Введение в физику гидросферы

2024 Лекция №4

Носов Михаил Александрович

кафедра физики моря и вод суши

отделение геофизики

физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова

Элементы геофизической гидродинамики

Геофизическая гидродинамика – динамика бароклинной жидкости (газа) в поле силы тяжести на неравномерно прогретой, вращающейся сфере (геоиде)

Классическая гидродинамика

бароклинная жидкость

$$\rho = \rho(p, T, \ldots)$$

баротропная жидкость

$$\rho = \rho(p)$$

Gaspard-Gustave de Coriolis
French, Mathematics, Physics
1792-1843

$$F_{\text{Кор}} = 2m\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right]$$

Геофизическая гидродинамика – динамика бароклинной жидкости (газа) в поле силы тяжести на неравномерно прогретой, вращающейся сфере (геоиде)

Большинство крупномасштабных течений атмосферы и гидросферы происходят в условиях баланса сил:

по вертикали: **гидростатический баланс**

сила градиента давления = сила тяжести

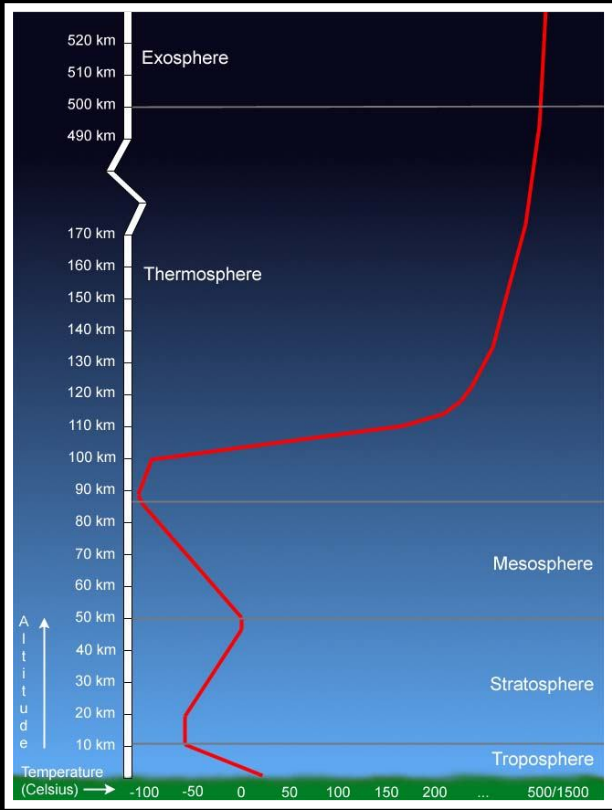
по горизонтали: **геострофический баланс**

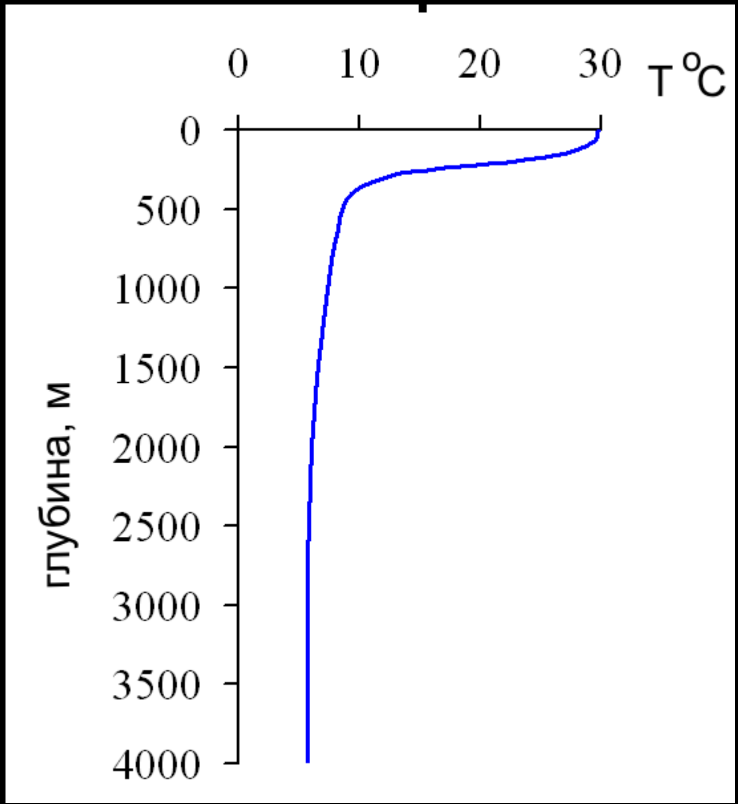
сила градиента давления = сила Кориолиса

Устойчивость стратификации

Стратификация –

(лат. stratum настил слой+ facere делать) распределение по вертикали слоев воды или воздуха с различной плотностью, температурой, соленостью, etc.





Геофизическая гидродинамика – динамика бароклинной жидкости (газа) в поле силы тяжести на неравномерно прогретой, вращающейся сфере (геоиде)

Большинство крупномасштабных течений атмосферы и гидросферы происходят в условиях баланса сил:

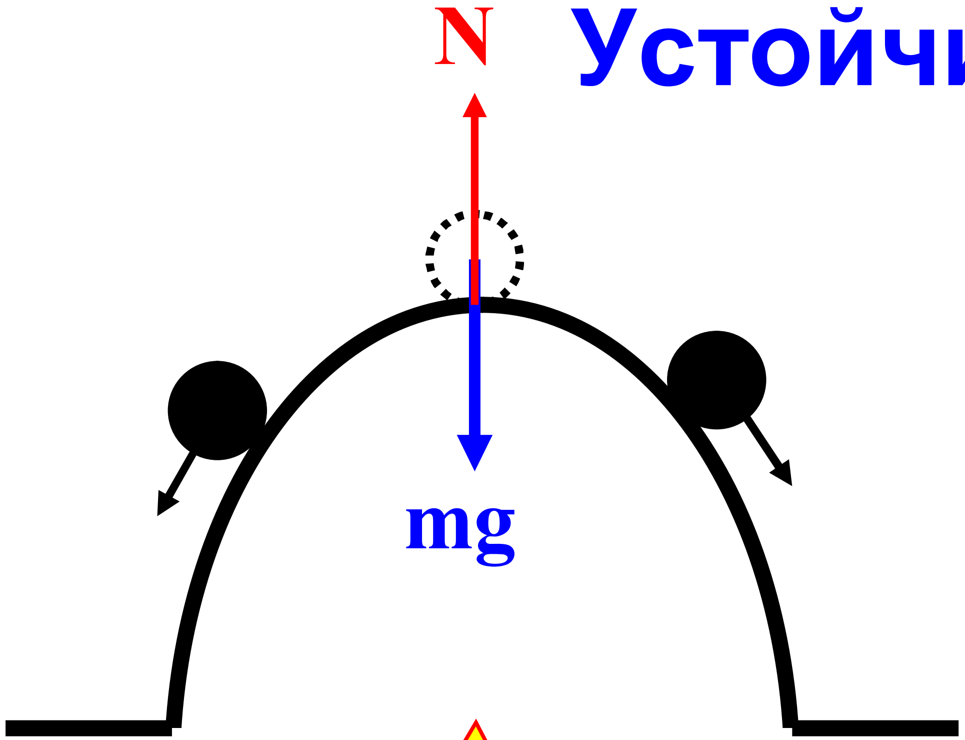
<u>по вертикали:</u> **гидростатический баланс**

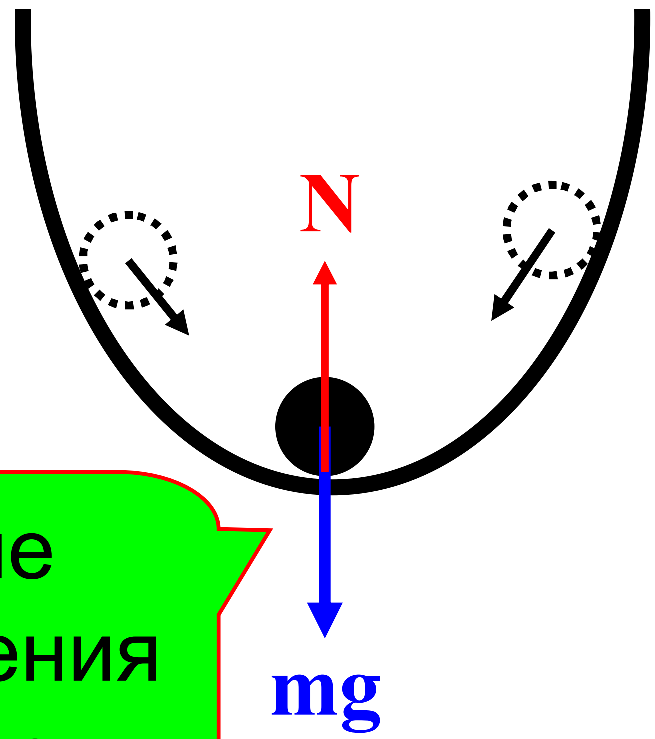
сила градиента давления = сила тяжести

<u>по горизонтали:</u> **геострофический баланс**

сила градиента давления = сила Кориолиса

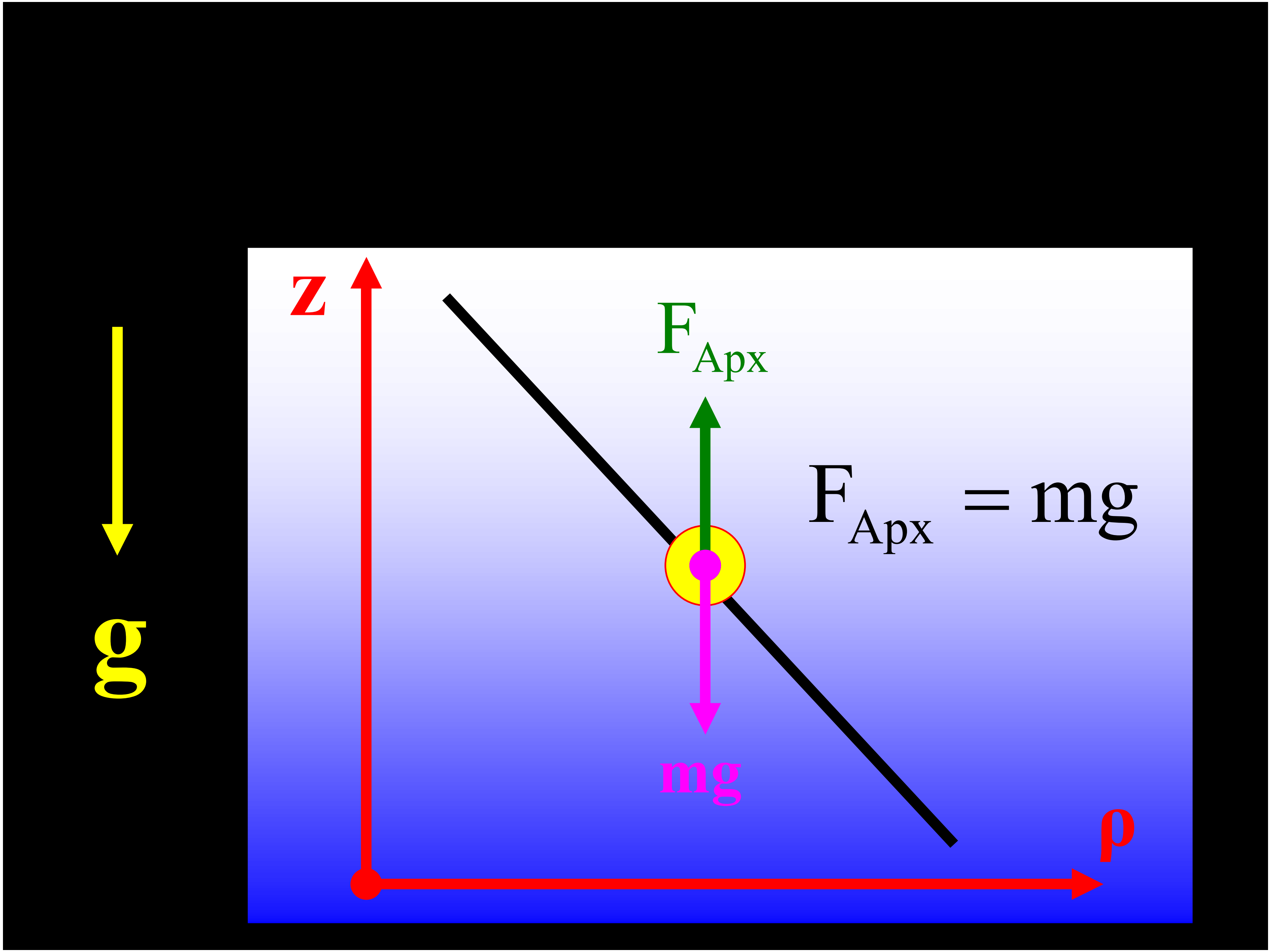
Устойчивость



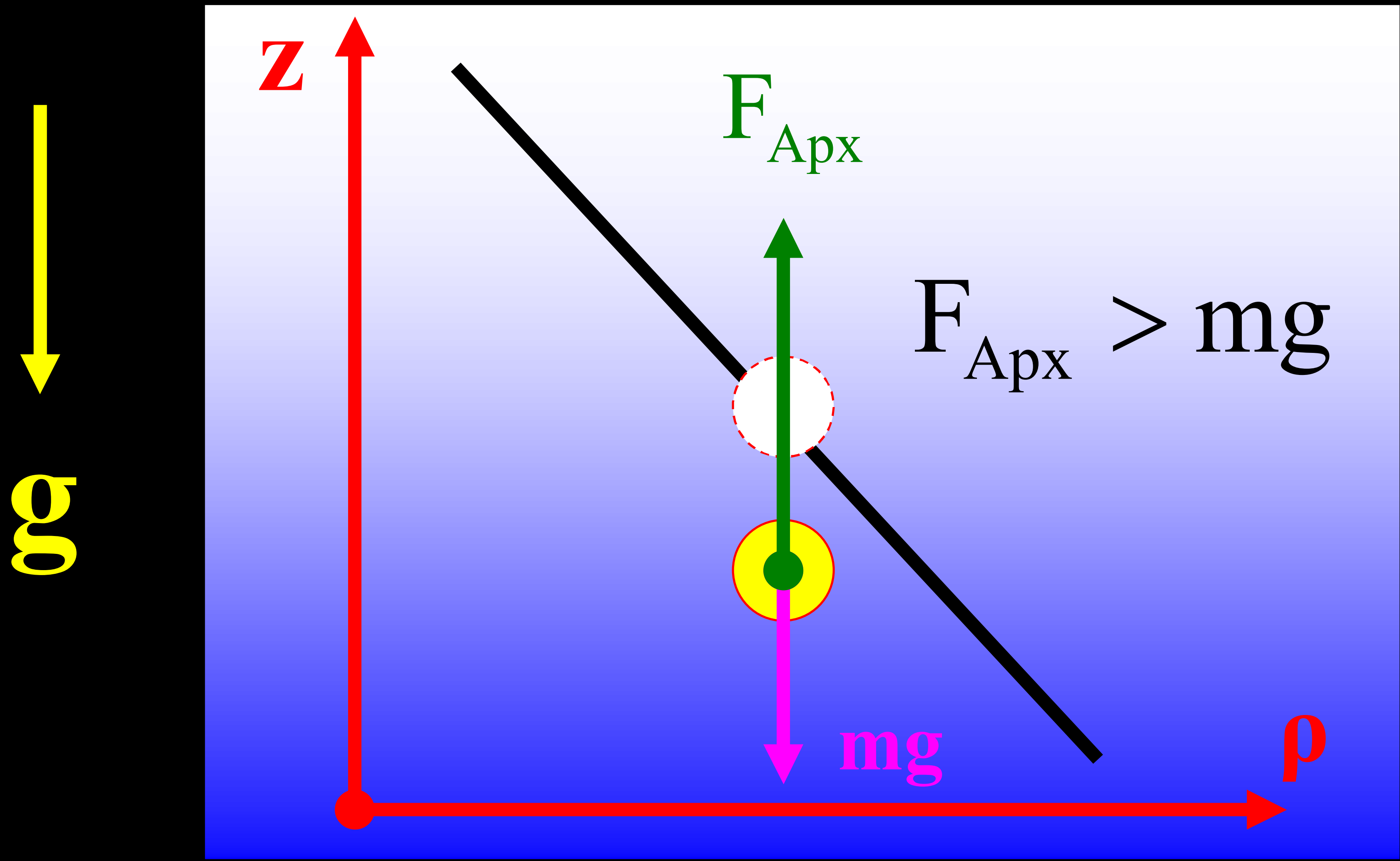


Малые возмущения нарастают со временем

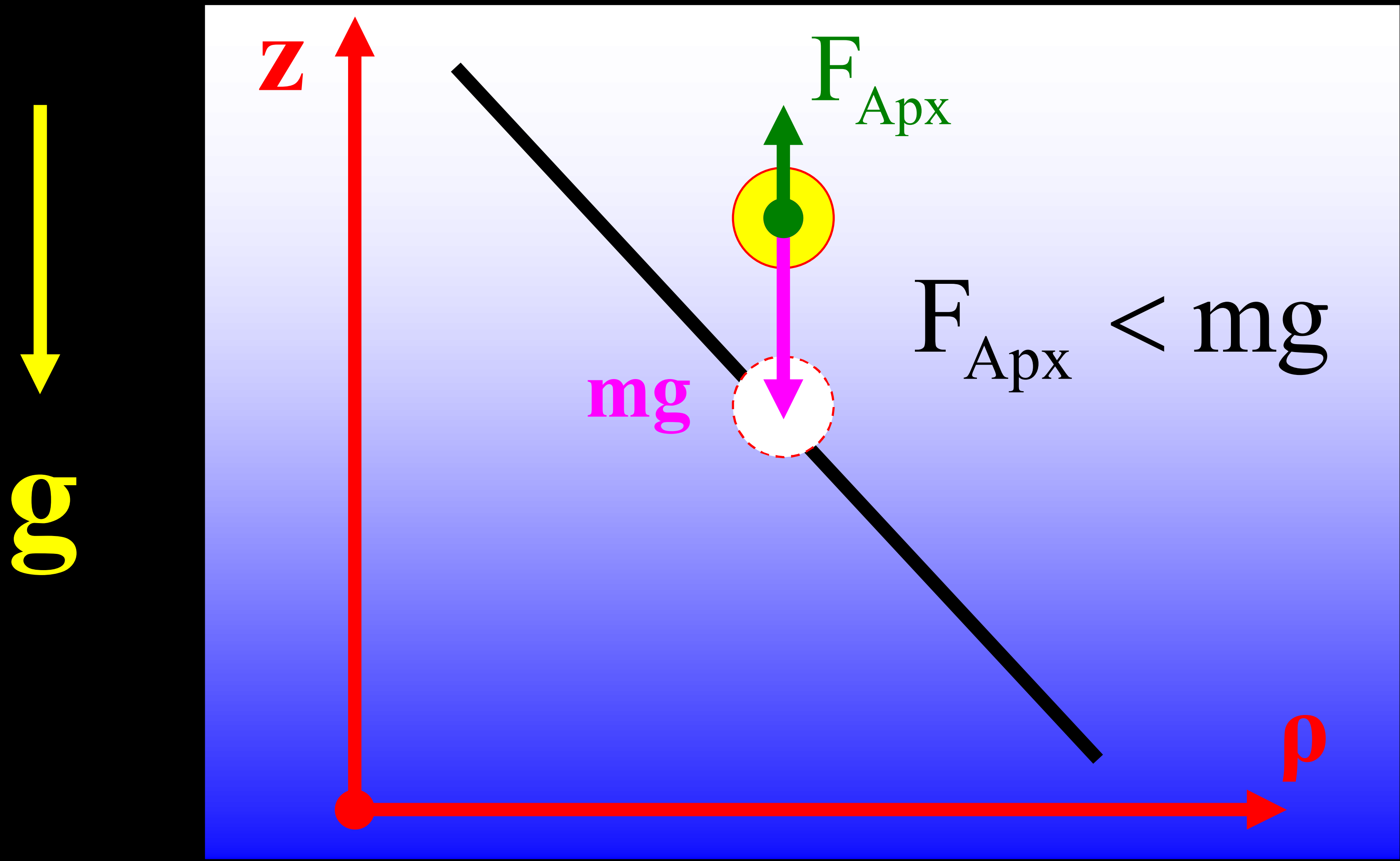
Малые возмущения затухают

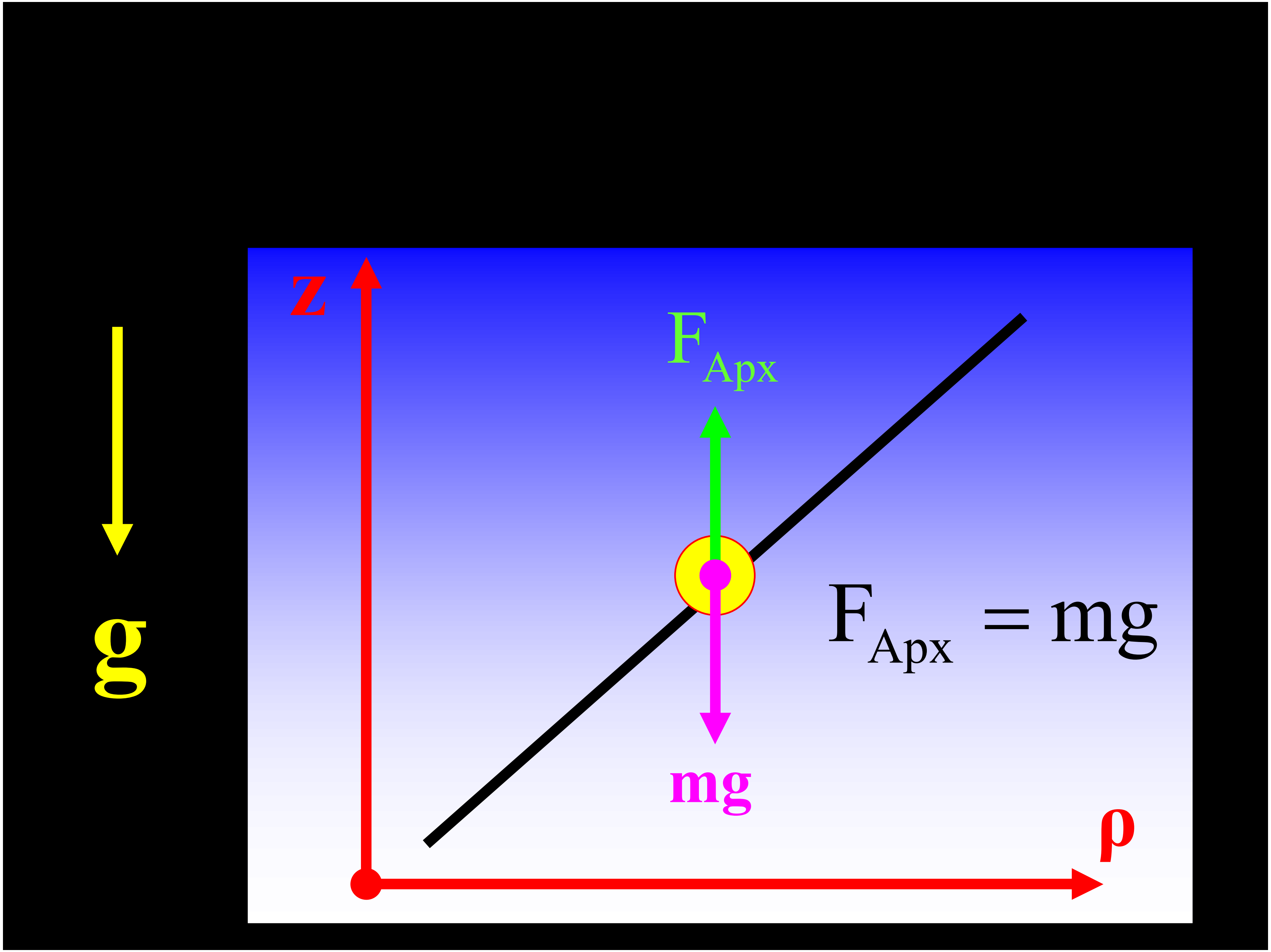

g
z
ρ
F_Apx
mg
F_Apx = mg

Разница сил возвращает частицу в исходное положение



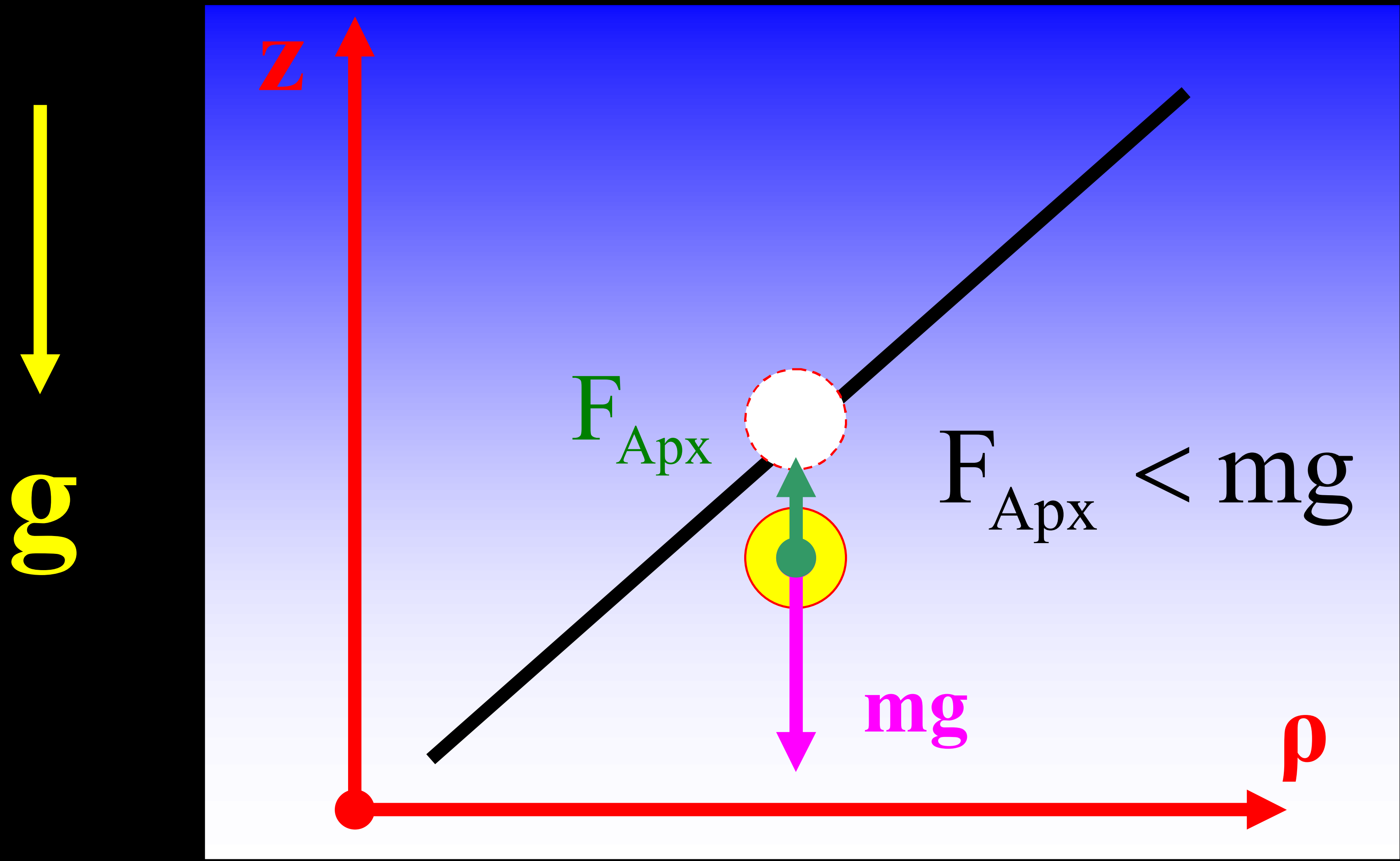
Разница сил возвращает частицу в исходное положение



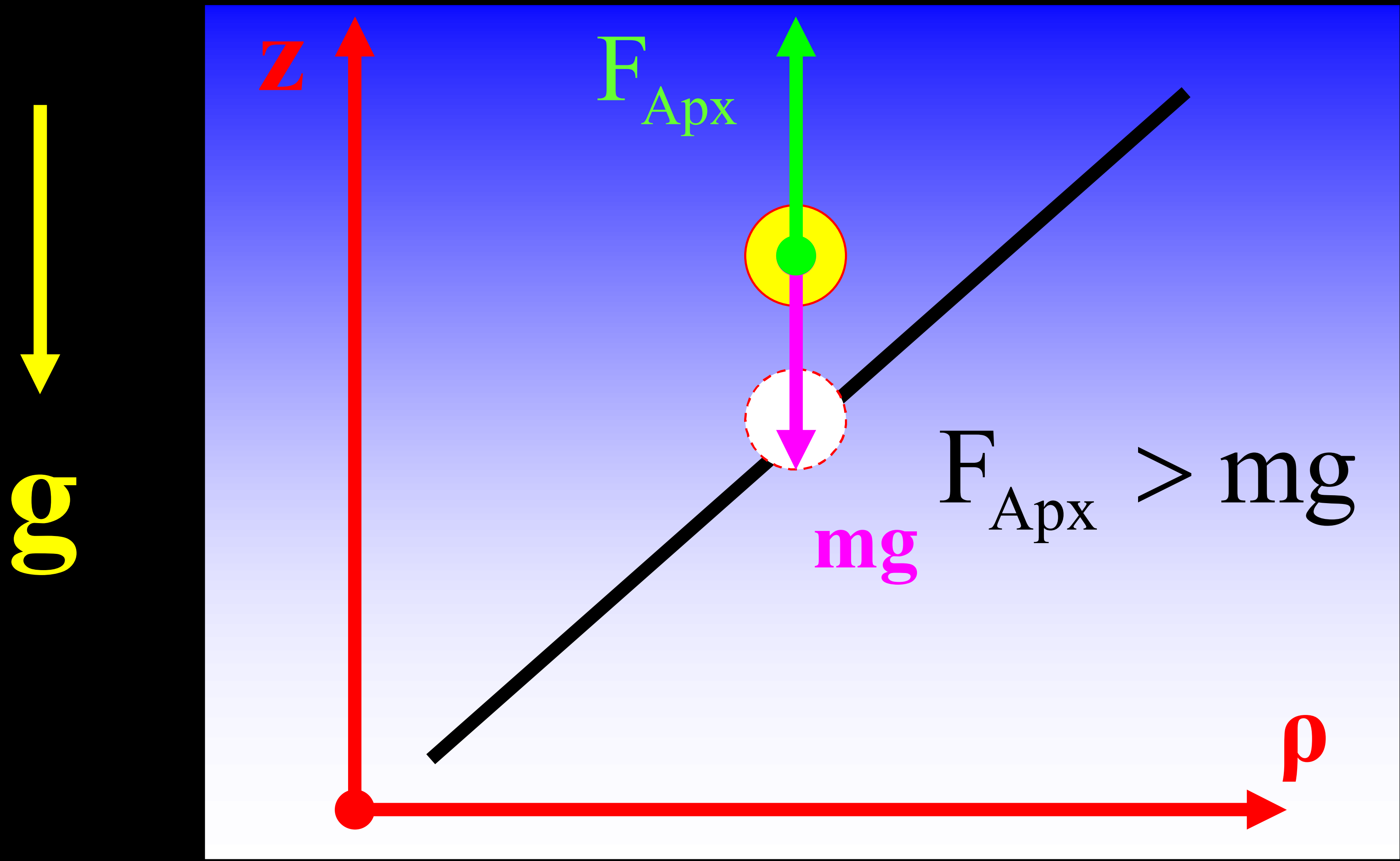


z
g
F_Apx
mg
F_Apx = mg
ρ

Разница сил способствует удалению частицы от положения равновесия



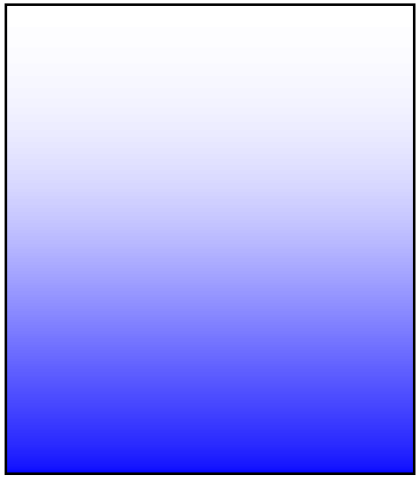
Разница сил способствует удалению частицы от положения равновесия



Критерий устойчивости

устойчивое состояние

$$\cancel{\frac{d\rho}{dz} < 0}$$



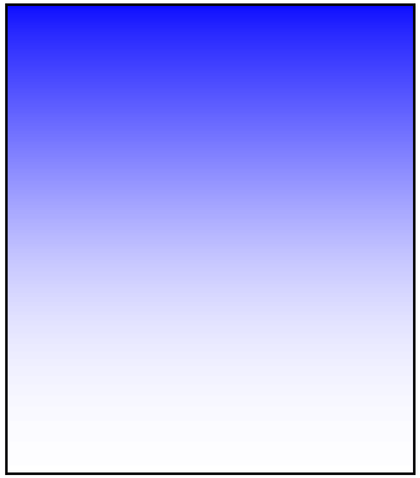
нейтральное состояние

$$\cancel{\frac{d\rho}{dz} = 0}$$

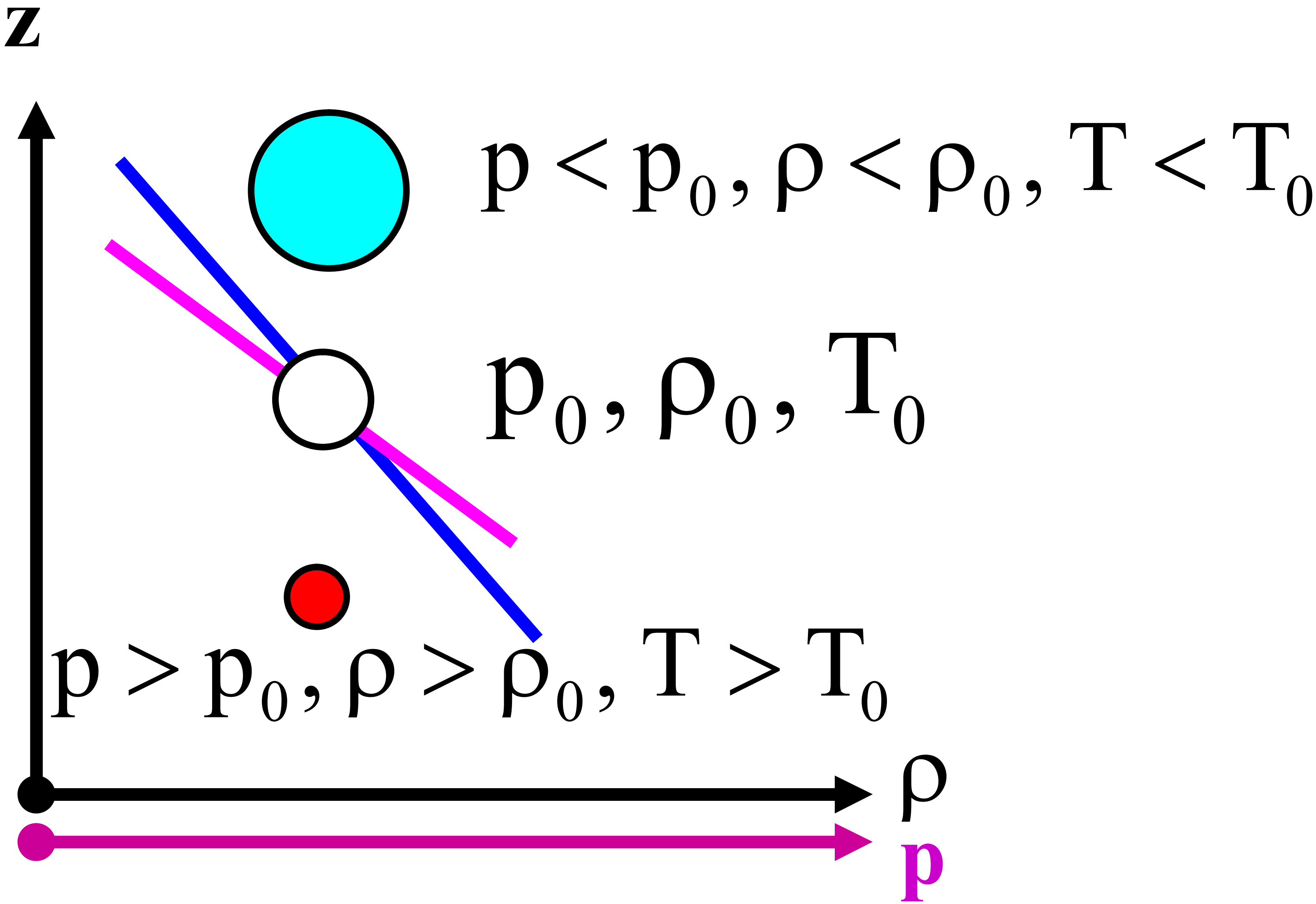
?

неустойчивое состояние

$$\cancel{\frac{d\rho}{dz} > 0}$$



Нейтральное состояние



Нейтральное состояние

$$\left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{\text{нейтр}} = \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s = \left(\frac{d\rho(p(z))}{dz}\right)_s = \left(\frac{d\rho}{dp}\right)_s \frac{dp}{dz}$$

$$\left(\frac{d\rho}{dp}\right)_s = \frac{1}{c^2}$$

скорость звука

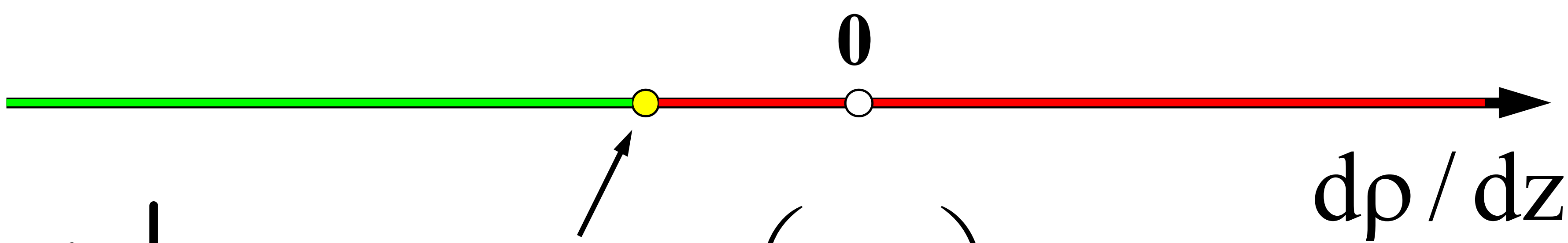
$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

закон гидростатики

$$\boxed{\left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{\text{нейтр}} = -\frac{\rho g}{c^2}}$$

Критерий устойчивости

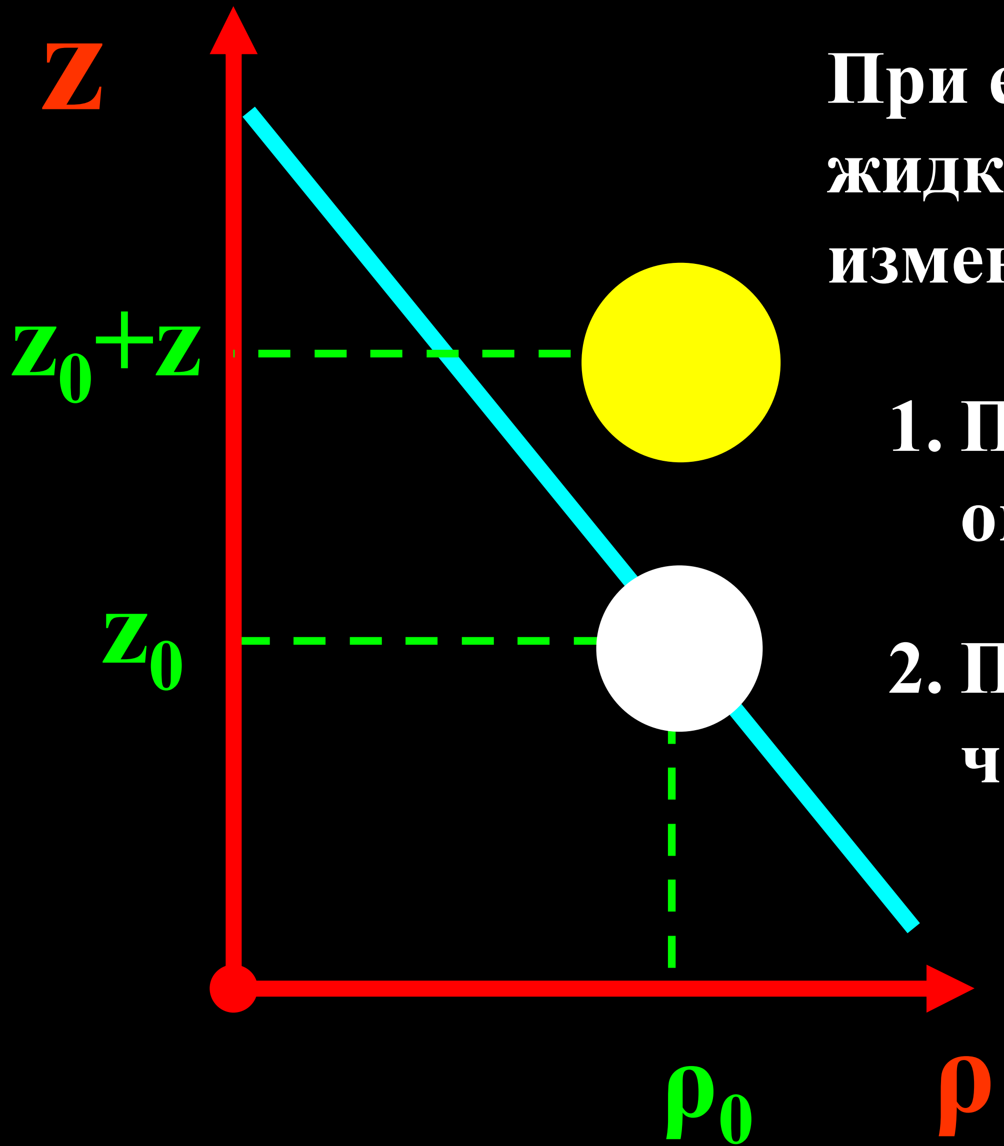
устойчивое состояние	нейтральное состояние	неустойчивое состояние
$\frac{d\rho}{dz} < \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s$	$\frac{d\rho}{dz} = \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s$	$\frac{d\rho}{dz} > \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s$



$$\left.\frac{d\rho}{dz}\right|_{\text{нейтр}} = -\frac{\rho g}{c^2} \equiv \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s$$

адиабатический градиент

Частота малых колебаний устойчиво стратифицированной жидкости (газа)



При ее смещении частицы жидкости по вертикали на z изменяются:

1. Плотность окружающей среды
2. Плотность самой частицы

$$\boxed{m\ddot{z} = F_{Apx} - mg} \qquad dV = dxdydz$$

$$\rho dV\ddot{z} = dVg\left(\rho_{среды} - \rho_{частицы}\right)$$

$$\ddot{z} = g\left(\rho_{среды} - \rho_{частицы}\right)/\rho$$

$$\rho_{среды} = \rho_0 + \frac{d\rho}{dz}z \qquad \rho_{частицы} = \rho_0 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s z$$

$$\boxed{\ddot{z} - \frac{g}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s\right)z = 0}$$

$$\ddot{z} - \frac{g}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s\right)z = 0$$

$$\ddot{z} + N^2 z = 0$$

Частота Вяйсяля-Брента

в океане / атмосфере

$N \sim 10^{-4} - 10^{-1}$ Гц

$$N^2 = -\frac{g}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s\right)$$

или

$$N^2 = -\frac{g}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dz} + \frac{\rho g}{c^2}\right)$$

$$\ddot{z} + N^2 z = 0 \qquad N = \sqrt{-\frac{g}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dz} + \frac{\rho g}{c^2}\right)}$$

N – действительная величина

Устойчивая стратификация

$$z(t) = A \cdot \sin(N \cdot t) + B \cdot \cos(N \cdot t)$$

Неустойчивая стратификация

N – мнимая величина

$$z(t) = A \cdot \exp(N \cdot t) + B \cdot \exp(-N \cdot t)$$

Уравнения гидродинамики

Уравнение состояния

$$\rho = \rho(p, T, ...)$$

парциальное давление водяного пара

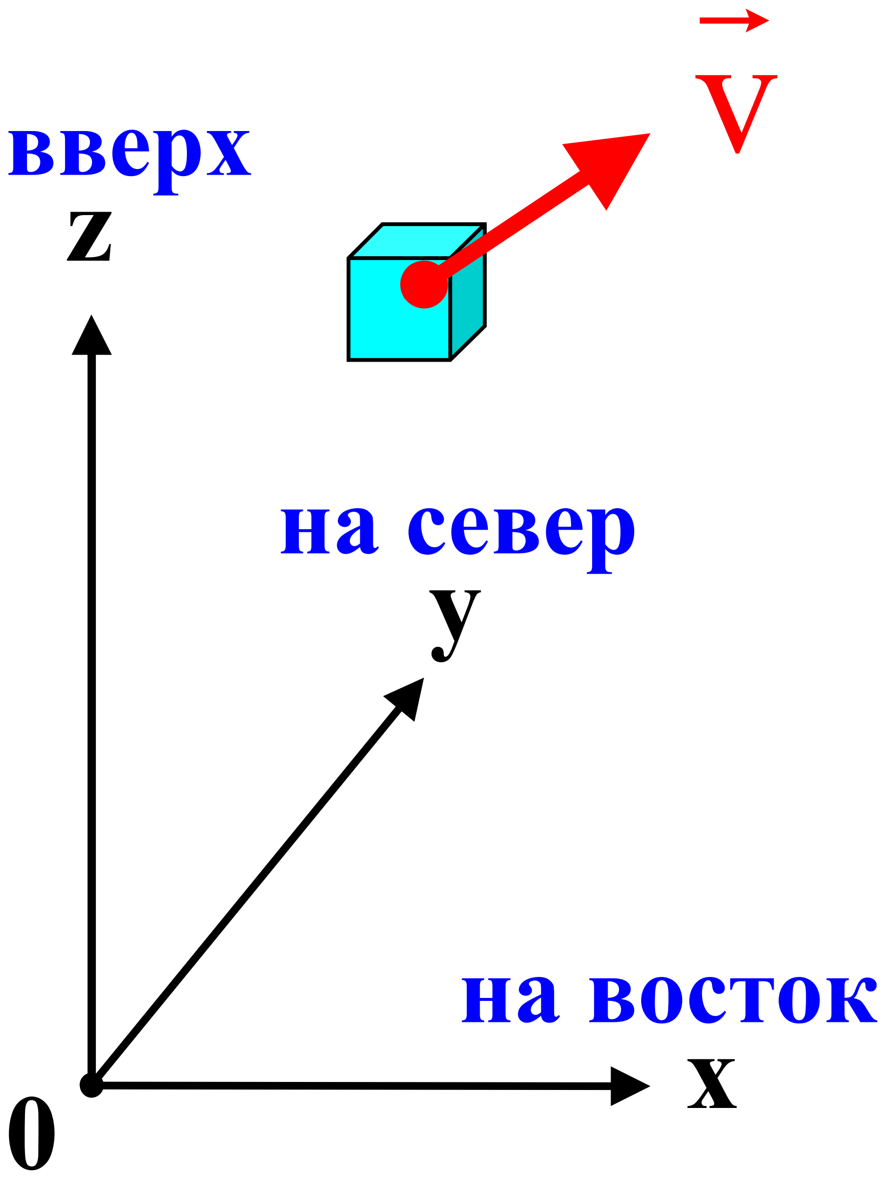
воздух

$$\rho = \rho(p, T, e)$$

соленость

вода

$$\rho = \rho(p, T, s)$$



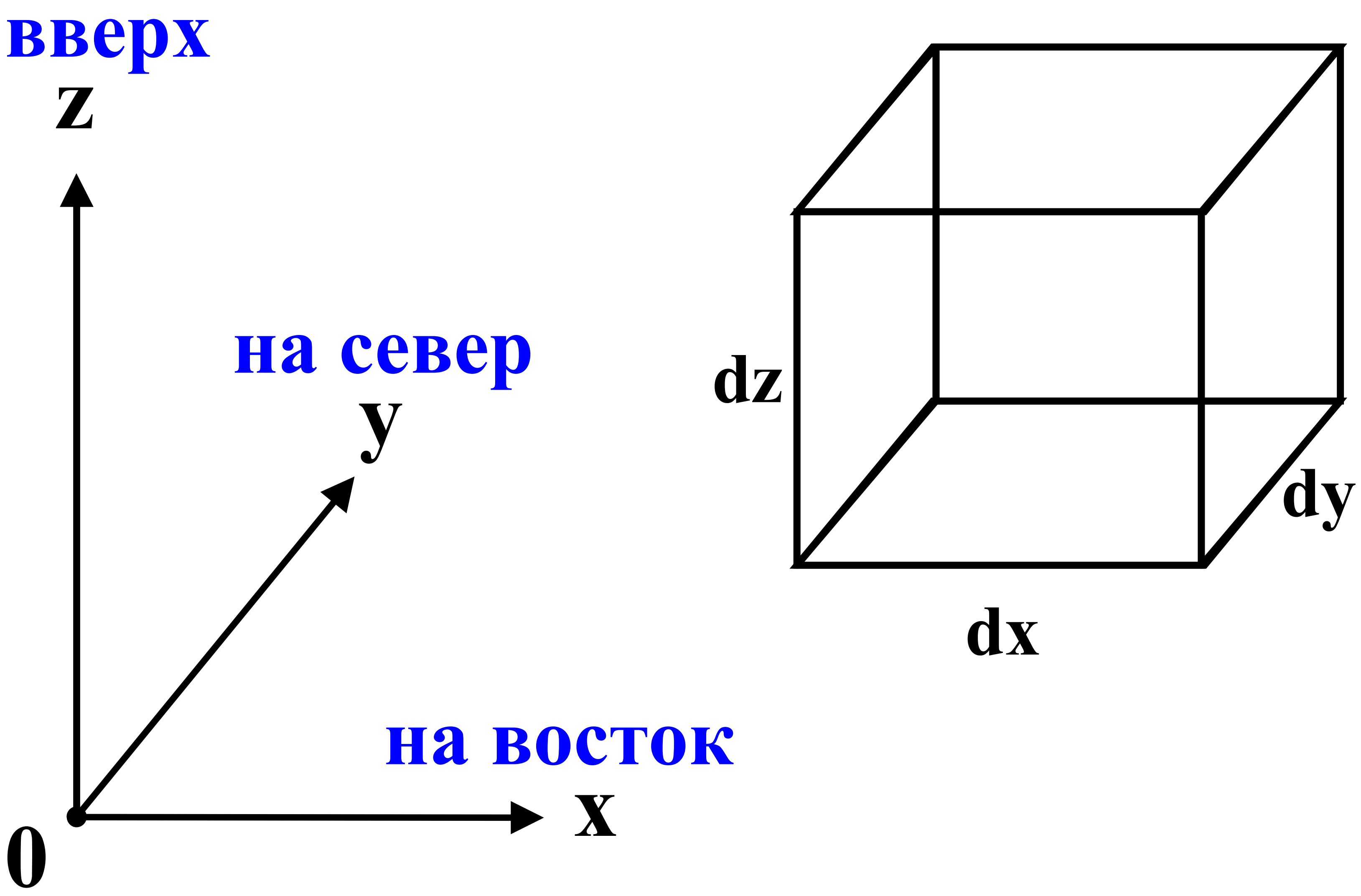
$$\vec{v} = \left(u_x, u_y, u_z\right)$$

$$\vec{v} \equiv \left(u, v, w\right)$$

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

$$p = p(x, y, z, t)$$

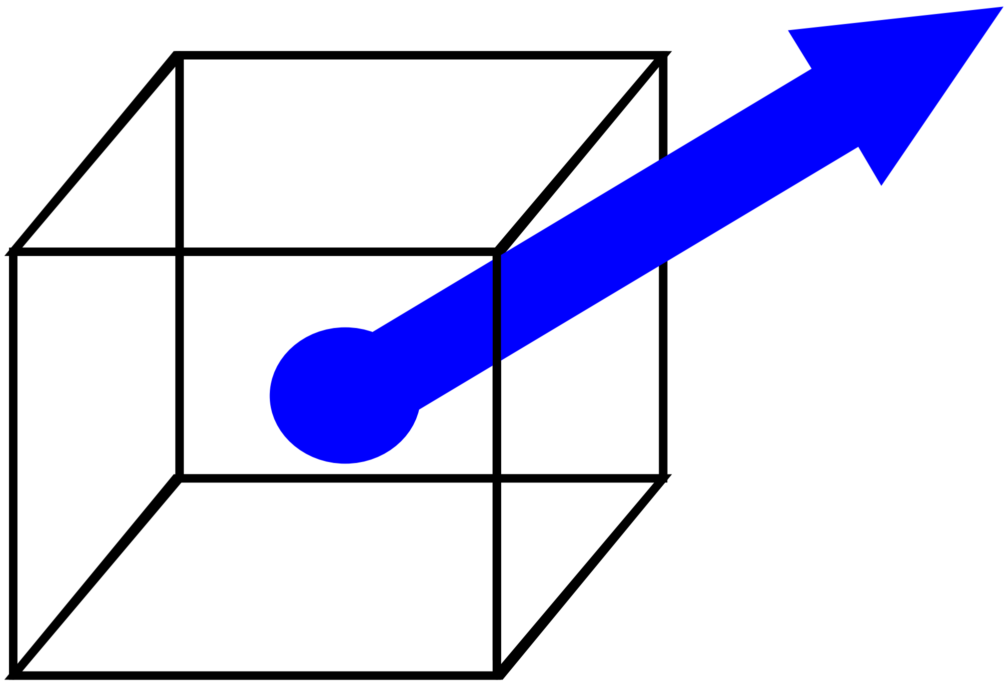
$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$



вверх
z
на север
y
на восток
x
0
dz
dy
dx

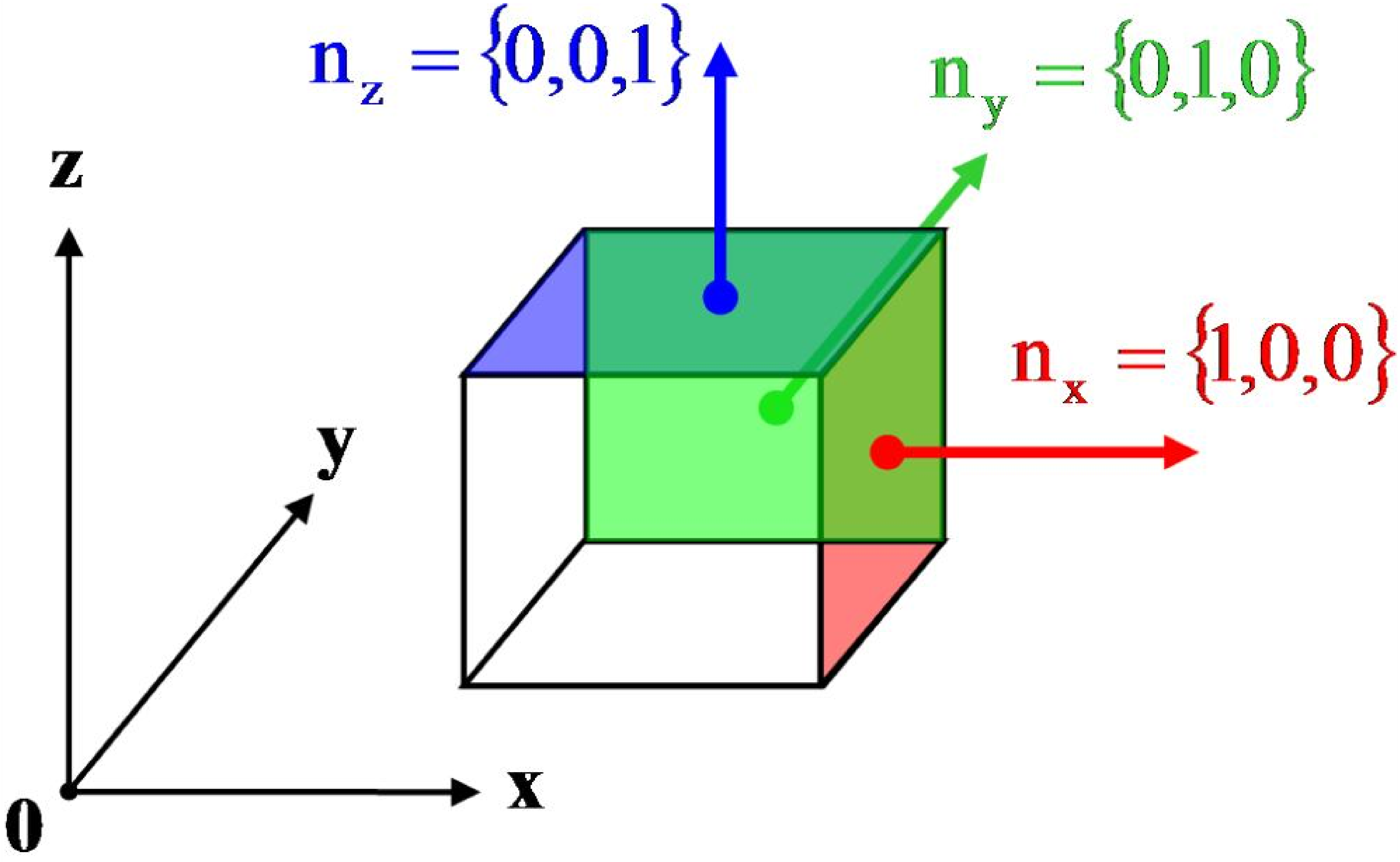
Массовые силы

$$F_{масс} \sim dm = dx\,dy\,dz\,\rho$$



- **сила притяжения (Земля, Луна, Солнце, …)**
- **силы инерции (Кориолиса, центробежная)**

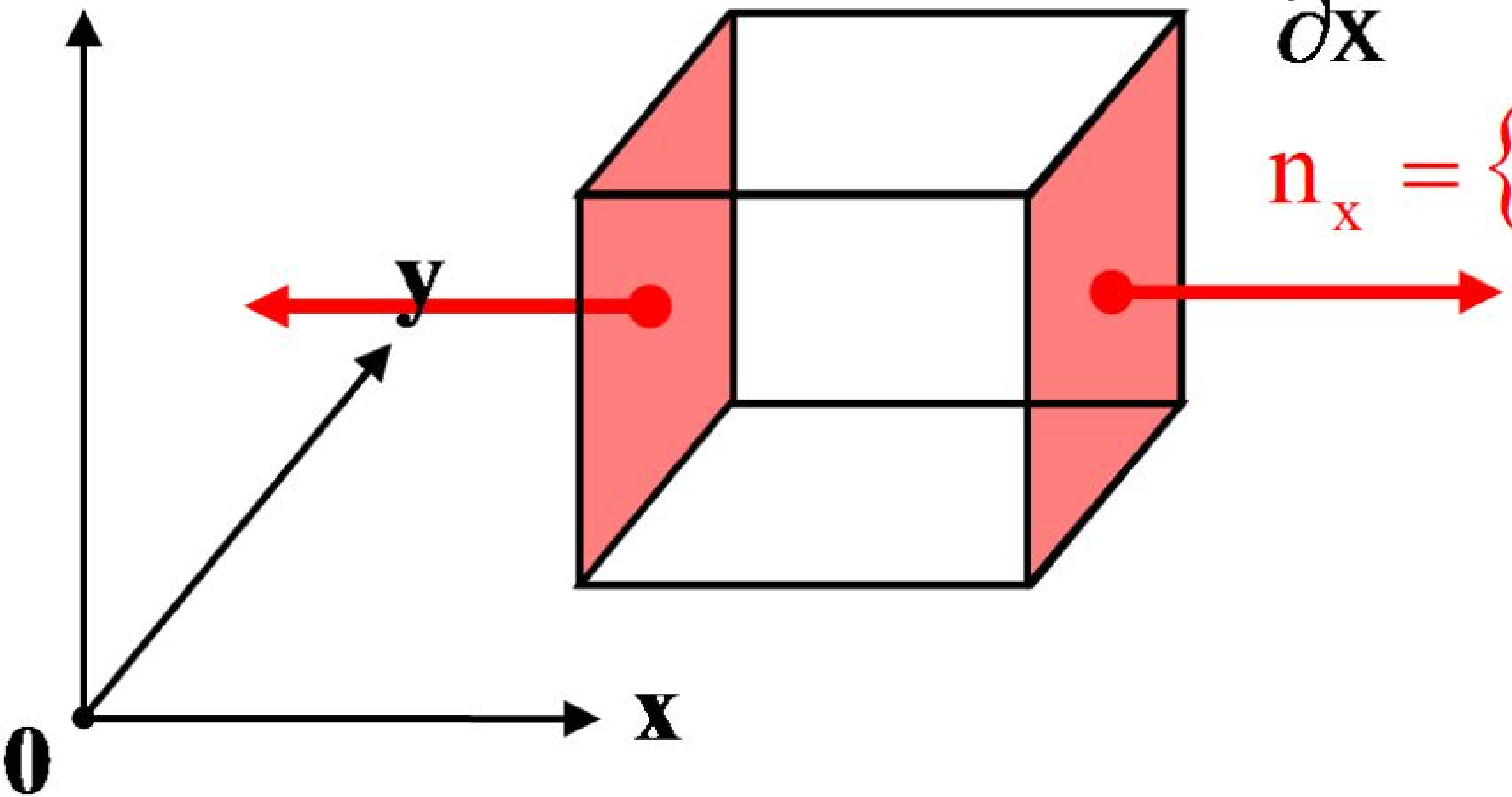
«Поверхностные» силы



«Поверхностные» силы

$$F_{\text{поверхн}} = \left[\tau(x+dx) - \tau(x)\right] dydz$$

$$n_x' = \{-1,0,0\} \quad F_{\text{поверхн}} = \frac{\partial \tau}{\partial x} dxdydz$$



$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{масс} + \sum \vec{F}_{поверхн}$$

$$dx\,dy\,dz\,\rho$$

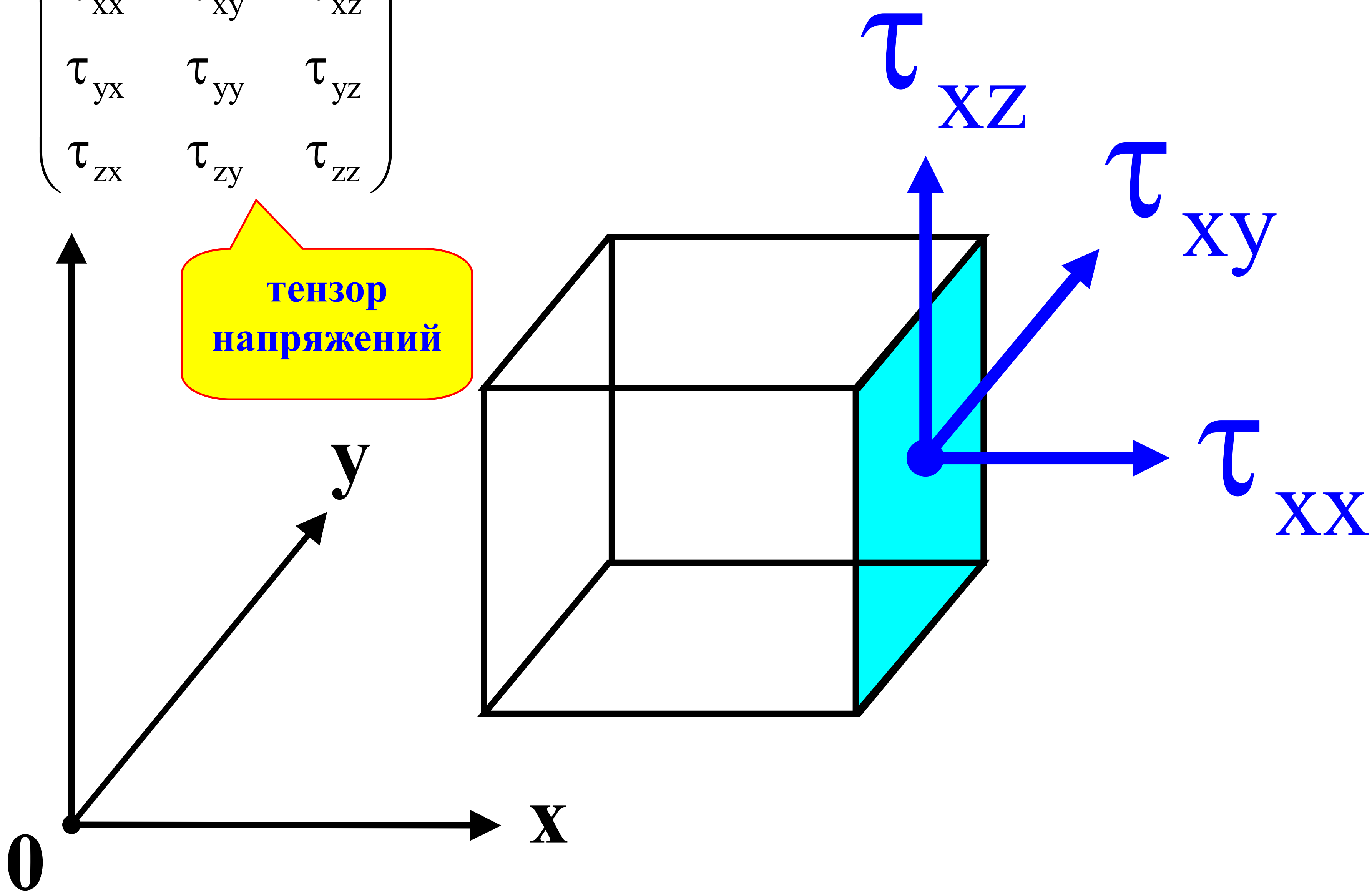
$$\sim dx\,dy\,dz\,\rho$$

$$"\frac{\partial\tau}{\partial x}"dxdydz$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2\left[\vec{v}\times\vec{\omega}\right] + \frac{1}{\rho}"\frac{\partial\tau}{\partial x}"$$

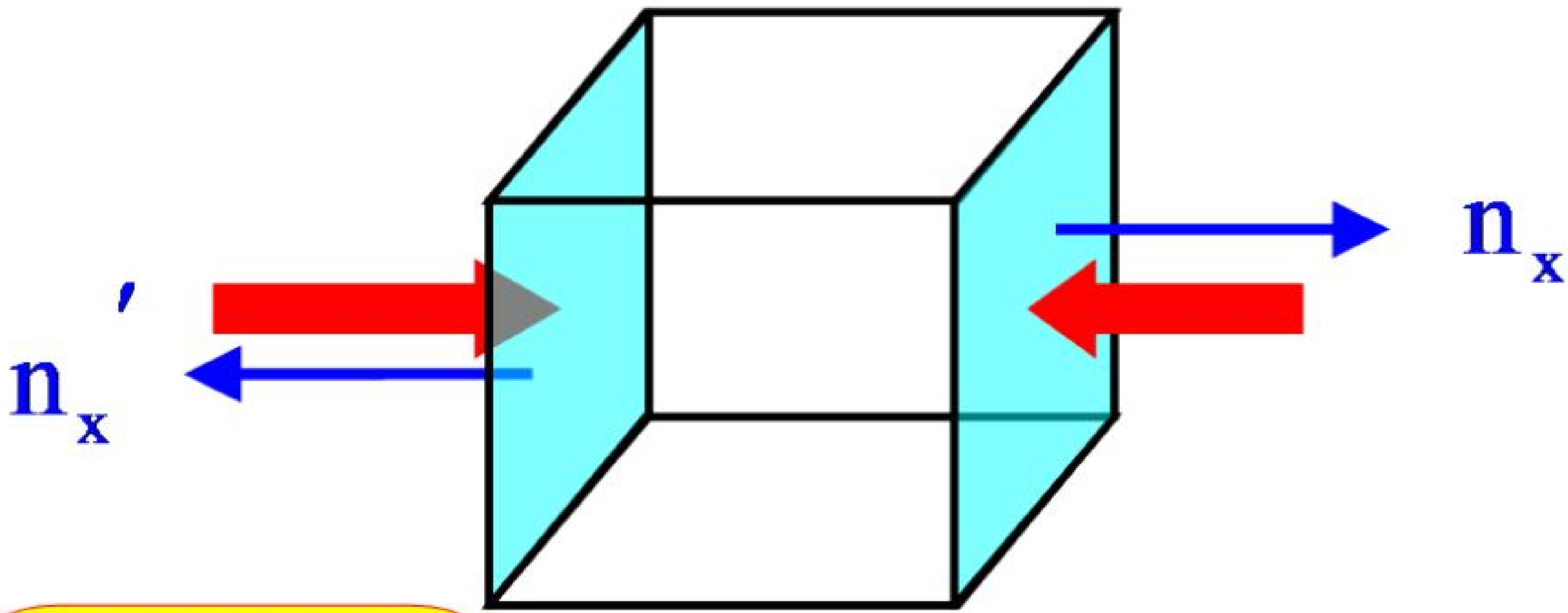
«Поверхностные» силы

$$
\begin{pmatrix}
\tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
\tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\
\tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz}
\end{pmatrix}
$$



Сила градиента давления

$$p(x, y, z)\,dy\,dz$$



$$p(x + dx, y, z)\,dy\,dz$$

напряжение действует в направлении противоположном нормали!

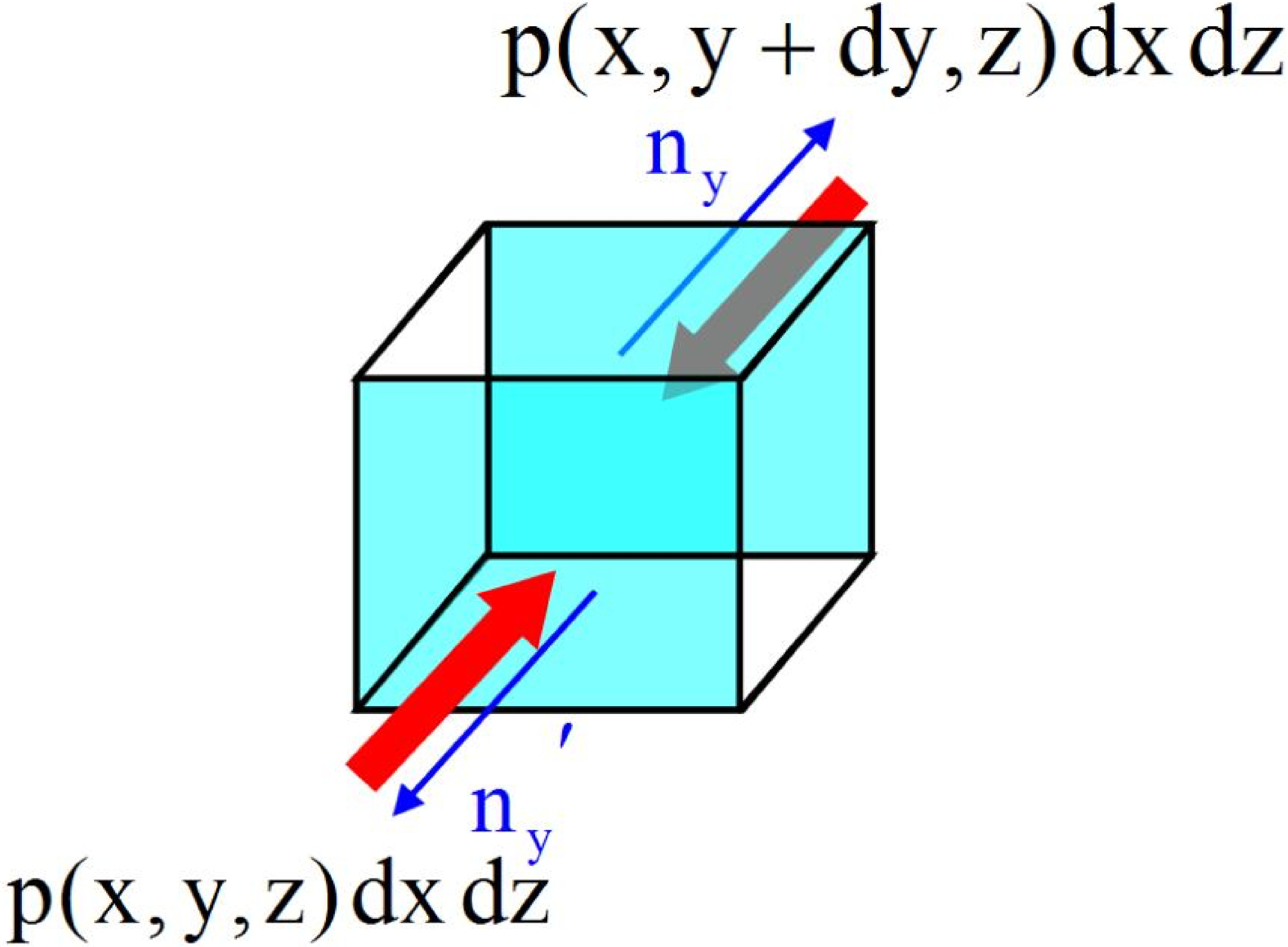
Сила градиента давления
(x - компонента)

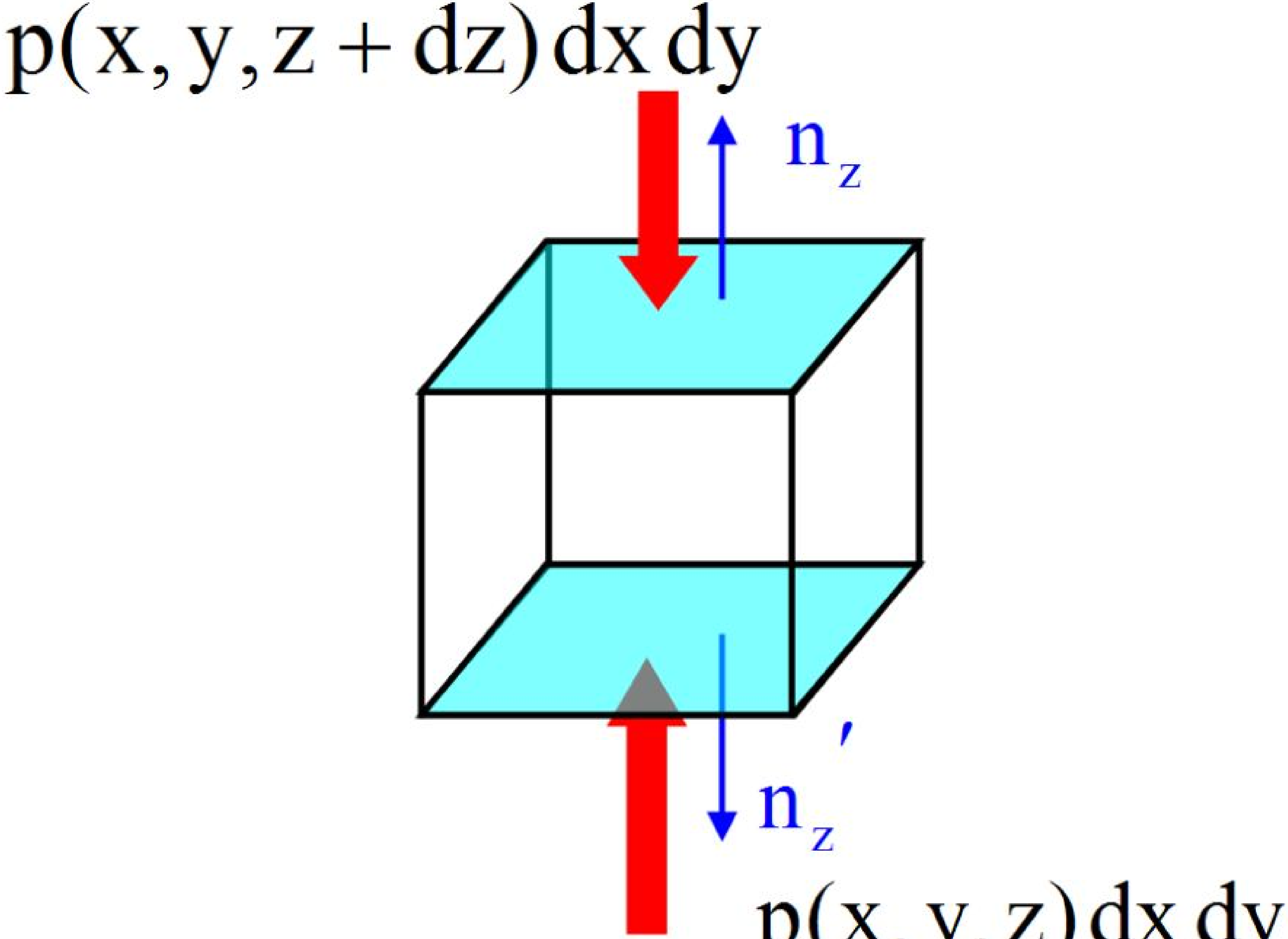
$$\left[p(x,y,z) - p(x+dx,y,z)\right] dy\, dz =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} dx\, dy\, dz$$

$$\underbrace{dx\, dy\, dz\, \rho}_{dm}\, a_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx\, dy\, dz$$

$$a_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$


$p(x, y + dy, z)\,dx\,dz$
n_y
n_y'
$p(x, y, z)\,dx\,dz$


$p(x, y, z + dz)\,dx\,dy$
n_z
n_z'
$p(x, y, z)\,dx\,dy$

Сила градиента давления

$$a_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\vec{F}^{\mathrm{grad}\,p} = -\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p$$

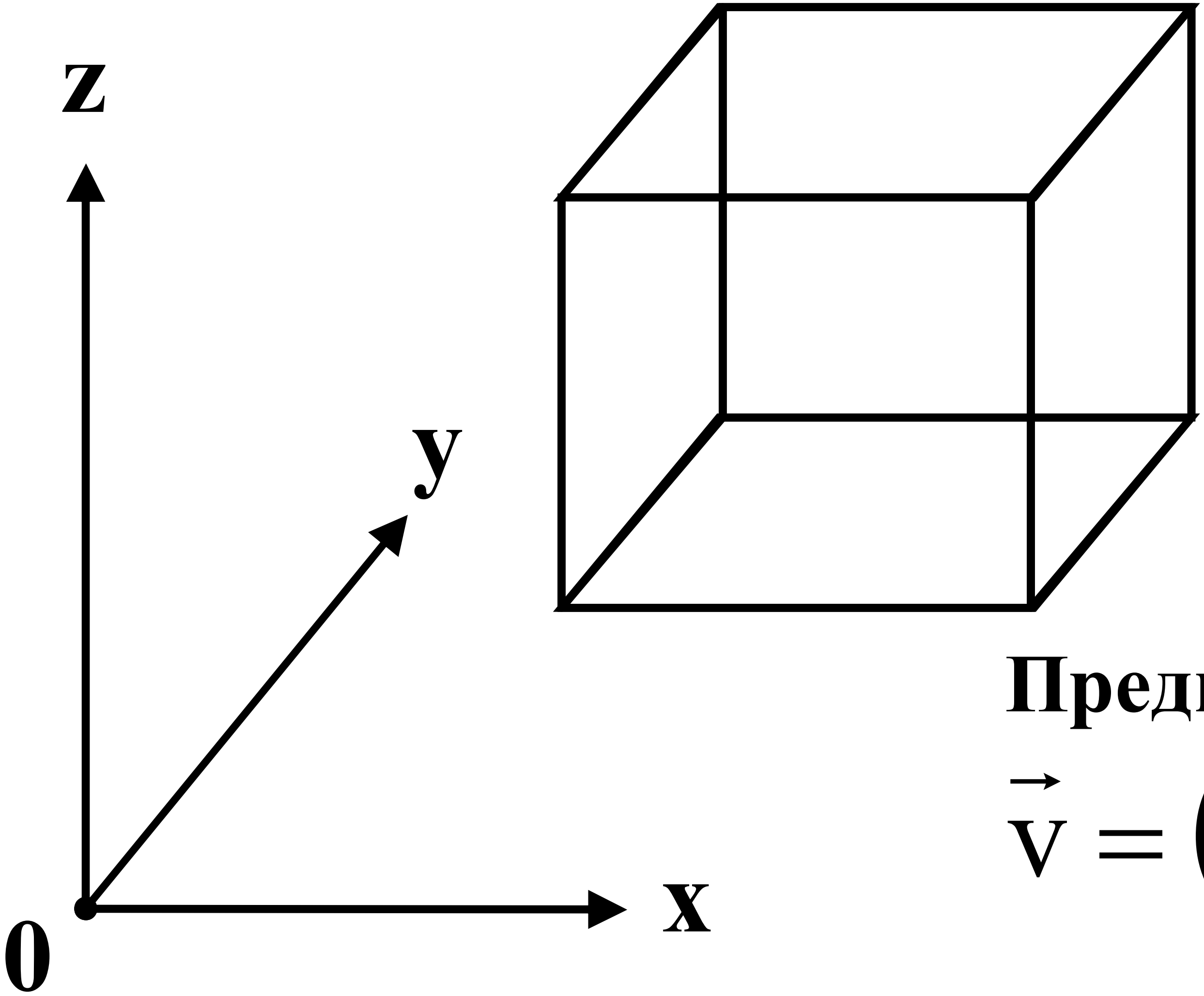
$$a_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\vec{F}^{\mathrm{grad}\,p} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$$

$$a_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \equiv \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

Сила вязкого трения



Предположим, что

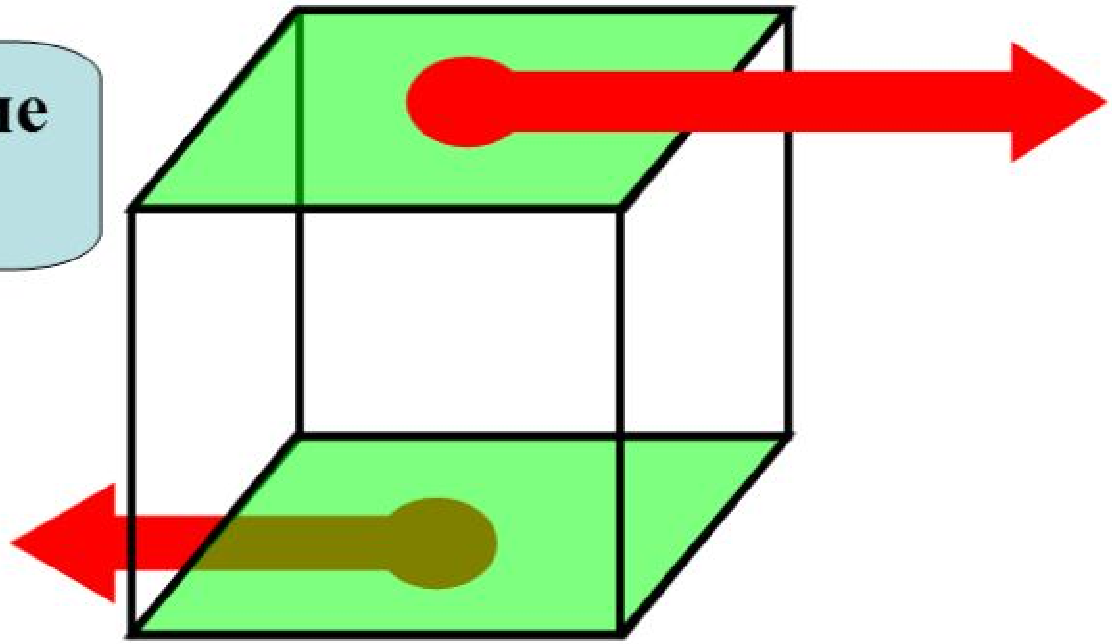
$$\vec{v} = \left(u(z), 0, 0\right)$$

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial u}{\partial z}$$

напряжение трения

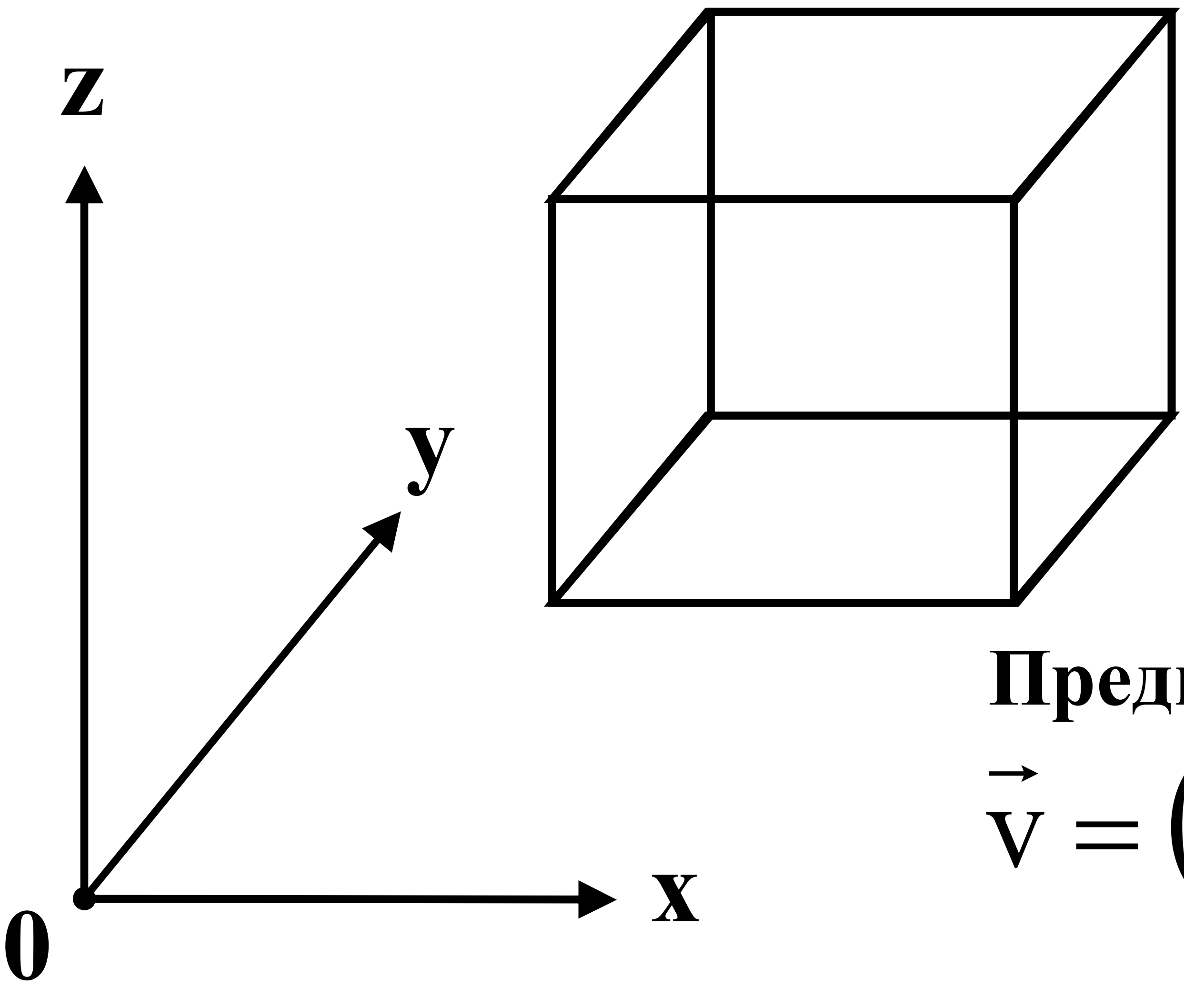
динамическая вязкость

$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z+dz} dx\,dy$$



$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z} dx\,dy$$

Сила вязкого трения

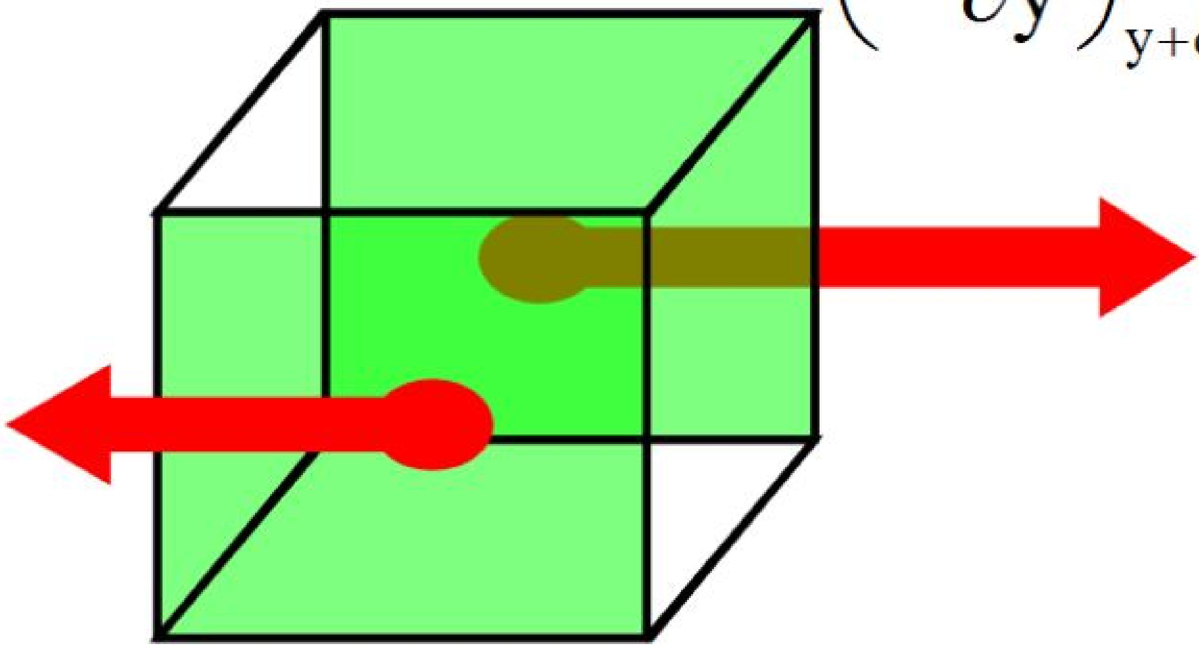


Предположим, что

$$\vec{v} = \left(u(y), 0, 0\right)$$

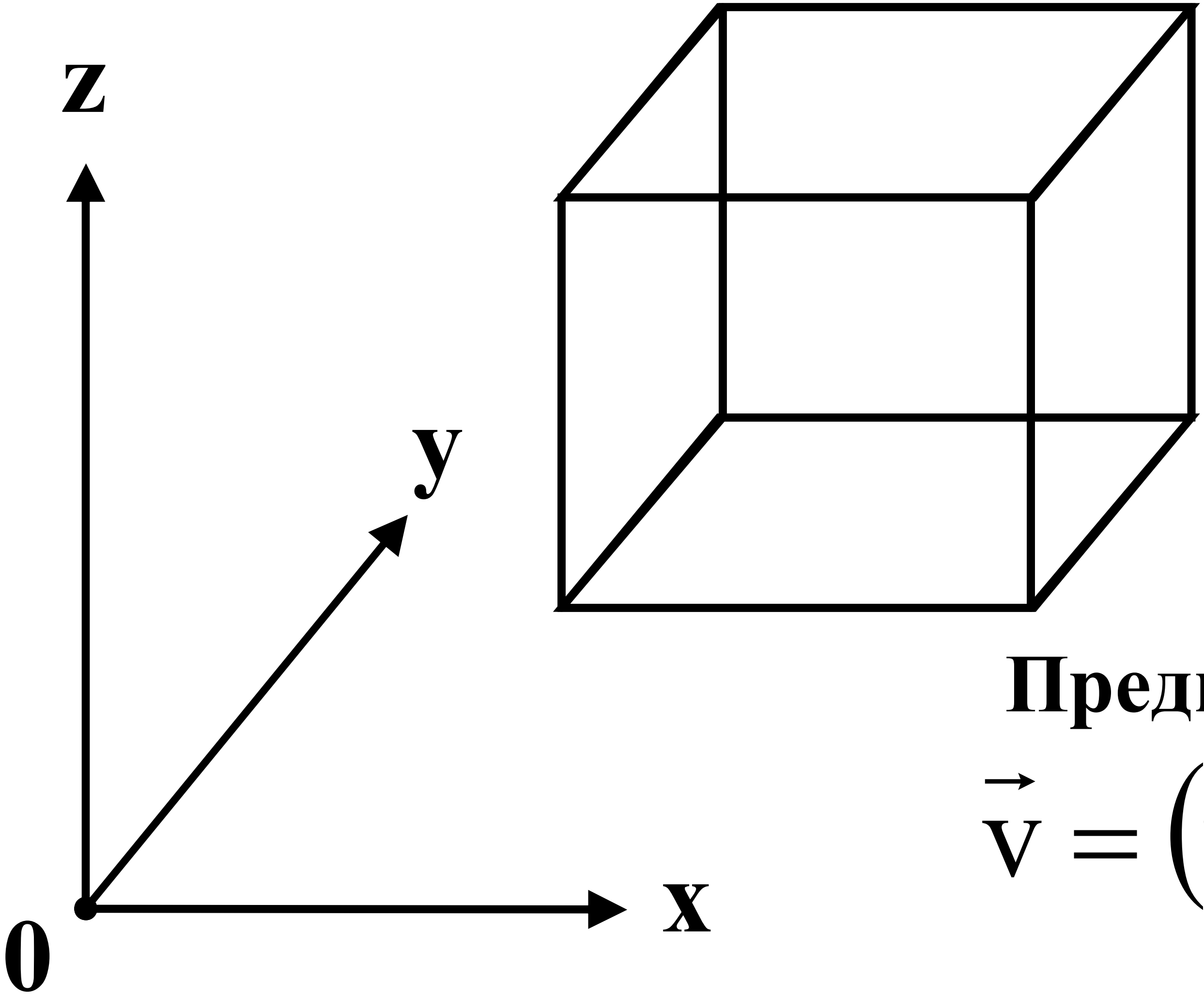
$$\tau_{xy} = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y+dy} dx\, dz$$



$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y} dx\, dz$$

Сила вязкого трения

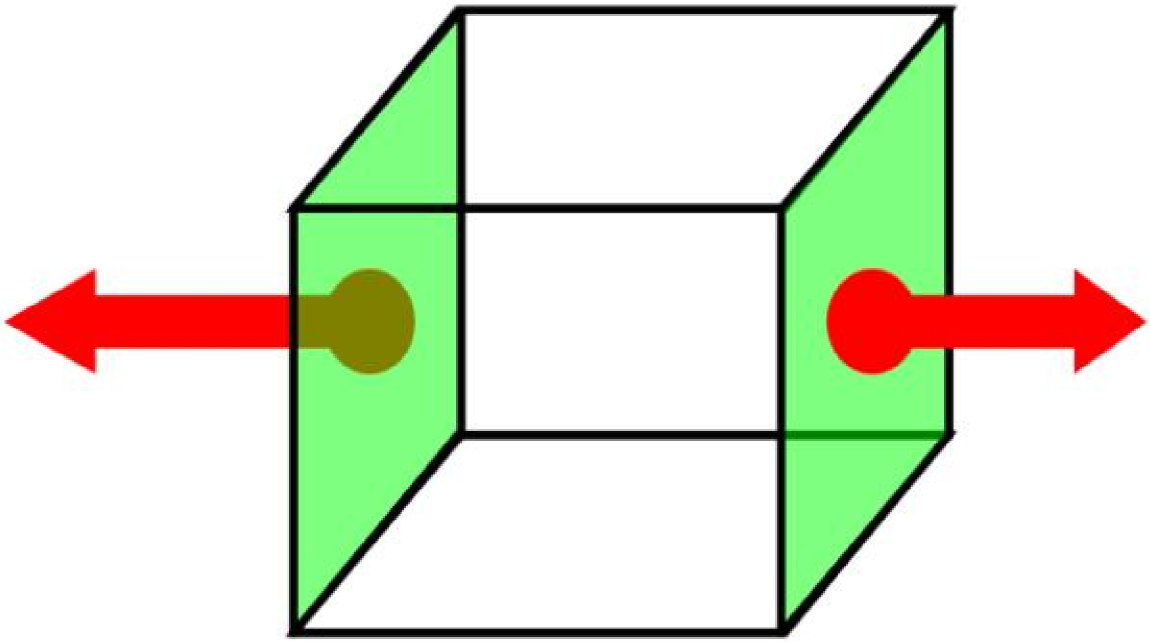


Предположим, что

$$\vec{v} = \left(u(x), v, w\right)$$

$$\tau_{xx} = \eta \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} dy\,dz$$



$$\left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x} dy\,dz$$

Сила вязкого трения

$$F_x^{\text{вязк.трения}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$F_x^{\text{вязк.трения}} = \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \frac{\eta}{\rho}\Delta u = \nu\Delta u$$

Для несжимаемой жидкости!!!

Вторая вязкость

кинематическая вязкость

$$\vec{F}^{\text{вязк.трения}} = \nu\Delta\vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$$

Для сжимаемой жидкости!!!

	η, кг / с · м	ν, $м^2 / с$
вода	10^{-3}	10^{-6}
воздух	$2 \cdot 10^{-5}$	$15 \cdot 10^{-6}$

$$\nu_{\text{глицерин}} \approx 680 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$$

$$\nu_{\text{мантии}} \approx 10^{17} \text{ м}^2/\text{с}$$

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{масс}} + \sum \vec{F}_{\text{поверхн}}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$$

сила тяжести

сила Кориолиса

сила градиента давления

сила вязкого трения

$$\vec{v} = \vec{v}\big(x(t), y(t), z(t), t\big)$$

материальная производная

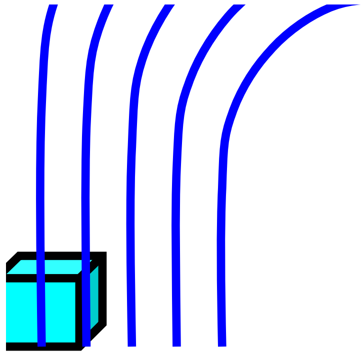
полная производная

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \overset{?}{=} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v}$$

субстациональная производная

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$



уравнение Навье-Стокса

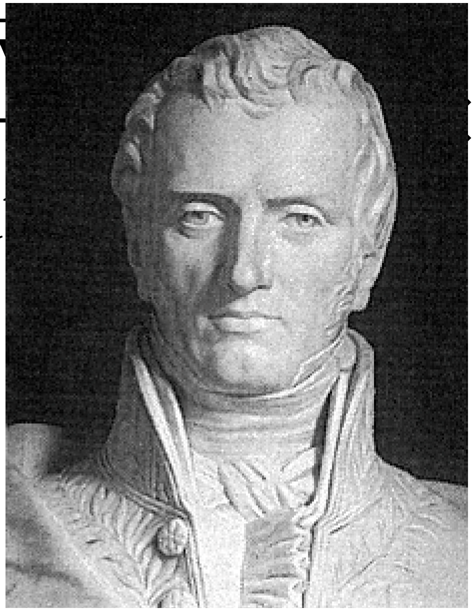
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \text{grad div}\, \vec{v}$$

3 уравнения

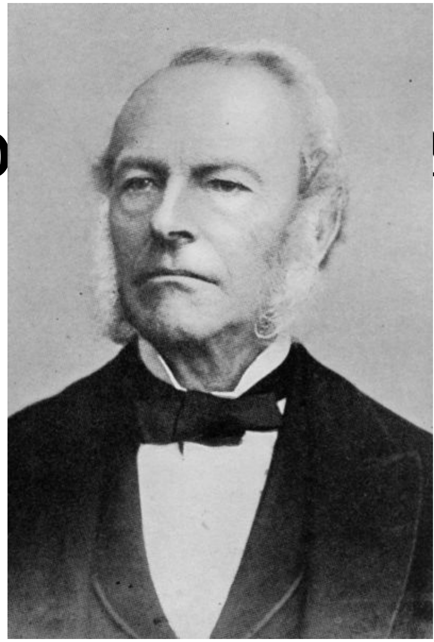
5 неизвестных функций

уравнение Навье-Стокса

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \ldots \vec{\omega} \ldots \Delta\vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$$



Анри Навье
1785-1836
французский механик и инженер

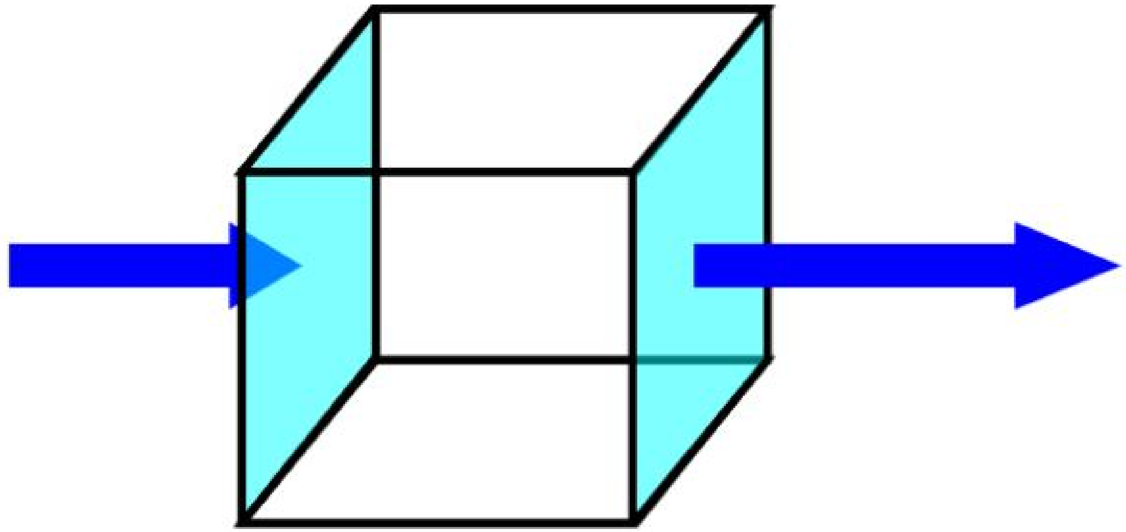


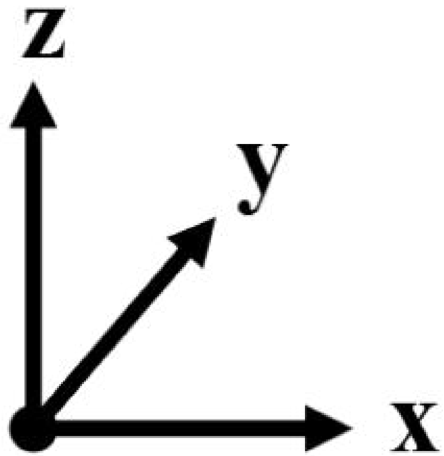
Джордж Стокс
1819-1903
английский физик и математик

…стных функций

Уравнение неразрывности (закон сохранения массы)

$$\rho(x)u(x)dydz$$





$$\rho(x+dx)u(x+dx)dydz$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = dxdydz\frac{\partial \rho}{\partial t} =$$

$$= -\left[\rho(x+dx)u(x+dx) - \rho(x)u(x)\right]dydz$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial[\rho u]}{\partial x} - \frac{\partial[\rho v]}{\partial y} - \frac{\partial[\rho w]}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\rho\vec{v}\right] = 0$$

уравнение неразрывности

Система уравнений гидродинамики (аэрогидромеханики)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2\left[\vec{v}\times\vec{\omega}\right] - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$$

уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho\,\vec{v}\right) = 0$$

уравнение неразрывности

5 уравнений

5 неизвестных функций

$$\rho = \rho(p)$$

уравнение состояния

Система уравнений гидродинамики
+уравнение переноса температуры
+уравнение переноса соли/водяного пара

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right) T = \chi \Delta T$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right) s = \vartheta \Delta s$$

$$\rho = \rho(p, T, s)$$

система остается замкнутой!!!

Граничные условия на поверхностях, ограничивающих область решения задачи

условие прилипания

$$\vec{v} = 0 \quad \text{или} \quad \vec{v} = \vec{v}_0$$

заданное напряжение (поток импульса)

$$\eta \frac{\partial u}{\partial z} = \tau$$

заданное давление

$$p = p_0$$

заданный поток тепла

$$-C\rho\chi \frac{\partial T}{\partial z} = Q$$

заданная температура

$$T = T_0$$

Граничные условия на поверхностях, ограничивающих область решения задачи

Поверхности могут быть подвижными и неизвестными, т.е. их положение определяется из решения задачи

Примеры:

- **волны на поверхности воды**
- **течения с возможностью фазовых переходов (лед-вода, мантия-ядро Земли)**
- **размыв или выветривание**
- **etc.**

Начальные условия (при t=0)

$$\vec{v} = \vec{v}_0(x, y, z)$$

$$p = p_0(x, y, z)$$

$$T = T_0(x, y, z)$$

$$s = s_0(x, y, z)$$

«высокая» теория

геофизическая практика

Проблема ассимиляции данных наблюдений в численные модели