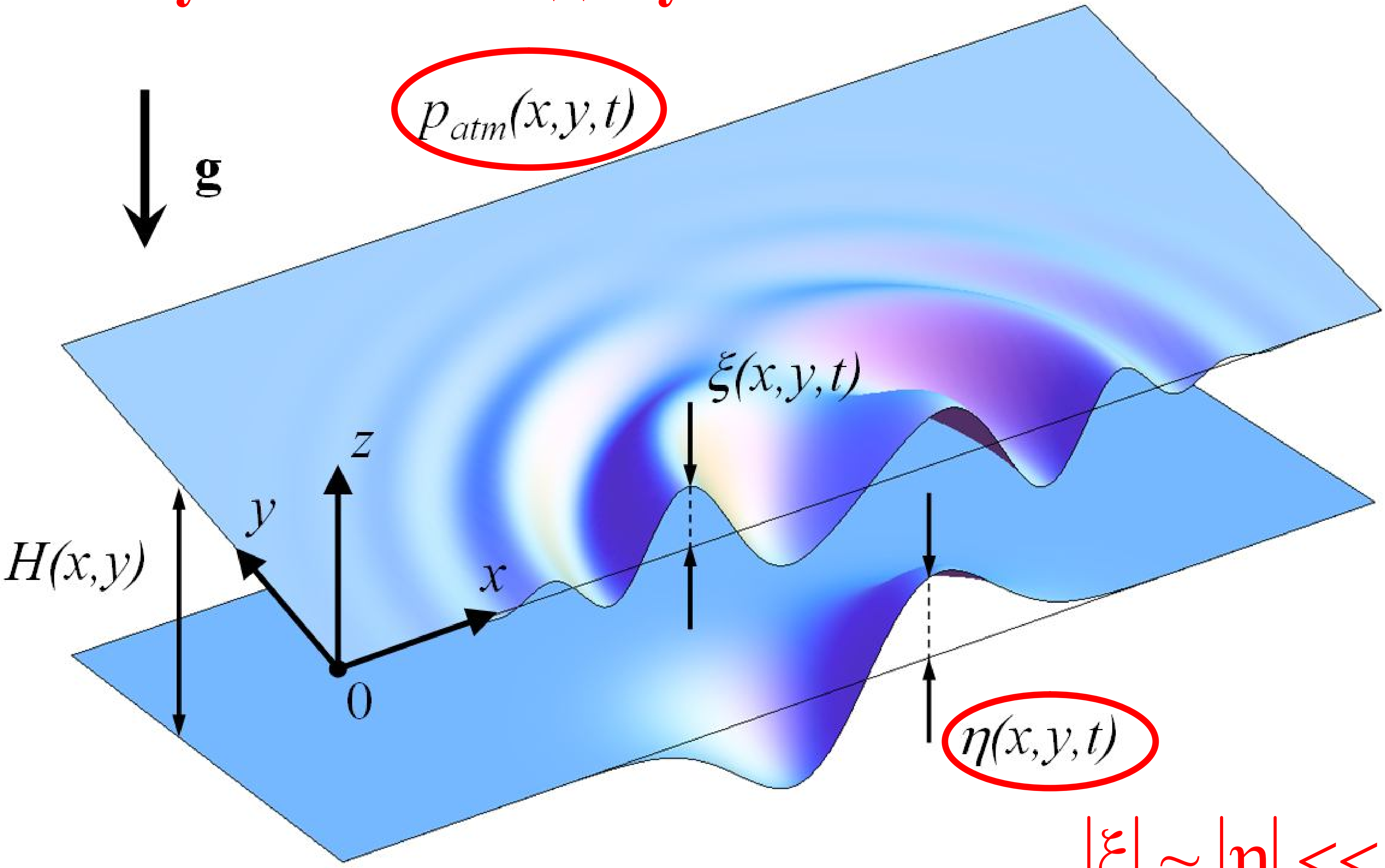
Волновое уравнение для описания длинных гравитационных волн в бассейне переменной глубины

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathrm{div}\left(gH \vec{\nabla} \xi\right)$$

квадрат
скорости
длинных
волн

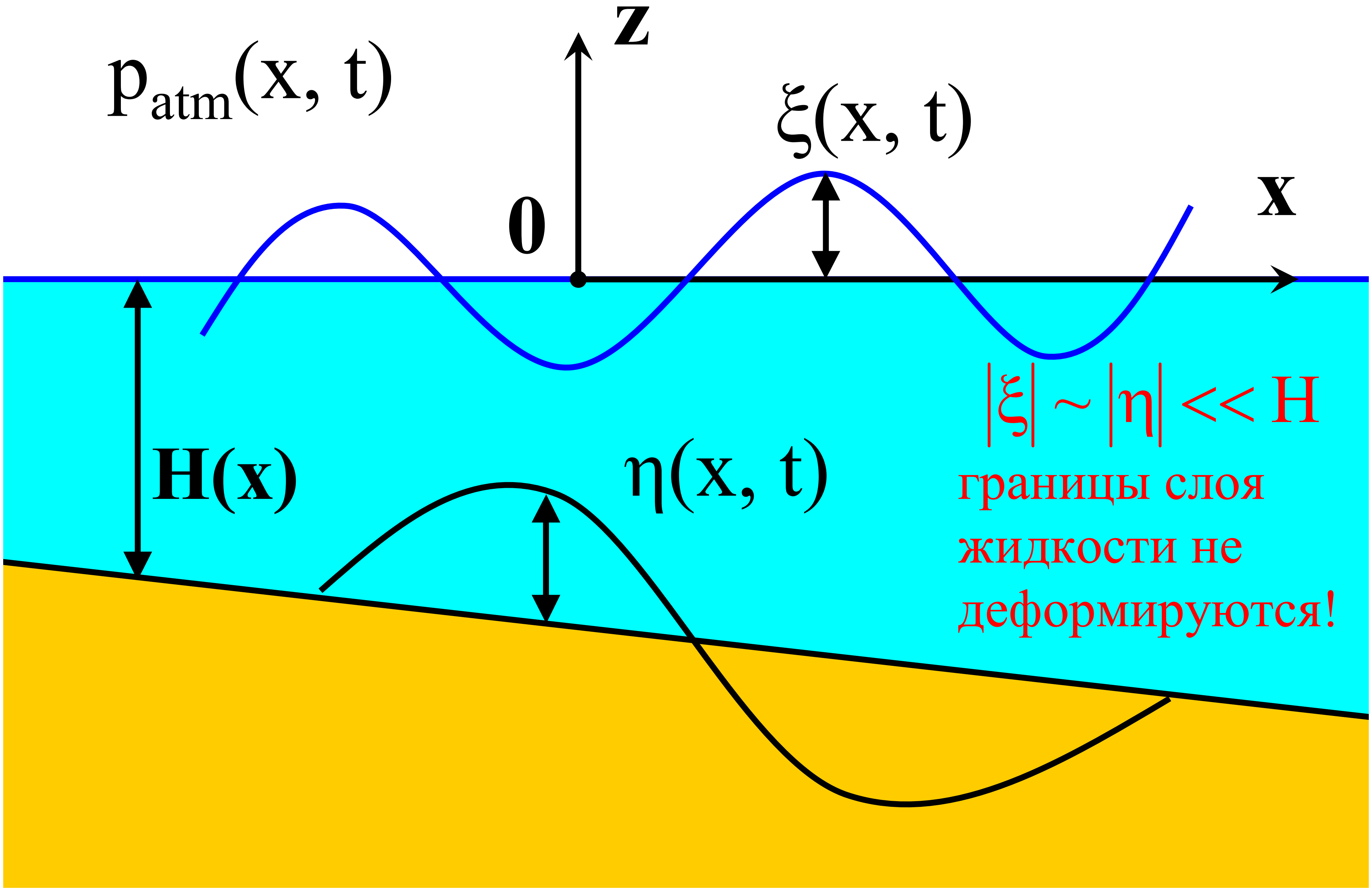
Математическая постановка 3D задачи

усложним задачу



$$|\xi| \sim |\eta| << H$$

Постановка 2D задачи

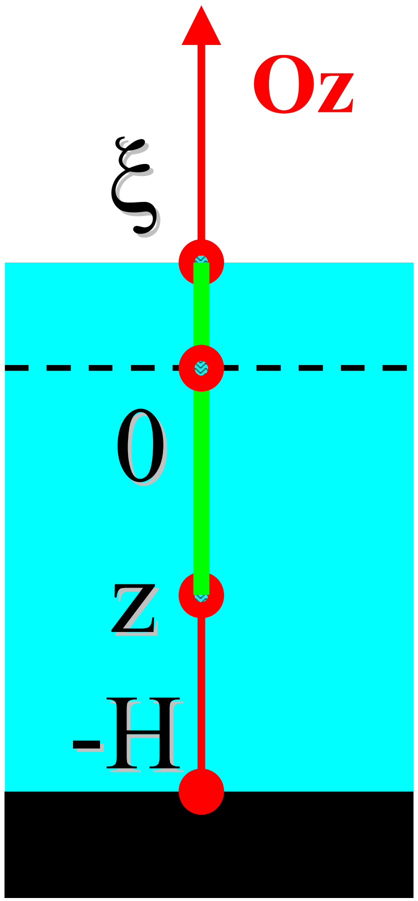


$|\xi| \sim |\eta| << H$

границы слоя жидкости не деформируются!

$$p(\xi) = p_{atm}(x,t)$$

$$\int_{z}^{\xi} dz \;\Bigg|\; \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, g$$



$$p(\xi) - p(z) = -\rho g(\xi - z)$$

$$p(x,z,t) = p_{atm}(x,t) + \rho g \xi(x,t) - \rho g z$$

$$p(x,z,t) = p_{atm}(x,t) + \rho g \xi(x,t) - \rho g z$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{atm}}{\partial x} - g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$u \neq f(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \Bigg| \int_{-H+\eta}^{\xi} dz$$

$$|\xi| \sim |\eta| << H$$

$$\frac{\partial[u(H-\cancel{\eta}+\cancel{\xi})]}{\partial x}+w(\xi)-w(-H+\cancel{\eta})=0$$

$$\frac{\partial(uH)}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial t}-\frac{\partial \eta}{\partial t}=0$$

Уравнения линейной 1D теории мелкой воды (длинных волн)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{atm}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (uH)}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

волны формируются неоднородностями атмосферного давления и движениями дна

Переход к волновому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{atm}}{\partial x} \qquad \times H \qquad \left| \frac{\partial}{\partial x} \right.$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (uH)}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \qquad \left| \frac{\partial}{\partial t} \right.$$

Переход к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2(uH)}{\partial t\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(gH\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial p_{atm}}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2(uH)}{\partial t\partial x}=\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$$

Неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(gH \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}\left(H \frac{\partial p_{atm}}{\partial x} \right)$$

источники волн

при H=const, η=const, p_{atm}=const

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad c = \sqrt{gH}$$

скорость длинных волн

Решение: $\xi(x, t) = f(x \pm c \cdot t)$

Неоднородное 1D волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \Phi(x, t)$$

Аналитическое решение:

$$\text{при н.у. } t = 0: \quad \xi = 0, \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

$$\xi(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\hat{t})}^{x+c(t-\hat{t})} \Phi(\hat{x}, \hat{t})\, d\hat{x}\, d\hat{t}$$

Бегущая подвижка дна

$$\eta(x,t) = f(x - vt)$$

$$\xi(x,t) = C_b\, f(x - vt)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Амплитуда и знак (!) возмущения на поверхности воды определяются соотношением скоростей «v» и «c»

$$v^2 C_b f'' - c^2 C_b f'' = v^2 f''$$

$$C_b = \frac{v^2}{v^2 - c^2}$$

$$\xi(x,t) = \frac{v^2}{v^2 - c^2} f(x - vt)$$

$$c = \sqrt{gH}$$

Бегущее возмущение атмосферного давления

$$\boxed{p_{atm}(x,t) = f(x - vt)}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{H}{\rho}\frac{\partial^2 p_{atm}}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\xi(x,t) = C_p \; f(x - vt)}$$

$$v^2 C_p f'' - c^2 C_p f'' = \frac{H}{\rho} f''$$

$$\Rightarrow \quad C_p = \frac{H/\rho}{v^2 - c^2}$$

$$\xi(x,t) = \frac{H/\rho}{v^2 - c^2} f(x - vt)$$

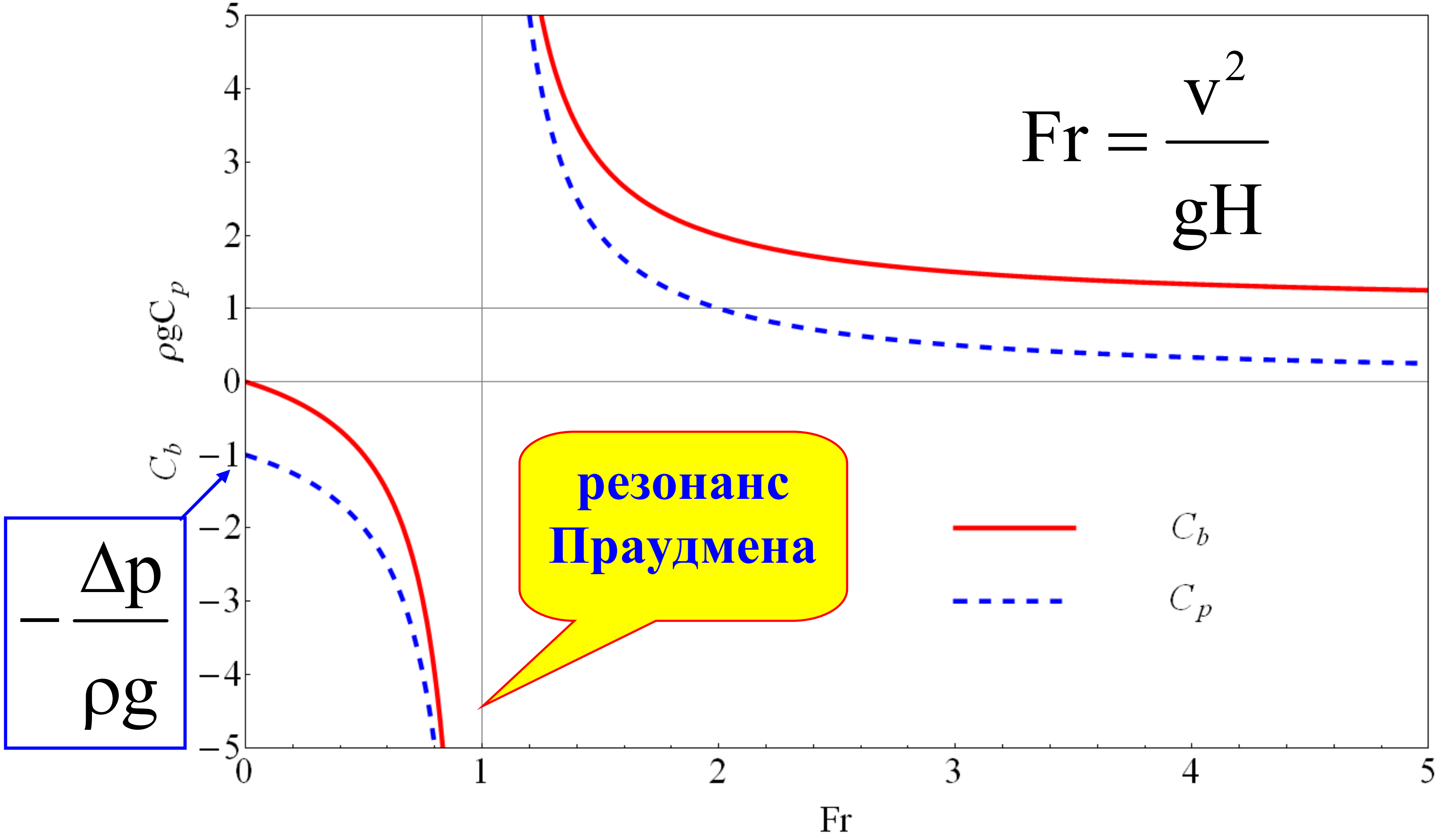
Амплитуда и знак (!) возмущения на поверхности воды определяются соотношением скоростей «v» и «c»

дно

$$C_b = \frac{v^2}{v^2 - c^2} = \frac{Fr}{Fr - 1}$$

атмосфера

$$C_p = \frac{H/\rho}{v^2 - c^2} = \frac{1}{\rho g(Fr - 1)}$$



$$Fr = \frac{v^2}{gH}$$

резонанс Праудмена

$$-\frac{\Delta p}{\rho g}$$