Введение в физику гидросферы

2025 Лекция №8

Носов Михаил Александрович

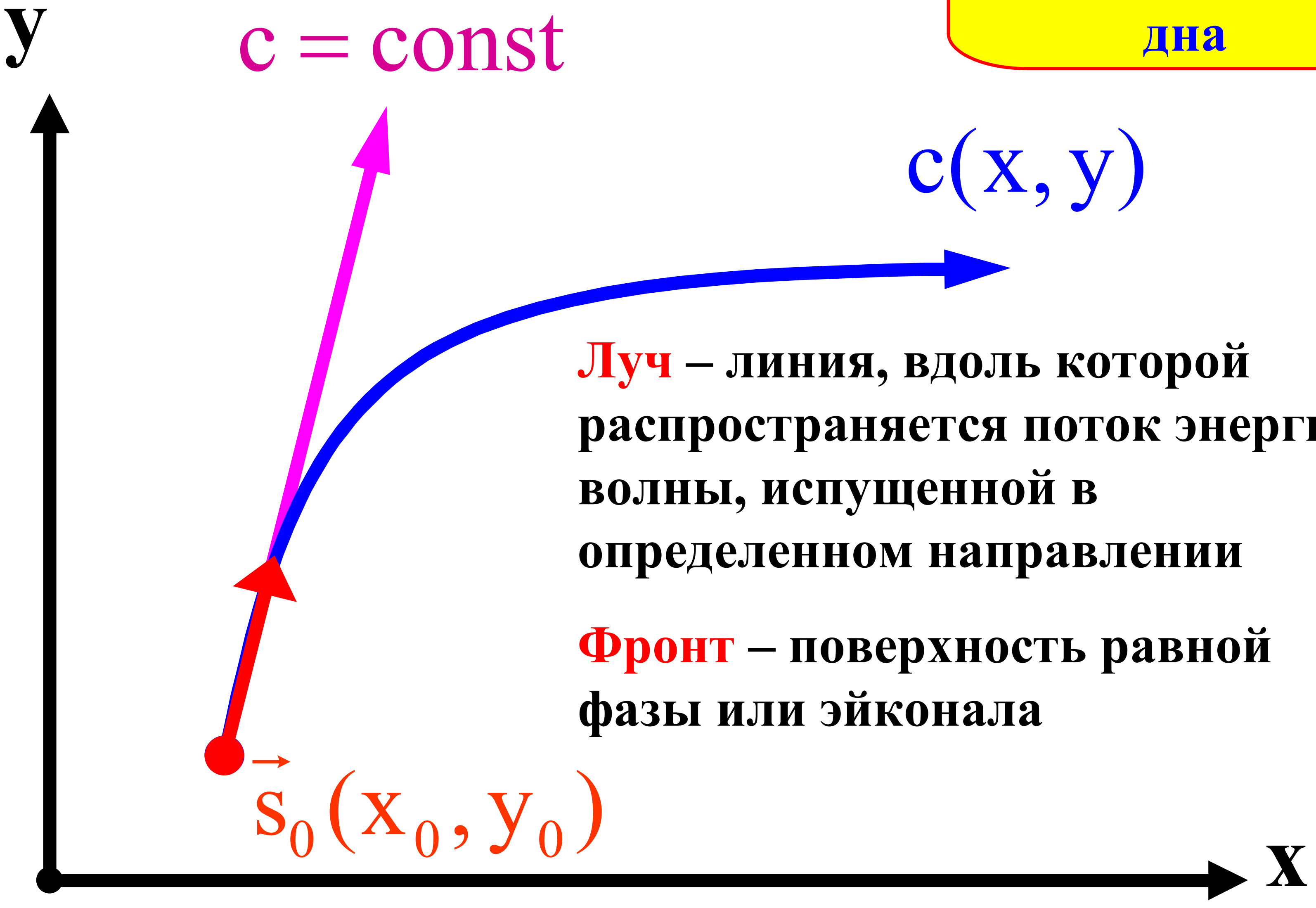
кафедра физики моря и вод суши

отделение геофизики

физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова

Приближение «геометрической оптики»

глубина $\quad H \ll \lambda \ll L \quad$ **масштаб неоднородностей дна**



Луч – линия, вдоль которой распространяется поток энергии волны, испущенной в определенном направлении

Фронт – поверхность равной фазы или эйконала

Уравнение эйконала (расчет изохрон)

$$(\nabla\tau)^2 = c^{-2} \Longleftrightarrow \left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{gH(x,y)}$$

$$c(x,y) = \sqrt{gH(x,y)}$$

Уравнения для расчета эволюции луча на плоскости

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c\frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}} \qquad \boxed{\frac{dy}{dt} = c\frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}}$$

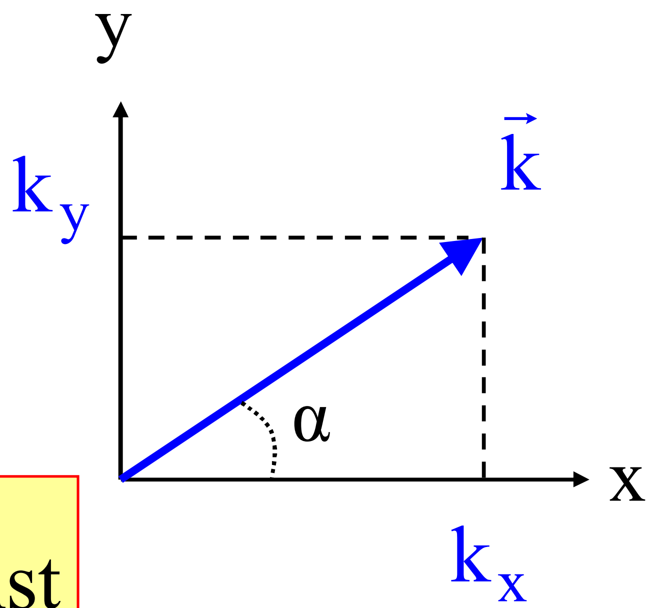
$$\boxed{\frac{dk_x}{dt} = -\frac{\partial c}{\partial x}\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \qquad \boxed{\frac{dk_y}{dt} = -\frac{\partial c}{\partial y}\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}$$

Соответствие лучевых уравнений закону Снеллиуса

Пусть скорость меняется только по оси 0x: $c = c(x)$

$$\boxed{\frac{dk_y}{dt} = -\frac{\partial c}{\partial y}\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{dk_y}{dt} = 0}$$

$$\boxed{k_y = \text{const}} \qquad \boxed{k_y = \left|\vec{k}\right| \sin\alpha}$$

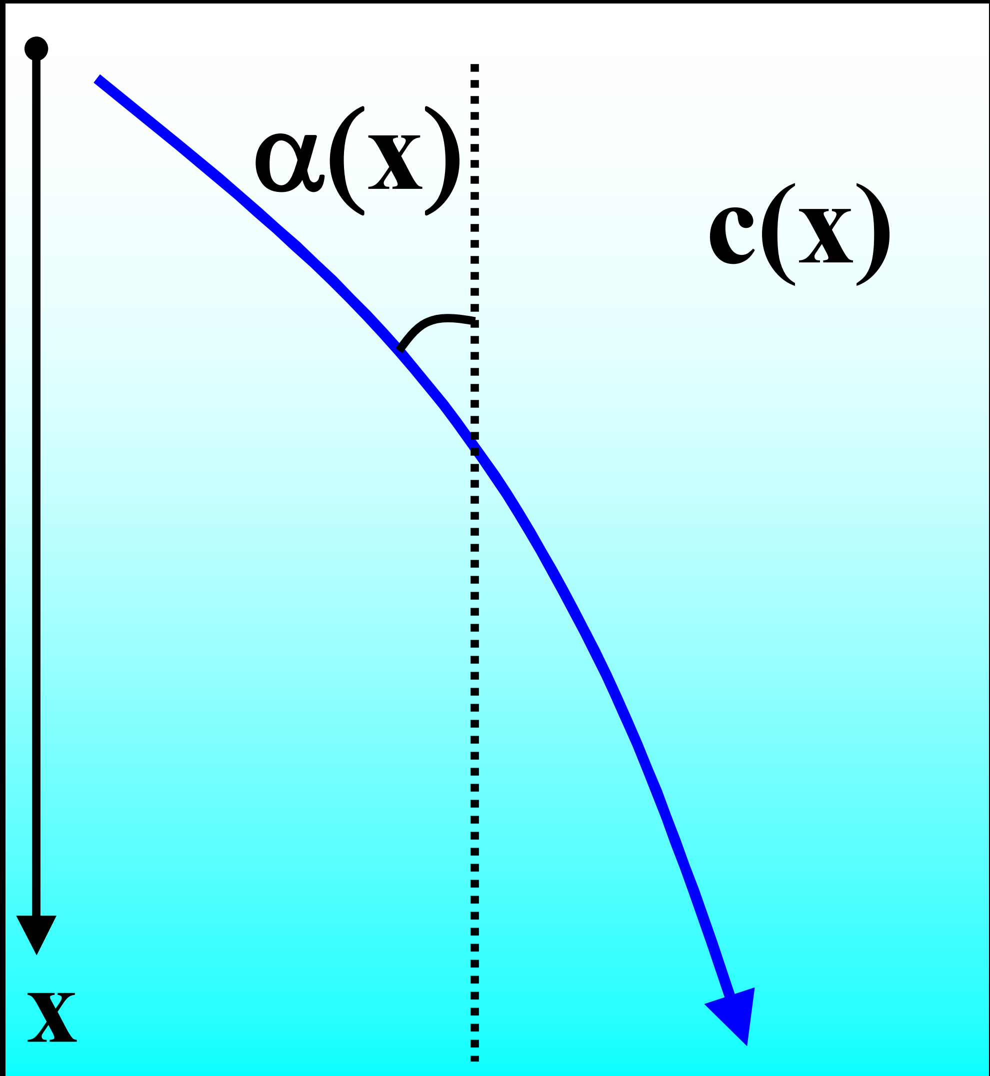


$$\boxed{\left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c(x)\cdot T}}$$

$$T = \text{const}$$

$$\boxed{\frac{\sin\alpha(x)}{c(x)} = \text{const}}$$

Рефракция

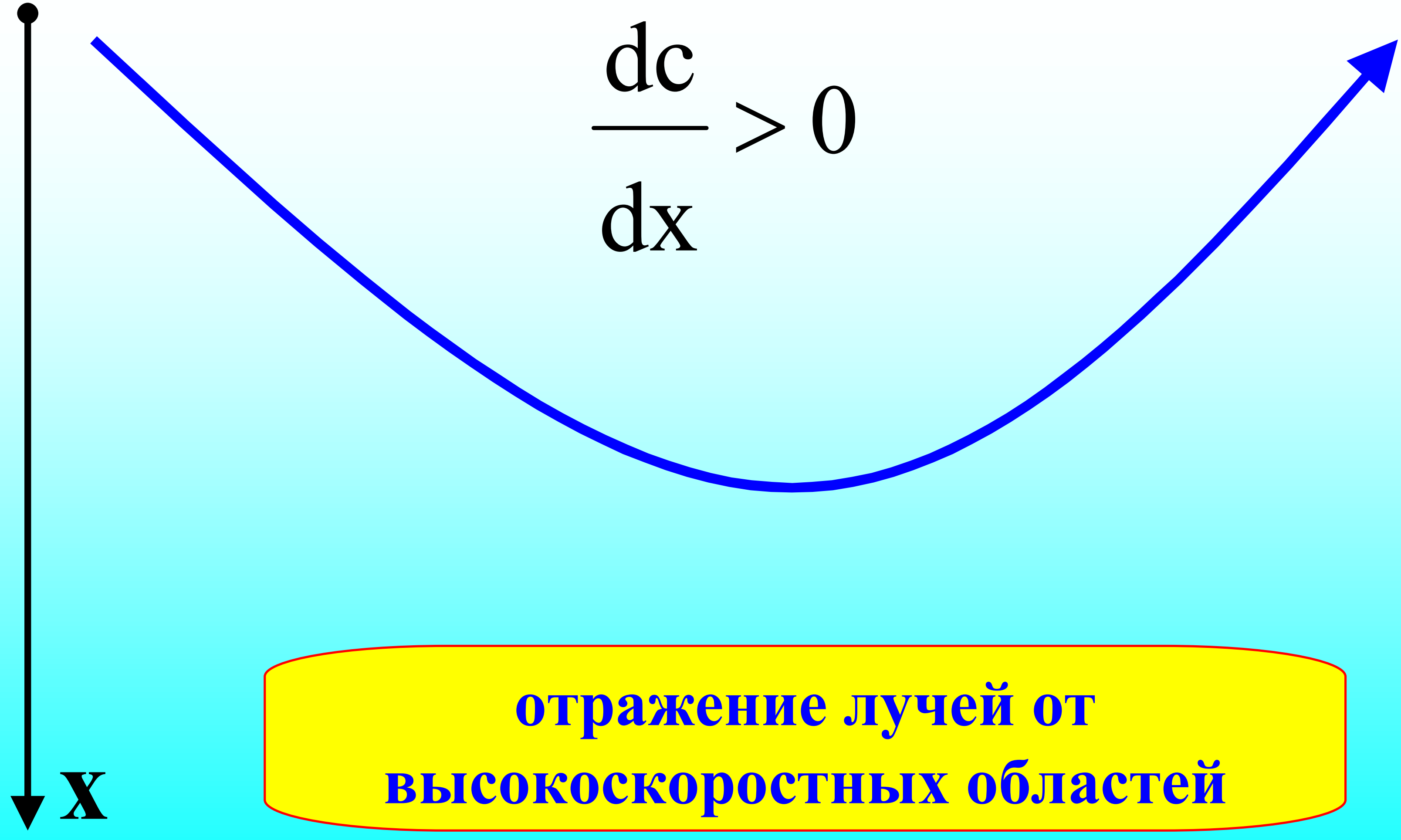


$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{\sin\alpha(z)}{c(z)} = \text{const}$$

Рефракция – изменение направления волновых лучей в среде с (плавно) изменяющейся в пространстве скоростью

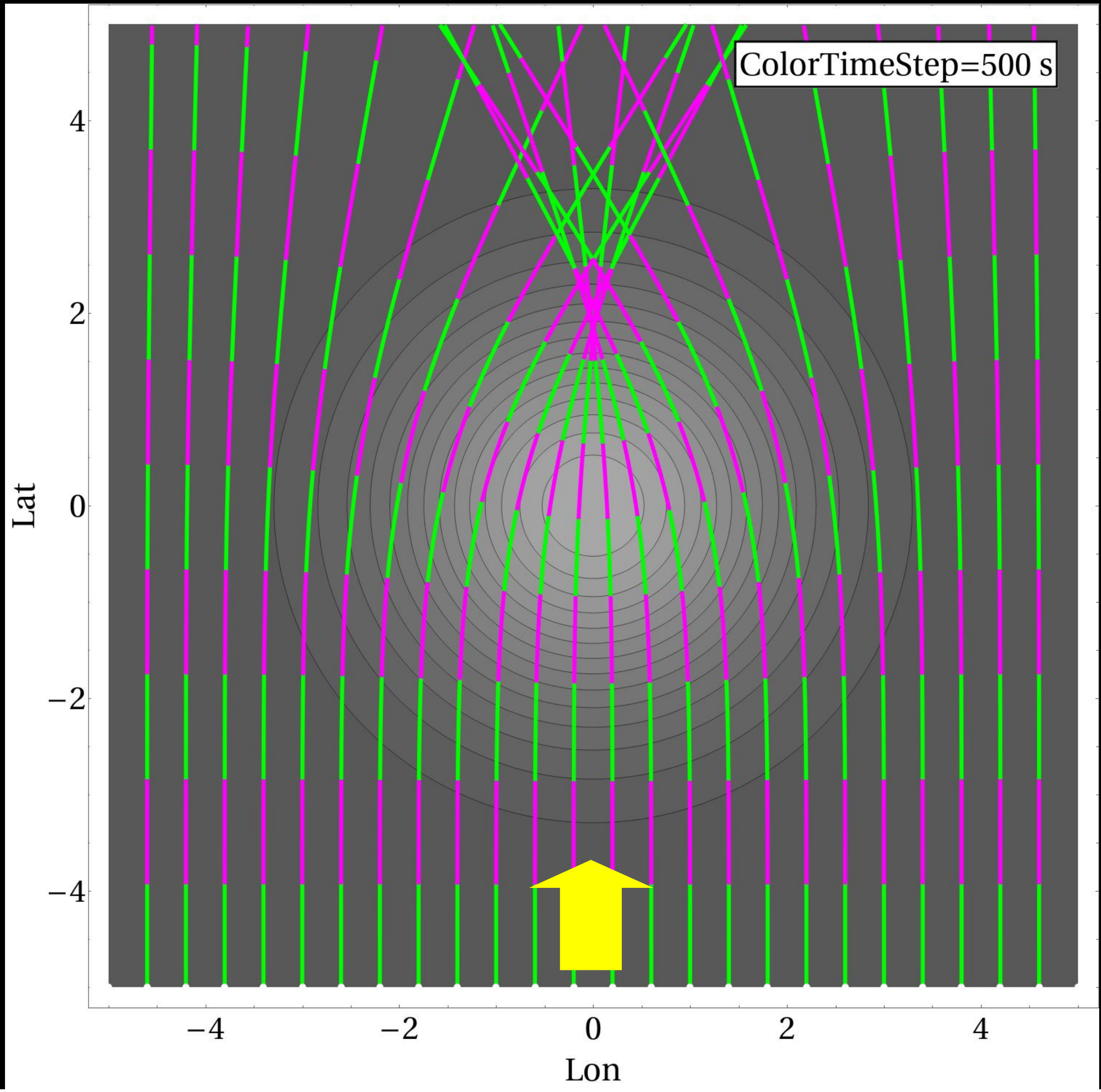
Полное внутреннее отражение



$$\frac{dc}{dx} > 0$$

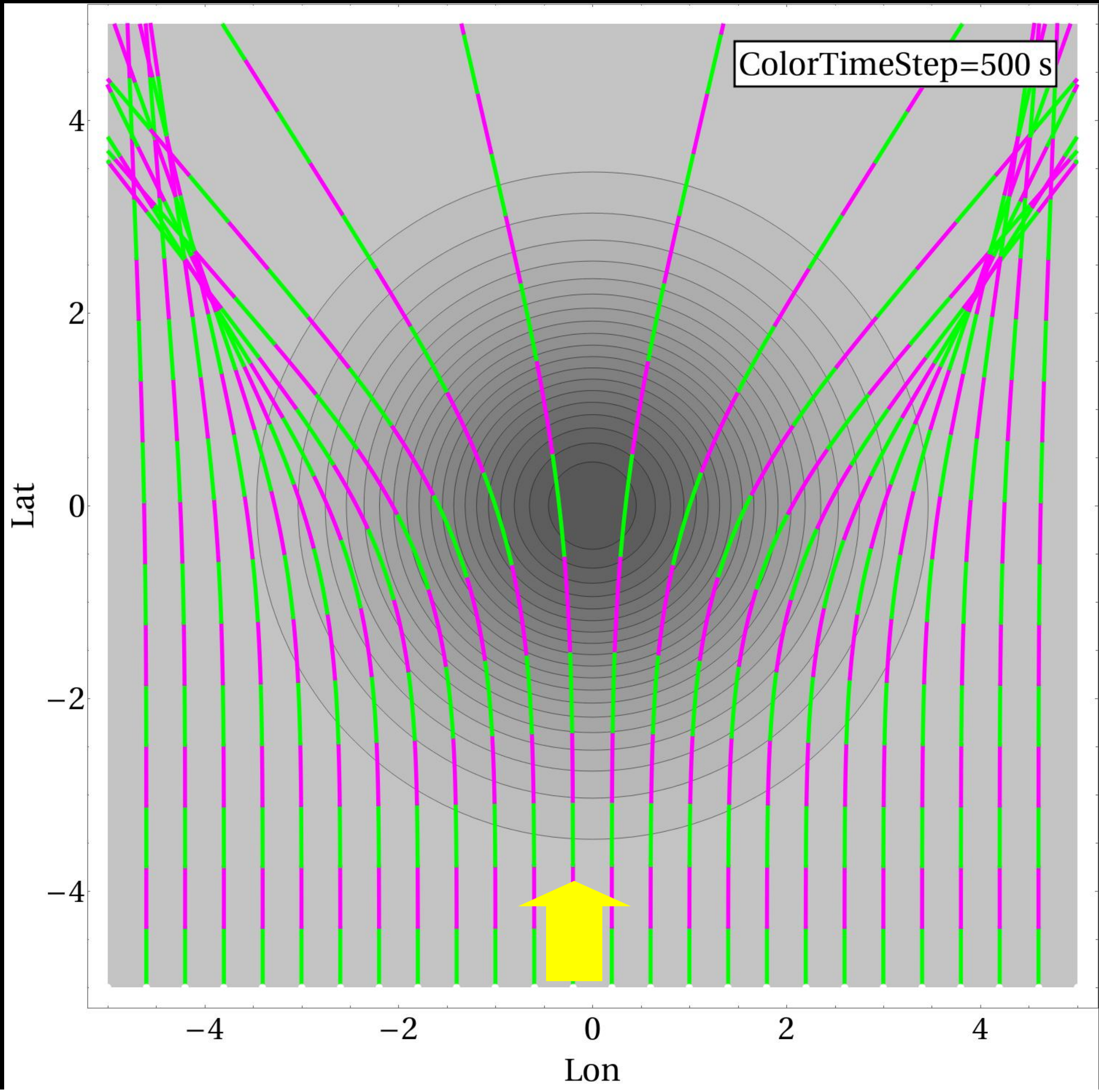
отражение лучей от высокоскоростных областей

Ход волновых лучей над подводной возвышенностью



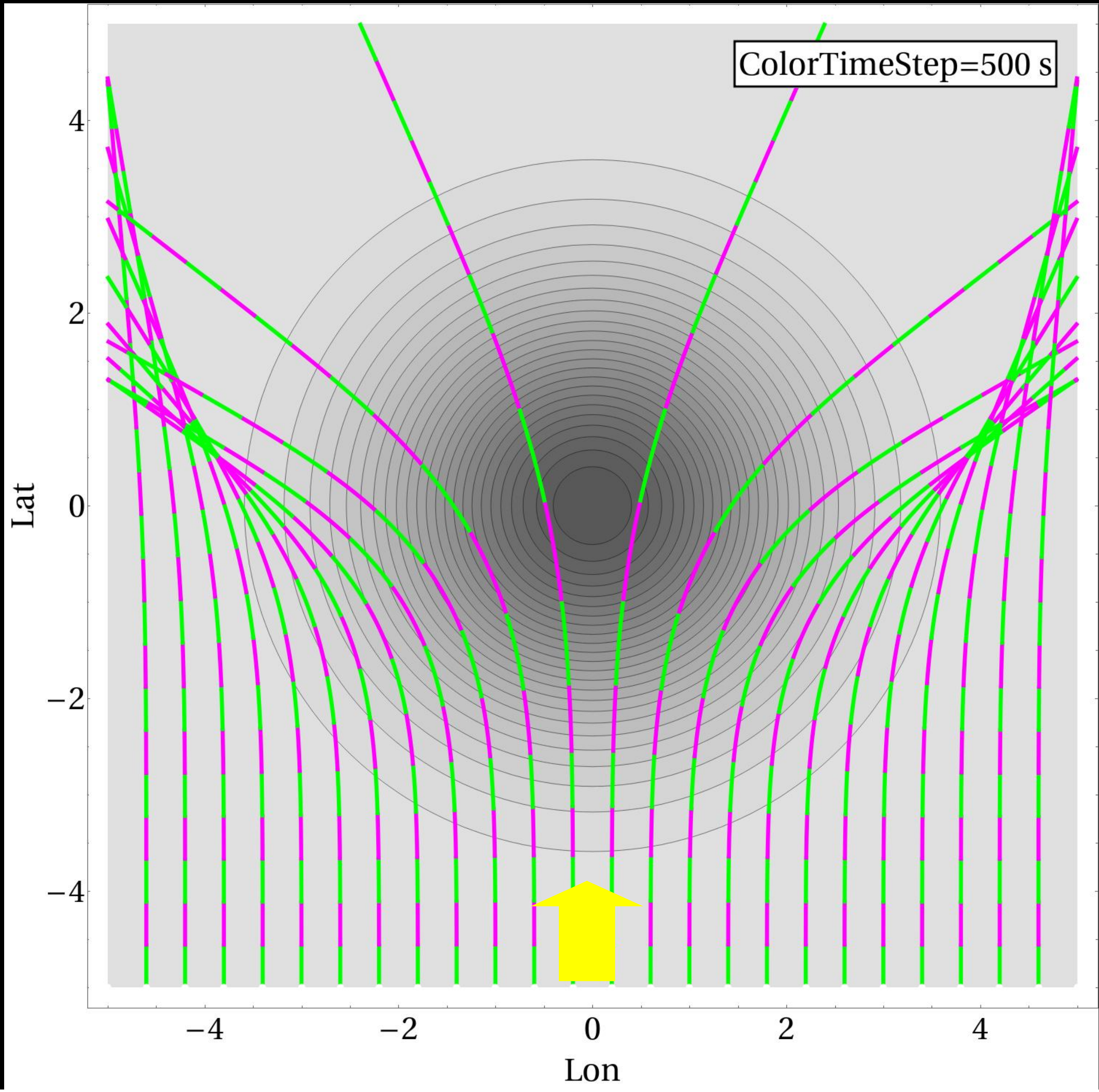
$\Delta H = 3$ км

Ход волновых лучей над подводной депрессией



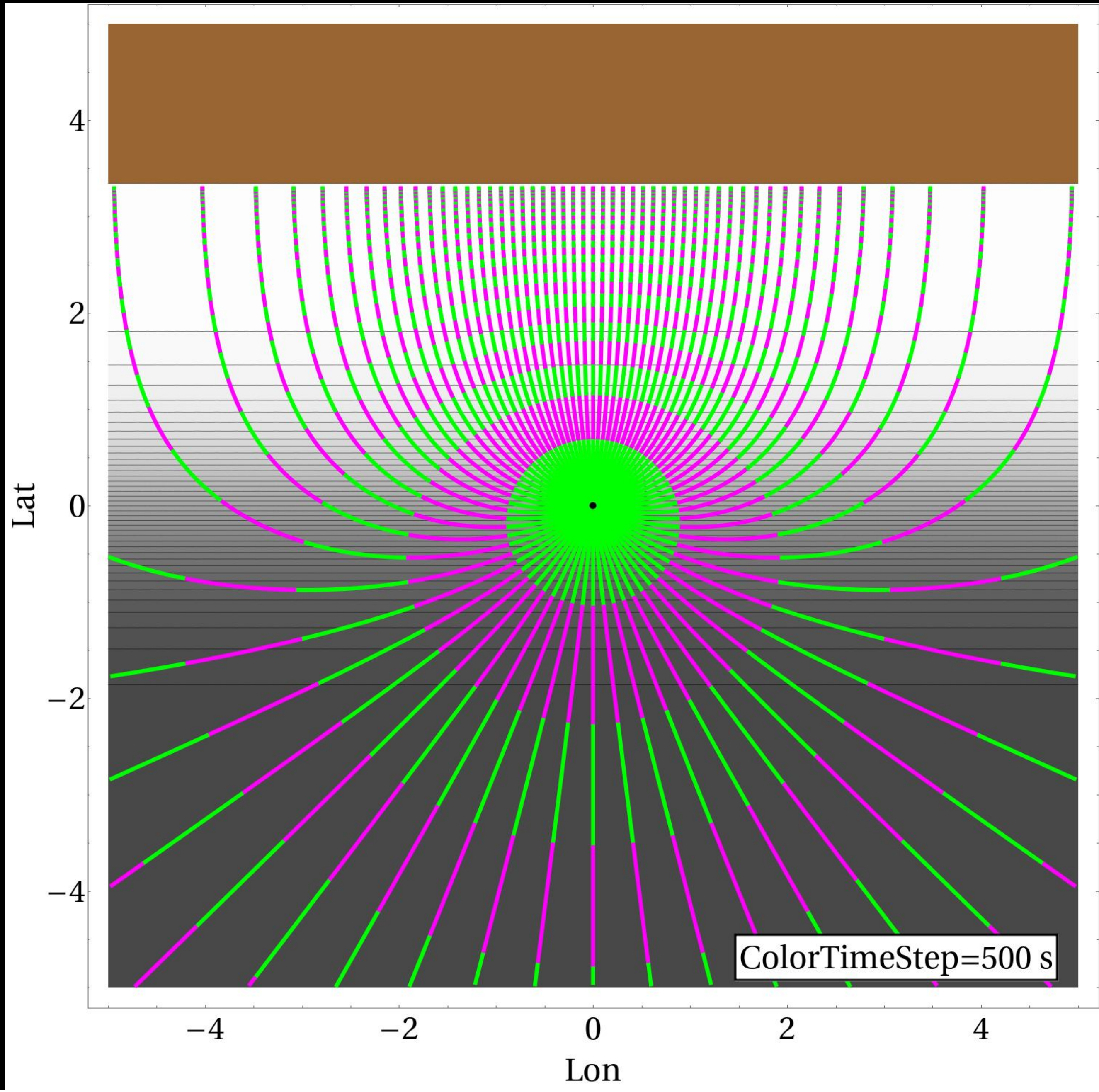
$\Delta H = 4$ км

Ход волновых лучей над подводной депрессией

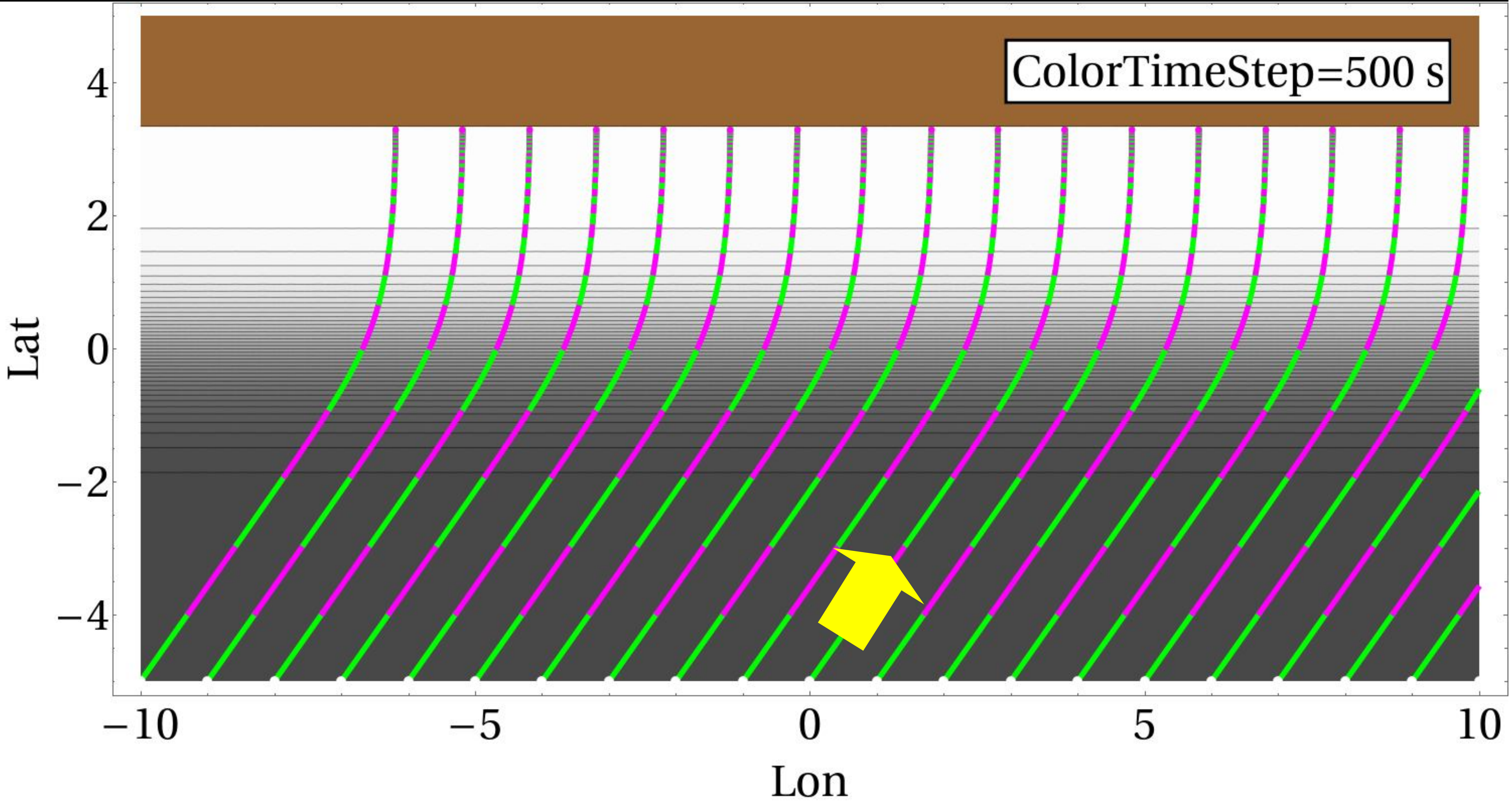


$\Delta H = 5$ км

Рефракция волн в прибрежной зоне

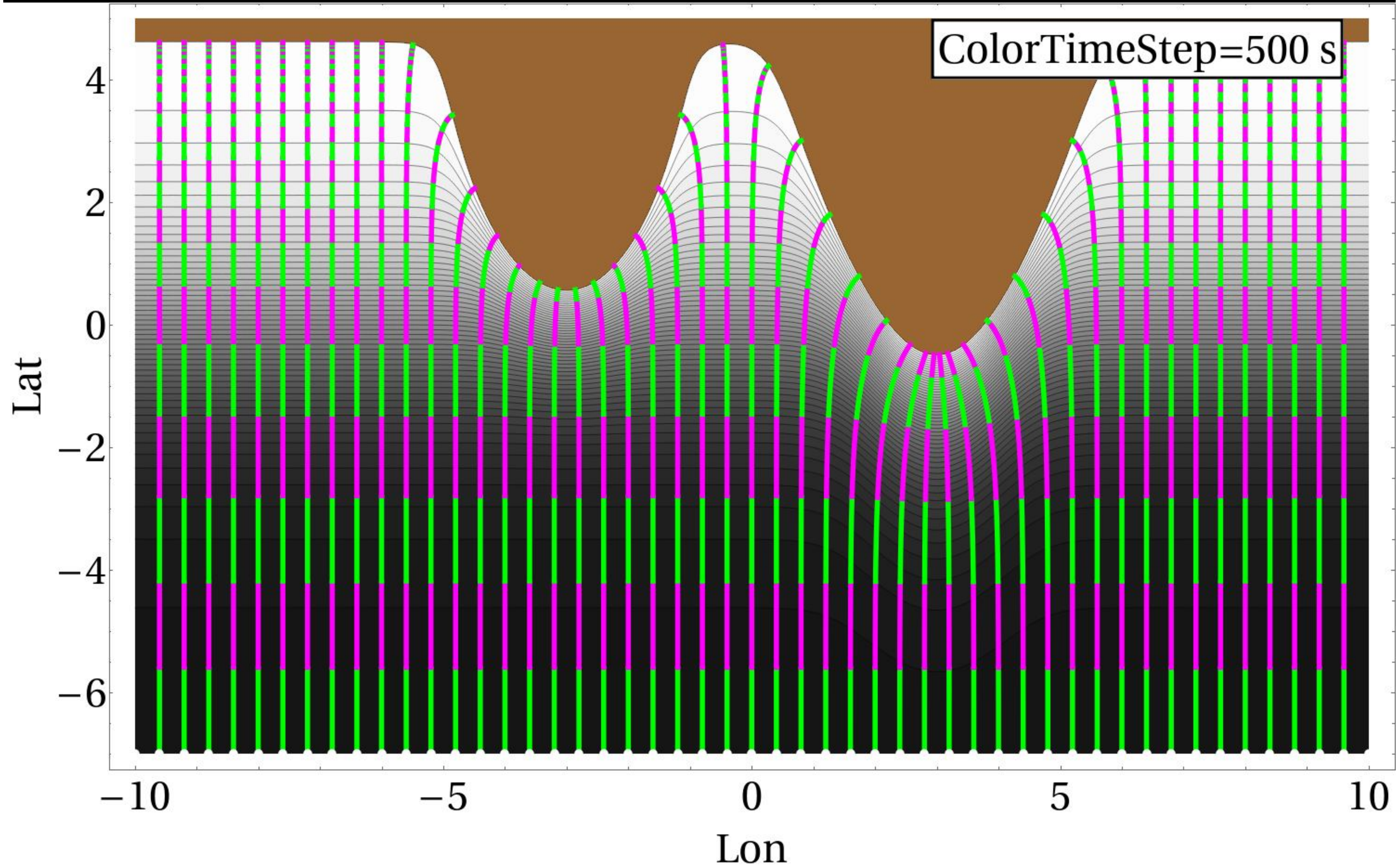


Рефракция волн в прибрежной зоне

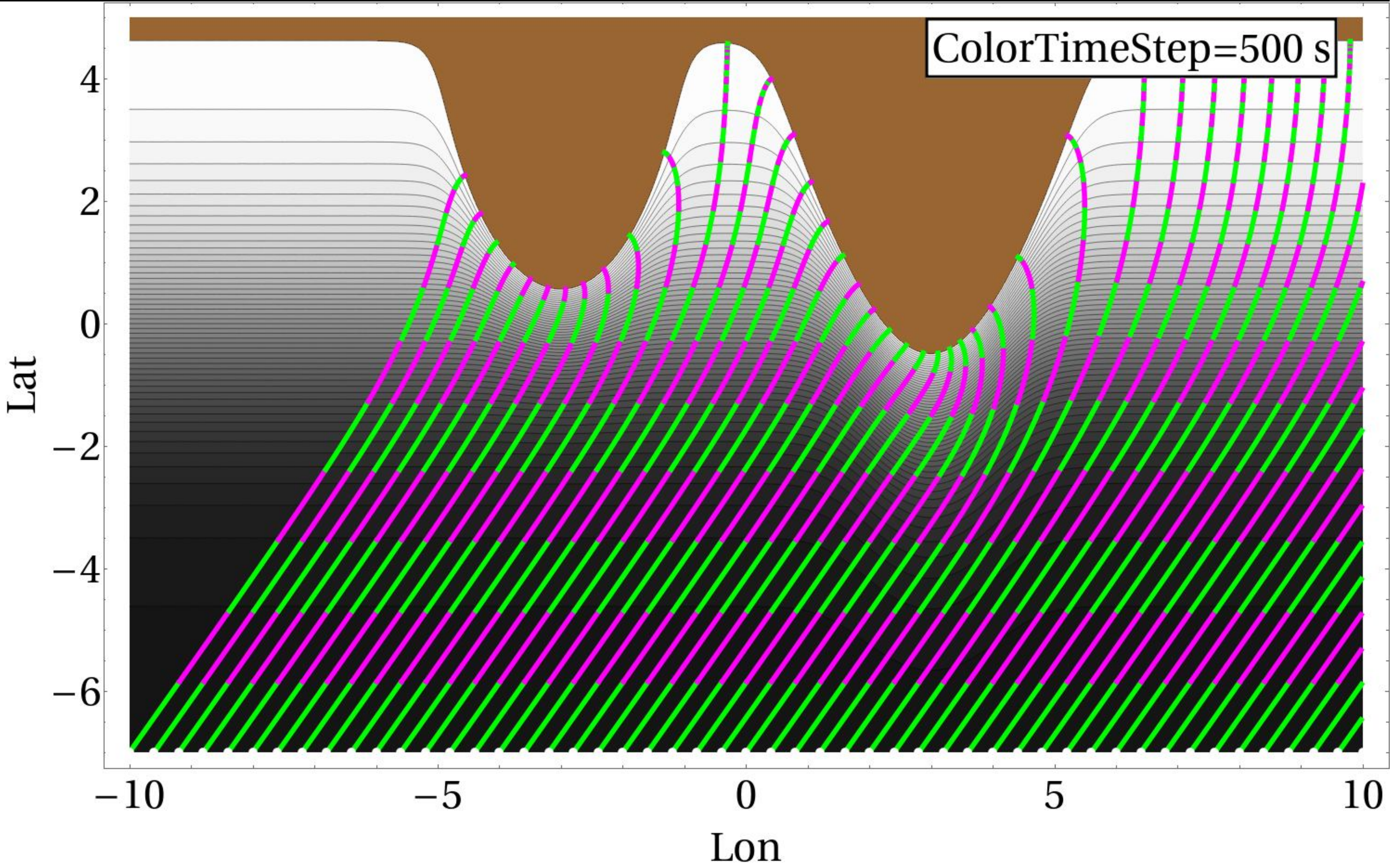


Лучи подходят к побережью по нормали

Рефракция волн в прибрежной зоне

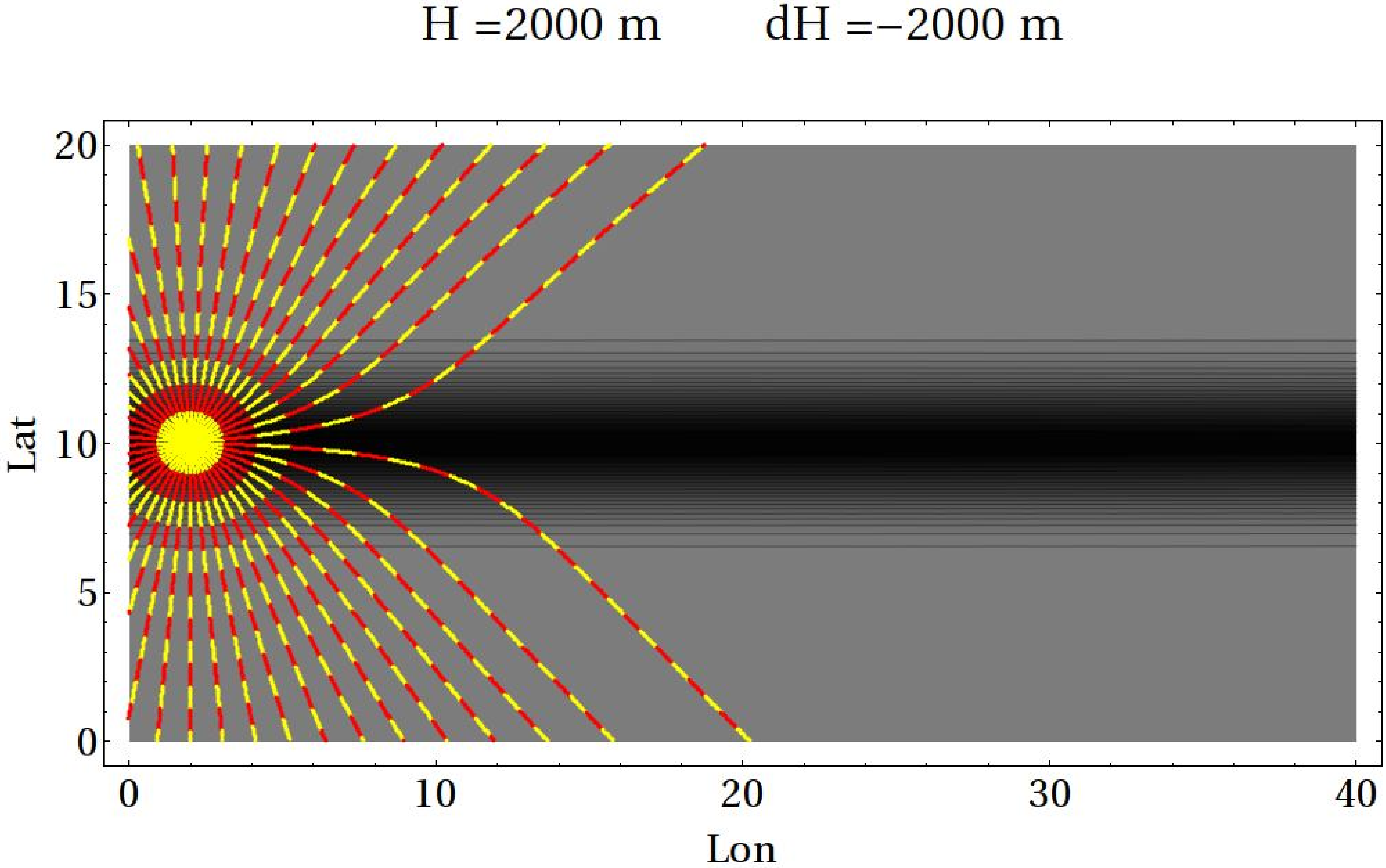


Рефракция волн в прибрежной зоне

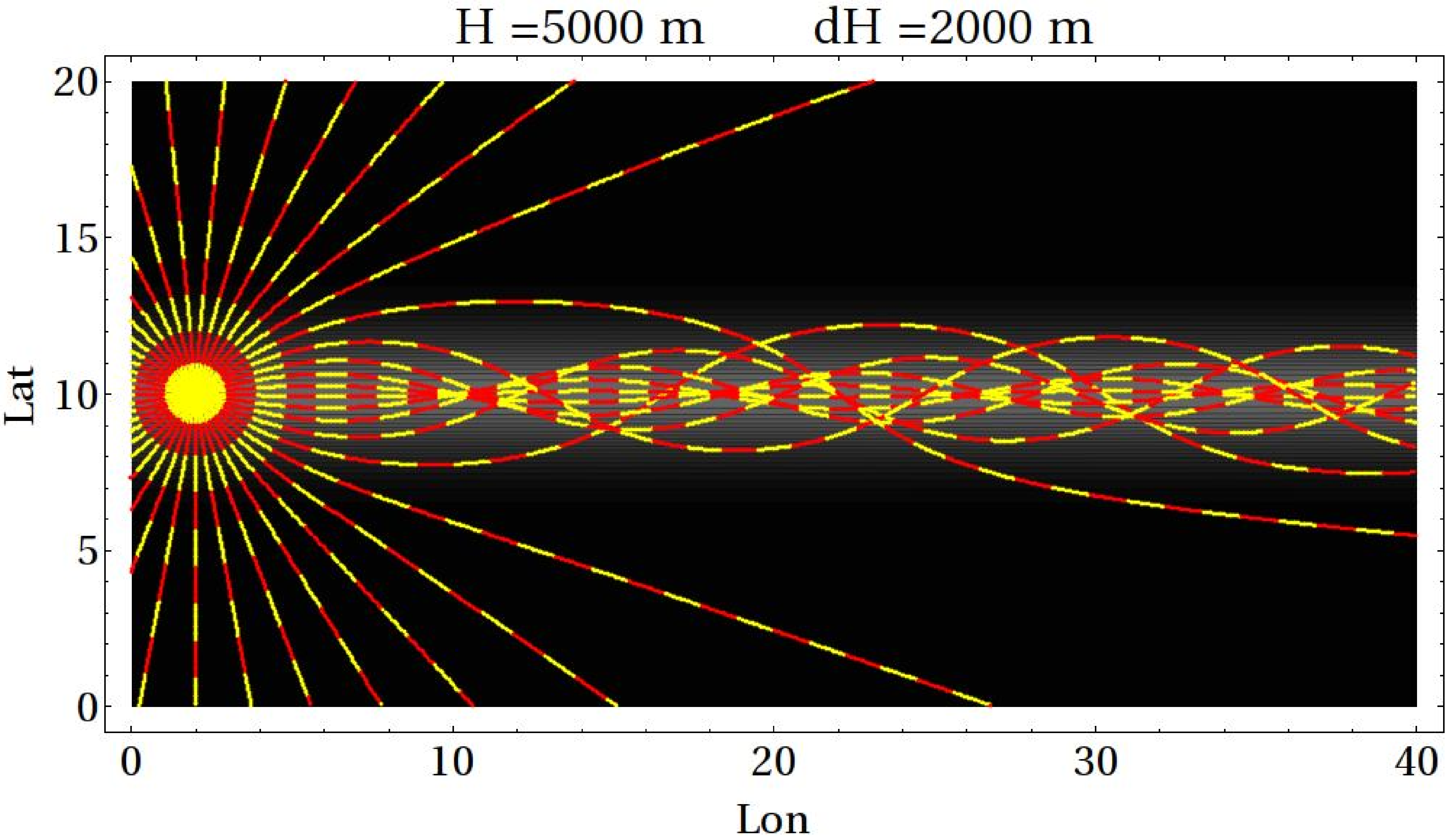


Концентрация волновой энергии на мысах и защищенность бухт

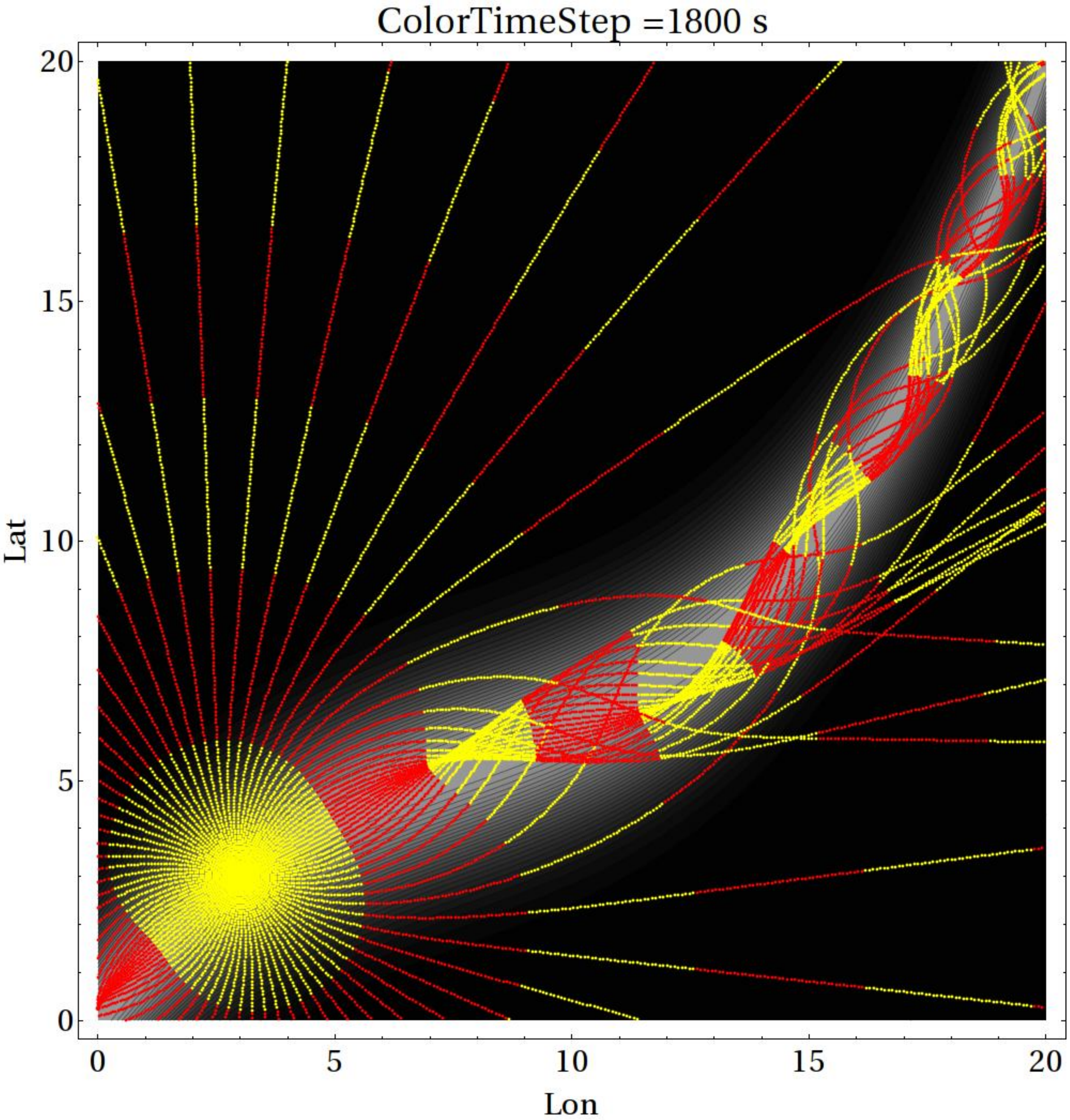
Ход волновых лучей вблизи глубоководного желоба



Ход волновых лучей вблизи подводного хребта

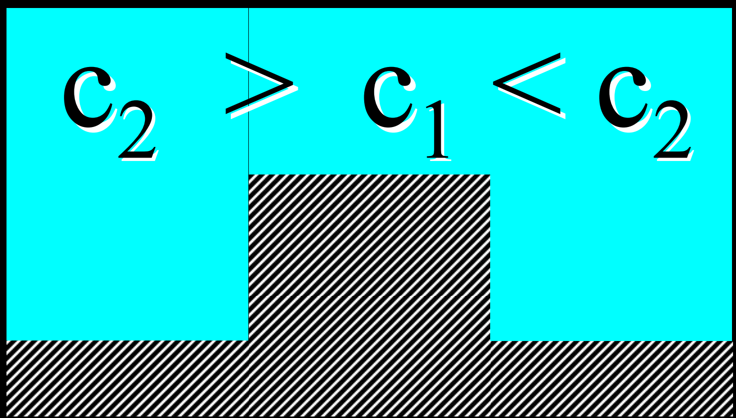


Ход волновых лучей вблизи подводного хребта

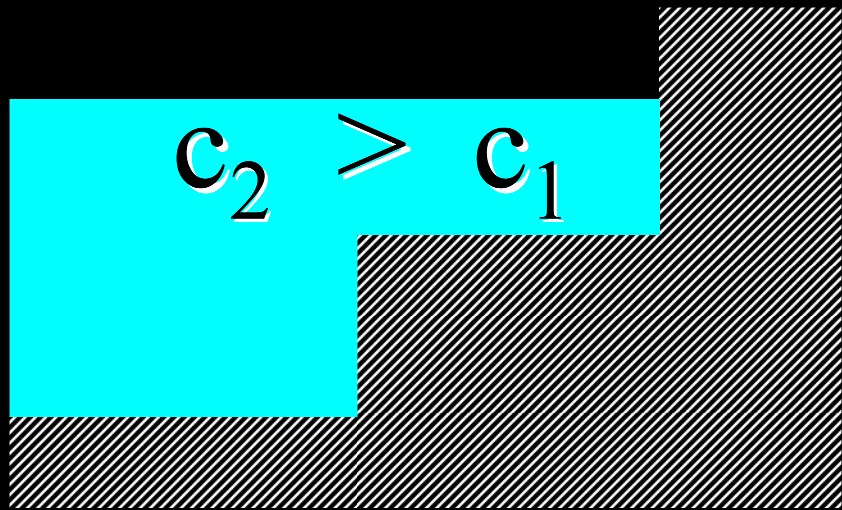


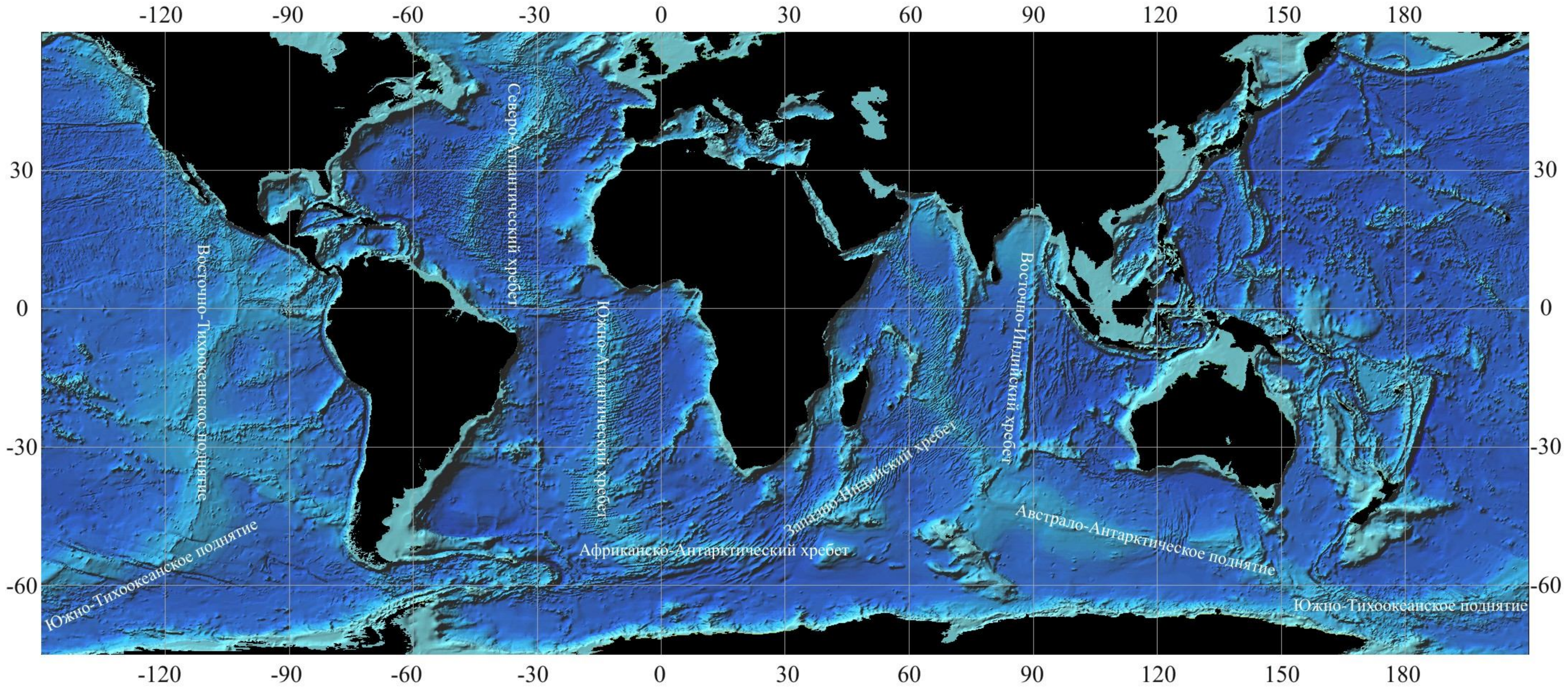
Захваченные волны

подводный хребет



материковый склон и берег





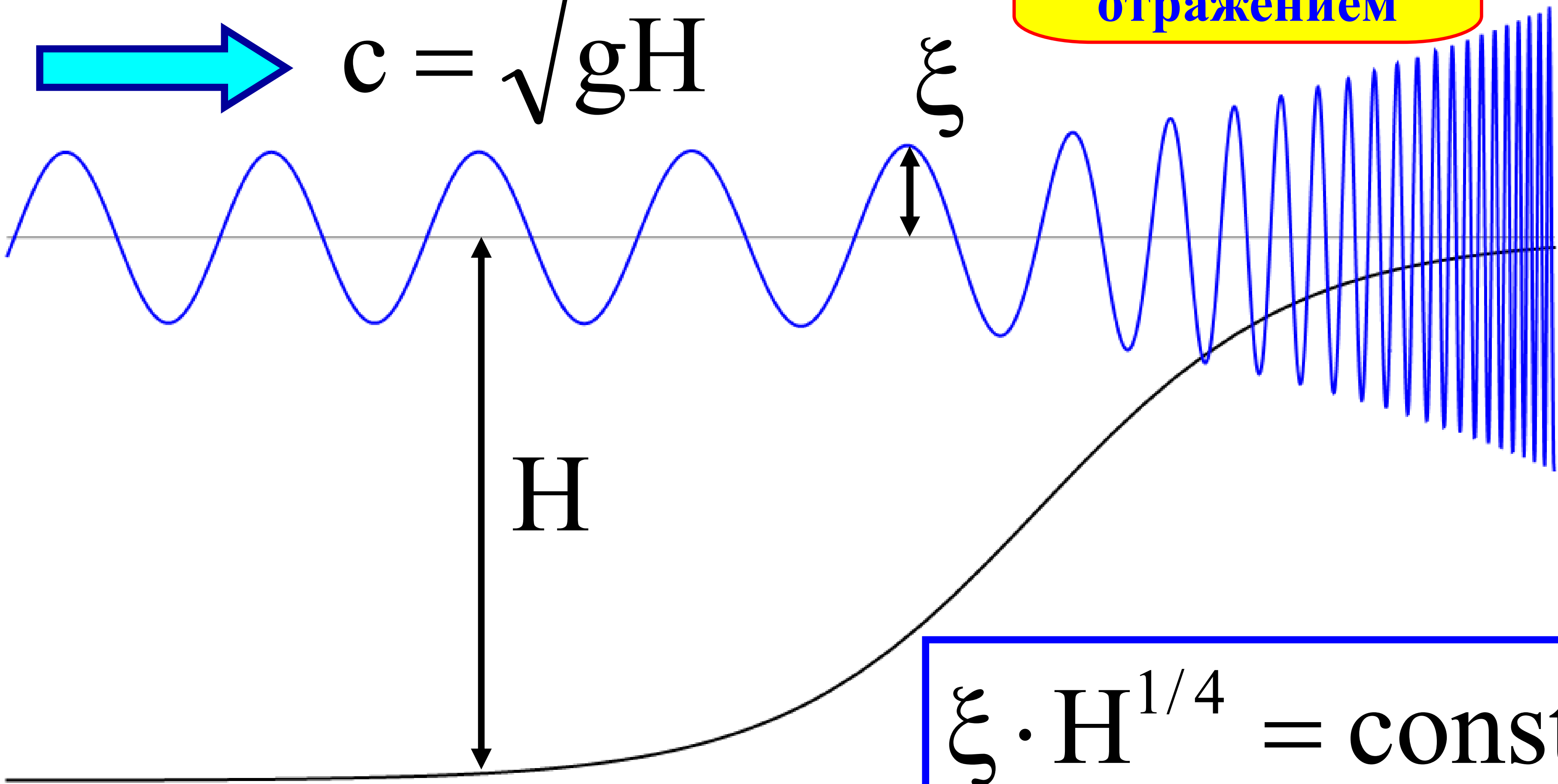
-120
-90
-60
-30
0
30
60
90
120
150
180
30
0
-30
-60
Северо-Атлантический хребет
Восточно-Тихоокеанское поднятие
Южно-Атлантический хребет
Восточно-Индийский хребет
Западно-Индийский хребет
Африканско-Антарктический хребет
Австрало-Антарктическое поднятие
Южно-Тихоокеанское поднятие
Южно-Тихоокеанское поднятие

Закон Грина (закон "1/4")

$$W \sim \xi^2 \qquad Q \sim \xi^2 c \sim \xi^2 \sqrt{H} = \mathrm{const}$$

пренебрегаем отражением

$$c = \sqrt{gH}$$



$$\boxed{\xi \cdot H^{1/4} = \mathrm{const}}$$

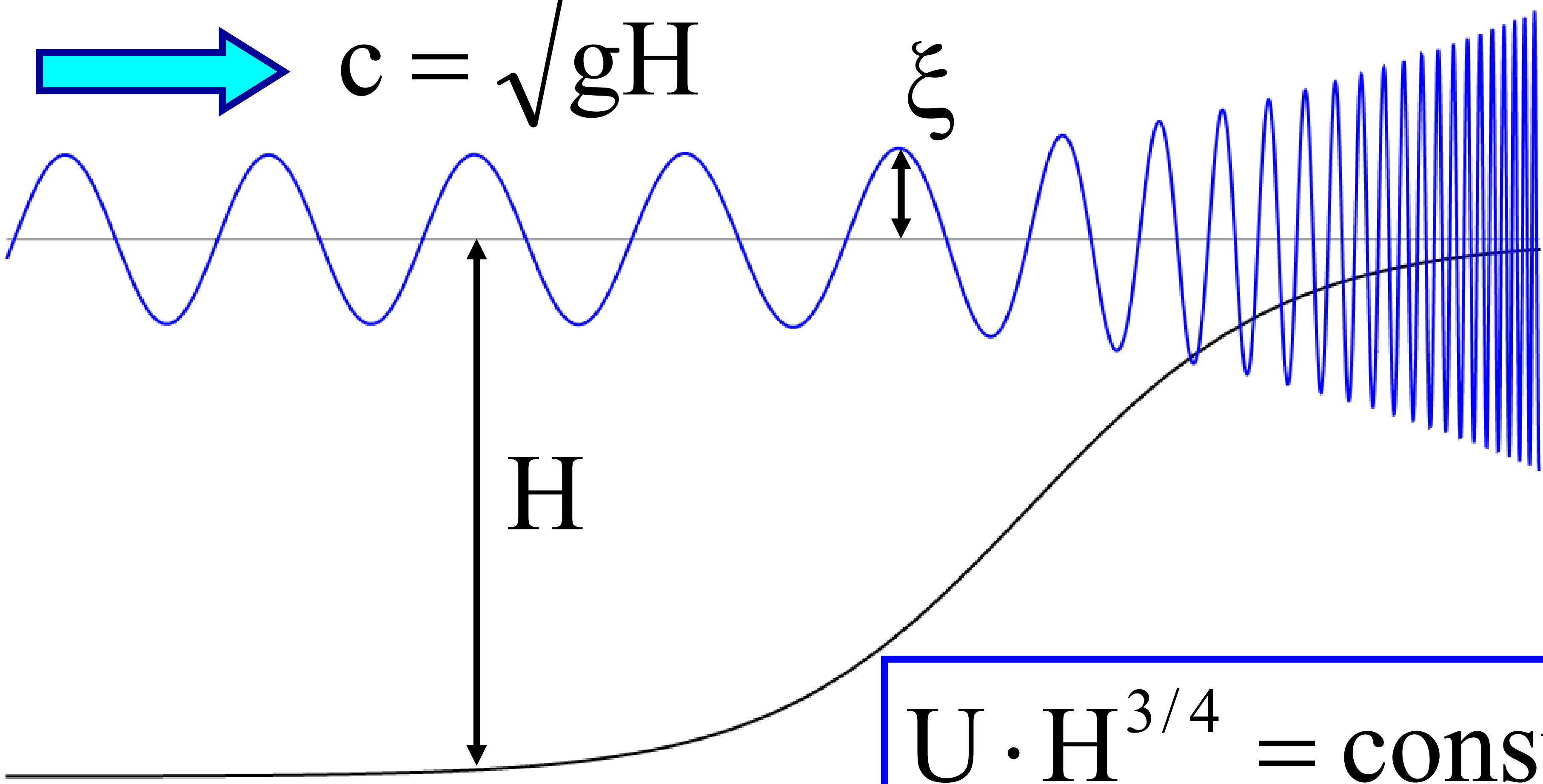
Закон для скорости течения (закон «3/4")

$$W \sim U^2 H$$

пренебрегаем отражением

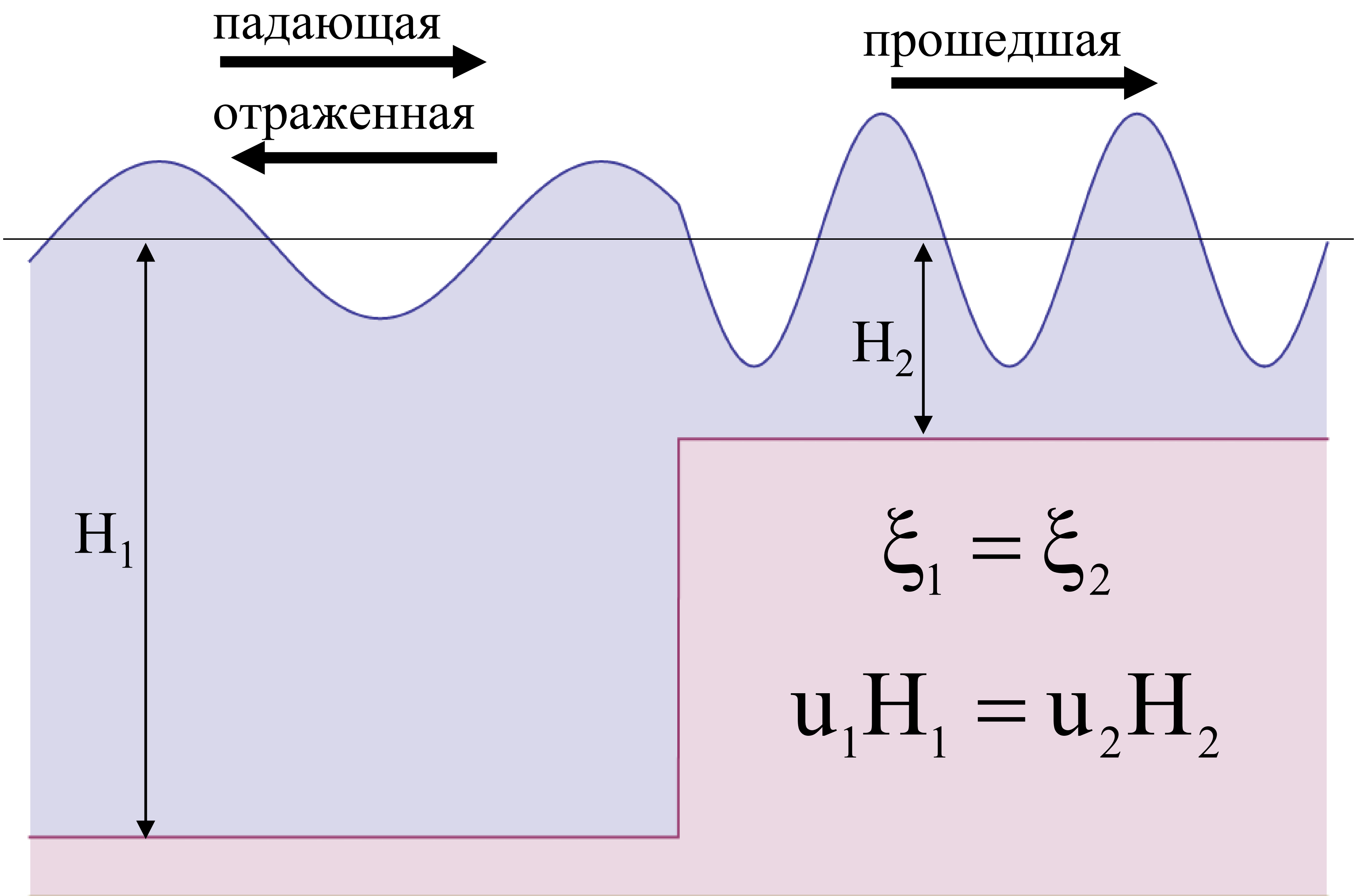
$$Q \sim U^2 H c \sim U^2 H^{3/2} = \text{const}$$

$$c = \sqrt{gH}$$



$$\boxed{U \cdot H^{3/4} = \text{const}}$$

Взаимодействие волны со ступенькой



$$\xi_1 = \xi_2$$

$$u_1 H_1 = u_2 H_2$$

$$\xi_I = e^{i(\omega t - k_1 x)}$$ - падающая волна единичной амплитуды

$$\xi_R = R \cdot e^{i(\omega t + k_1 x)}$$ - отраженная волна амплитуды R

$$\xi_T = T \cdot e^{i(\omega t - k_2 x)}$$ - прошедшая волна амплитуды T

R – амплитудный коэффициент отражения

T – амплитудный коэффициент прохожения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\xi \sim e^{i(\omega t \pm kx)} \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = \pm ik\xi$$

$$\Downarrow$$

$$i\omega u = -g(\pm ik\xi)$$

$$u \sim e^{i(\omega t \pm kx)} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = i\omega u$$

$$\Downarrow$$

$$u = \mp \frac{k}{\omega} g\xi = \mp \xi \sqrt{\frac{g}{H}}$$

$$\frac{\omega}{k} \equiv c_{ph} = \sqrt{gH}$$

$$\xi_I = e^{i(\omega t - k_1 x)}$$ **- падающая волна единичной амплитуды**

$$\xi_R = R \cdot e^{i(\omega t + k_1 x)}$$ **- отраженная волна амлитуды R**

$$\xi_T = T \cdot e^{i(\omega t - k_2 x)}$$ **- прошедшая волна амлитуды T**

«Сшиваем» смещения свободной поверхности

$$x = 0: \quad \xi_I + \xi_R = \xi_T \Longrightarrow e^{i\omega t} + R \cdot e^{i\omega t} = T \cdot e^{i\omega t}$$

$$\boxed{1 + R = T}$$

«Сшиваем» потоки

$$x = 0: \quad (u_I + u_R)H_1 = u_T H_2 \qquad u = \mp\xi\sqrt{\frac{g}{H}}$$

$$\boxed{\sqrt{H_1}(1 - R) = \sqrt{H_2}\,T}$$

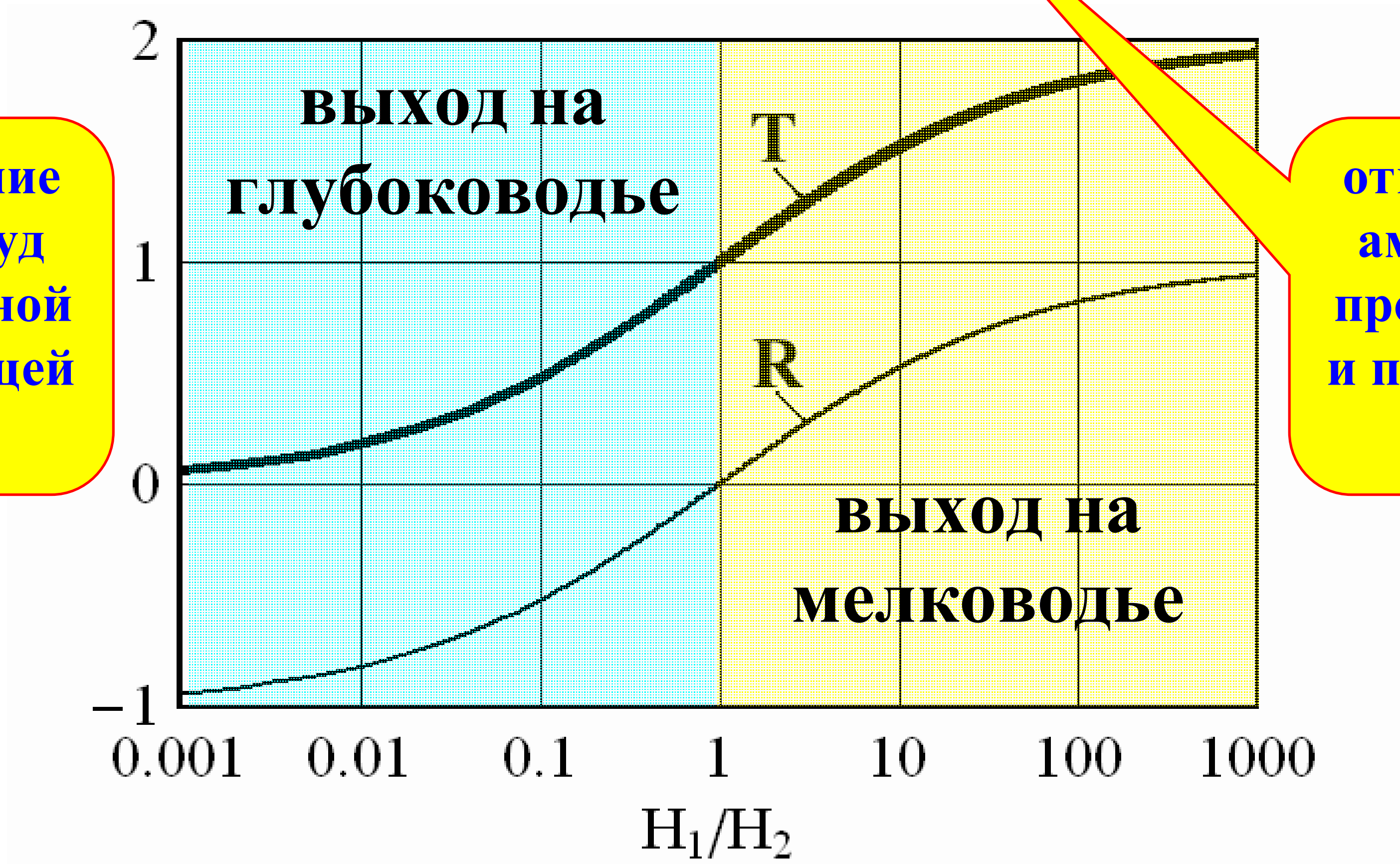
Амплитудные коэффициенты отражения и прохождения при падении волны на ступеньку

$$R = \frac{\sqrt{H_1 / H_2} - 1}{\sqrt{H_1 / H_2} + 1}$$

$$T = \frac{2\sqrt{H_1 / H_2}}{\sqrt{H_1 / H_2} + 1}$$

отношение амплитуд отраженной и падающей волн

отношение амплитуд прошедшей и падающей волн

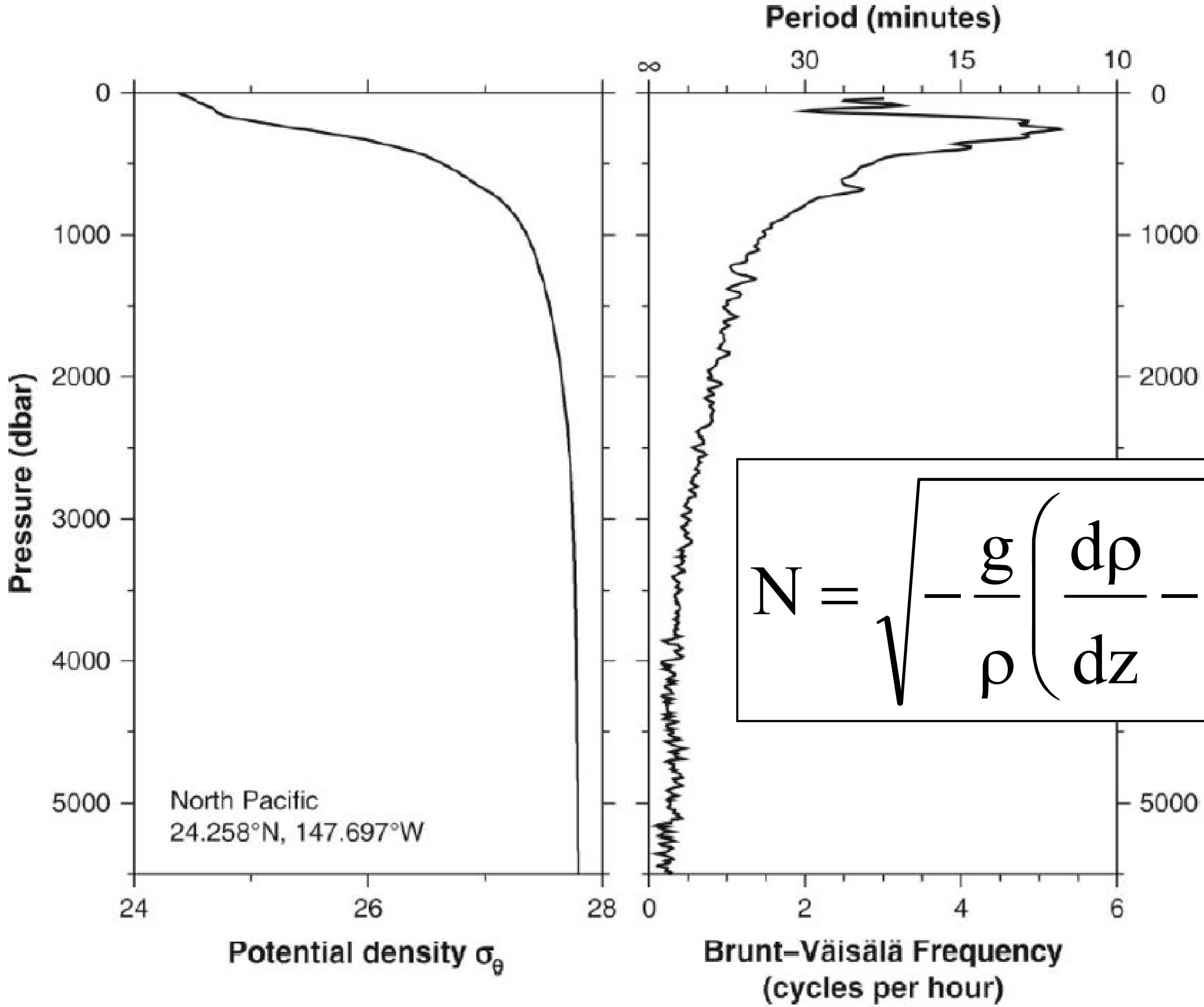


Внутренние волны в океане

Гибралтар

Astronaut photographs June 3, 2004

Вертикальные профили плотности и частоты Вяйсяля-Брента в океане



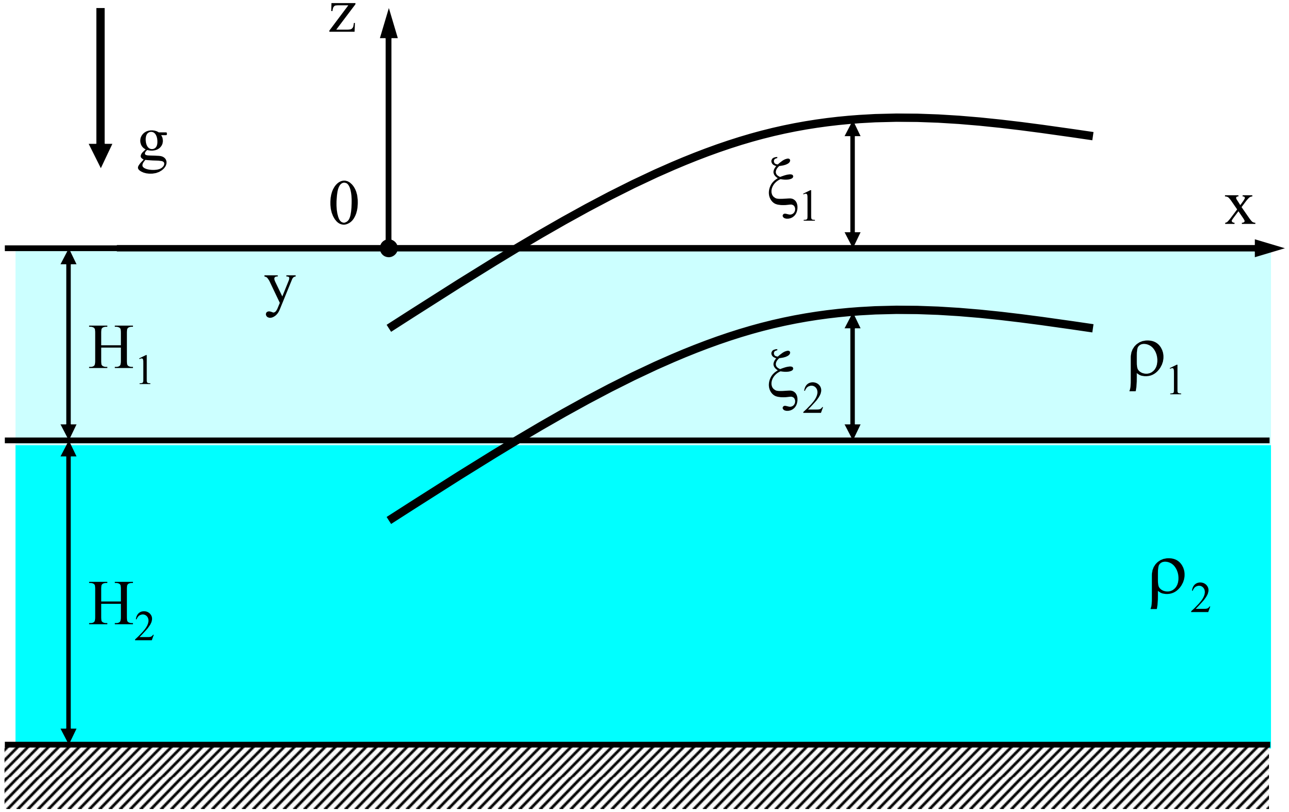
$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s\right)}$$

Длинные волны в двухслойной жидкости: постановка 2D задачи

приближение гидростатики

p_{atm}=const

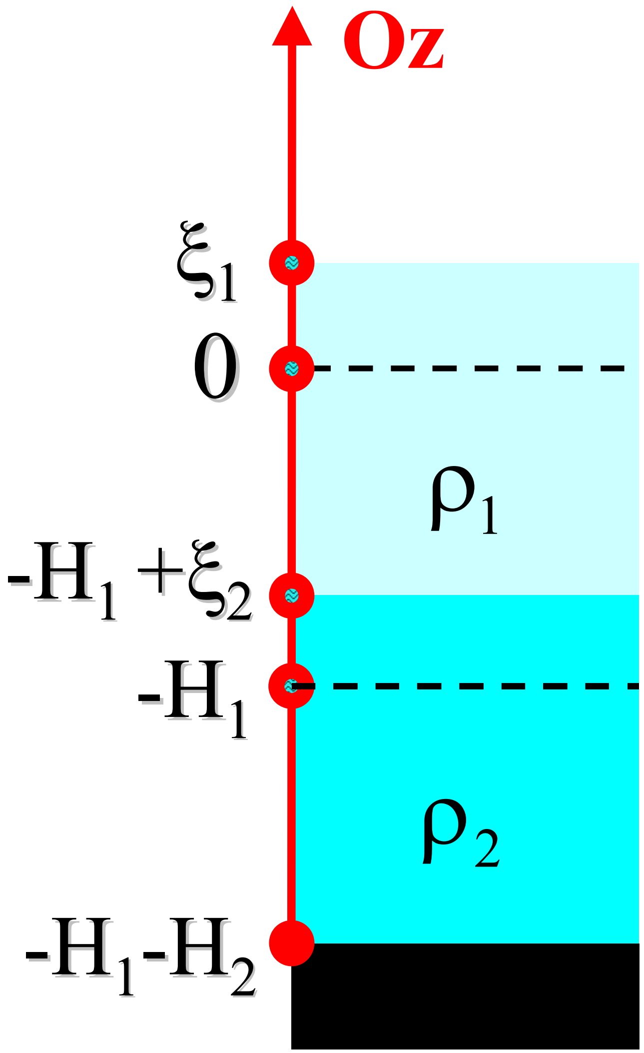
$\rho_2 > \rho_1$



$$p(\xi) = p_{атм} = const$$

$$\int\limits_{z}^{\xi} dz \;\Bigg|\; \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(z)\, g$$

уравнение гидростатики



1-й слой

$$p_1 = p_{атм} + \rho_1 g(\xi_1 - z)$$

2-й слой

$$p_2 = p_{атм} + \rho_1 g(\xi_1 + H_1 - \xi_2) + $$

$$+ \rho_2 g(-H_1 + \xi_2 - z)$$

$$p_1 = p_{атм} + \rho_1 g(\xi_1 - z)$$

$$\boxed{u = f(z)}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi_1}{\partial x}$$

$$p_2 = p_{атм} + \rho_1 g(\xi_1 + H_1 - \xi_2) +$$
$$+ \rho_2 g(-H_1 + \xi_2 - z)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial t} = -g\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} - g\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \Big| \quad \int_{\xi_2-H_1}^{\xi_1} dz \qquad \int_{-H_1-H_2}^{\xi_2-H_1} dz$$

$$|\xi_1| << H_1$$

$$|\xi_2| << H_2$$

$$H_1 \sim H_2$$

$$(H_1+\cancel{\xi_1}-\cancel{\xi_2})\frac{\partial u_1}{\partial x}+w(\xi_1)-w(\xi_2-H_1)=0$$

$$H_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial \xi_1}{\partial t}-\frac{\partial \xi_2}{\partial t}=0$$

$$(H_2+\cancel{\xi_2})\frac{\partial u_2}{\partial x}+w(\xi_2-H_1)-w(-H_1-H_2)=0$$

0

$$H_2\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial \xi_2}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \quad \Bigg| \frac{\partial}{\partial x}$$

$$H_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = 0 \quad \Bigg| \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -g\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} - g\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x}$$

$$\delta \equiv \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$$

$$\delta << 1$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi_1}{\partial x} - g\delta\frac{\partial \xi_2}{\partial x} \quad \Bigg| \frac{\partial}{\partial x}$$

$$H_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = 0 \quad \Bigg| \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x} = -g \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}$$

$$H_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x} = -g \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} - g\delta \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2}$$

$$H_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} - H_1 g \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} - \delta g H_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} = g H_2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}$$

преобразуются к виду:

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} - g\left(H_1 + H_2\right) \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = \delta g H_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} - \frac{\delta g H_1 H_2}{H_1 + H_2} \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} = \frac{H_2}{H_1 + H_2} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} - g\left(H_1 + H_2\right)\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = \delta g H_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2}$$

квадрат скорости длинных поверхностных волн

взаимное влияние длинных внутренних и поверхностных волн

квадрат скорости длинных волн на поверхности раздела

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} - \frac{\delta g H_1 H_2}{H_1 + H_2}\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} = \frac{H_2}{H_1 + H_2}\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2}$$

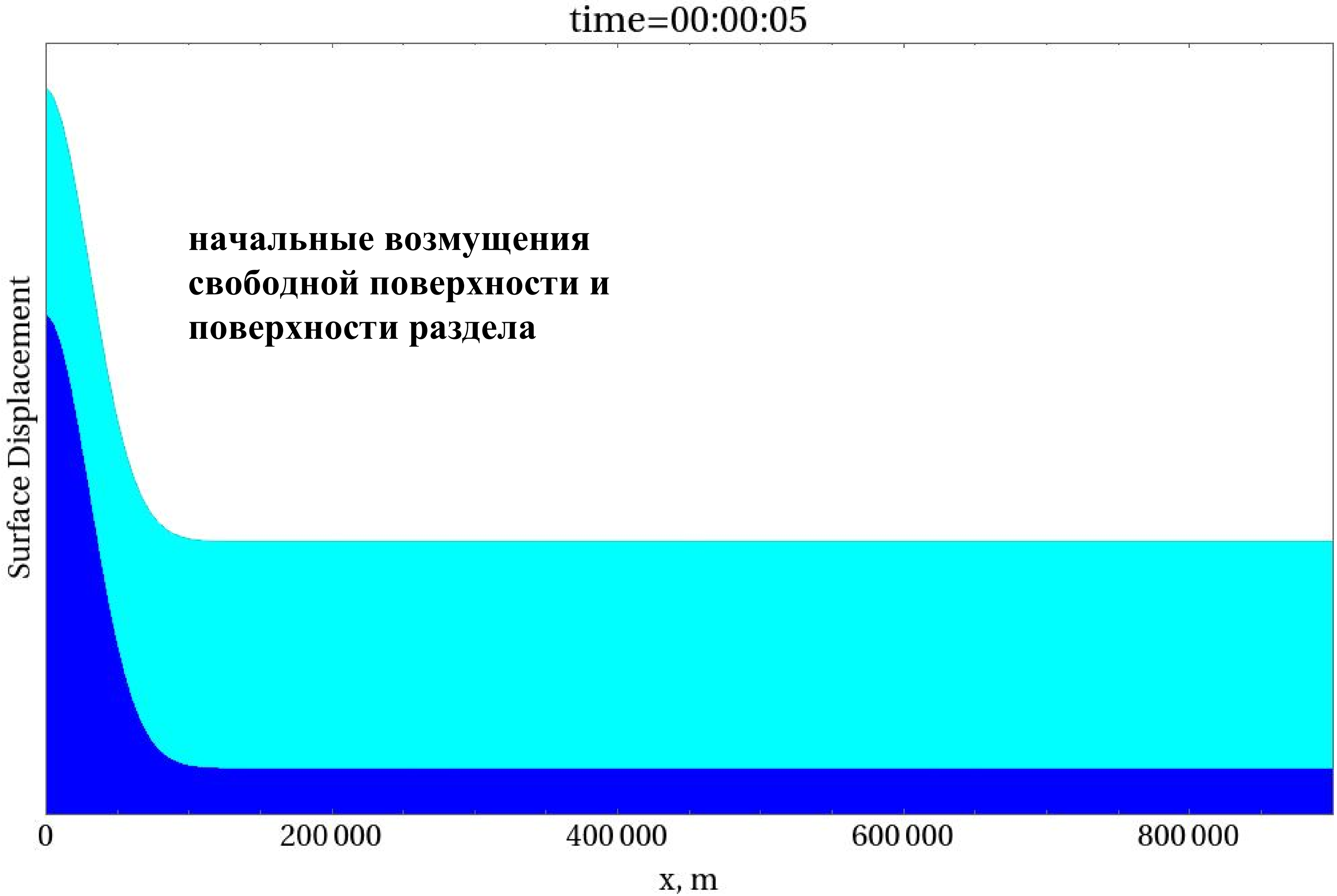
Оценка скоростей распространения поверхностных и внутренних волн

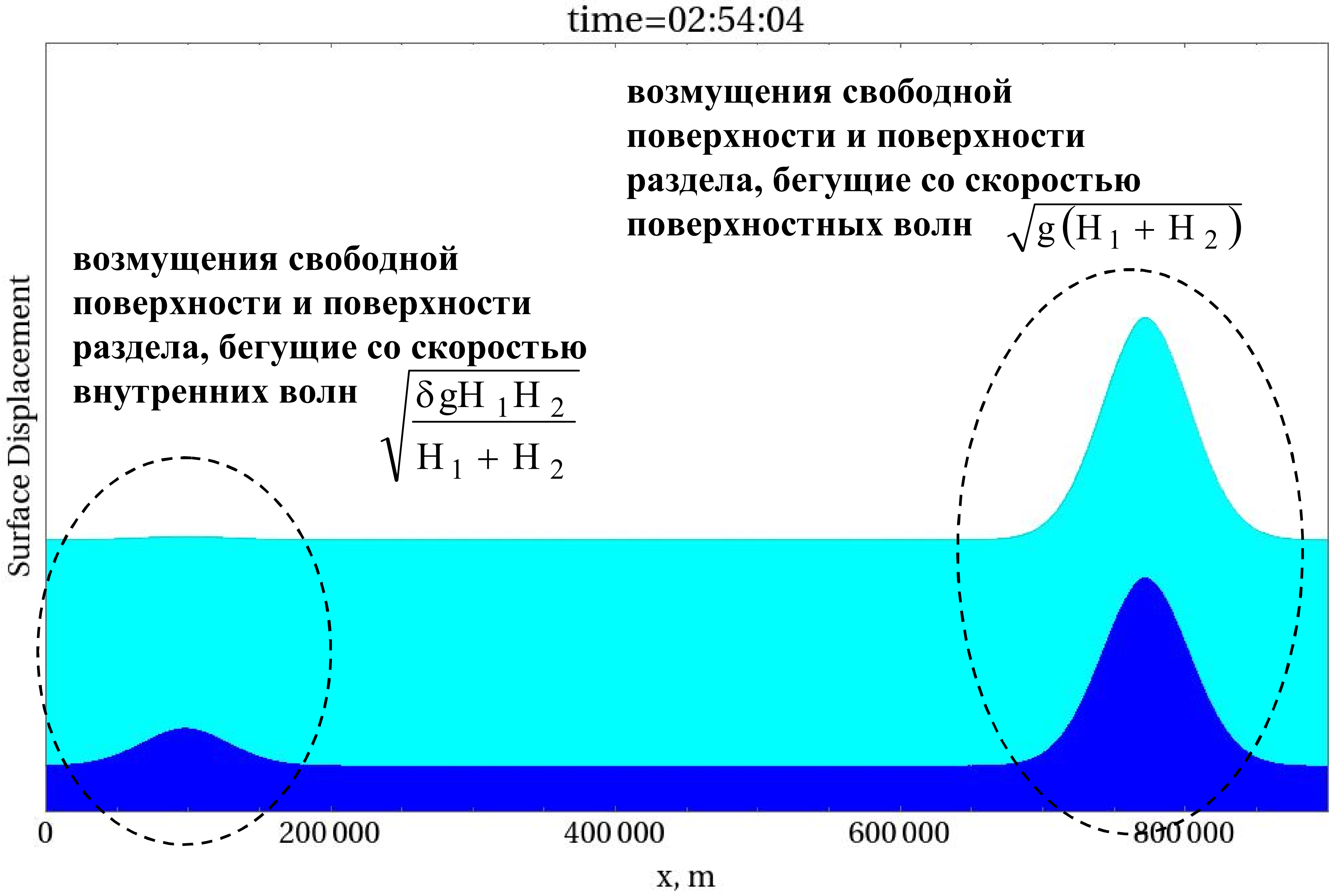
$$c_{\text{поверхн}} = \sqrt{g\left(H_1 + H_2\right)} \approx 200 \text{ м/с}$$

$$H_1 = 100 \text{ м} \qquad H_2 = 4000 \text{ м}$$

$$g = 9.8 \text{ м/с}^2 \qquad \delta = 0.003$$

$$c_{\text{внутр}} = \sqrt{\frac{\delta g H_1 H_2}{H_1 + H_2}} \approx 1.7 \text{ м/с}$$


time=00:00:05
начальные возмущения
свободной поверхности и
поверхности раздела
Surface Displacement
0
200 000
400 000
600 000
800 000
x, m


time=02:54:04
возмущения свободной
поверхности и поверхности
раздела, бегущие со скоростью
поверхностных волн $\sqrt{g\left(H_1 + H_2\right)}$
возмущения свободной
поверхности и поверхности
раздела, бегущие со скоростью
внутренних волн $\sqrt{\frac{\delta g H_1 H_2}{H_1 + H_2}}$
Surface Displacement
0
200 000
400 000
600 000
800 000
x, m

Сейши (*фр. seiche*) **- стоячие волны, возникающие в замкнутых или частично замкнутых водоёмах.**

Причины возникновения:

- метеорологические эффекты (ветер, колебания атмосферного давления);
- сейсмическая активность;
- оползни и обвалы;
- и др.

Период сейшевых колебаний в узком водоеме (формула Мериана)

$$T = \frac{2L}{\sqrt{gH}}$$

L – *длина водоема*

H – *глубина*

одноузловая сейша

$$\lambda / 2 = L$$

$$\underbrace{T\sqrt{gH}}_{\lambda} / 2 = L$$

многоузловая сейша

$$n \cdot \lambda / 2 = L$$

$$n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$T_n = \frac{2L}{n \cdot \sqrt{gH}}$$

Период внутренних сейш в узком водоеме (формула Ватсона)

$$n \cdot \lambda / 2 = L$$

$$n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$T_n = \frac{2L}{n \cdot c_{внутр}}$$

$$c_{внутр} = \sqrt{\frac{\delta g H_1 H_2}{H_1 + H_2}}$$

$$\delta \equiv \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$$

Граничные условия на непроницаемых стенках (1D)

$$x = 0, L: \quad u = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad \to \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gH\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = gH\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\xi(x,t) = A_n \cos\frac{\pi n x}{L}\sin\omega t$$

$$n = 1,2,3\ldots$$

$$u(x,t) = B_n \sin\frac{\pi n x}{L}\sin\omega t$$

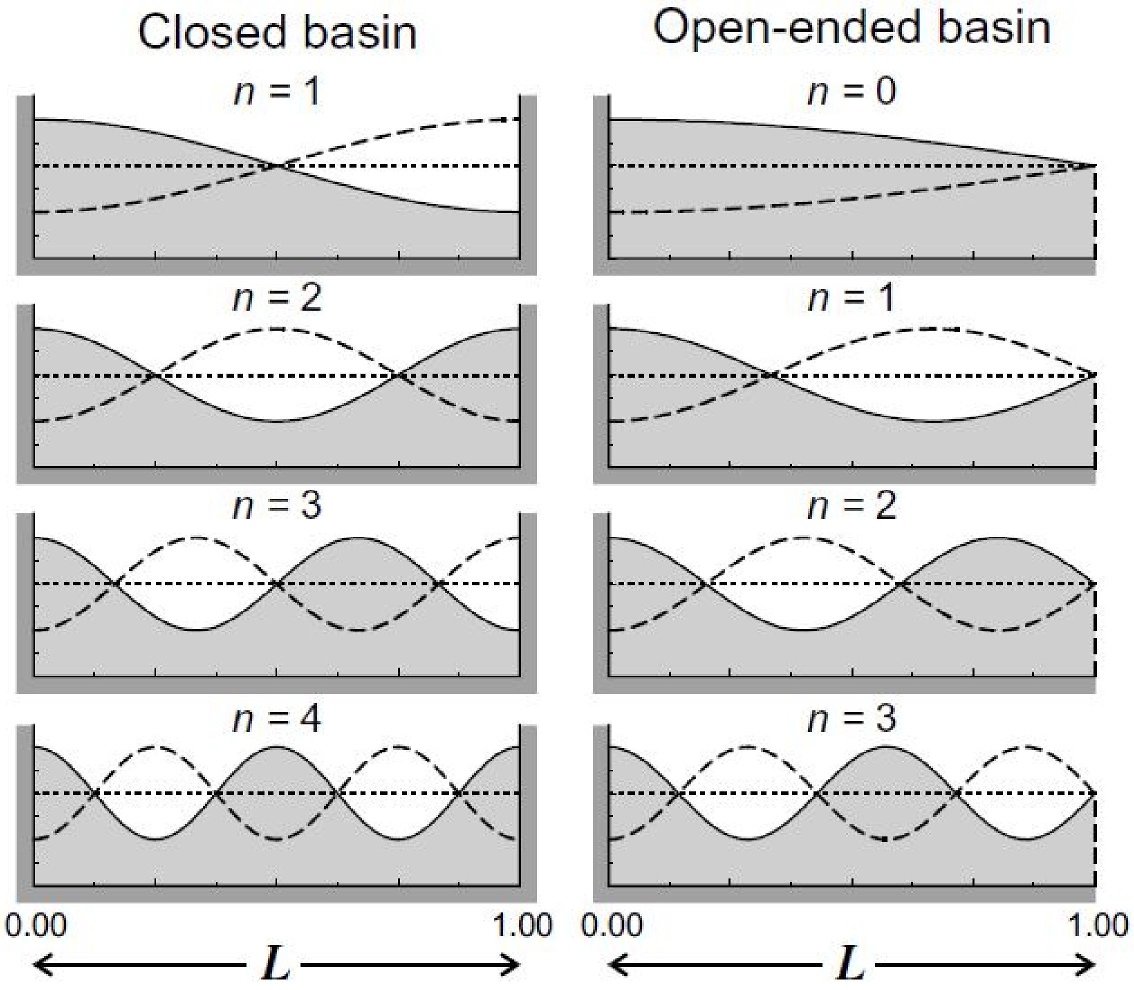
Открытые и закрытые узкие бассейны

$$T_n = \frac{2L}{n \cdot \sqrt{gH}}$$

$n = 1,2,3\ldots$

$$T_n = \frac{4L}{(2n+1) \cdot \sqrt{gH}}$$

$n = 0,1,2,3\ldots$



Мода Гельмгольца

$n = 0$

$$T_0 = \frac{4L}{\sqrt{gH}}$$

Граничные условия на непроницаемых стенках (1D)

$$x = 0, L: \quad u = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad \to \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

Граничные условия на непроницаемых стенках (2D)

$$(x, y) \in \Gamma: \quad (\vec{v}, \vec{n}) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -g\vec{\nabla}\xi \quad \Big| \times \vec{n}$$

$$\to \frac{\partial \xi}{\partial \vec{n}} = 0$$

Прямоугольный бассейн (длины L, ширины W и глубины H)

$$\xi(x, y, t) = A_{mn} \cos\frac{\pi m x}{L} \cos\frac{\pi n y}{W} \sin \omega t$$

$$m = 0,1,2,3\ldots \qquad n = 0,1,2,3\ldots$$

$$|k_{mn}| = \left(\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{W}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{gH} \quad \rightarrow \quad \frac{2\pi}{T \cdot k} = \sqrt{gH}$$

$$T_{mn} = \frac{2}{\sqrt{gH}}\left(\left(\frac{m}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{W}\right)^2\right)^{-1/2}$$