# Введение в физику гидросферы

## 2024 Лекция №9

Носов Михаил Александрович

*кафедра физики моря и вод суши*

*отделение геофизики*

*физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова*

# Математическое описание волновых движений

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{\left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v}} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + \cancel{2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right]} \\
\qquad\qquad + \nu \Delta \vec{v} + \cancel{\left(\varsigma + \dfrac{\nu}{3}\right)\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{v}} \\
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho\,\vec{v}\right) = 0
\end{cases}
$$

# Система уравнений для описания линейных волн без учета вращения Земли и сил вязкого трения

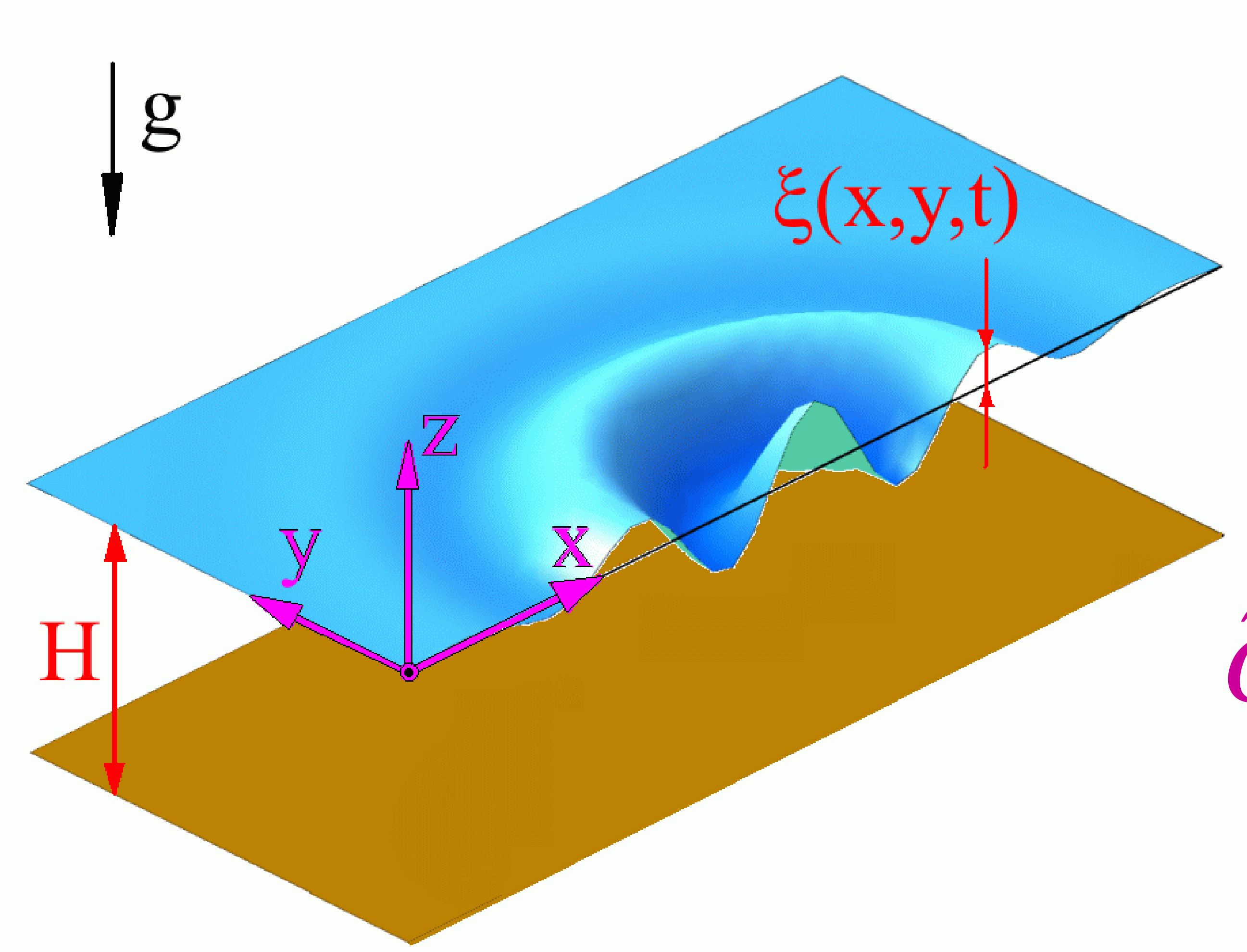
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \end{cases}$$

**Гравитационные волны**

**Акустические волны**

$$\vec{v} \equiv (u, v, w)$$

# Постановка задачи о поверхностных гравитационных волнах




$$H = \mathrm{const}$$

**Граничные условия:**

**поверхность "вода-воздух"**

$$p = p_{\text{атм}}$$

$$\partial\xi / \partial t = w$$

**поверхность дна**

$$w = 0$$

# Линейная теория длинных гравитационных волн или теория “мелкой воды” ( λ >> H )

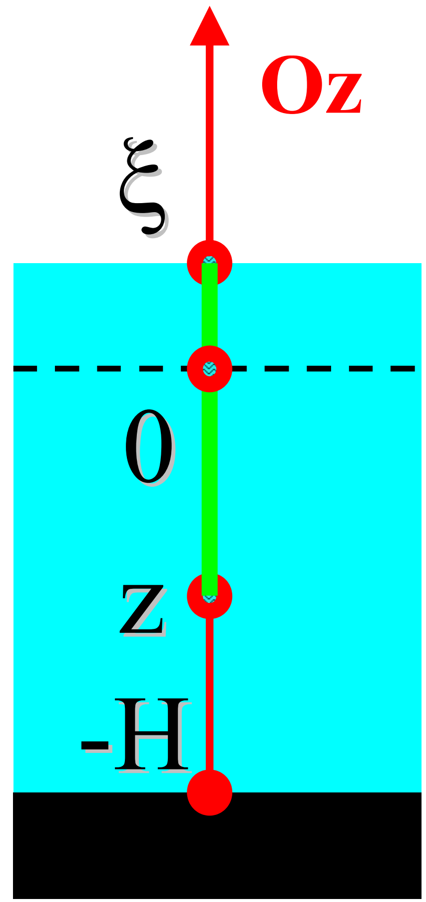
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad |w| \sim \frac{H}{\lambda} |u_{\text{гориз.}}|$$

$$\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

приближение гидростатики

$$p(\xi) = p_{\text{атм}} = \text{const}$$

$$\int_z^{\xi} dz \; \Bigg| \; \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, g$$




$$p(\xi) - p(z) = -\rho g \xi + \rho g z$$

$$p(x, y, z, t) = p_{\text{атм}} + \rho g \xi(x, y, t) - \rho g z$$

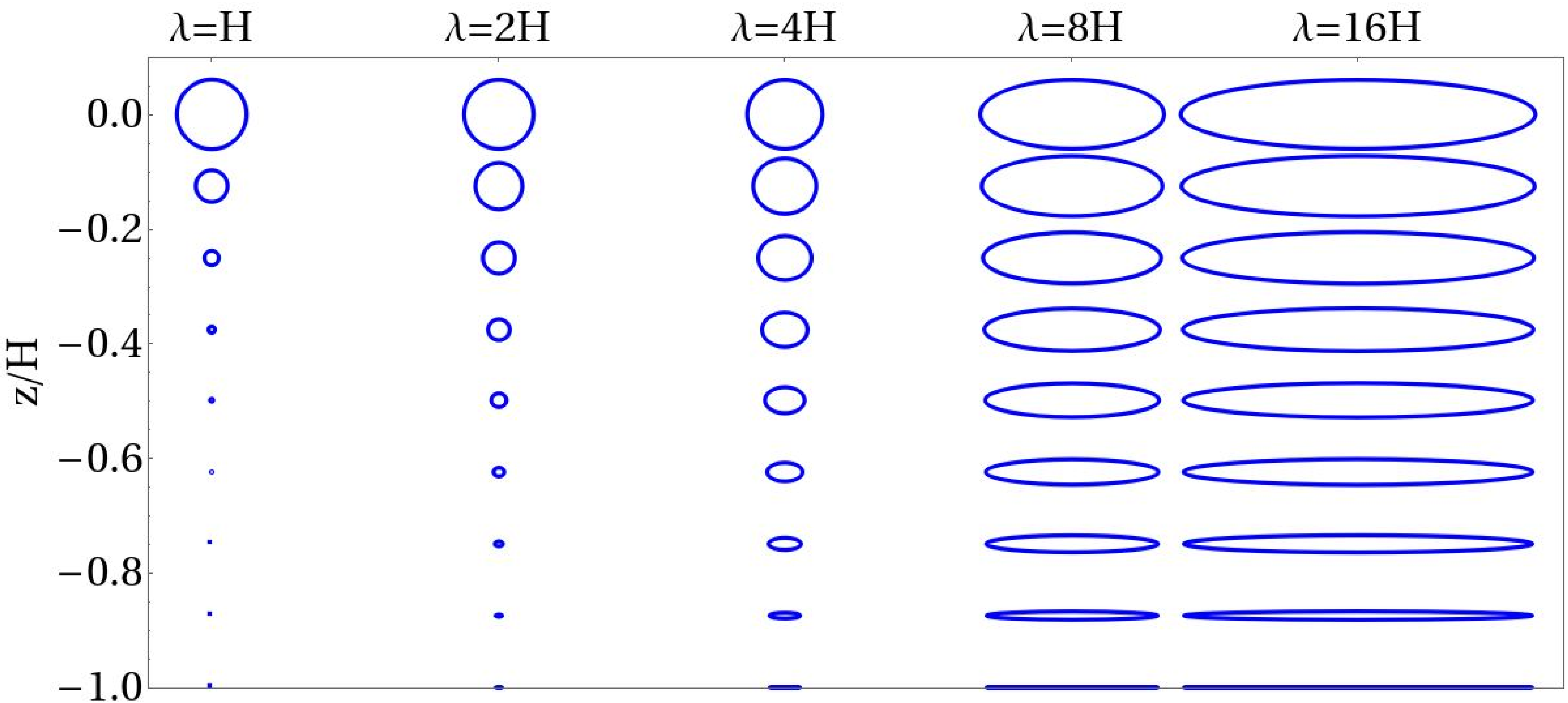
$$p(x, y, z, t) = p_{\text{атм}} + \rho g \xi(x, y, t) - \rho g z$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$(u, v) \neq f(z)$$

# Траектории частиц в поверхностных волнах малой амплитуды



$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \Bigg| \int_{-H}^{\xi} dz$$

$$|\xi| << H$$

$$(H+\cancel{\xi})\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+w(\xi)-w(-H)=0$$

$$\mathbf{0}$$

$$H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial \xi}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -g \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} = -g \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$

$$H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t}\right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

# Волновое уравнение для описания длинных гравитационных волн

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \underset{c^2}{gH}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right)$$

**Смещение поверхности воды**

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \xi$$

$$c = \sqrt{gH}$$

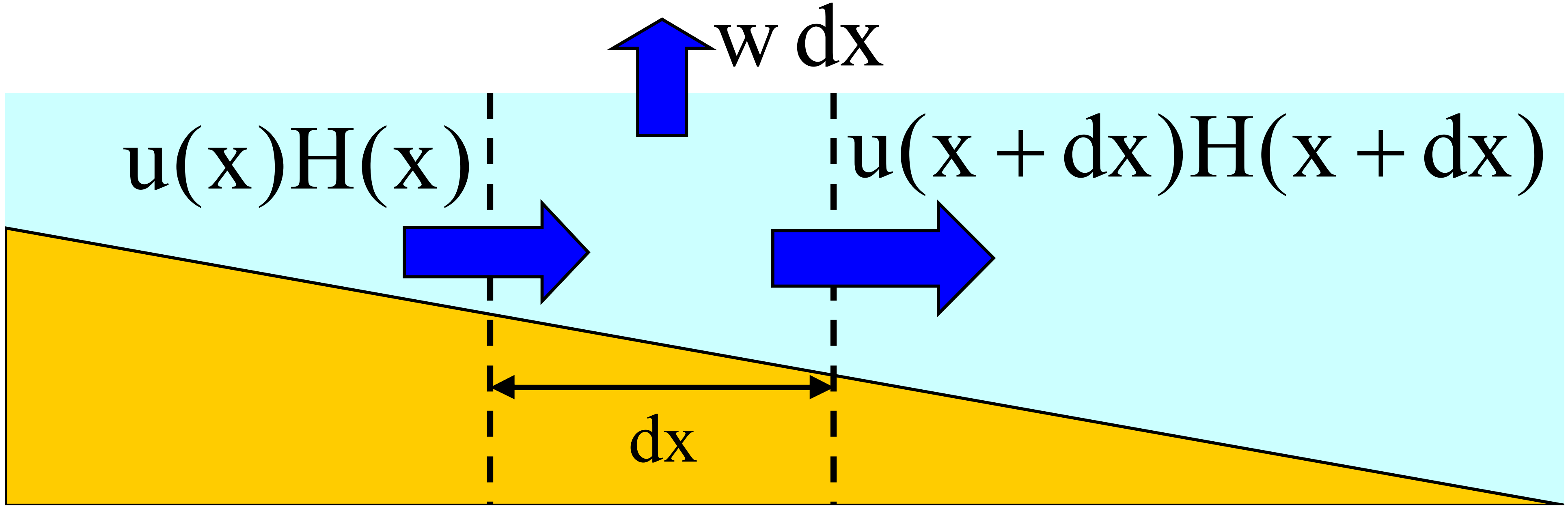
**скорость длинных волн**

## Случай переменной глубины: H=f(x,y)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad \Rightarrow \mathrm{div}\vec{V}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$\vec{V} \equiv (u, v)$ **- вектор горизонтальной скорости**

div **- горизонтальный оператор**



$$\operatorname{div}\vec{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Big| \int_{-H}^{\xi} dz$$

$$\operatorname{div}\left[\vec{V}(H + \cancel{\xi})\right] + w(\xi) - w(-H) = 0$$

$$\operatorname{div}\left[H\vec{V}\right] + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \quad \Big| \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -g\vec{\nabla}\xi \quad \times H, \operatorname{div}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

**линейные уравнения мелкой воды**

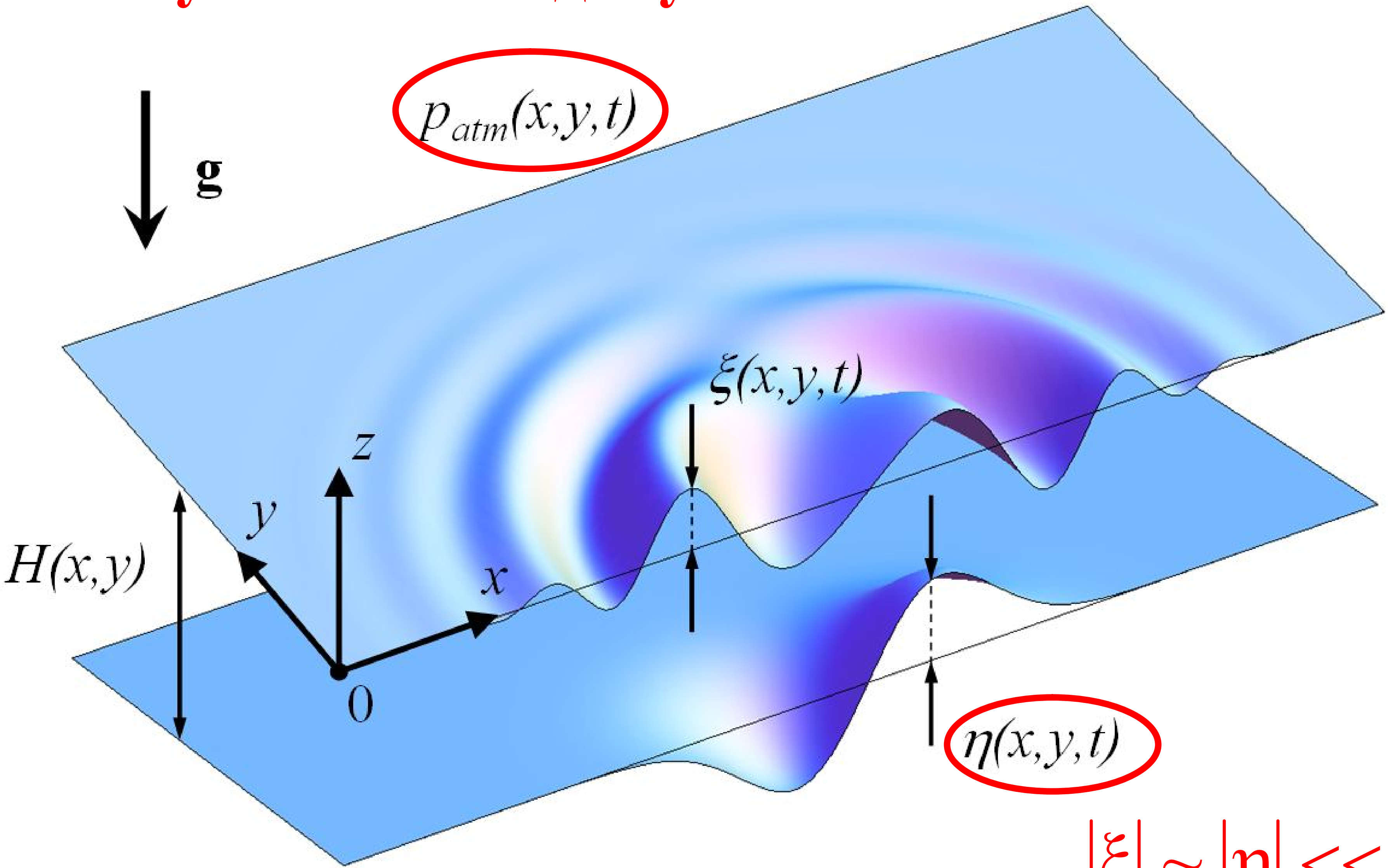
# Волновое уравнение для описания длинных гравитационных волн в бассейне переменной глубины

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \operatorname{div}\left(gH\vec{\nabla}\xi\right)$$

квадрат
скорости
длинных
волн

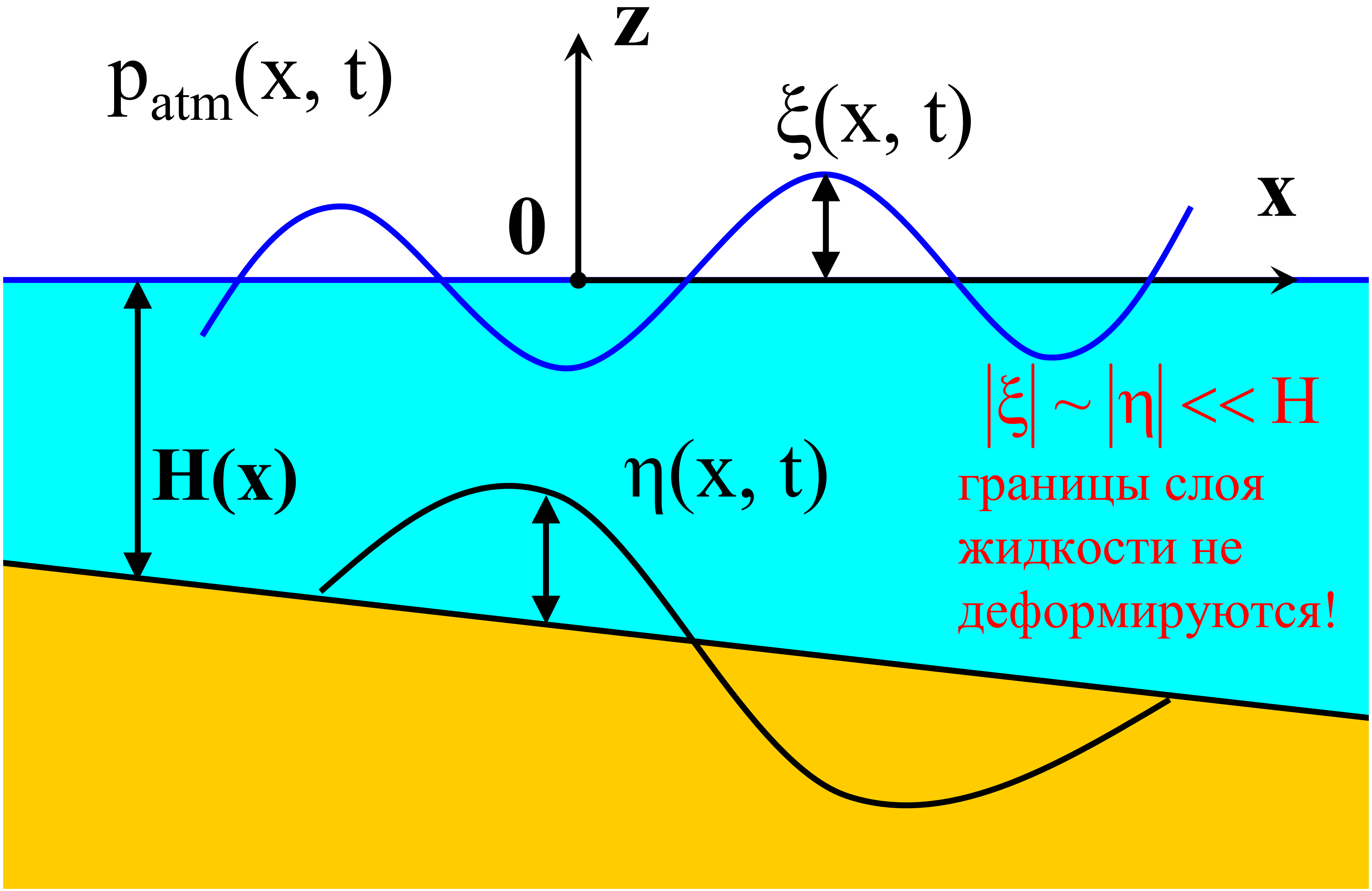
# Математическая постановка 3D задачи

**условжним задачу**



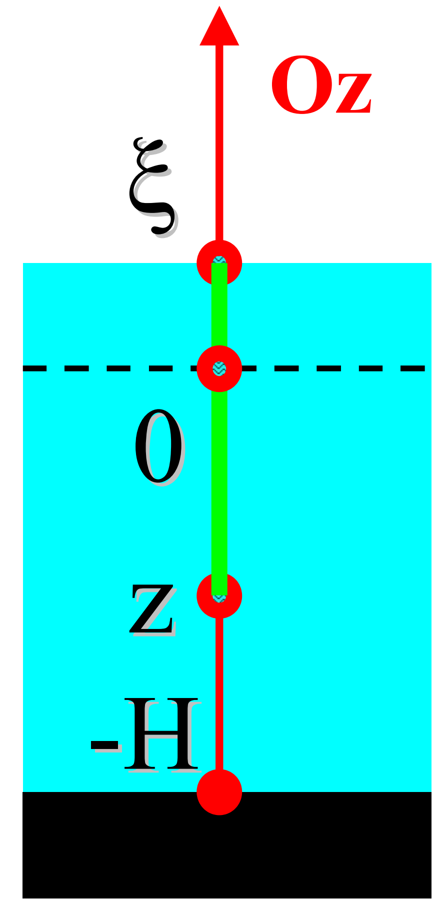

$$|\xi| \sim |\eta| << H$$

# Постановка 2D задачи



$$p(\xi) = p_{atm}(x, t)$$

$$\int_{z}^{\xi} dz \;\Big|\; \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, g$$




$$p(\xi) - p(z) = -\rho g(\xi - z)$$

$$p(x, z, t) = p_{atm}(x, t) + \rho g \xi(x, t) - \rho g z$$

$$p(x,z,t) = p_{atm}(x,t) + \rho g \xi(x,t) - \rho g z$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{atm}}{\partial x} - g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$u \neq f(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Big| \quad \int_{-H+\eta}^{\xi} dz$$

$$|\xi| \sim |\eta| << H$$

$$\frac{\partial[u(H - \cancel{\eta} + \cancel{\xi})]}{\partial x} + w(\xi) - w(-H + \cancel{\eta}) = 0$$

$$\frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

# Уравнения линейной 1D теории мелкой воды (длинных волн)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{atm}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (uH)}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

**волны формируются неоднородностями атмосферного давления и движениями дна**

# Переход к волновому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{atm}}{\partial x} \qquad \times H \quad \Big| \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (uH)}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \qquad \Big| \frac{\partial}{\partial t}$$

# Переход к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 (uH)}{\partial t \partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left( gH \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left( H \frac{\partial p_{atm}}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (uH)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

# Неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(gH\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial p_{atm}}{\partial x}\right)$$

**источники волн**

**при H=const, η=const, $p_{atm}$=const**

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad c = \sqrt{gH}$$

**скорость длинных волн**

**Решение:** $\xi(x,t) = f(x \pm c \cdot t)$

# Неоднородное 1D волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \Phi(x,t)$$

**Аналитическое решение:**

$$\text{при н.у. } t = 0: \qquad \xi = 0, \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

$$\xi(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\hat{t})}^{x+c(t-\hat{t})} \Phi(\hat{x},\hat{t})\, d\hat{x}\, d\hat{t}$$

# Бегущая подвижка дна

$$\boxed{\eta(x,t) = f(x - vt)}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\xi(x,t) = C_b\, f(x - vt)}$$

$$v^2 C_b f'' - c^2 C_b f'' = v^2 f''$$

**Амплитуда и знак (!) возмущения на поверхности воды определяются соотношением скоростей «v» и «c»**

$$C_b = \frac{v^2}{v^2 - c^2}$$

$$\xi(x,t) = \frac{v^2}{v^2 - c^2} f(x - vt)$$

$$c = \sqrt{gH}$$

# Бегущее возмущение атмосферного давления

$$\boxed{p_{atm}(x,t) = f(x - vt)}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{H}{\rho} \frac{\partial^2 p_{atm}}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\xi(x,t) = C_p\, f(x - vt)}$$

$$v^2 C_p f'' - c^2 C_p f'' = \frac{H}{\rho} f''$$

$$\Rightarrow \quad C_p = \frac{H/\rho}{v^2 - c^2}$$

$$\xi(x,t) = \frac{H/\rho}{v^2 - c^2} f(x - vt)$$

**Амплитуда и знак (!) возмущения на поверхности воды определяются соотношением скоростей «v» и «c»**

**дно**

$$C_b = \frac{v^2}{v^2 - c^2} = \frac{Fr}{Fr - 1}$$

**атмосфера**

$$C_p = \frac{H/\rho}{v^2 - c^2} = \frac{1}{\rho g (Fr - 1)}$$