

Введение в физику гидросферы

2024 Лекция №5

Носов Михаил Александрович

кафедра физики моря и вод суши

отделение геофизики

физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова



**Основные
подходы к
упрощению
уравнений
гидродинамики**

Приближение №1:

«среда с постоянной плотностью

$\rho = \rho_0 = \text{const}$ (в.т.ч. несжимаемая)»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \nu \Delta \vec{v} +$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{v}) = 0 \quad + \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \text{grad div } \vec{v}$$

$$\rho = \rho(p)$$

ρ_0

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

Приближение №1:

«среда с постоянной плотностью»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla} \right) \vec{v} = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2 \left[\vec{v} \times \vec{\omega} \right] + \nu \Delta \vec{v}$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{u_{\text{гориз}}}{L}$$

В крупномасштабных
течениях атмосферы и
океана $H \ll L$
 $\Rightarrow w_{\text{верт}} \ll u_{\text{гориз}}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial w}{\partial z}$$



$$\frac{\partial w}{\partial z} \sim \frac{w_{\text{верт}}}{H}$$

$$\left| w_{\text{верт}} \right| \sim \frac{H}{L} \left| u_{\text{гориз}} \right|$$

Приближение №2: «стационарное течение»

$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \nu \Delta \vec{v} +$$

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0 \quad + \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\rho = \rho(p)$$

Приближение №3:

«идеальная (невязкая) жидкость»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \cancel{\nu \Delta \vec{v}} +$$

понижается порядок уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

$$+ \cancel{\left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}}$$

$$\rho = \rho(p)$$

Изменение граничного условия:

«прилипание» → «непротекание»

$$\{v_{\tau}=0, v_n=0\} \rightarrow \{v_n=0\}$$

Приближение №4:

«идеальная жидкость постоянной плотности, линейное приближение»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{\left(\vec{v}, \vec{\nabla} \right) \vec{v}} = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2 \left[\vec{v} \times \vec{\omega} \right]$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

если $\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_1, p_1 \\ \vec{v}_2, p_2 \end{array} \right\}$ – решения системы, то \Rightarrow

$A\vec{v}_1 + B\vec{v}_2, Ap_1 + Bp_2$ – решения системы

где A, B – константы

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

2. Геострофическое приближение

strophe (греч.) – вращение, поворот

Крупномасштабные течения атмосферы и океана обычно происходят в условиях **гидростатического** (по вертикали) и **геострофического** (по горизонтали) баланса

$$z : -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} = 0 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] = 0$$

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

$$\cancel{\frac{dw}{dt}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

$$\rho = \rho_0 = \text{const}$$
$$g = \text{const}$$

$$|w_{\text{верт}}| \sim \frac{H}{L} |u_{\text{гориз}}|$$

$$H \ll L$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow p(z) = p_0 - \rho_0 g z$$

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

2. Геострофическое приближение

strophe (греч.) – вращение, поворот

Крупномасштабные течения атмосферы и океана обычно происходят в условиях **гидростатического** (по вертикали) и **геострофического** (по горизонтали) баланса

$$z : -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} = 0 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] = 0$$

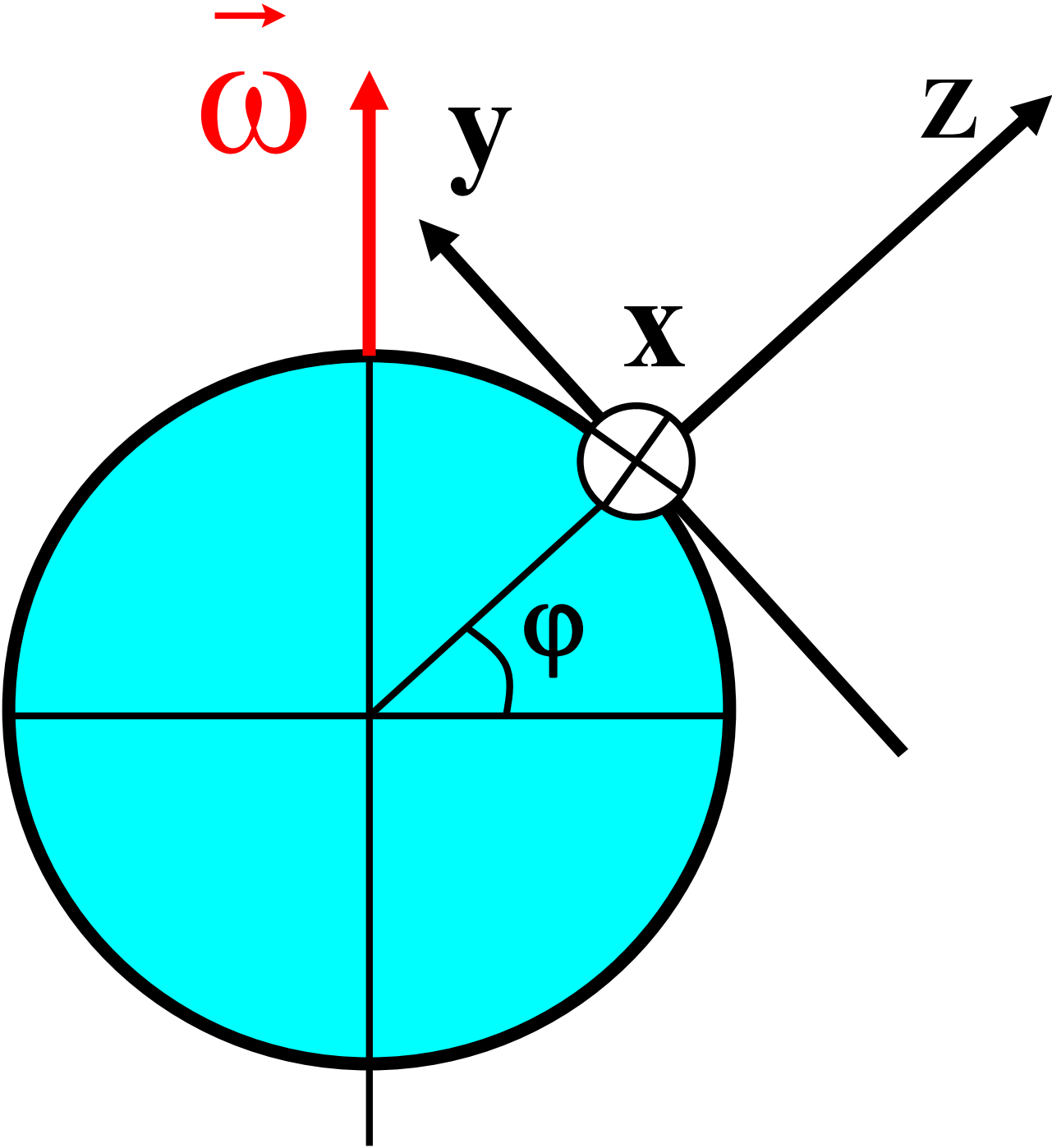
«Геофизические» приближения:

2. Геострофическое приближение

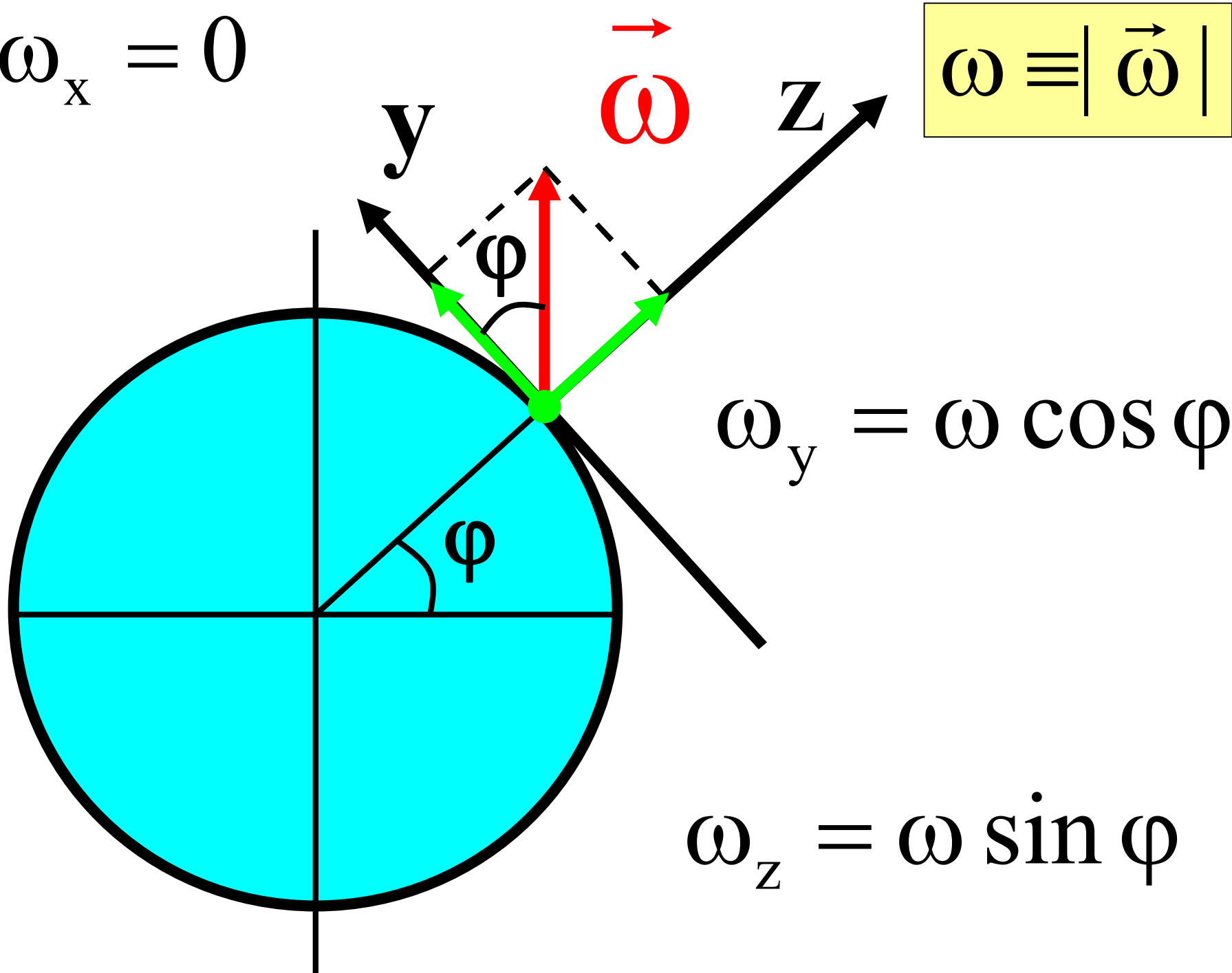
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

по
горизонтали
не действует!



$$\omega_x = 0$$



$$\omega \equiv |\vec{\omega}|$$

$$\omega_y = \omega \cos \varphi$$

$$\omega_z = \omega \sin \varphi$$

$$\vec{v} = (u, v, w)$$

$$1. w \ll \{u, v\}$$

$$\vec{\omega} = (0, \omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi)$$

$$2. F_z^{\text{Kop}} = 0$$

$$2[\vec{v} \times \vec{\omega}] = 2 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u & v & w \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v\omega_z - w\omega_y \\ w\omega_x - u\omega_z \\ u\omega_y - v\omega_x \end{pmatrix} =$$

традиционное приближение

$$= 2 \begin{pmatrix} v\omega \sin \varphi - w\omega \cos \varphi \\ -u\omega \sin \varphi \\ u\omega \cos \varphi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2v\omega \sin \varphi \\ -2u\omega \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2[\vec{v} \times \vec{\omega}] \approx \begin{pmatrix} 2v\omega \sin \varphi \\ -2u\omega \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f v \\ -f u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f = 2\omega \sin \varphi$$

**параметр
Кориолиса**

**Масштаб
времени
течения**

$$\tau = \frac{L}{U}$$



**Carl-Gustaf
Rossby**
Swedish-US
meteorologist
1898-1957



**Кибель Илья
Афанасьевич**
советский
математик
гидромеханик и
метеоролог
1904-1970

**Период
вращения**

T

**Число
Россби
(Кибеля-
Россби)**

$$\frac{T}{\tau} = \frac{T \cdot U}{L} \equiv R_0$$

**Число
Россби**

$$R_o = \frac{T \cdot U}{r}$$

**эффекты вращения
незначительны**

Неподвижный (относительно Земли) бассейн

$$R_o = \frac{24 \cdot 60 \cdot 60 [\text{с}] \times 0.01 [\text{м/с}]}{0.3 [\text{м}]} \approx 3000$$

**эффекты вращения
существенны**

Вращающийся бассейн

$$R_o = \frac{3 [\text{с}] \times 0.01 [\text{м/с}]}{0.3 [\text{м}]} = 0.1$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

$$\frac{U}{T} \sim \frac{U}{L/U}$$

геострофическое приближение работает при $R_o \ll 1$

$$U \cdot f$$

$$f = 2\omega \sin \varphi$$

на экваторе $R_o \rightarrow \infty$

число Кибеля-Росси

$$R_o = \frac{\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|}{|2[\vec{v} \times \vec{\omega}]|} \sim \frac{U}{L/U} = \frac{U}{L \cdot f}$$

Оценка числа Россби для природных условий

$$R_o = \frac{U}{L \cdot f} \quad f = 2\omega \sin \varphi = \frac{4\pi}{T} \sin \varphi \sim 10^{-4} \text{ c}^{-1}$$

геострофическое
приближение

$$f_{\max} \approx 1.458 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$$

хорошо работает

$$R_o = \frac{1[\text{м/с}]}{10^6[\text{м}] \times 10^{-4}[\text{c}^{-1}]} \approx 0.01$$

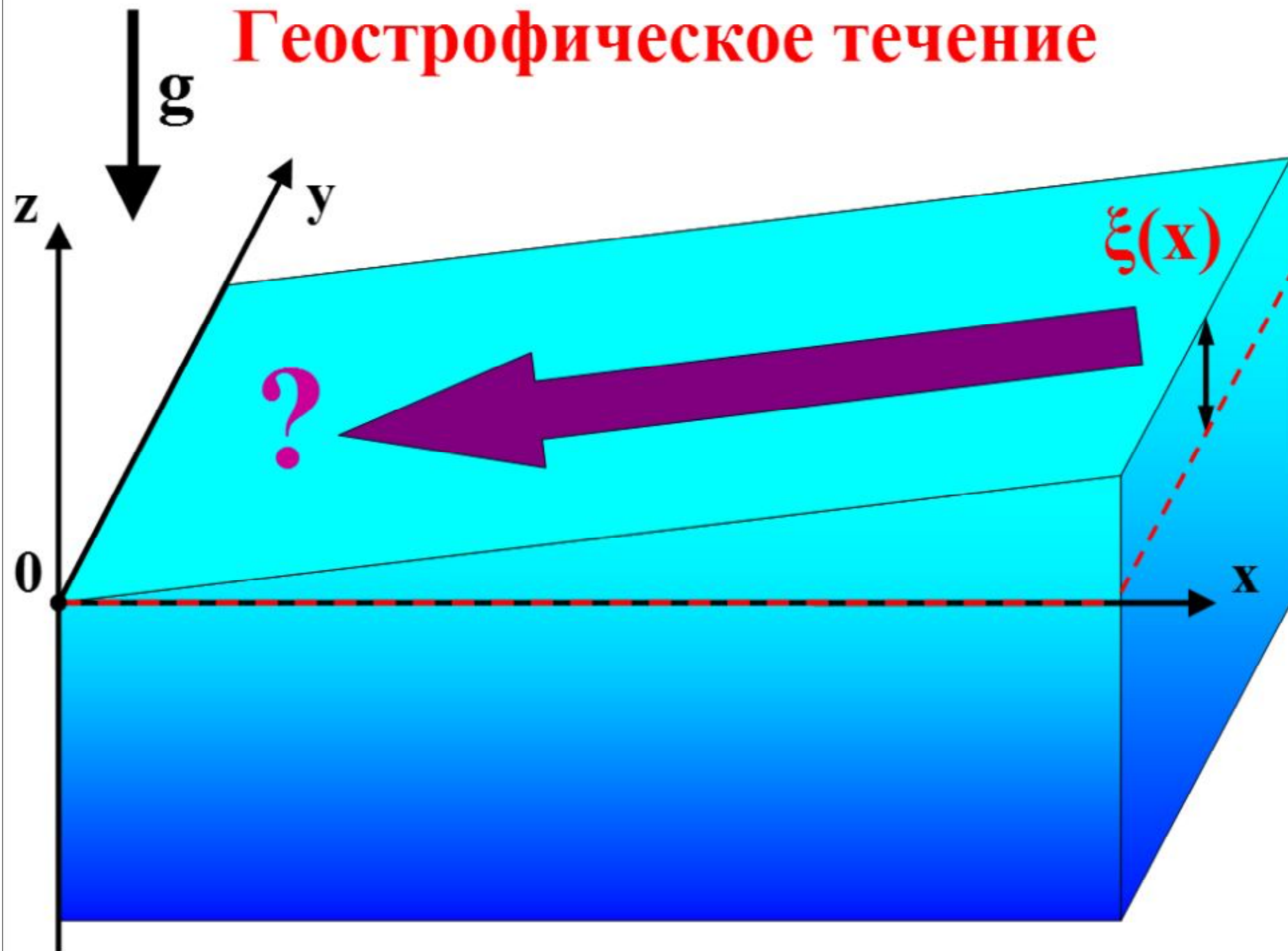
работает

$$R_o = \frac{1[\text{м/с}]}{10^5[\text{м}] \times 10^{-4}[\text{c}^{-1}]} \approx 0.1$$

плохо работает

$$R_o = \frac{1[\text{м/с}]}{10^4[\text{м}] \times 10^{-4}[\text{c}^{-1}]} \approx 1$$

Геострофическое течение



Геострофическое и гидростатическое приближения

$$x: -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + f v = 0 \quad f = 2\omega \sin \varphi$$

$$y: -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - f u = 0 \quad \vec{v} = (u, v)$$

$$p = p_{\text{атм}} + \rho_0 g (\xi - z)$$

$$z: -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0$$

$$\int_z^{\xi} dz$$

$$x : -g \frac{\partial \xi}{\partial x} + f v = 0$$

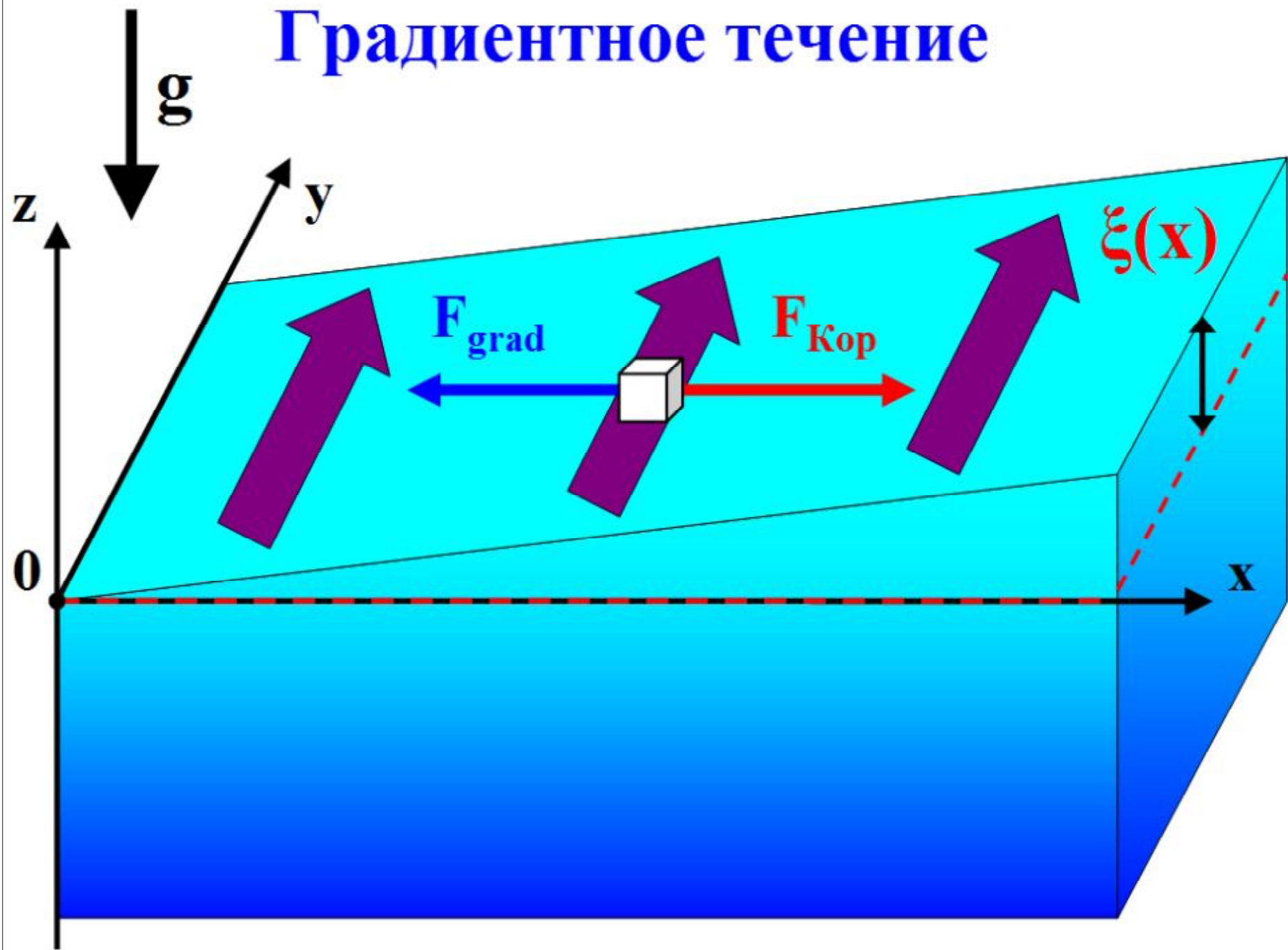
$$\zeta = \xi(\mathbf{x})$$

$$y : -g \frac{\partial \xi}{\partial y} - f u = 0$$

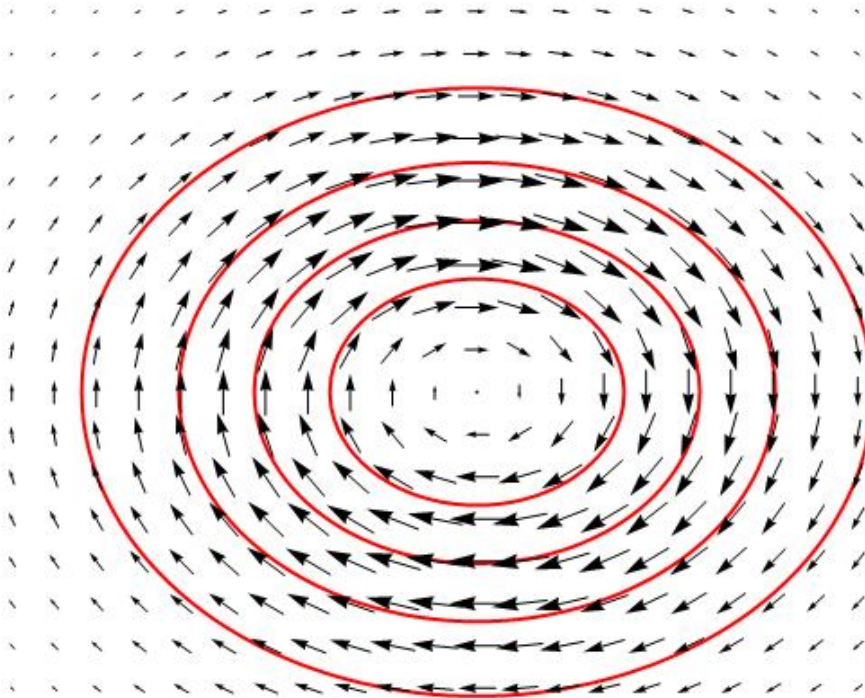
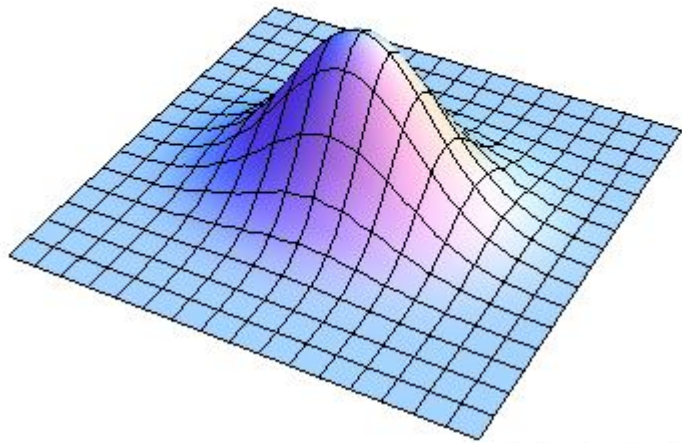
$$x : u = 0$$

$$y : v = \frac{g}{f} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Градиентное течение



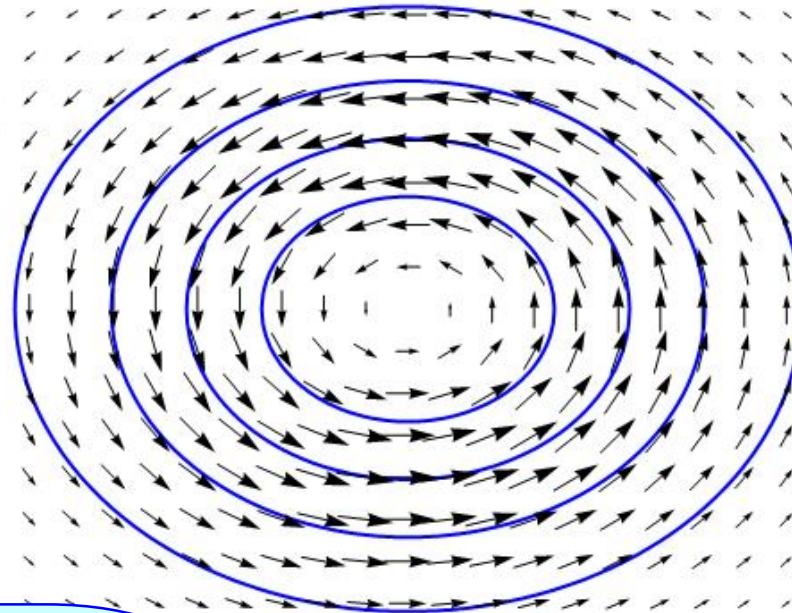
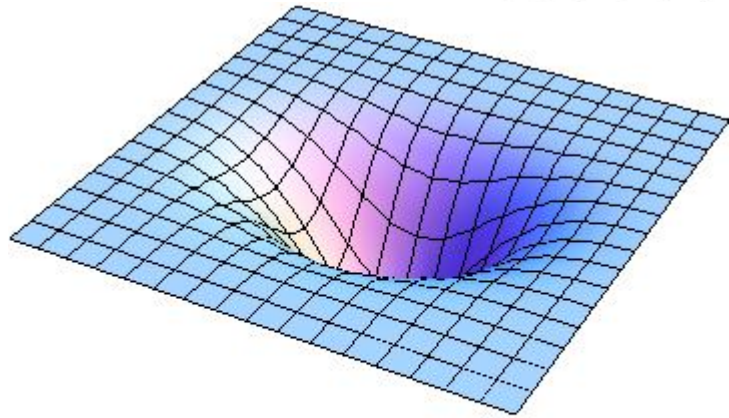
Геострофическое течение вблизи области **поднятия** уровня (Сев.полушарие)



**антициклонический
геострофический вихрь**

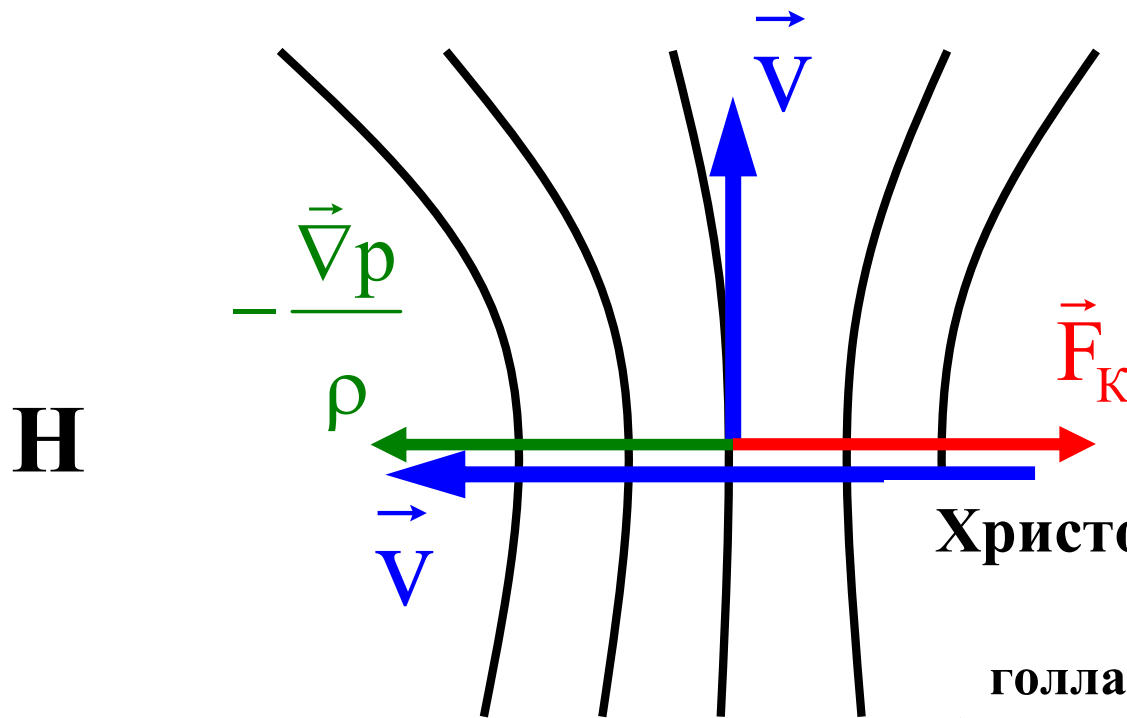
**по часовой стрелке в
сев.полушарии, в
южном полушарии – в
обратном направлении**

Геострофическое течение вблизи области **понижения** уровня (Сев.полушарие)



**циклонический
геострофический
вихрь**

Геострофический ветер

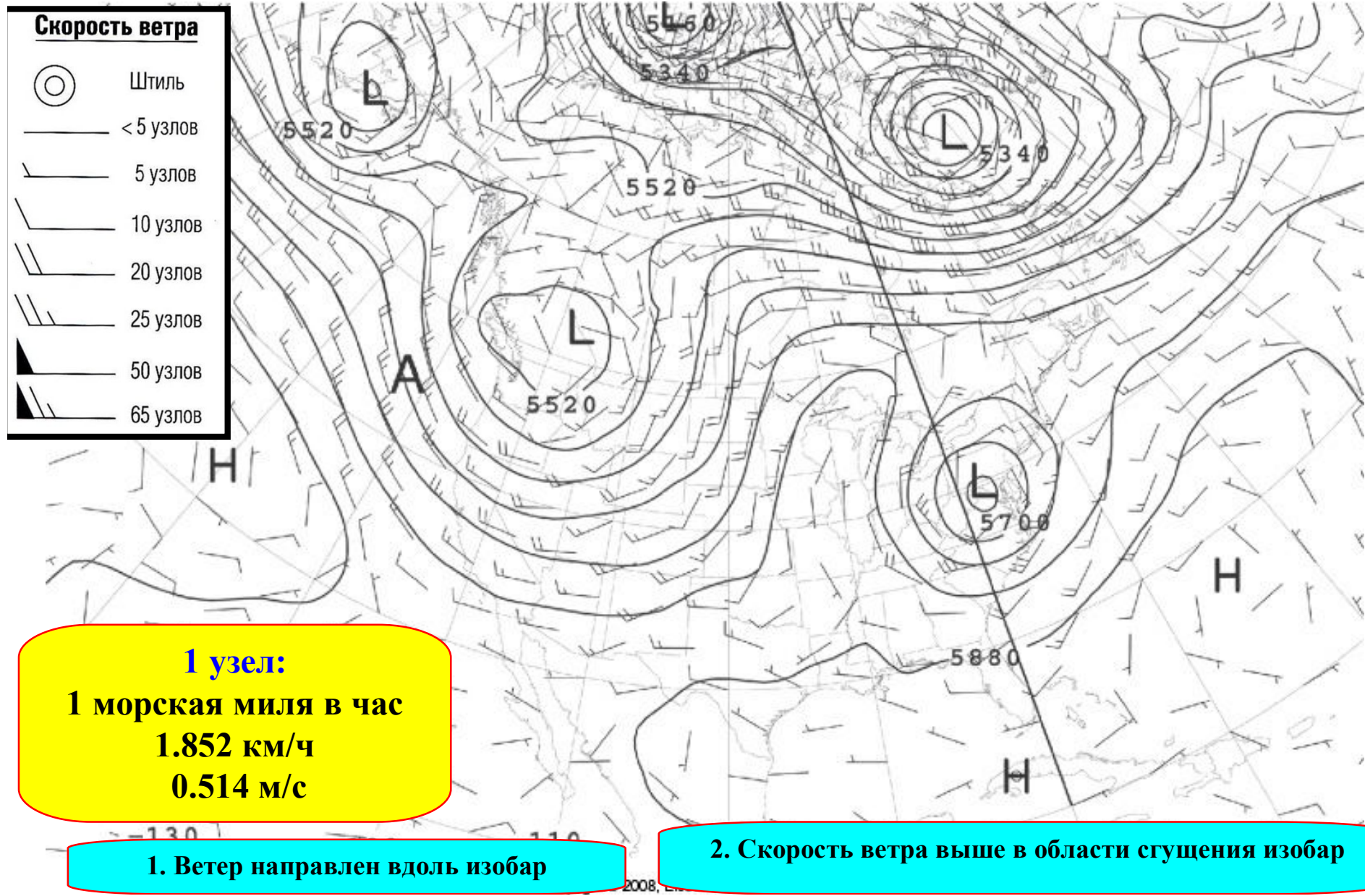


Христофор Бёйс-Баллот
1817-1890
голландский метеоролог

Правило Бейс-Балло, 1857 (Бёйс-Баллот):

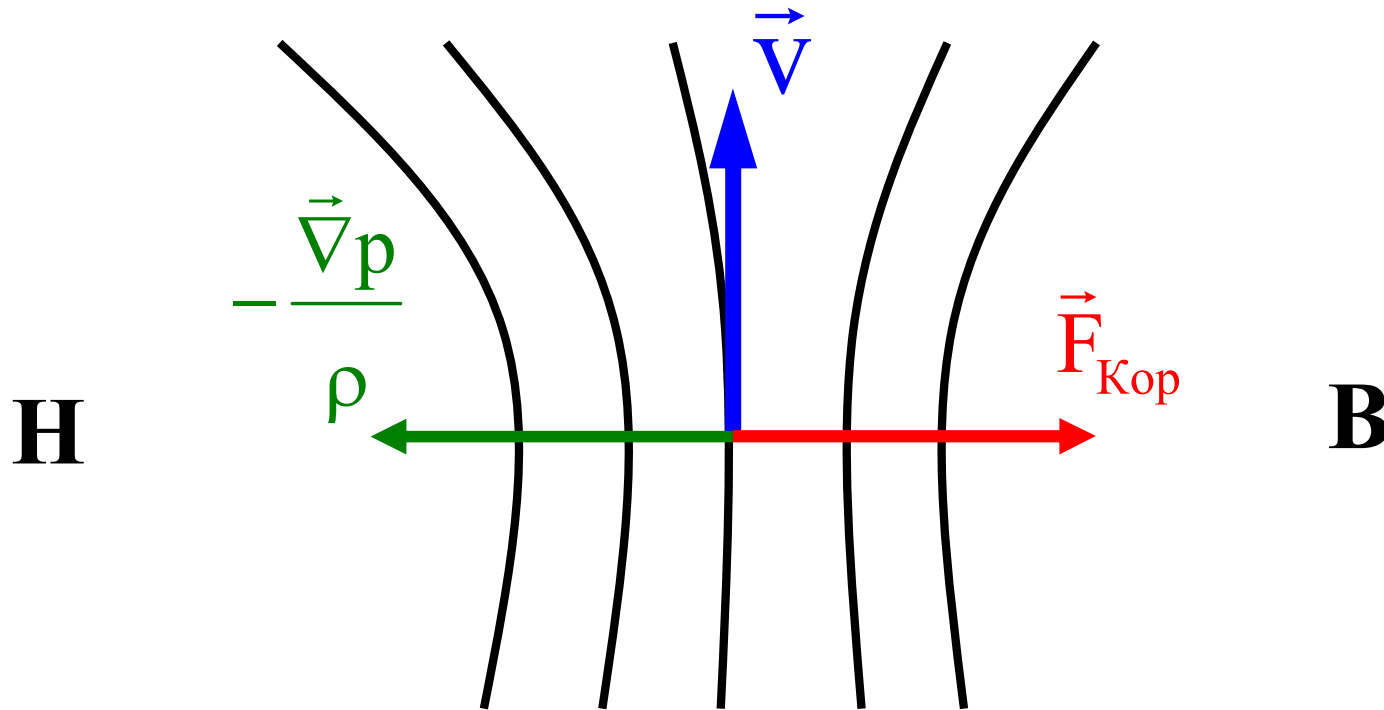
«Если в северном полушарии вы встанете спиной к ветру, зона депрессии будет слева от вас, а в южном полушарии – наоборот»

Поля атмосферного давления (изолинии) и скорости ветра на высоте 500 мбар (≈ 5.5 км)



Геострофический ветер/течение

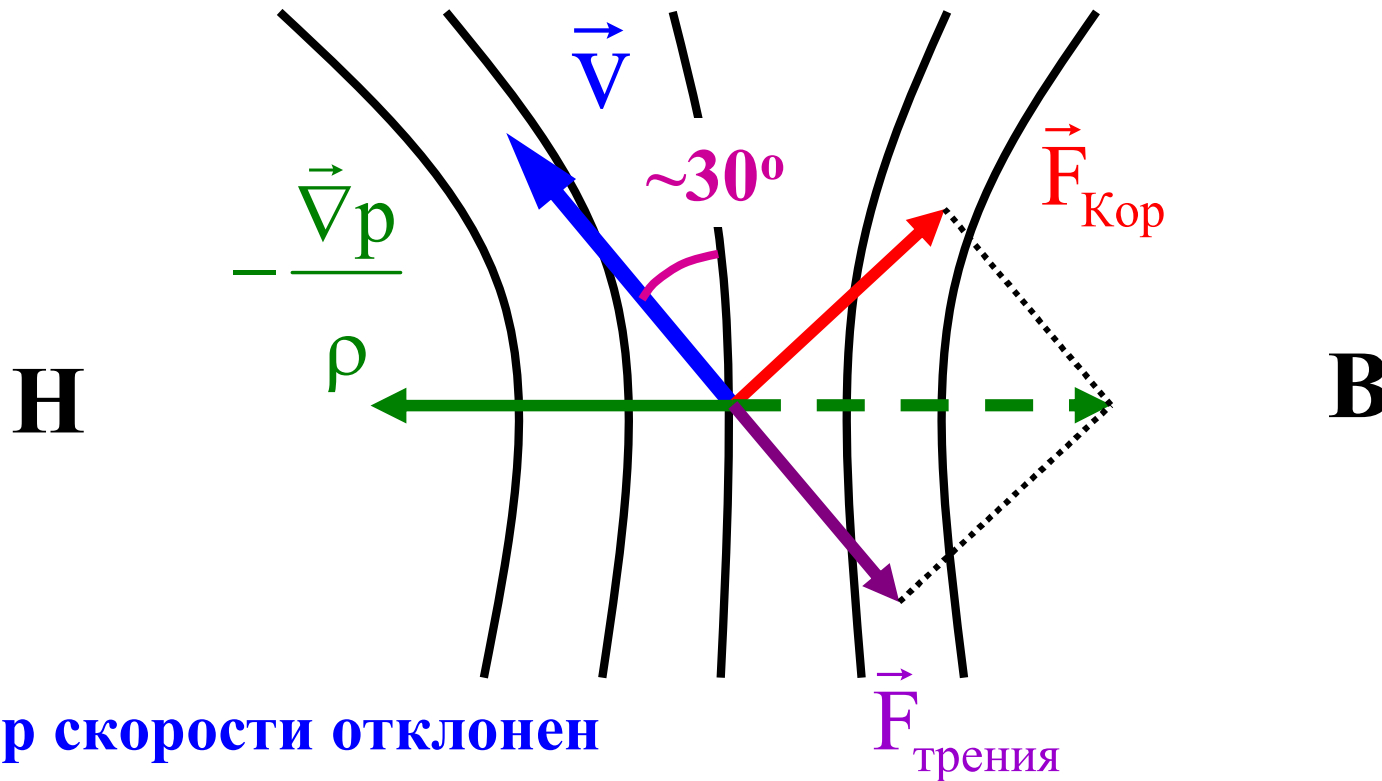
(Сев. полушарие)



**Движение строго
вдоль изобар!!!**

Ветер/течение с учетом сил трения

(Сев. полушарие)

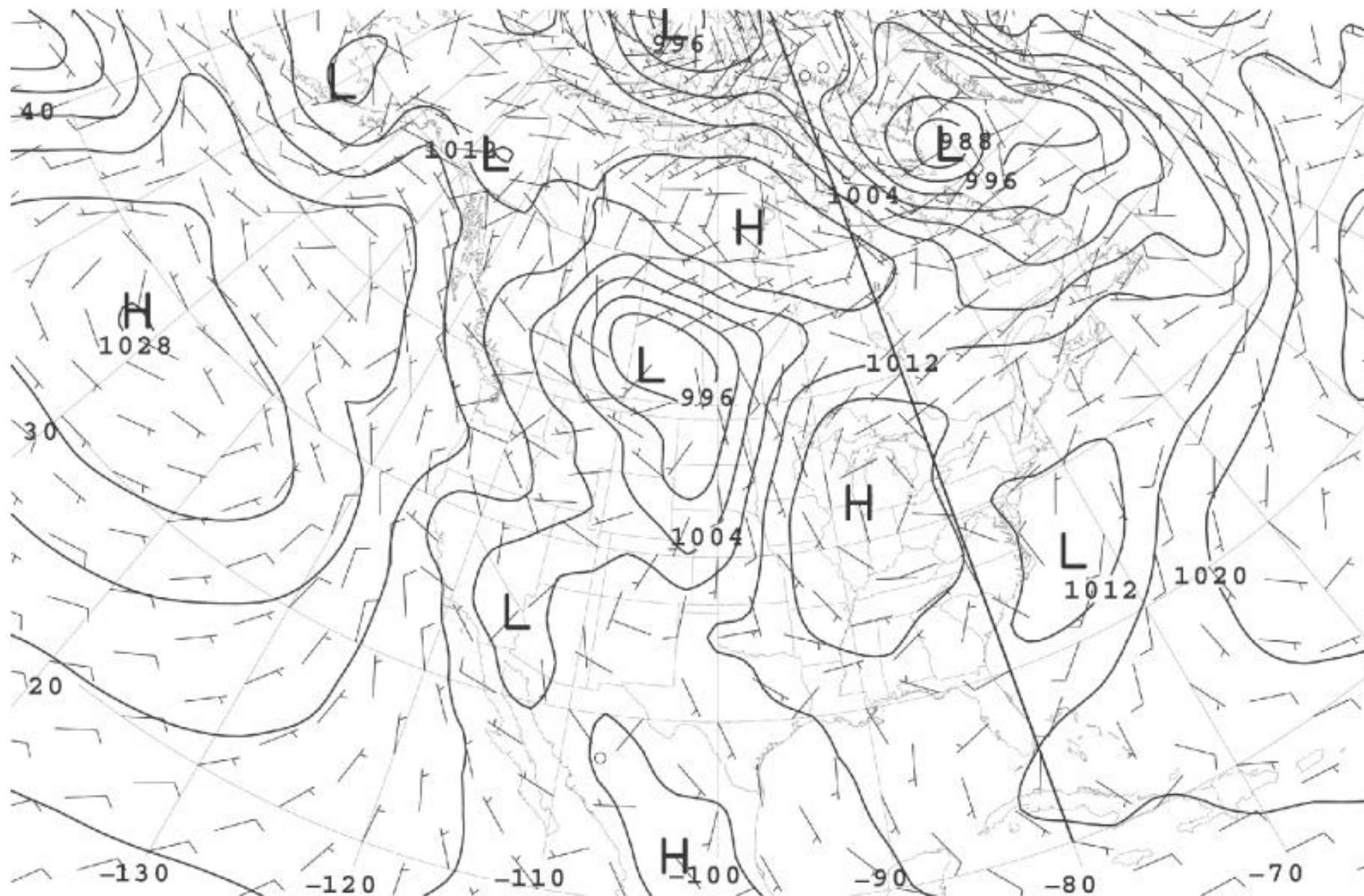


Вектор скорости отклонен
влево от изобары

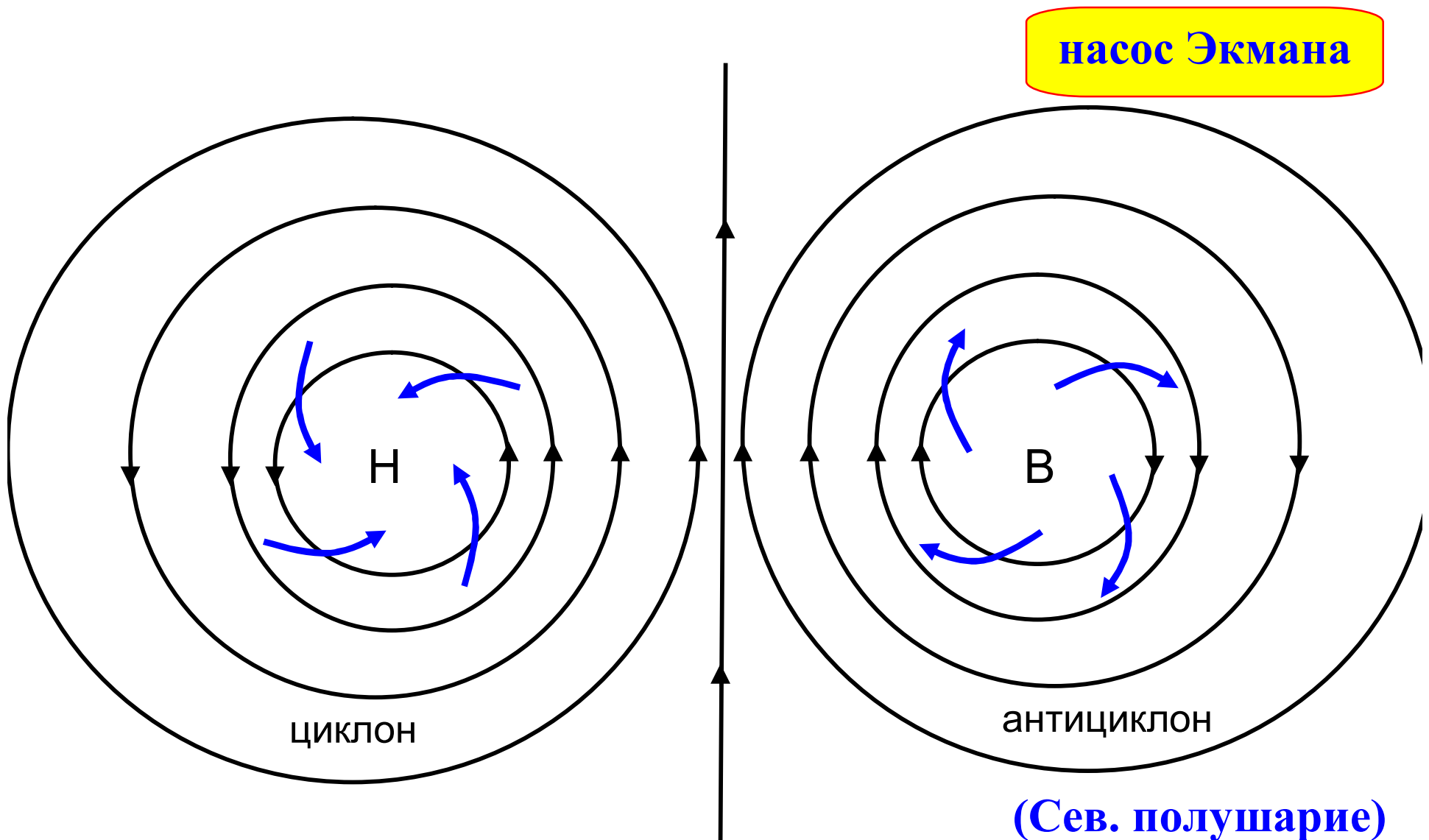
Отклонение существенно до
высот ~ 1500 м

Отклонение у поверхности
земли $\sim 30^\circ$

Поля атмосферного давления (изолинии) и скорости ветра у поверхности земли



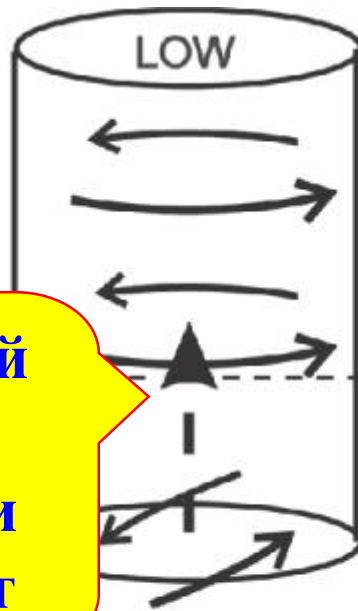
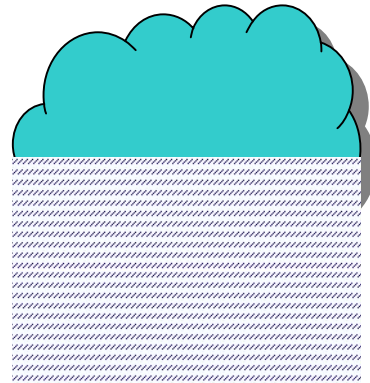
**У поверхности земли, где сила трения велика,
происходит заток воздуха в область низкого давления
и отток воздуха из области высокого давления**



Синоптические вихри

ЦИКЛОН

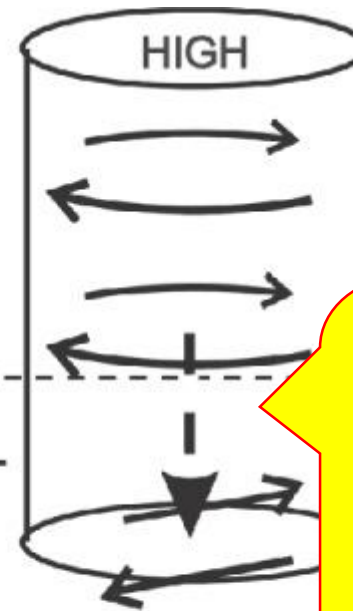
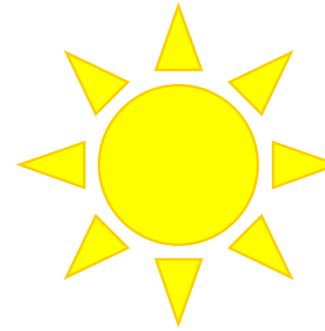
вращение
против
часовой
стрелки
(Сев.
полушарие)



Восходящий
поток со
скоростями
сотни м/сут

АНТИЦИКЛОН

вращение по
часовой
стрелке
(Сев.
полушарие)



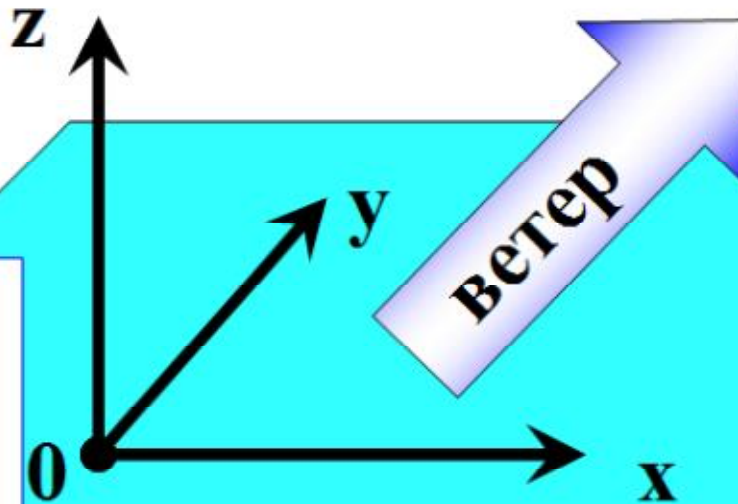
Нисходящий
поток со
скоростями от
десятков до
сотен м/сут

Задача Экмана о дрейфовом течении

течение, вызываемое ветром



Fridtjof Wedel-Jarlsberg Nansen
(1861 –1930)
Norwegian scientist



Vagn Walfrid Ekman
(1874-1954), a
Swedish physical
oceanographer

Задача поставлена Фритъофом Нансеном, который наблюдал необычный дрейф льда во время экспедиции на борту «Фрама» в Гренландском море

Предположения:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \rho = \text{const}$$

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div} \vec{v} = 0$$

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w = \text{const}$$

$$w(z = -H) = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 0$$

$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g}$$

$$x: \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$y: \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$z: \quad u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cancel{-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}} + 2\nu\omega \sin \varphi + \nu \left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0, \\ \cancel{-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}} - 2u\omega \sin \varphi + \nu \left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0, \\ -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 2v\omega \sin \varphi + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \\
 -2u\omega \sin \varphi + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0 \\
 -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \quad \Rightarrow \quad p(z) = p_{\text{atm}} - \rho g z
 \end{array} \right.$$

Граничные условия

Поверхность воды:

$$\rho \nu \frac{du}{dz} \Big|_{z=0} = 0$$

$$\rho \nu \frac{dv}{dz} \Big|_{z=0} = \tau$$

Поведение решения
на глубине:

$$u_{z \rightarrow -\infty} = 0$$

$$v_{z \rightarrow -\infty} = 0$$

Напряжение
трения ветра

Задача Экмана для океана бесконечной глубины

$$\begin{cases} u'' + v \cdot f / \nu = 0 \\ v'' - u \cdot f / \nu = 0 \end{cases}$$

Граничные условия:

поверхность ($z = 0$)

$$u' = 0$$

$$v' = \tau / \rho \nu$$

на глубине ($z = -\infty$)

$$u(-\infty) = 0$$

$$v(-\infty) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + \frac{f}{v} v = 0 \\ v'' - \frac{f}{v} u = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} Z = u + i v \\ u = \operatorname{Re}(Z) \\ v = \operatorname{Im}(Z) \end{array}$$

$$u'' + i v'' + \frac{f}{v} (v - i u) = 0$$

$$(u + i v)'' - i \frac{f}{v} (u + i v) = 0$$

$$Z'' - \alpha^2 Z = 0, \quad \text{где} \quad \alpha = \sqrt{i \cdot f / v}$$

$$Z = A e^{\alpha z} + \cancel{B e^{-\alpha z}}$$

$$\sqrt{i} = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$i = e^{i\pi/2}$$

$$\alpha = (1+i) \sqrt{\frac{f}{2v}}$$

$$\operatorname{Re}(\alpha) > 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} Z = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$Z = A e^{\alpha z}$$

$$\alpha = (1+i) \sqrt{\frac{f}{2\nu}} = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{f}{\nu}}$$

удовлетворяем г.у. на поверхности (при $z = 0$)

$$Z' = A\alpha = u' + iv' = i \frac{\tau}{\rho\nu}$$

$$A = i \frac{\tau}{\rho\nu\alpha} = \frac{e^{i\pi/2} \tau}{\rho\nu e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{f}{\nu}}} = \frac{e^{i\pi/4} \tau}{\rho\nu \sqrt{\frac{f}{\nu}}}$$

Решение задачи Экмана:

глубина Экмана

$$Z = \frac{e^{i\pi/4} \tau}{\rho \nu \sqrt{f/\nu}} e^{(1+i)\sqrt{\frac{f}{2\nu}} z}$$

$$d = \sqrt{2\nu/f}$$

$$V_0 = \frac{\tau d}{\sqrt{2} \rho \nu}$$

$$Z = V_0 e^{(1+i)\frac{z}{d} + i\frac{\pi}{4}} = V_0 e^{\frac{z}{d}} e^{i\left(\frac{z}{d} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$u = \operatorname{Re}(Z) = V_0 e^{z/d} \cos(z/d + \pi/4)$$

$$v = \operatorname{Im}(Z) = V_0 e^{z/d} \sin(z/d + \pi/4)$$

Спираль Экмана

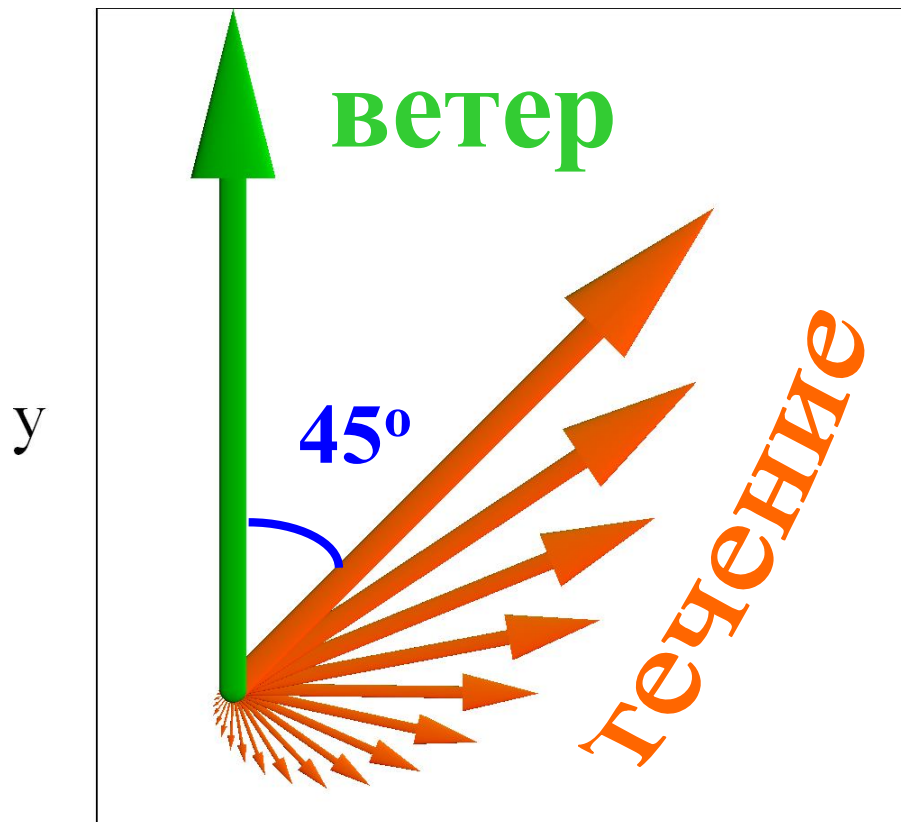
$$u(z) = V_0 e^{z/d} \cos(z/d + \pi/4)$$

$$v(z) = V_0 e^{z/d} \sin(z/d + \pi/4)$$

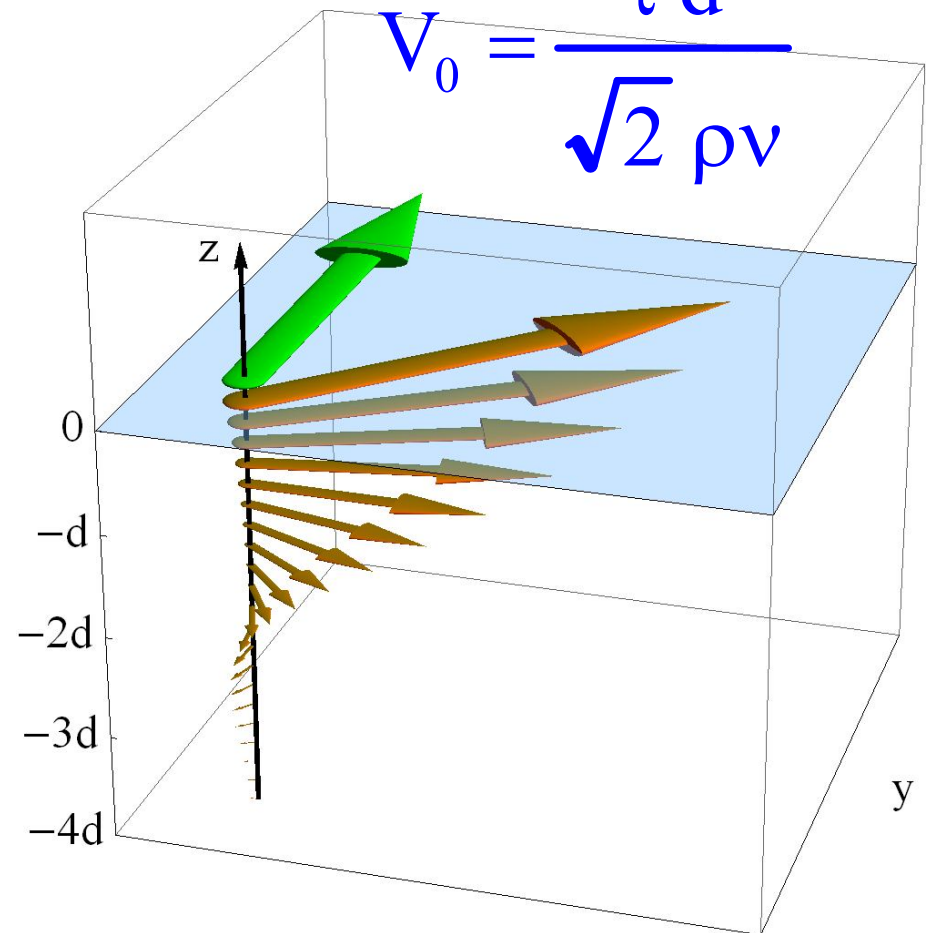
глубина Экмана

$$d = \sqrt{2\nu/f}$$

$$V_0 = \frac{\tau d}{\sqrt{2} \rho \nu}$$



x



x

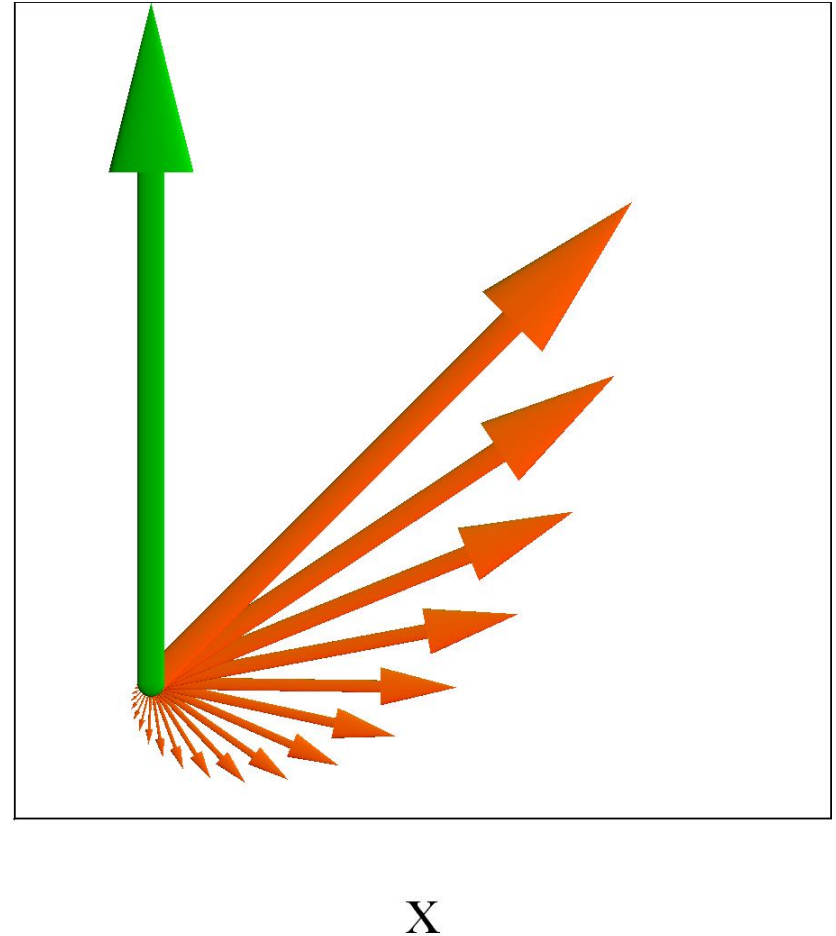
Направление интегрального переноса вод

$$u(z) = V_0 e^{z/d} \cos(z/d + \pi/4)$$

$$v(z) = V_0 e^{z/d} \sin(z/d + \pi/4)$$

$$\int_{-\infty}^0 u(z) dz = \frac{V_0 d}{\sqrt{2}} > 0 \quad y$$

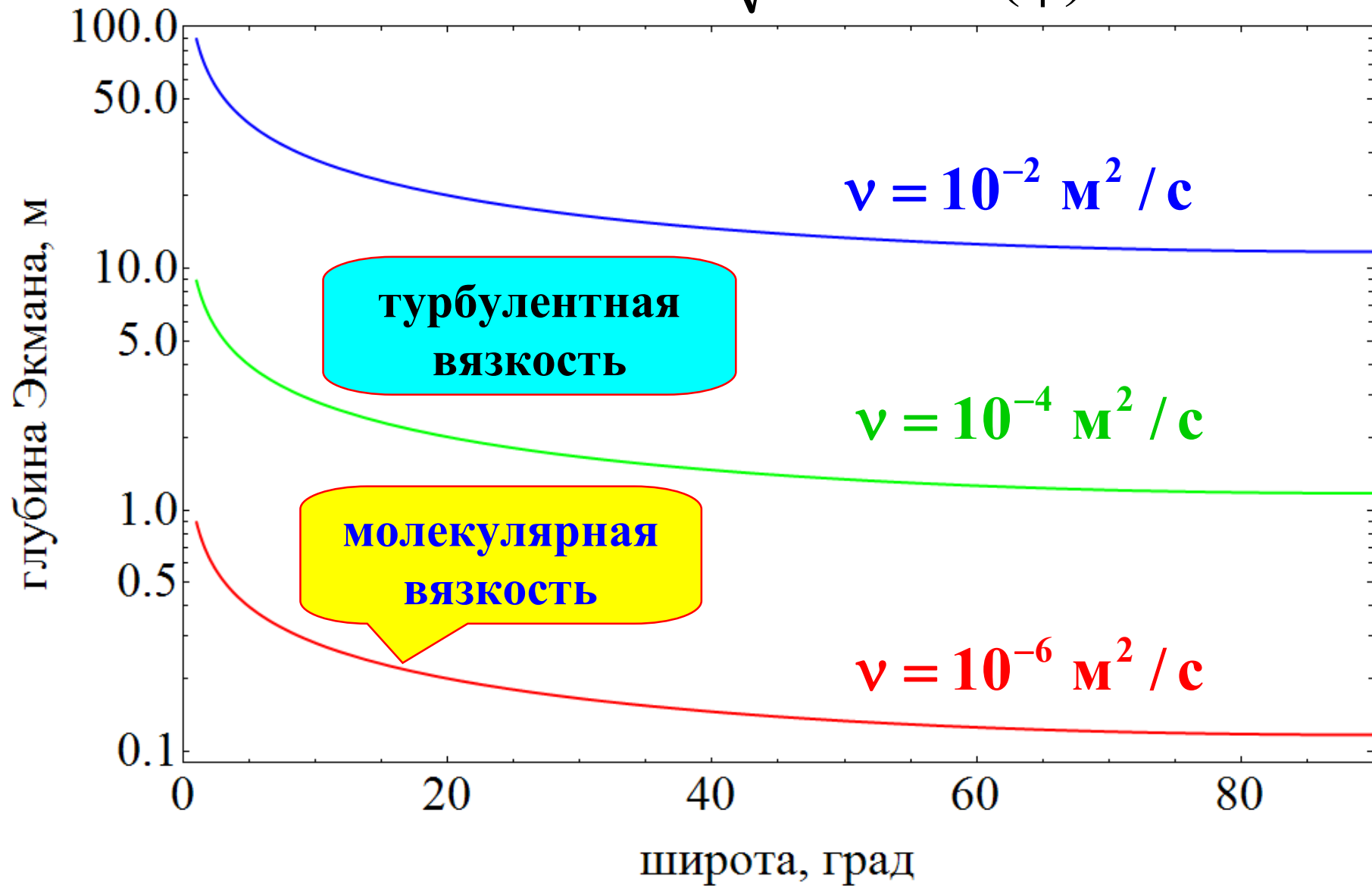
$$\int_{-\infty}^0 v(z) dz = 0$$



**Интегральный перенос вод
перпендикулярен направлению ветра!!!**

Глубина Экмана

$$d = \sqrt{2\nu / f} = \sqrt{\nu / \omega \sin(\varphi)}$$



Задача Экмана для океана

конечной глубины

$$\begin{cases} u'' + v \cdot f / \nu = 0 \\ v'' - u \cdot f / \nu = 0 \end{cases}$$

Граничные условия:

поверхность ($z = 0$)

$$u' = 0$$

$$v' = \tau / \rho \nu$$

дно ($z = -H$)

$$u(-H) = 0$$

$$v(-H) = 0$$

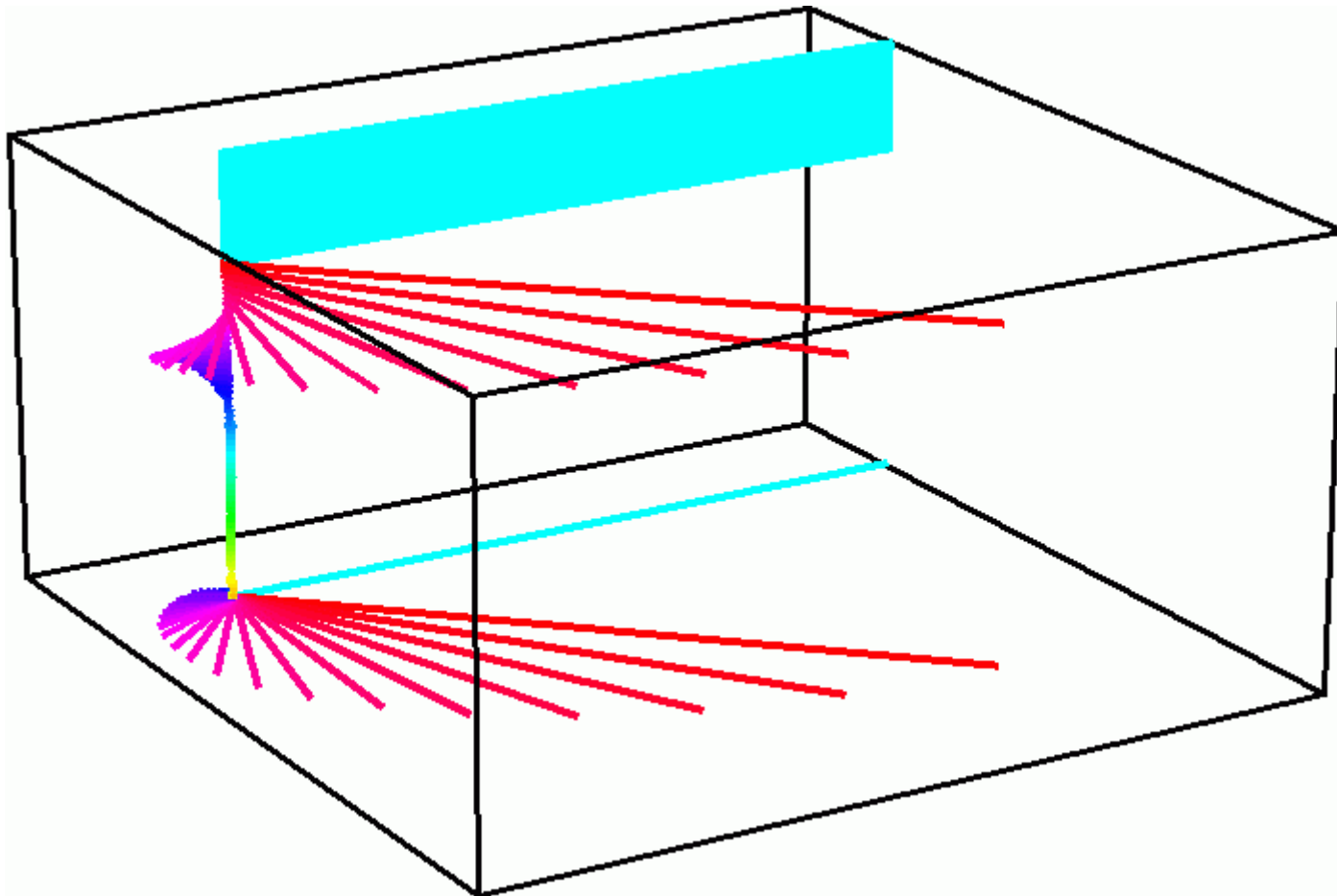
условие
прилипания

$$Z'' - \alpha^2 Z = 0, \quad \text{где} \quad \alpha = \sqrt{i \cdot f / v}$$

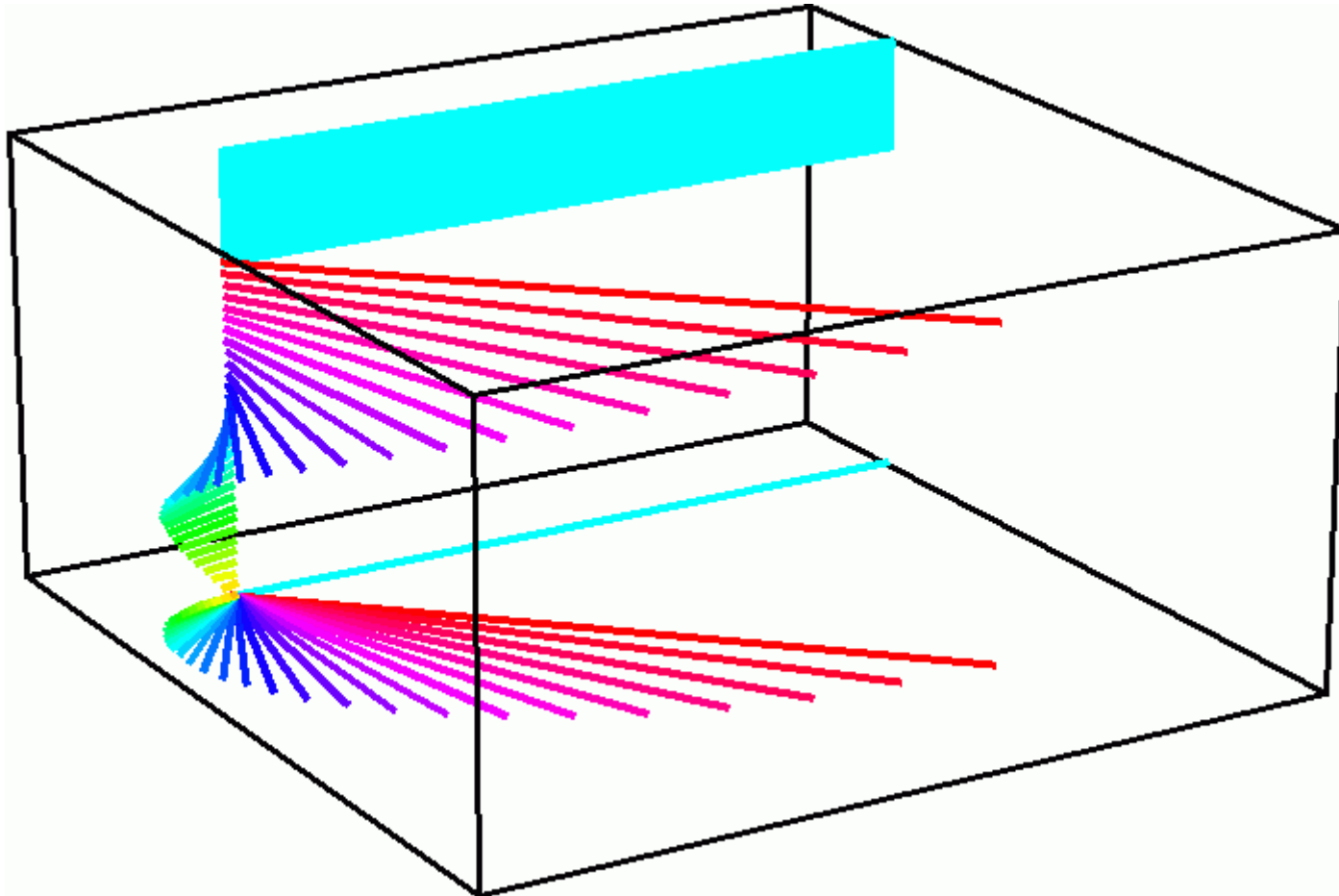
$$Z = A e^{\alpha z} + B e^{-\alpha z}$$

$$A \neq 0 \quad B \neq 0$$

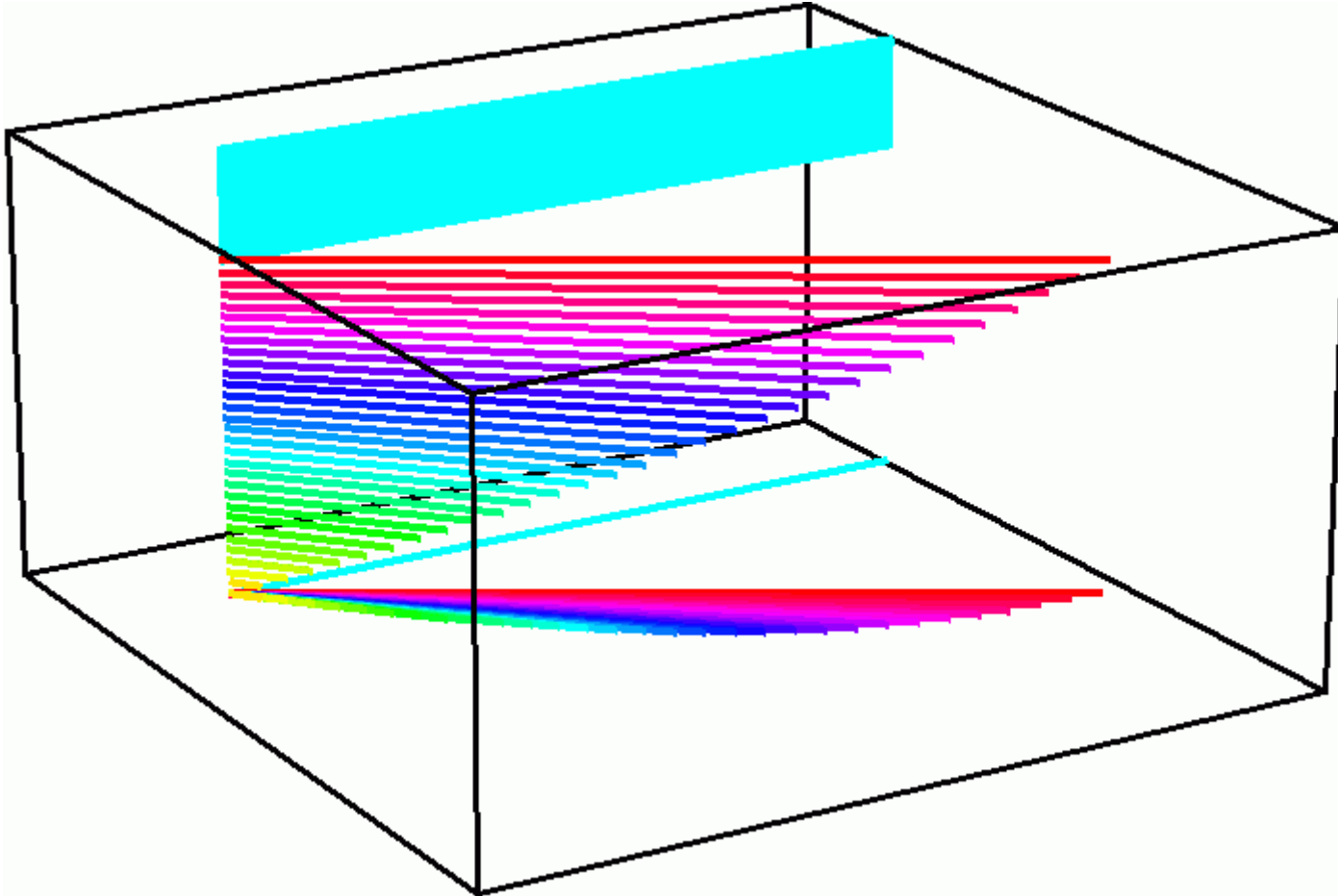
H=10d



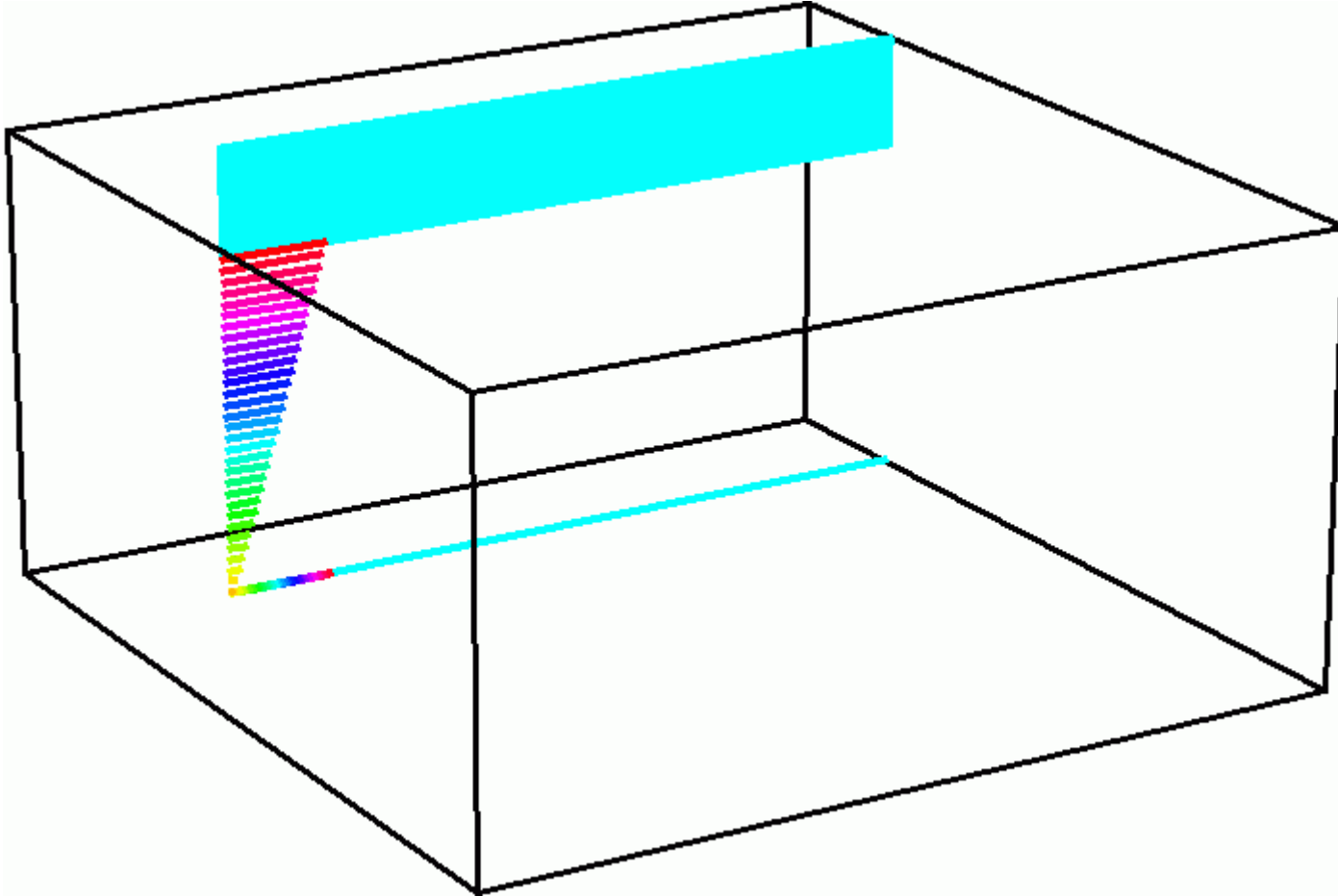
H=3d



$$H=d$$

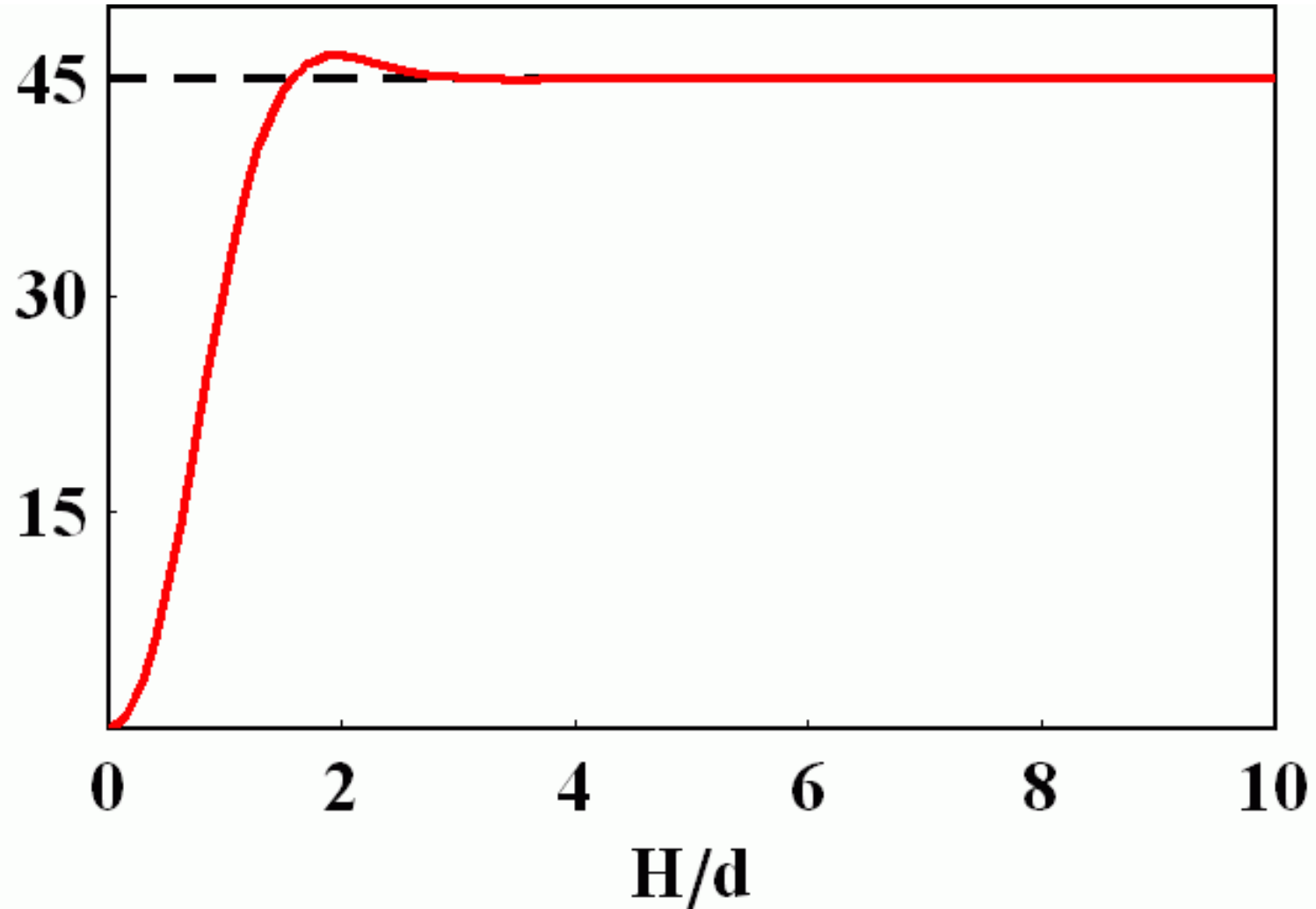


$$H=d/10$$

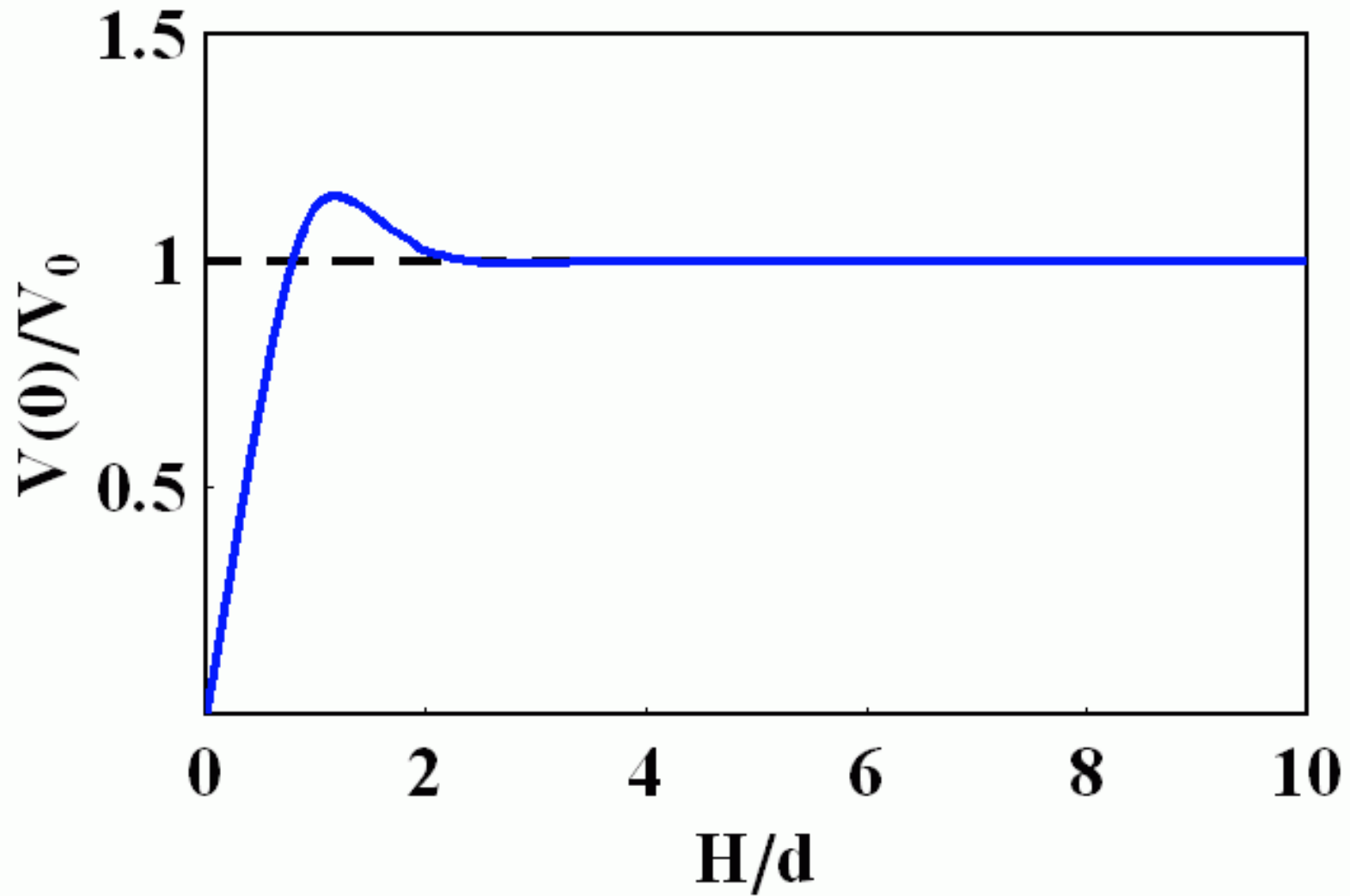


Течение на поверхности

УГОЛ «течение-ветер»



Течение на поверхности



Влияние глубины океана на интегральный перенос

