# Введение в физику гидросферы

## 2025 Лекция №9

Носов Михаил Александрович

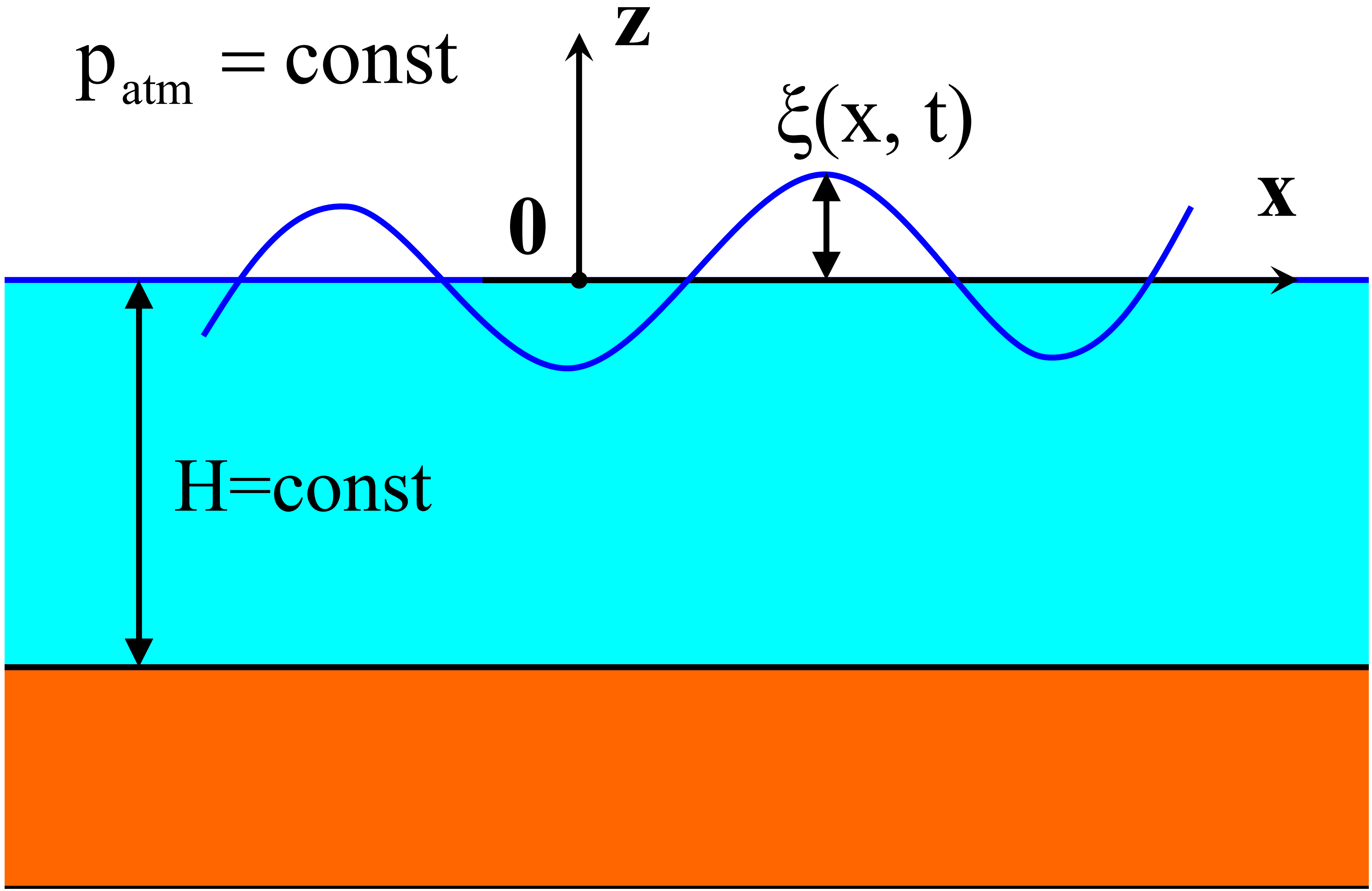
*кафедра физики моря и вод суши*

*отделение геофизики*

*физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова*

# Элементы линейной потенциальной теории волн

# Постановка 2D задачи (0xz)



# Система уравнений для описания линейных гравитационных волн (ЛГВ)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \mathrm{div}\left(\vec{v}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} \equiv \left(u, w\right)$$

**Граничные условия:**

**поверхность “вода-воздух”**

$$p = p_{атм} = const$$

$$\partial\xi / \partial t = w$$

**поверхность дна**

$$w = 0$$

# Потенциал скорости течения

$$\vec{v} = \vec{\nabla} F + \cancel{\vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

**или**

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad w = \frac{\partial F}{\partial z}$$

течение безвихревое

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{div}(\vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta F = 0}$$

основное уравнение потенциальной теории

$$G = -gz$$

гравитационный потенциал

$$\vec{g} = \vec{\nabla} G$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t)$$

произвольная фукция времени

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{p}{\rho}+gz=f(t)$$

используем для постановки граничного условия на свободной поверхности воды

$$\boxed{z=\xi:\quad p=p_{atm}=\mathrm{const}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{p_{atm}}{\rho}+g\xi=f(t)$$

**Переопределим потенциал, добавив к нему функцию времени, компенсирующую $f(t)-p_{atm}/\rho$. На поле скорости это не повлияет.**

$$\frac{\partial F}{\partial t}+g\xi=0\ \Big|\ \frac{\partial}{\partial t} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+g\frac{\partial\xi}{\partial t}=0$$

**граничное условие сносим с возмущенной поверхности на невозмущенную**

$$z=0:\quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+gw=0 \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+g\frac{\partial F}{\partial z}=0}$$

# Математическая постановка 2D задачи о линейных гравитационных волнах бесконечно малой амплитуды

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta F = 0$$

$$z = 0: \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$z = -H: \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

## Общий вид решения уравнения Лапласа

$$F = \left[A \cdot \mathrm{sh}(kz) + B \cdot \mathrm{ch}(kz)\right] \cos(\omega t - k x)$$

## Решение, удовлетворяющее граничному условию на поверхности

$$F = A\left[\mathrm{sh}(kz) + \frac{gk}{\omega^2}\mathrm{ch}(kz)\right]\cos(\omega t - k x)$$

## Удовлетворяя граничному усл $\boxed{\mathrm{th}(kH)}$ дне, получаем

$$\mathrm{ch}(kH) - \frac{gk}{\omega^2}\mathrm{sh}(kH) = 0 \qquad \omega^2 = gk\frac{\mathrm{sh}(kH)}{\mathrm{ch}(kH)}$$

# Дисперсионное соотношение для поверхностных гравитационных волн

$$\boxed{\omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kH)}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad c = \lambda / T \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Downarrow$$

$$c = \omega / k$$

циклическая частота

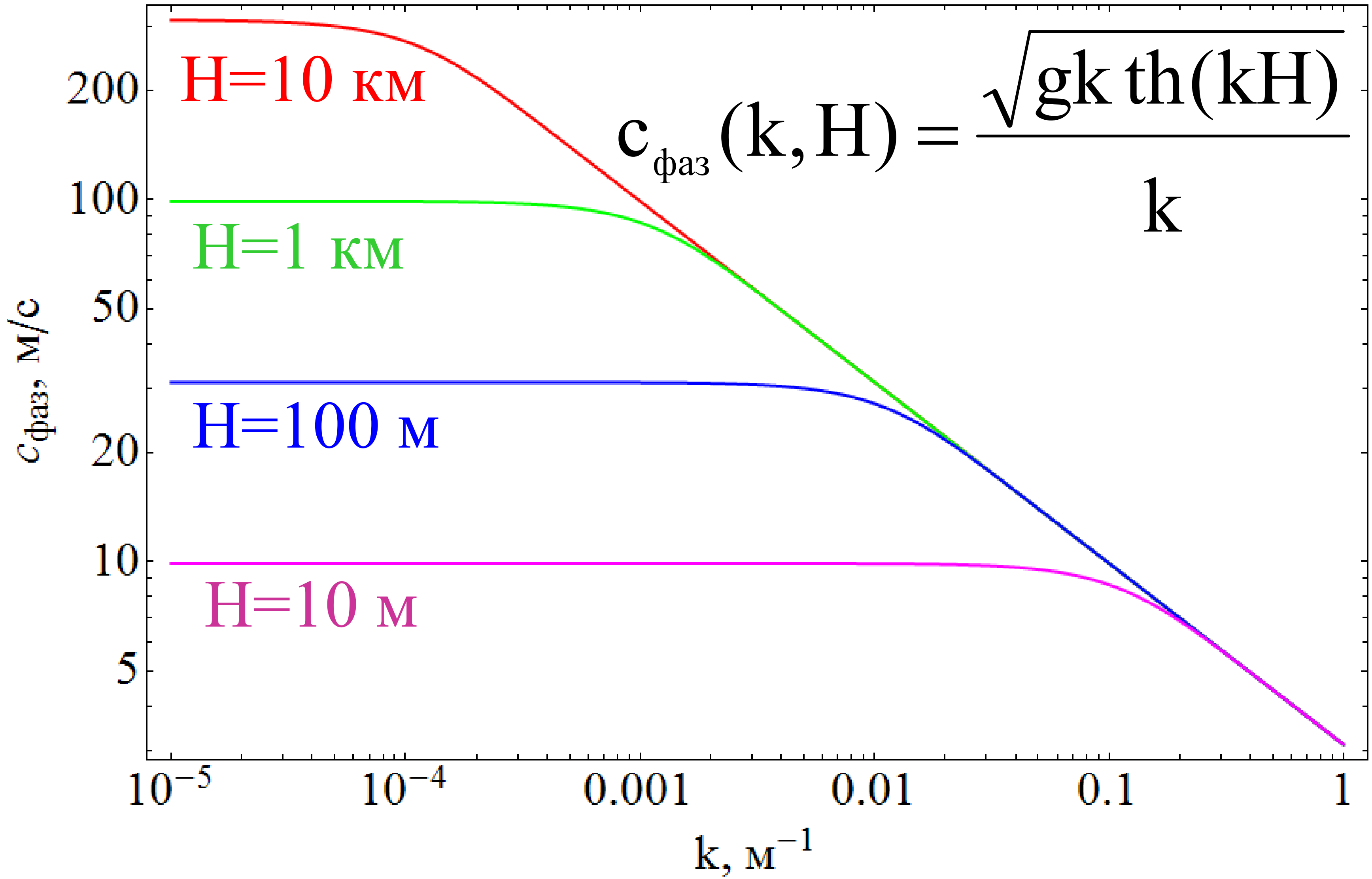
волновое число

# Фазовая скорость гравитационных волн

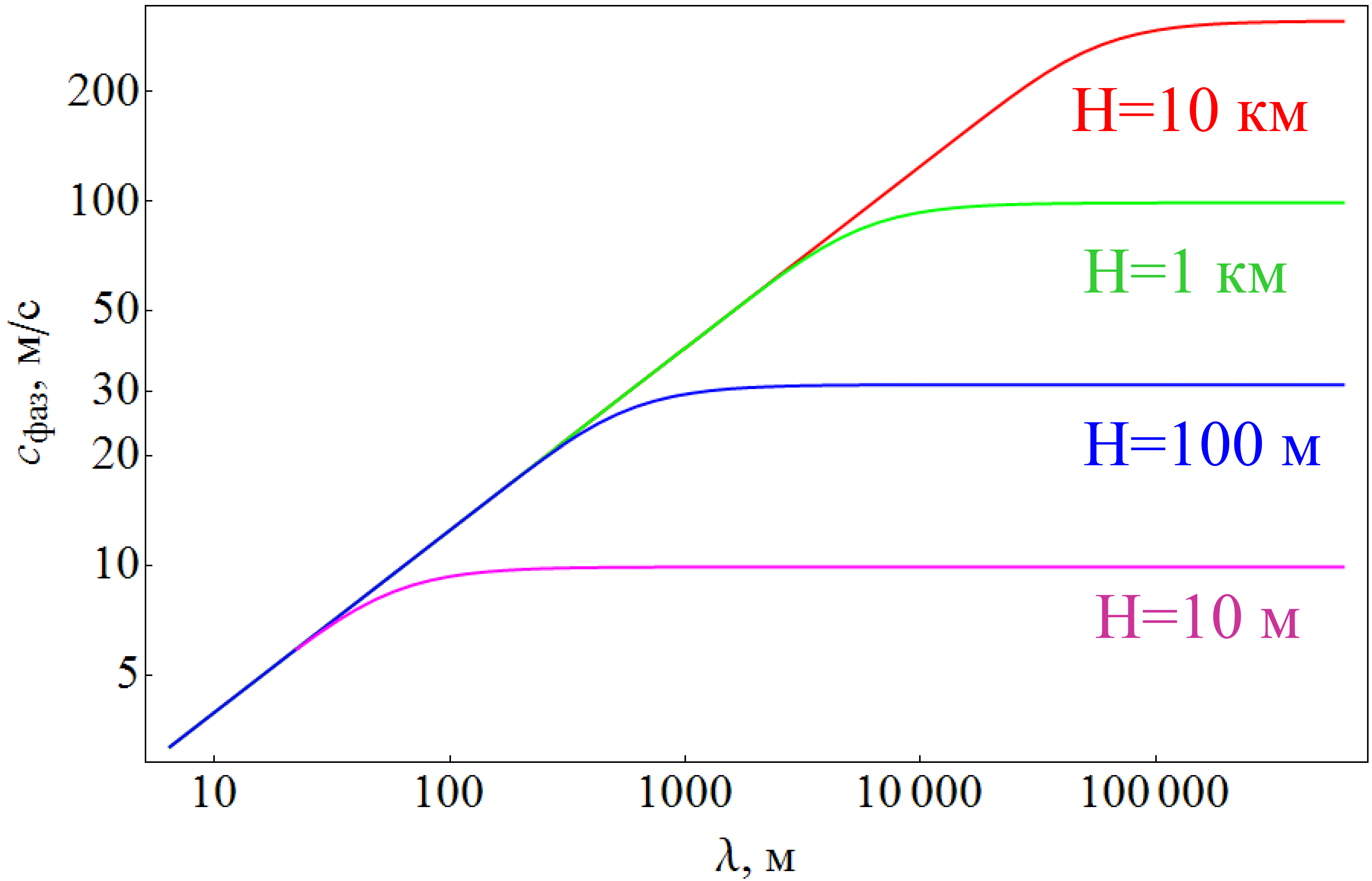
$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{gk\,\mathrm{th}(kH)}}{k}$$

$$\boxed{\omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kH)}$$

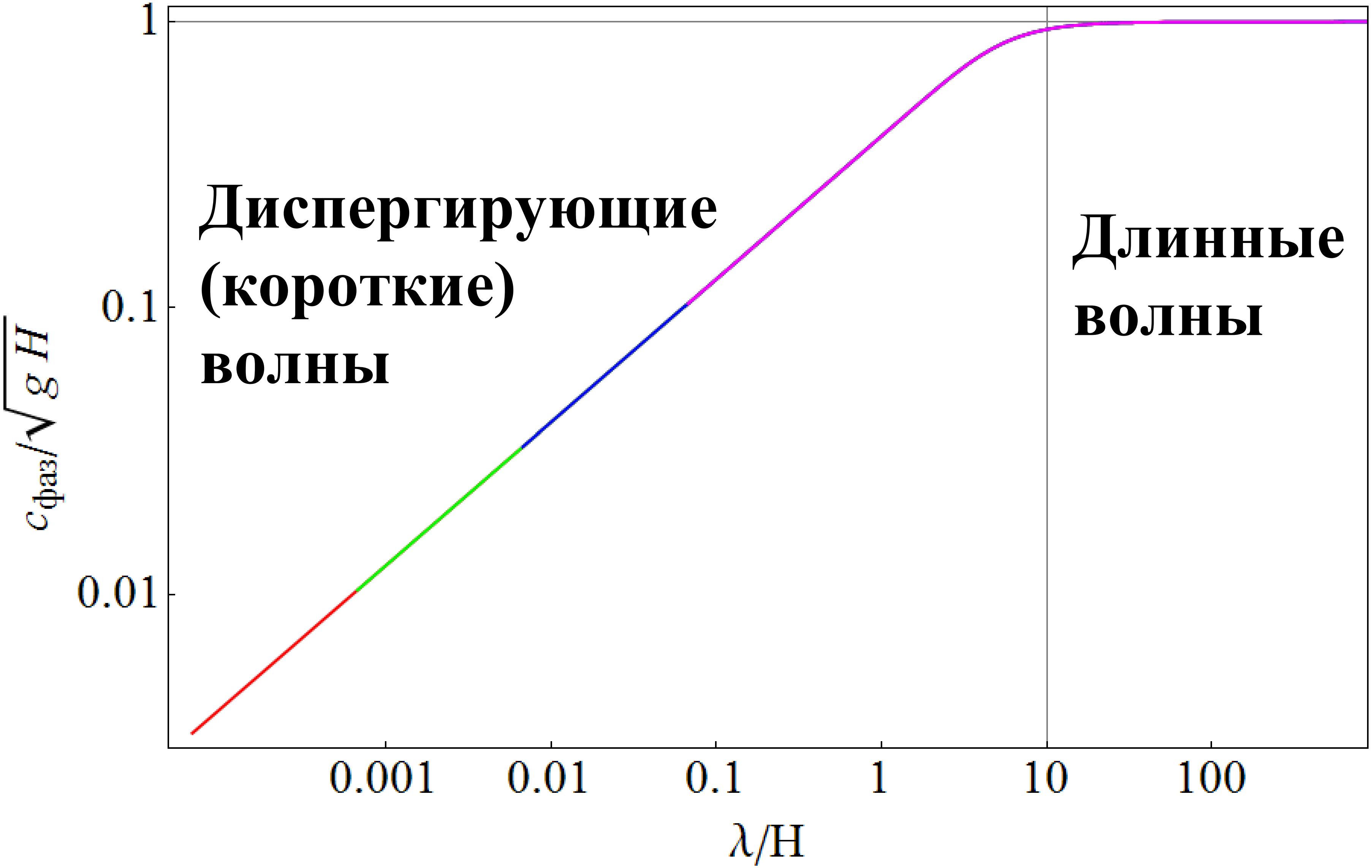
# Фазовая скорость как функция волнового числа и глубины



# Фазовая скорость как функция длины волны и глубины

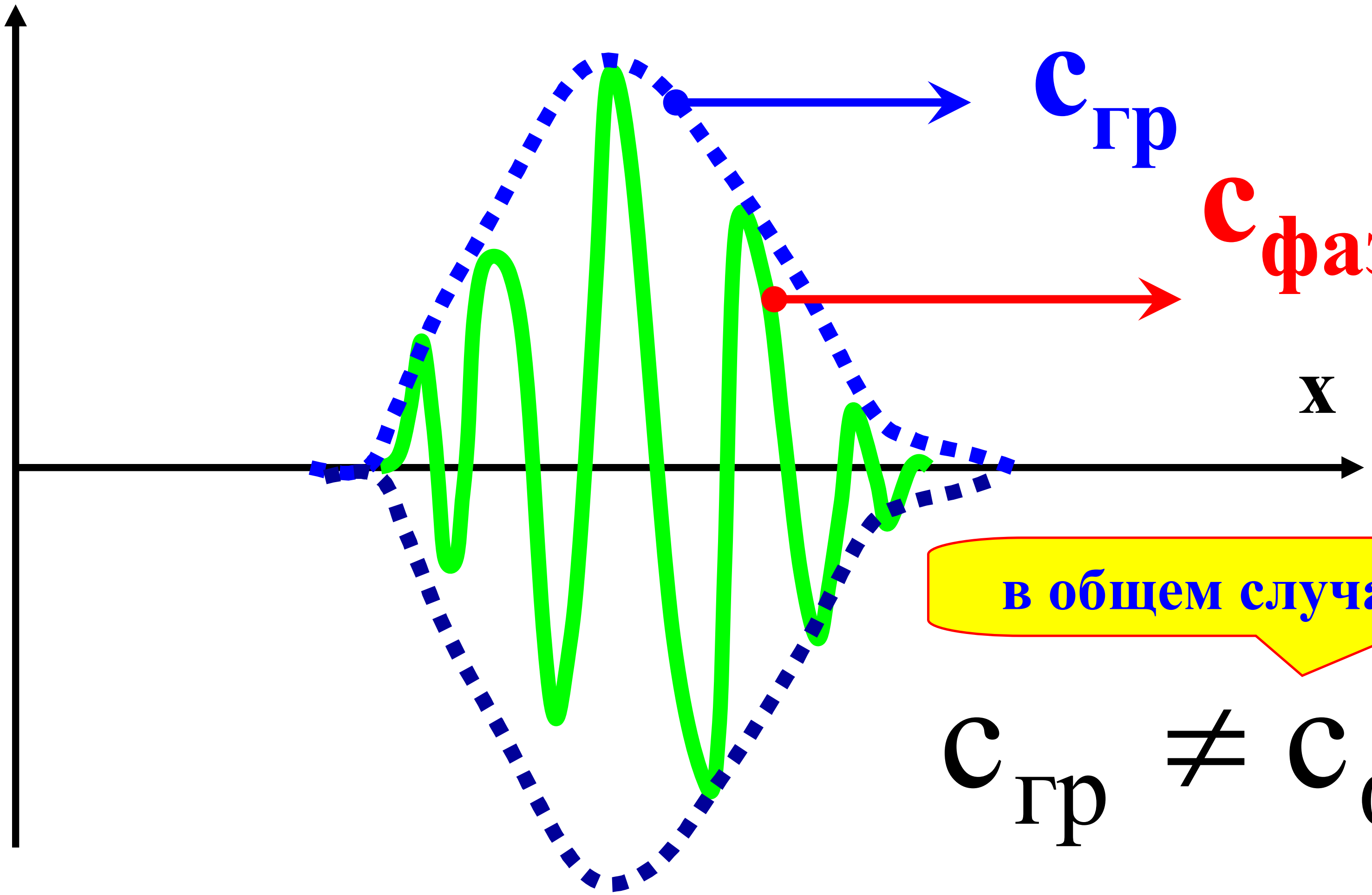


# Нормированная фазовая скорость как функция отношения длины волны к глубине



# Фазовая и групповая скорости волн

энергия переносится группами волн,
т.е. с групповой скоростью




в общем случае

$$c_{гр} \neq c_{фаз}$$

$$\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \times$$

$$\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_1} << 1$$

$$\Rightarrow \frac{|k_1 - k_2|}{k_1} << 1$$

$$\times \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) =$$

$$= 2\cos\left(k\left[\frac{\omega}{k} t - x\right]\right)\cos\left(\frac{\Delta k}{2}\left[\frac{\Delta\omega}{\Delta k} t - x\right]\right)$$

$c_{фаз}$ $c_{гр}$

$$c_{фаз} = \frac{\omega}{k} \qquad\qquad c_{гр} = \frac{d\omega}{dk}$$

**Недиспергирующие волны**

$$\omega = c_{фаз} k, \quad c_{фаз} \neq f(k)$$

$$c_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = c_{фаз}$$

**Диспергирующие волны**

$$c_{гр} \neq c_{фаз}$$

$$c_{фаз} = \frac{\omega}{k} \qquad c_{гр} = \frac{d\omega}{dk}$$

**Диспергирующие волны**

$$c_{фаз} = \frac{\sqrt{gk\,\mathrm{th}(kH)}}{k}$$

$$c_{гр} = \frac{g\left(kH/\mathrm{ch}^2(kH) + \mathrm{th}(kH)\right)}{2\sqrt{gk\,\mathrm{th}(kH)}}$$

# Дисперсионное соотношение для гравитационно-капиллярных волн

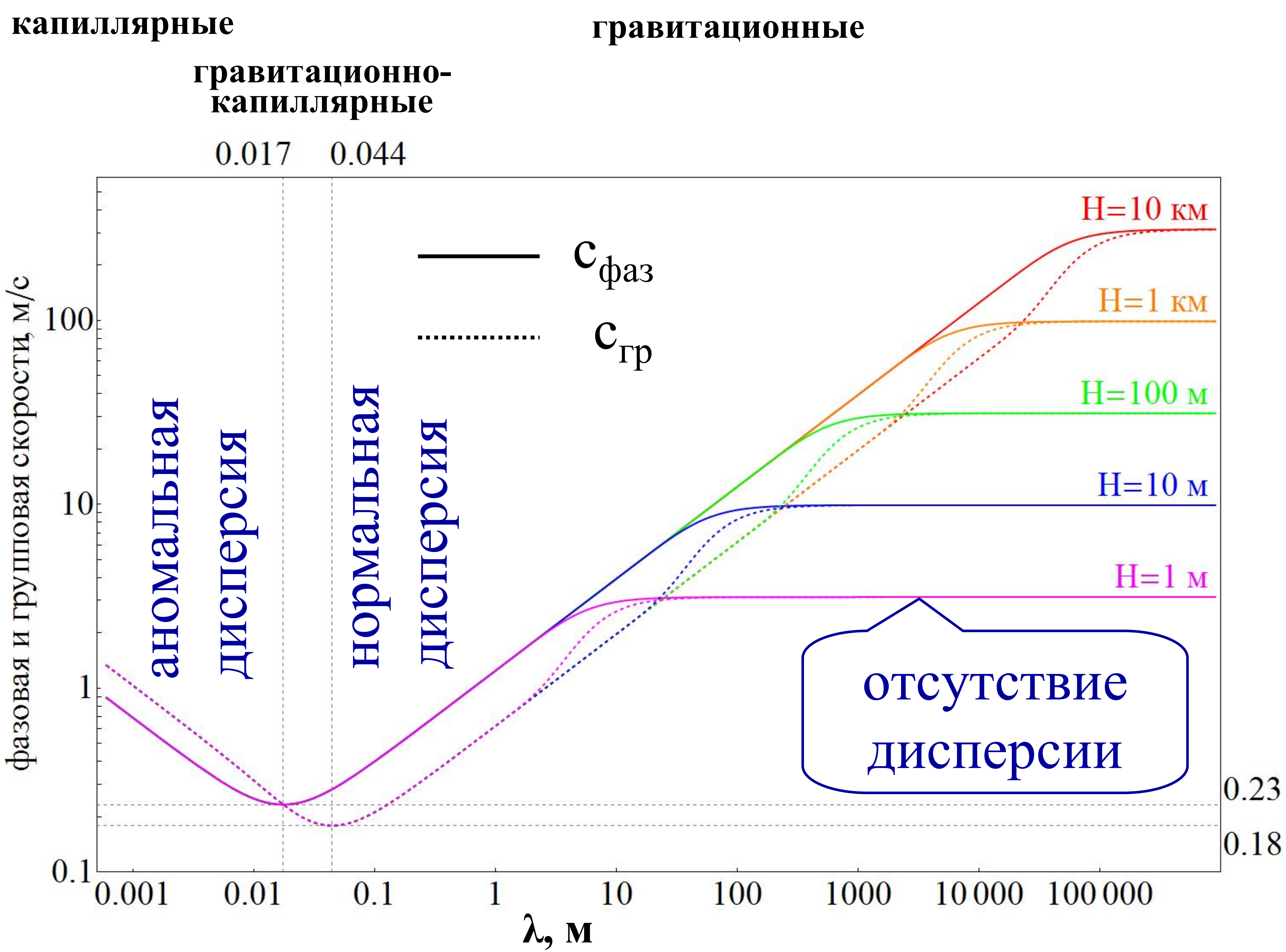
$$\omega^2 = \left( gk + \frac{\alpha}{\rho} k^3 \right) \mathrm{th}(kH)$$

$\alpha \approx 0.075$ Н / м

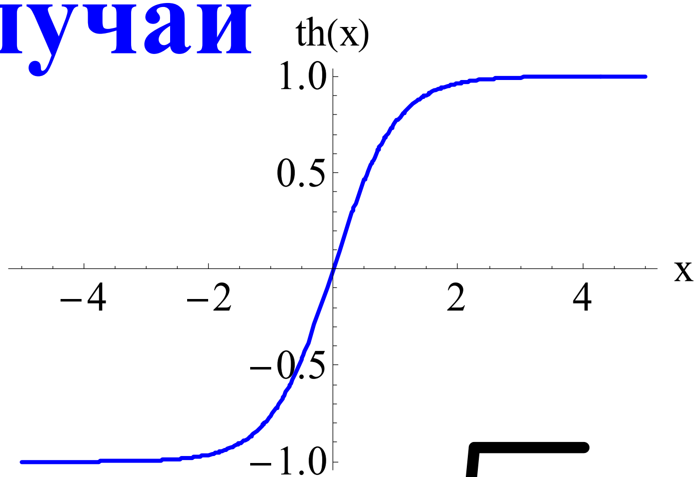
при $t = 20^\circ C$

$$p_1 - p_2 = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

**формула Лапласа**


капиллярные
гравитационные
гравитационно-капиллярные
0.017
0.044
H=10 км
H=1 км
H=100 м
H=10 м
H=1 м
$c_{фаз}$
$c_{гр}$
аномальная дисперсия
нормальная дисперсия
отсутствие дисперсии
фазовая и групповая скорости, м/с
100
10
1
0.1
0.23
0.18
0.001
0.01
0.1
1
10
100
1000
10 000
100 000
λ, м

# Предельные случаи




$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kH)$$

**«Глубокая вода» (kH>>1)**

$$\omega^2 = gk$$

$$c_{фаз} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$\omega = \sqrt{gk}$$

$$c_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$$

**Волны на «глубокой воде» подвержены дисперсии**

**групповая скорость меньше фазовой**

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

**объясняет явление «мертвая зыбь»**

$$\lambda = 1\,\text{м} \quad \Rightarrow \quad c \approx 1.3\,\text{м/с}$$

$$\lambda = 10\,\text{м} \quad \Rightarrow \quad c \approx 4\,\text{м/с}$$

$$\lambda = 100\,\text{м} \quad \Rightarrow \quad c \approx 13\,\text{м/с}$$

# Предельные случаи

$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kH)$$

**групповая скорость равна фазовой**

**«Мелкая вода» (kH<<1)**

$$\omega^2 = gHk^2$$

$$c_{фаз} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH}$$

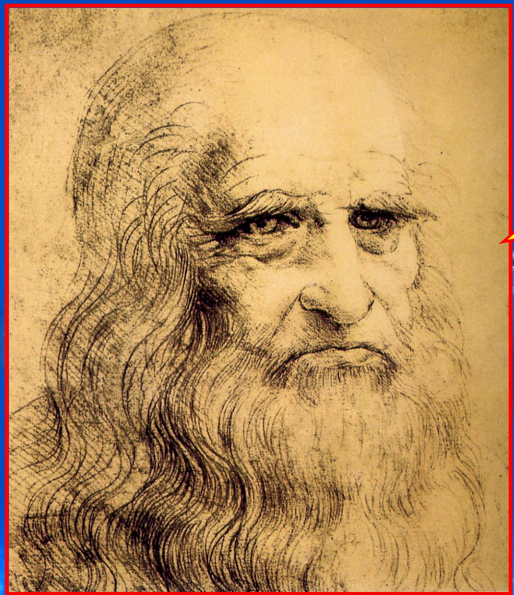
$$\omega = \sqrt{gH}\,k$$

$$c_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{gH}$$

**Волны на «мелкой воде» не подвержены дисперсии**

# Акустические волны

***«…погрузив трубу одним концом в воду и прижав другой ее конец к уху, можно услышать корабли, идущие вдали…»***



**Леонардо да Винчи**
**1452- 1519**

# Система уравнений для описания линейных волн без учета вращения Земли и сил вязкого трения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \end{cases}$$

Гравитационные волны

Акустические волны

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} \\ \dfrac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0 \end{cases}$$

$\vec{v}'$ **- малая величина**

$$\frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho_0} = \vec{g}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' \qquad \vec{v}_0 = 0$$

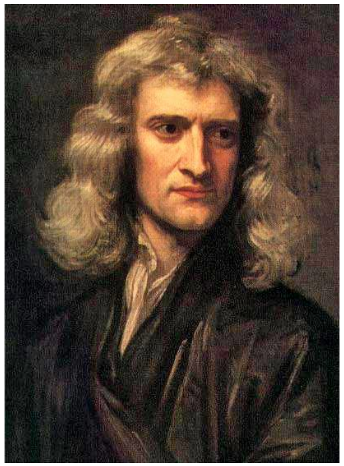
$$p = p_0 + p' \qquad |p'| << p_0$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \qquad |\rho'| << \rho_0$$

$$\cancel{\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T p'}$$

$$\cancel{\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{c_N^{\,2}}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} & \Big|\,\mathrm{div} \\[2ex] \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \,\mathrm{div}\, \vec{v}' = 0 & \Big|\,\dfrac{\partial}{\partial t} \end{cases}$$



**Sir Isaac Newton**

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s p'$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{c^2}$$

**Pierre-Simon Laplace**

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s p' \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \operatorname{div}(\vec{v}')}{\partial t} = -\dfrac{\Delta p'}{\rho_0} \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \rho_0 \dfrac{\partial \operatorname{div}(\vec{v}')}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{c^2}$$

**Волновое уравнение**

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \Delta p' = 0$$

**Скорость звука**

# Волновое уравнение (акустика)

$$\boxed{\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \Delta p' = 0}$$

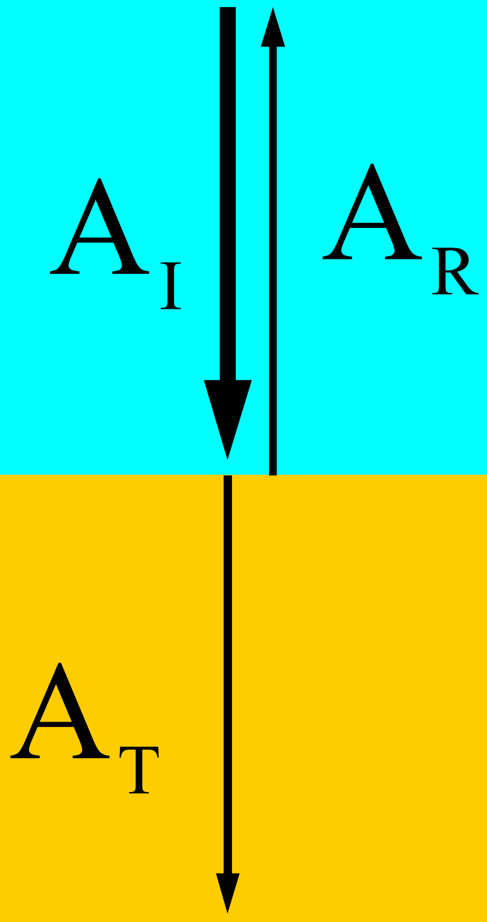
$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \overset{\text{воздух}}{\approx 340\ \text{м}/\text{с}}$$

$$\overset{\text{вода}}{\approx 1500\ \text{м}/\text{с}}$$

Скорость звука

# Граничные условия

$\rho c$ — акустическая жесткость




$$\rho_2 c_2 >> \rho_1 c_1 \Rightarrow R = 1$$

$$\rho_2 c_2 << \rho_1 c_1 \Rightarrow R = -1$$

$$R \equiv \frac{A_R}{A_I} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}$$

$$\rho_2 c_2 \approx \rho_1 c_1 \Rightarrow R \approx 0$$

# Граничные условия (1)

$\rho c$ — **акустическая жесткость**

$$\rho c = 1.26 \cdot 340 \approx 430\, кг/м^2 \cdot с$$ **воздух**

**отражение R= -1** $p' = 0$

$$\rho c = 1000 \cdot 1500 \approx 1.5 \cdot 10^6\, кг/м^2 \cdot с$$ **вода**

**отражение R=1** $w' = 0 \quad или \quad \partial p'/\partial z = 0$

$$\rho c = 3000 \cdot 4000 \approx 12 \cdot 10^6\, кг/м^2 \cdot с$$ **дно**

# Граничные условия (2)

$$\rho c = 1.26 \cdot 340 \approx 430 \, кг / м^2 \cdot c$$

**воздух**

**отражение R= -1**

$$p' = 0$$

$$\rho c = 1000 \cdot 1500 \approx 1.5 \cdot 10^6 \, кг / м^2 \cdot c$$

**вода**

**преломление R<1**

$$w_1 = w_2, \quad p_1 = p_2$$

$$\rho c = 3000 \cdot 4000 \approx 12 \cdot 10^6 \, кг / м^2 \cdot c$$

**дно**

# Скорость звука в воде

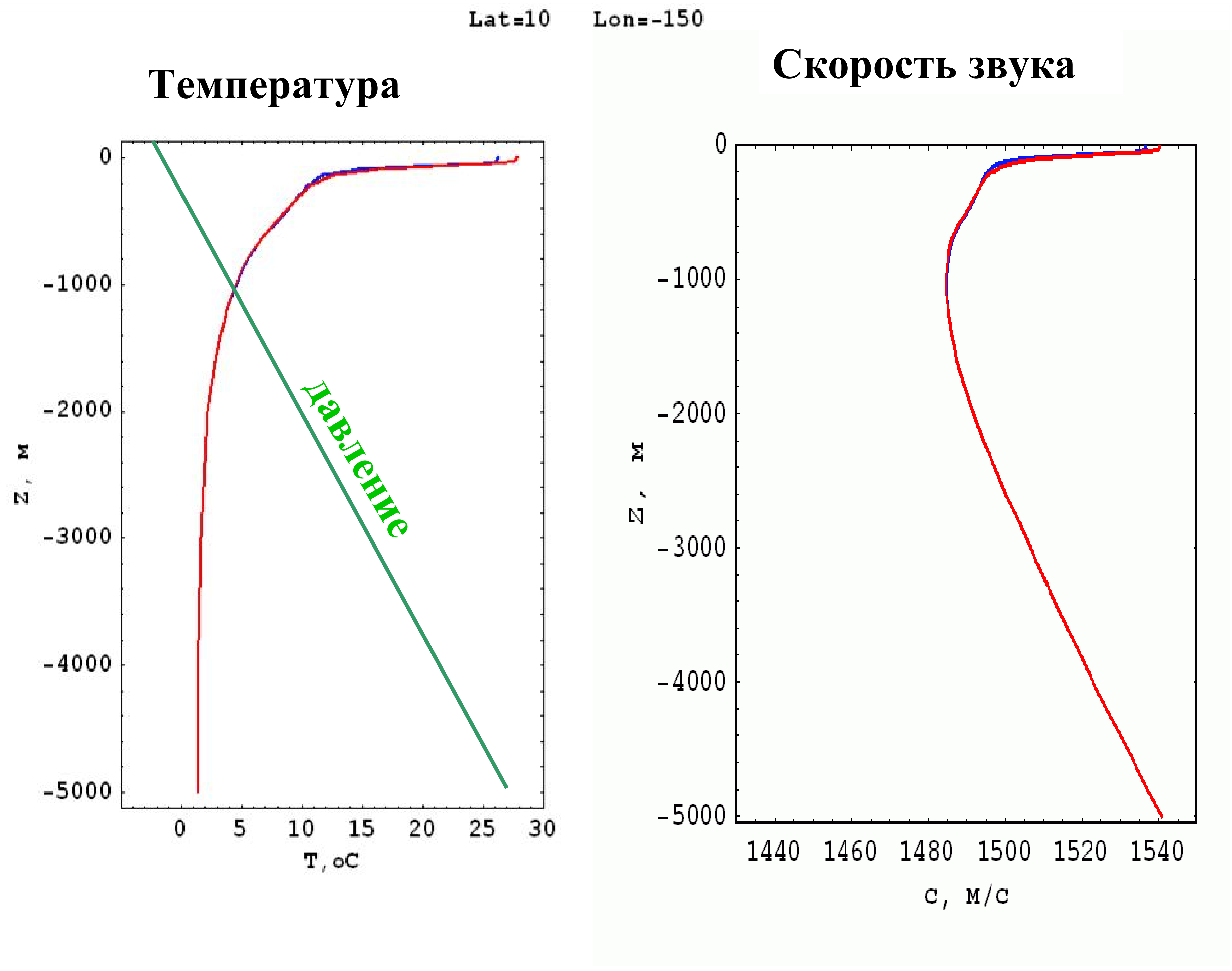
$$c = c(T, S, p)$$

**эмпирическая зависимость**

**TEOS-10**
**www.teos-10.org**

$$1480 < c < 1545 \text{ м/с}$$

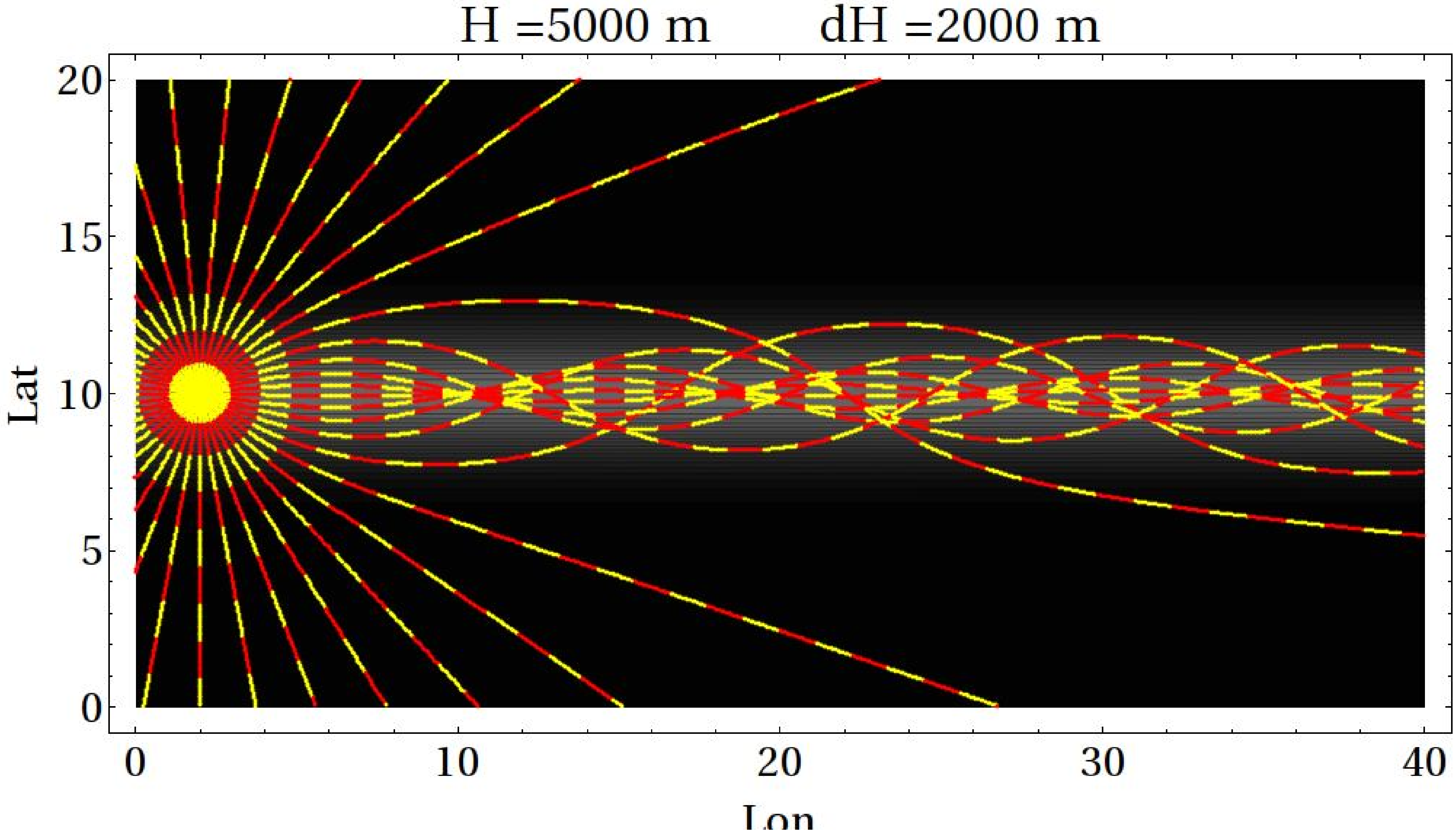
$$\frac{\partial c}{\partial T} > 0 \qquad \frac{\partial c}{\partial p} > 0$$



Lat=10 Lon=-150
Температура
0
-1000
-2000
-3000
-4000
-5000
Z, м
0 5 10 15 20 25 30
T, oC
давление
Скорость звука
0
-1000
-2000
-3000
-4000
-5000
Z, м
1440 1460 1480 1500 1520 1540
c, м/с

# Захват волн подводными хребтами

# т.е. областями с пониженной скоростью распространения длинных волн

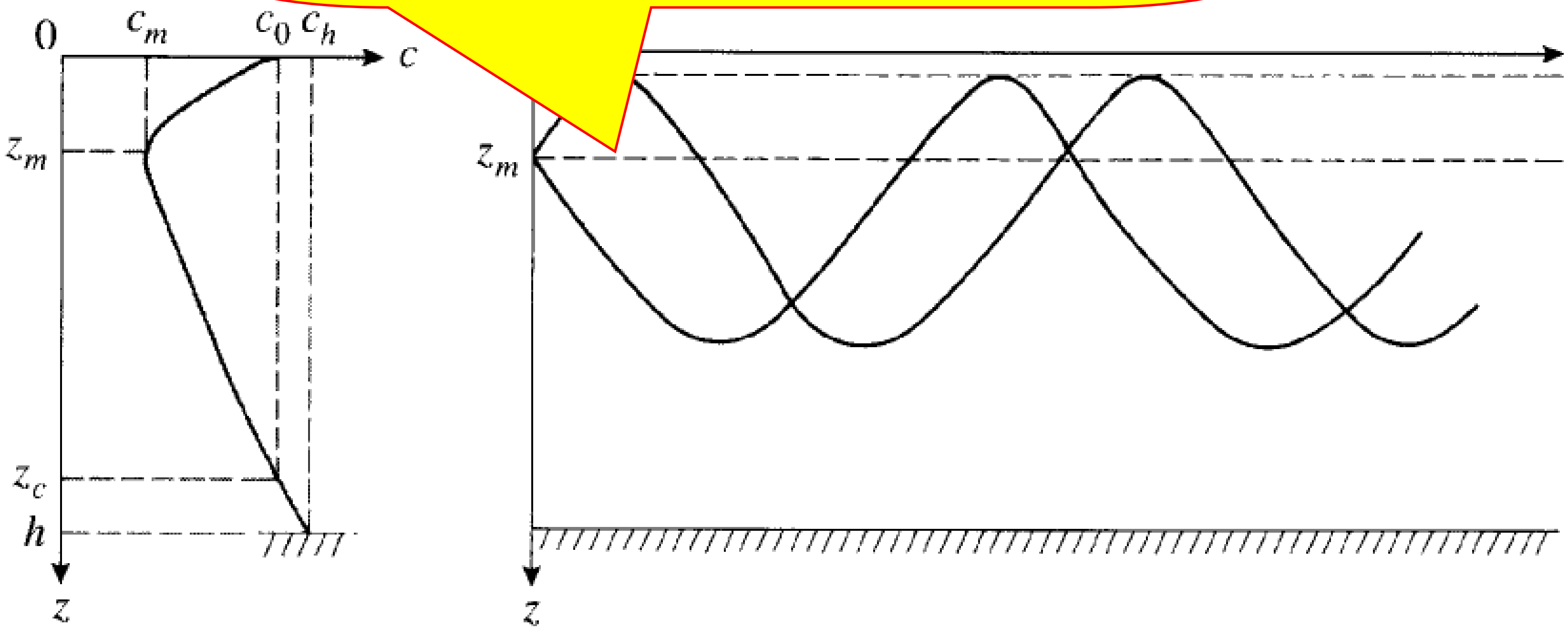


# Подводный звуковой канал (ПЗК)

**Deep Sound Channel**

**SOFAR Channel**
**(Sound Fixing and Ranging)**

**Ось ПЗК обычно лежит на глубине ~1000 м**

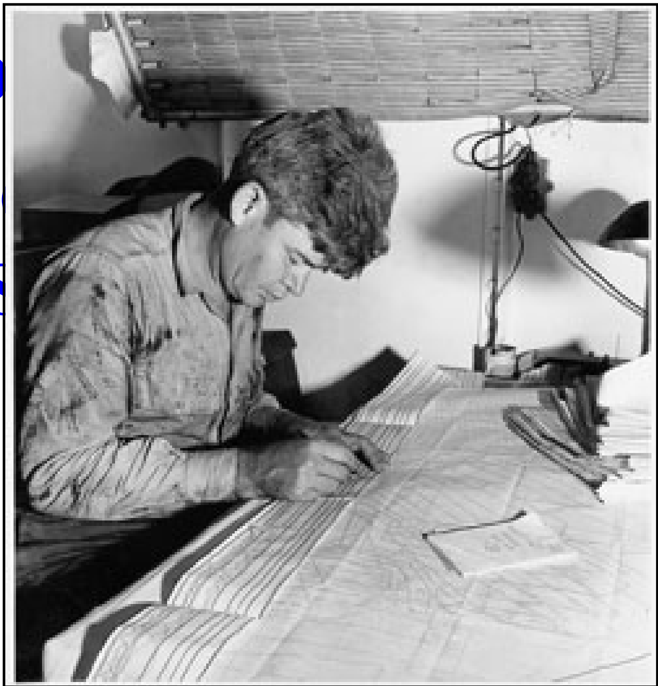


# Подводный звуковой канал (ПЗК)

D

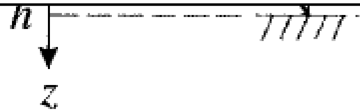
S

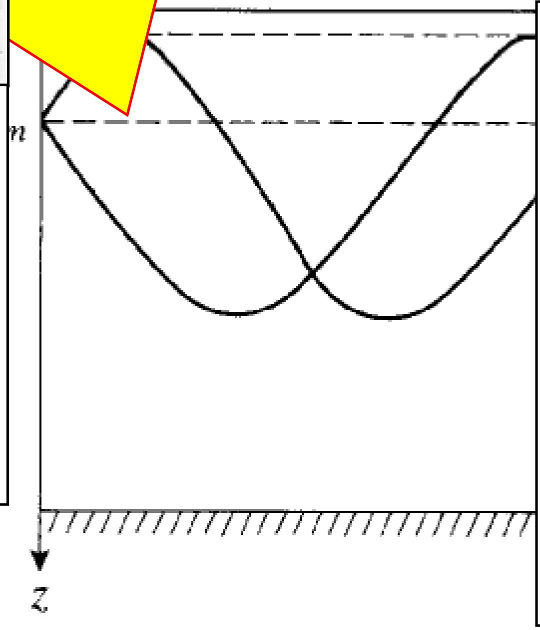
(S … nging)



William Maurice Ewing
1906 – 1974
american geophysicist and oceanographer

ПЗК обычно лежит на глубине ~1000 м




Леонид Максимович Бреховских
1917-2005
выдающийся учёный в области физики, акустики океана, академик АН СССР

# Прикладная гидроакустика

- **Акустический радар (сонар)**
- **Подводная связь (передача информации)**
- **Подводная навигация**
- **Наблюдения за погодой и климатом (регистрация шумов от ветра или осадков, акустическая термометрия)**
- **Измерение скорости течения (ADCP)**
- **…**