Введение в физику гидросферы

2024 Лекция №10

Носов Михаил Александрович

кафедра физики моря и вод суши

отделение геофизики

физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова

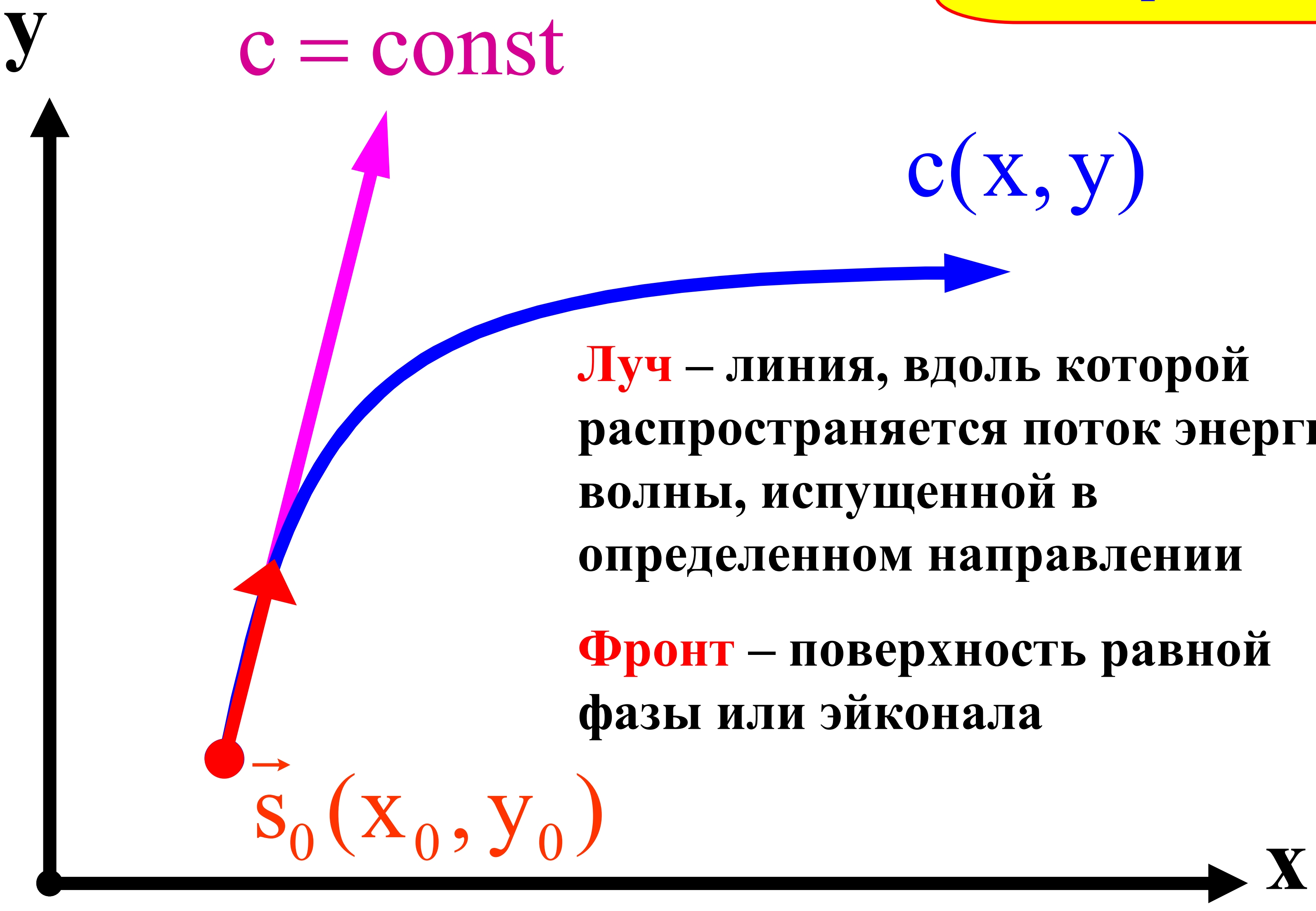
Длинные гравитационные волны в бассейне переменной глубины

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathrm{div}\left(gH\,\vec{\nabla}\,\xi\right)$$

квадрат скорости длинных волн

Приближение «геометрической оптики»

глубина $\quad H \ll \lambda \ll L \quad$ масштаб неоднородностей



Луч – линия, вдоль которой распространяется поток энергии волны, испущенной в определенном направлении

Фронт – поверхность равной фазы или эйконала

Уравнение эйконала (расчет изохрон)

$$(\nabla\tau)^2 = c^{-2} \quad \Longleftrightarrow \quad \tau_x{}^2 + \tau_y{}^2 = \frac{1}{gH(x,y)}$$

Уравнения для расчета лучей

$$\frac{dk_i}{dt} = -\frac{\partial\omega}{\partial x_i}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial\omega}{\partial k_i}$$

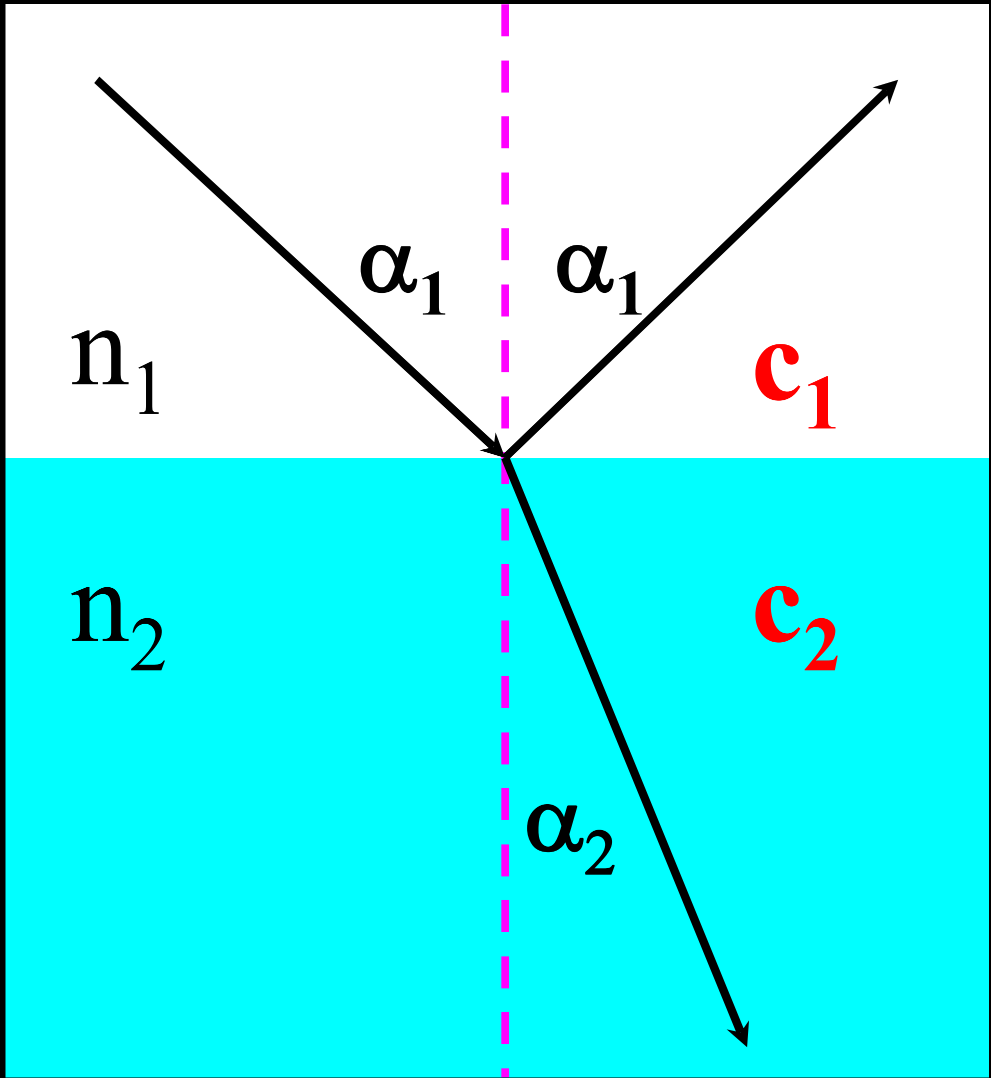
дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = gH(x,y)\left(k_x{}^2 + k_y{}^2\right)$$

k_i – **компоненты волнового вектора**

x_i – **координаты луча**

Закон Снеллиуса

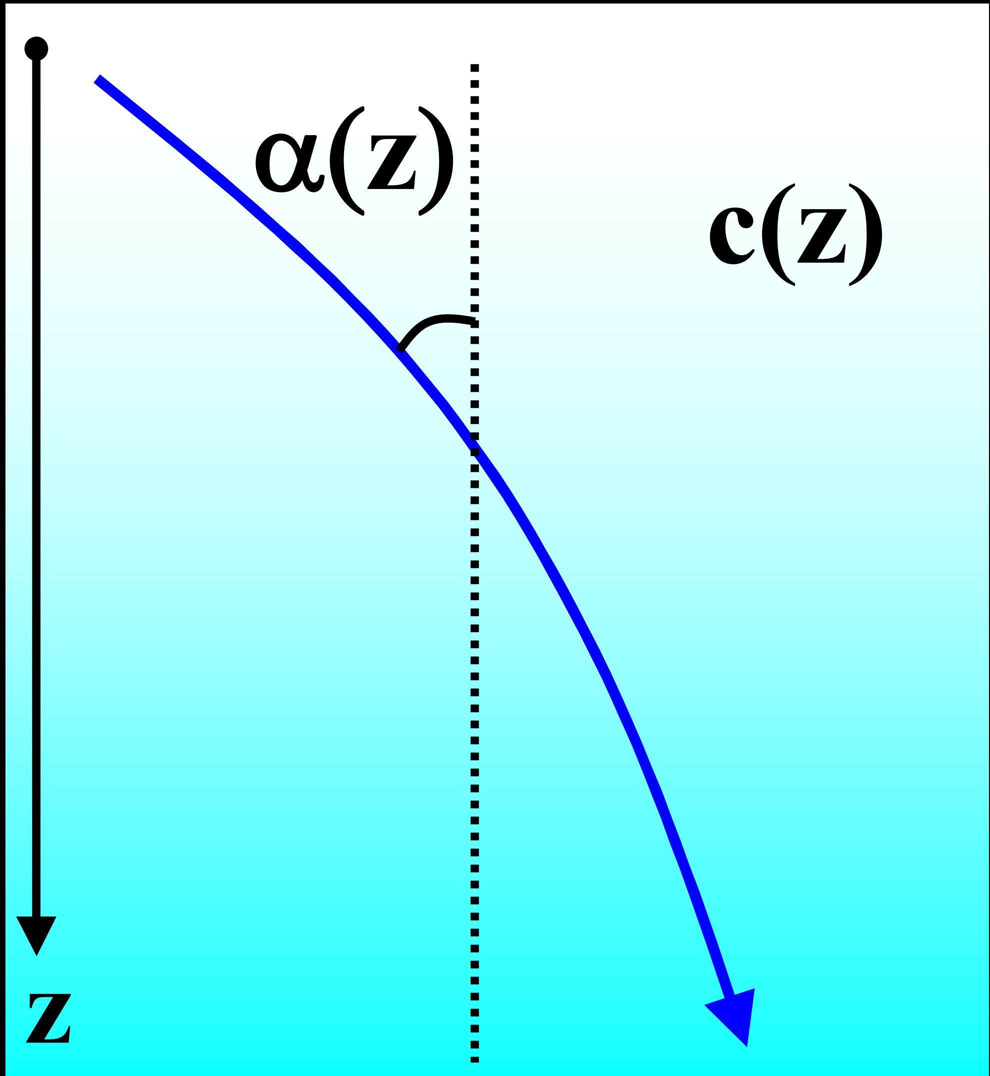


$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$n = c_0 / c$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Рефракция

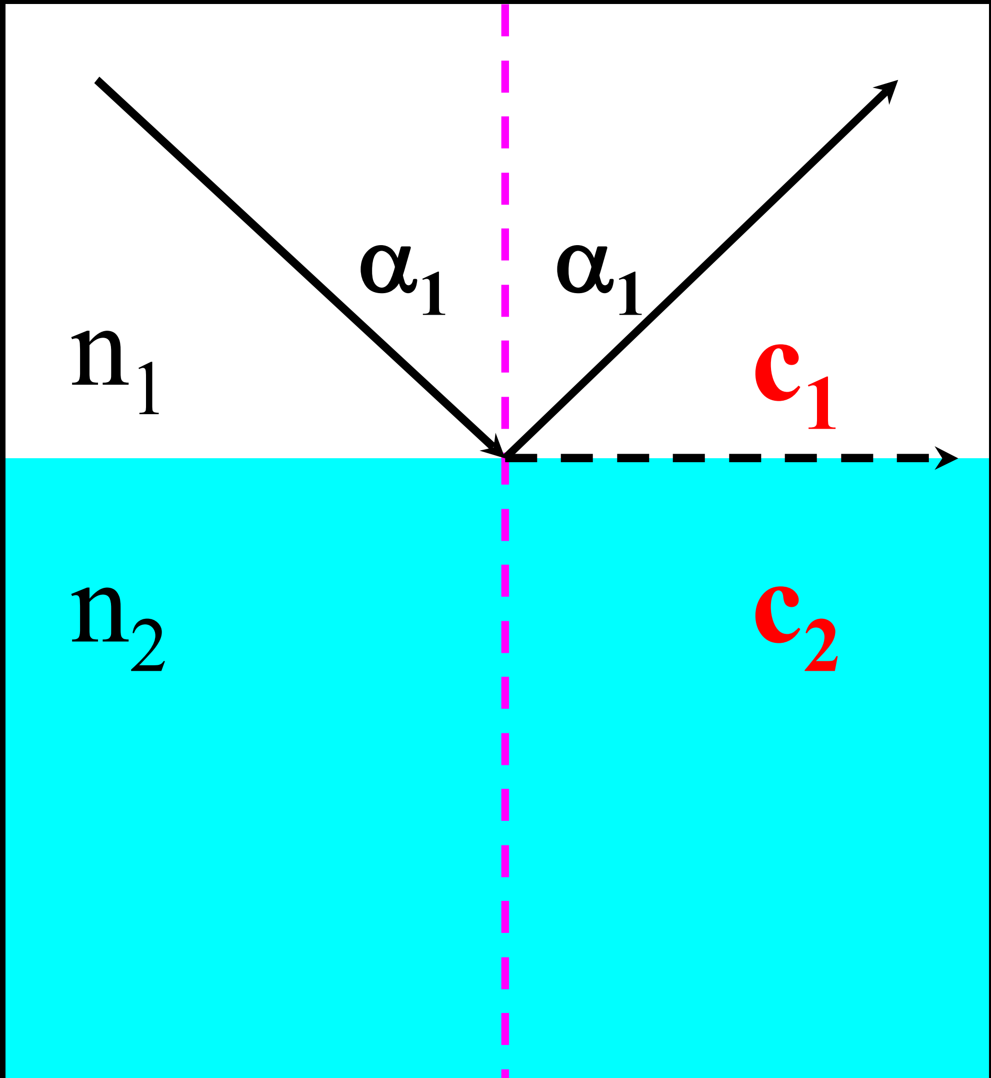


$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{\sin\alpha(z)}{c(z)} = \text{const}$$

Рефракция – изменение направления волновых лучей в среде с (плавно) изменяющейся в пространстве скоростью

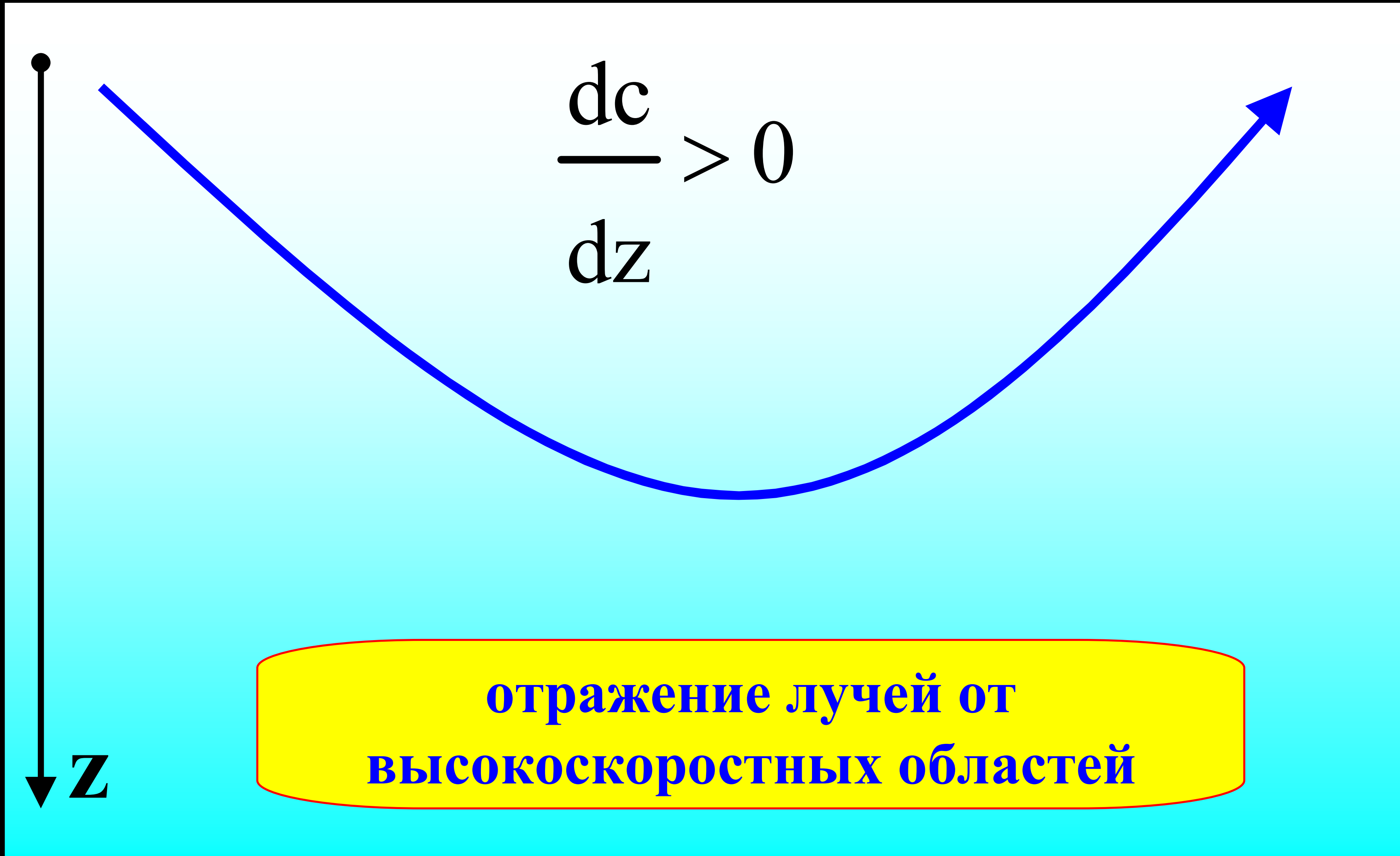
Полное внутреннее отражение



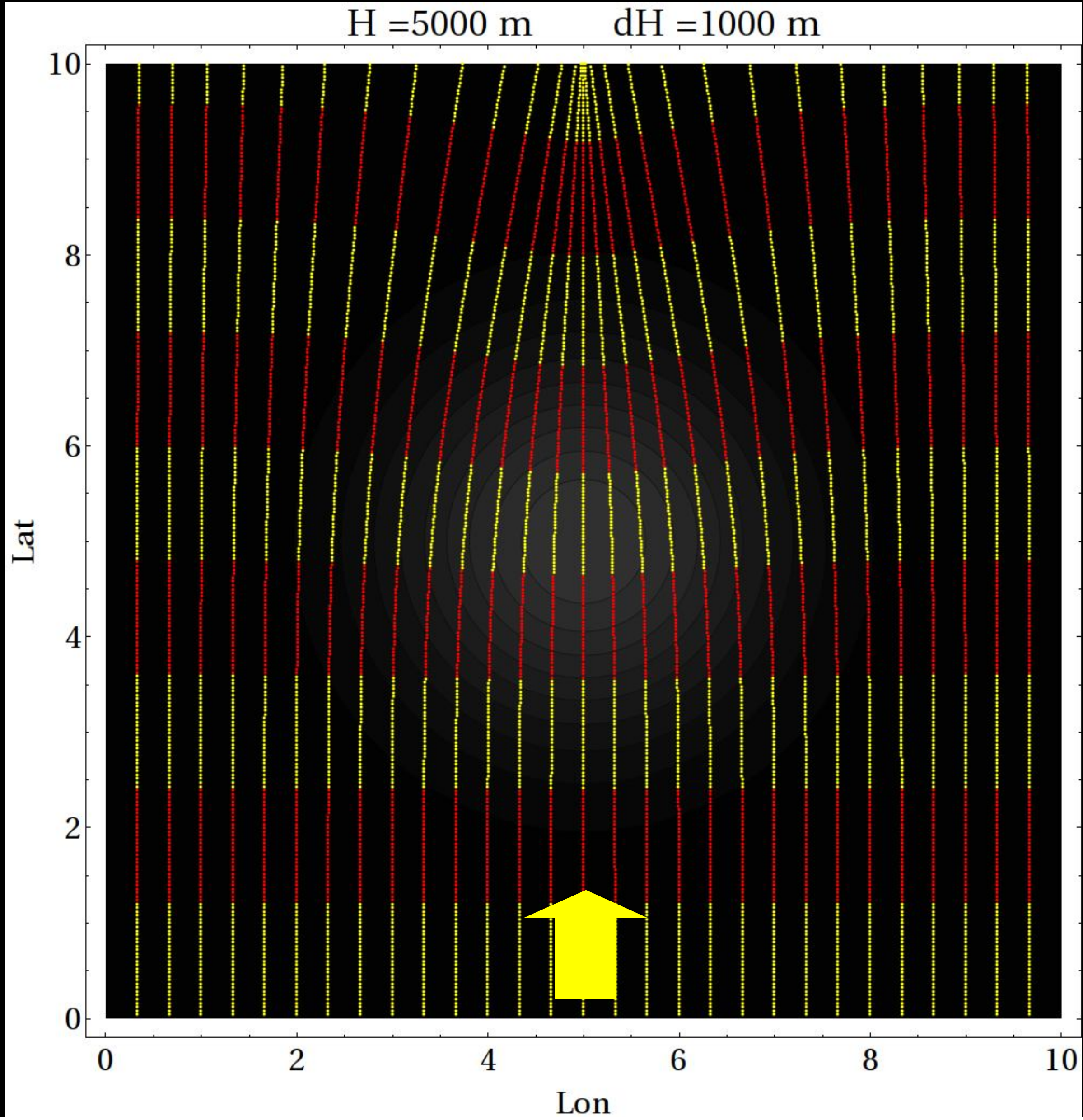
$$n_2 < n_1$$

$$c_2 > c_1$$

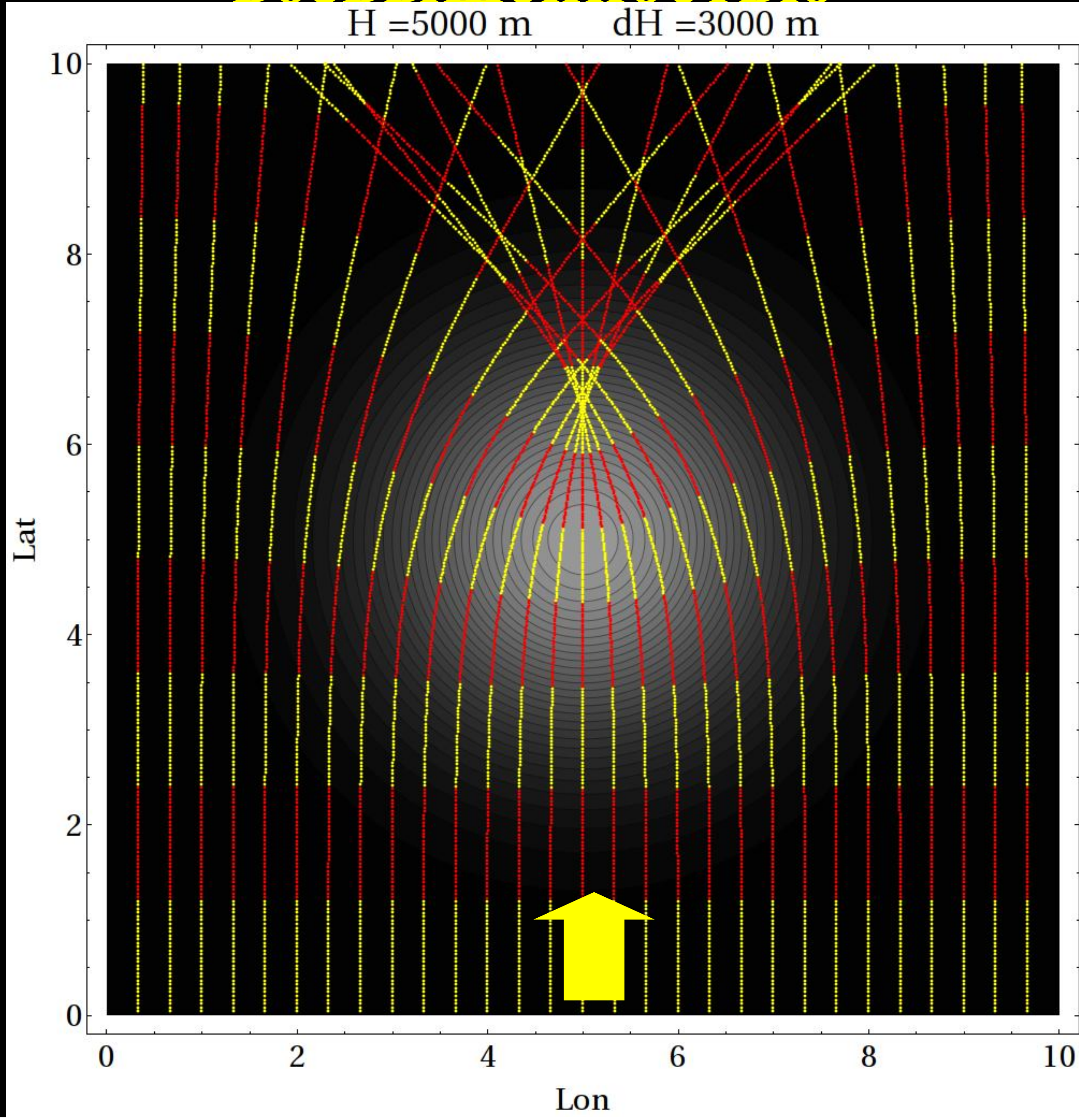
Полное внутреннее отражение



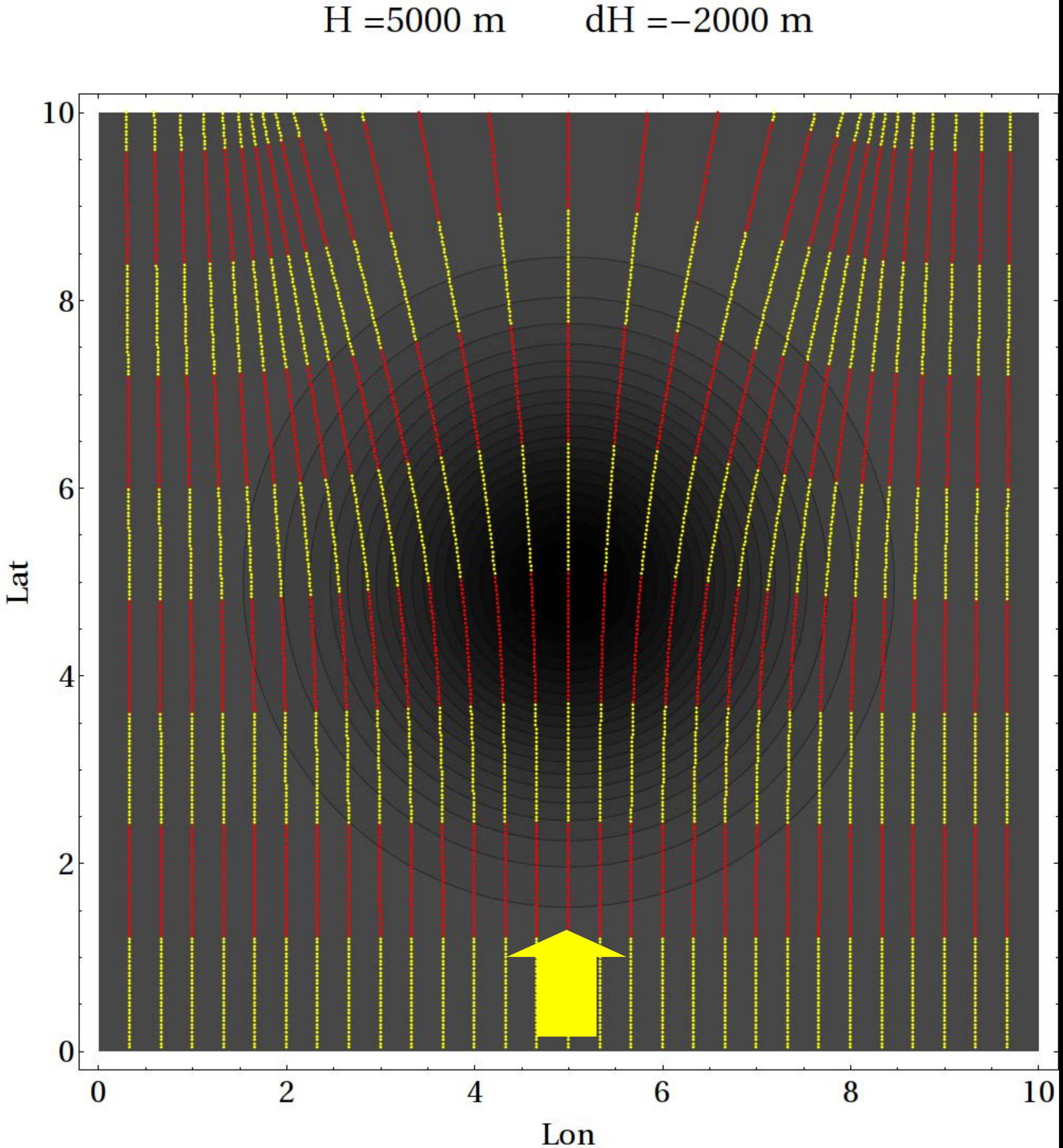
Ход волновых лучей над подводной возвышенностью



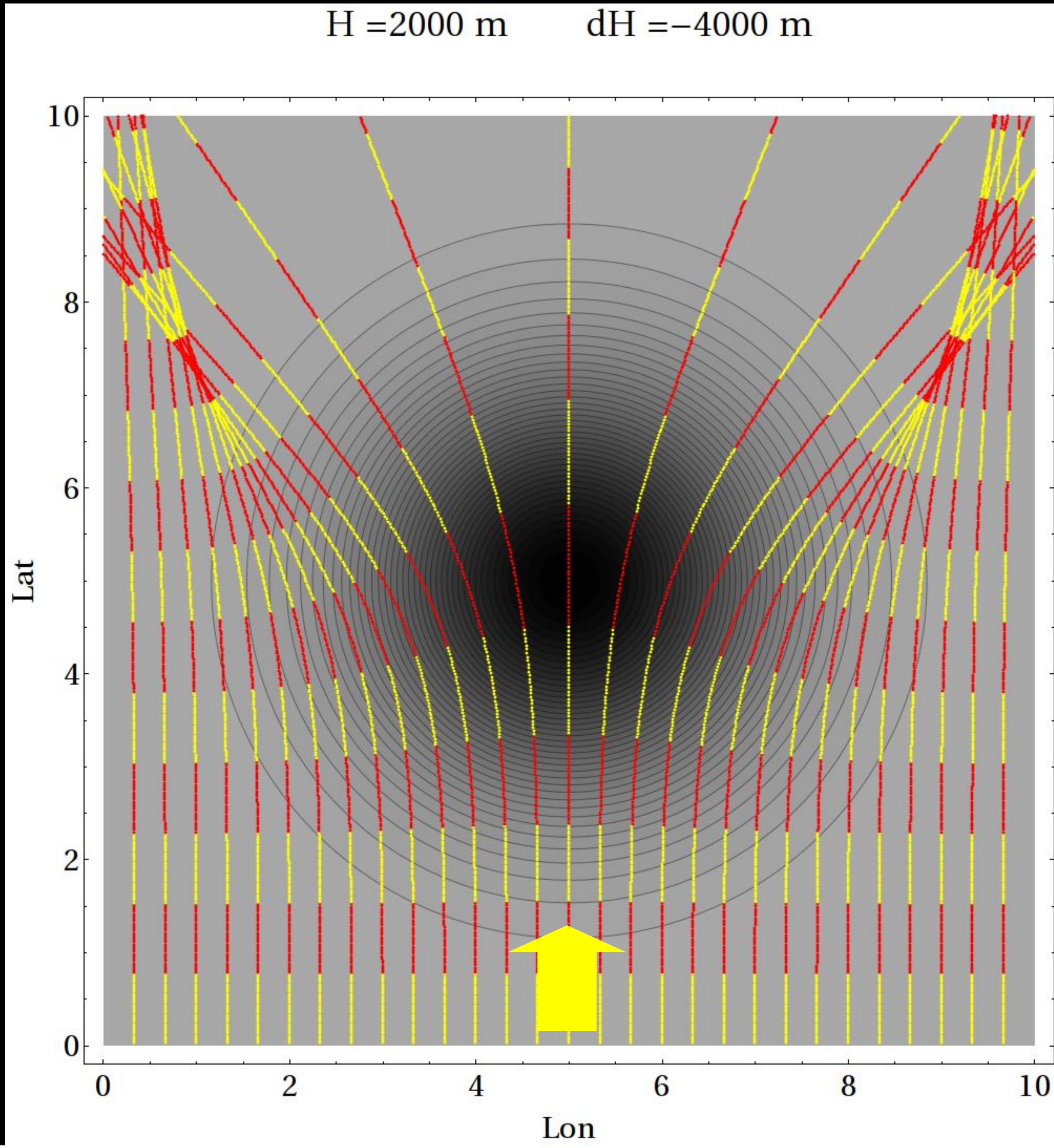
Ход волновых лучей над подводной возвышенностью



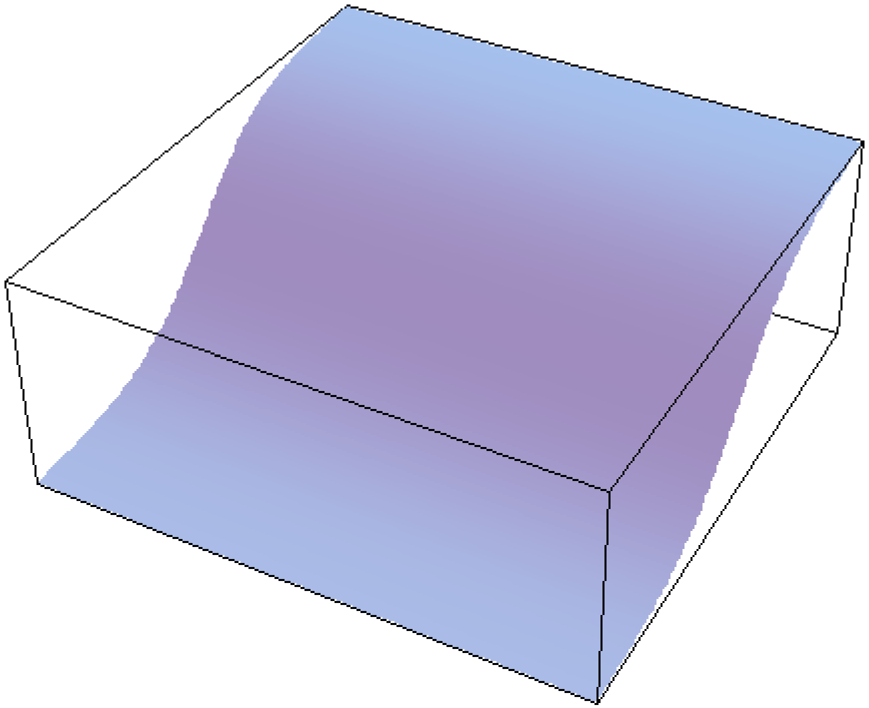
Ход волновых лучей над подводной депрессией

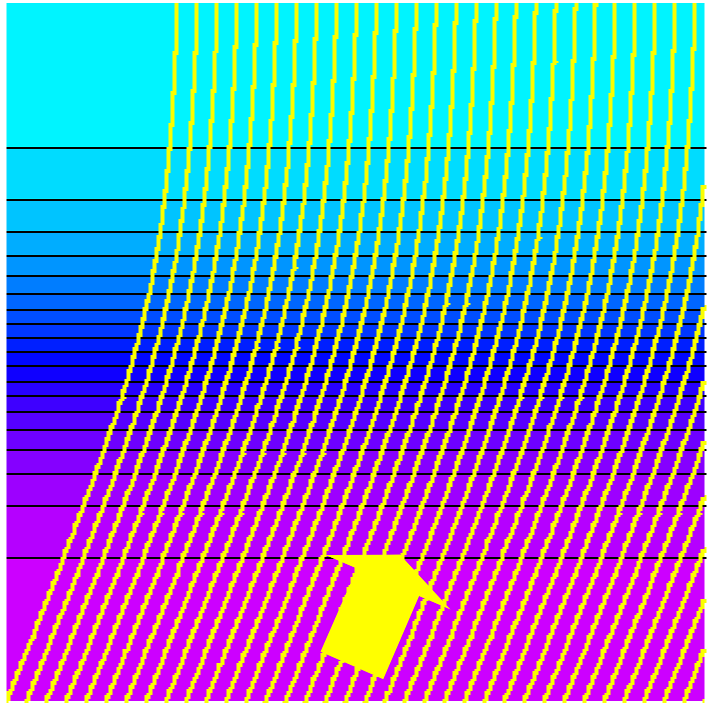


Ход волновых лучей над подводной депрессией



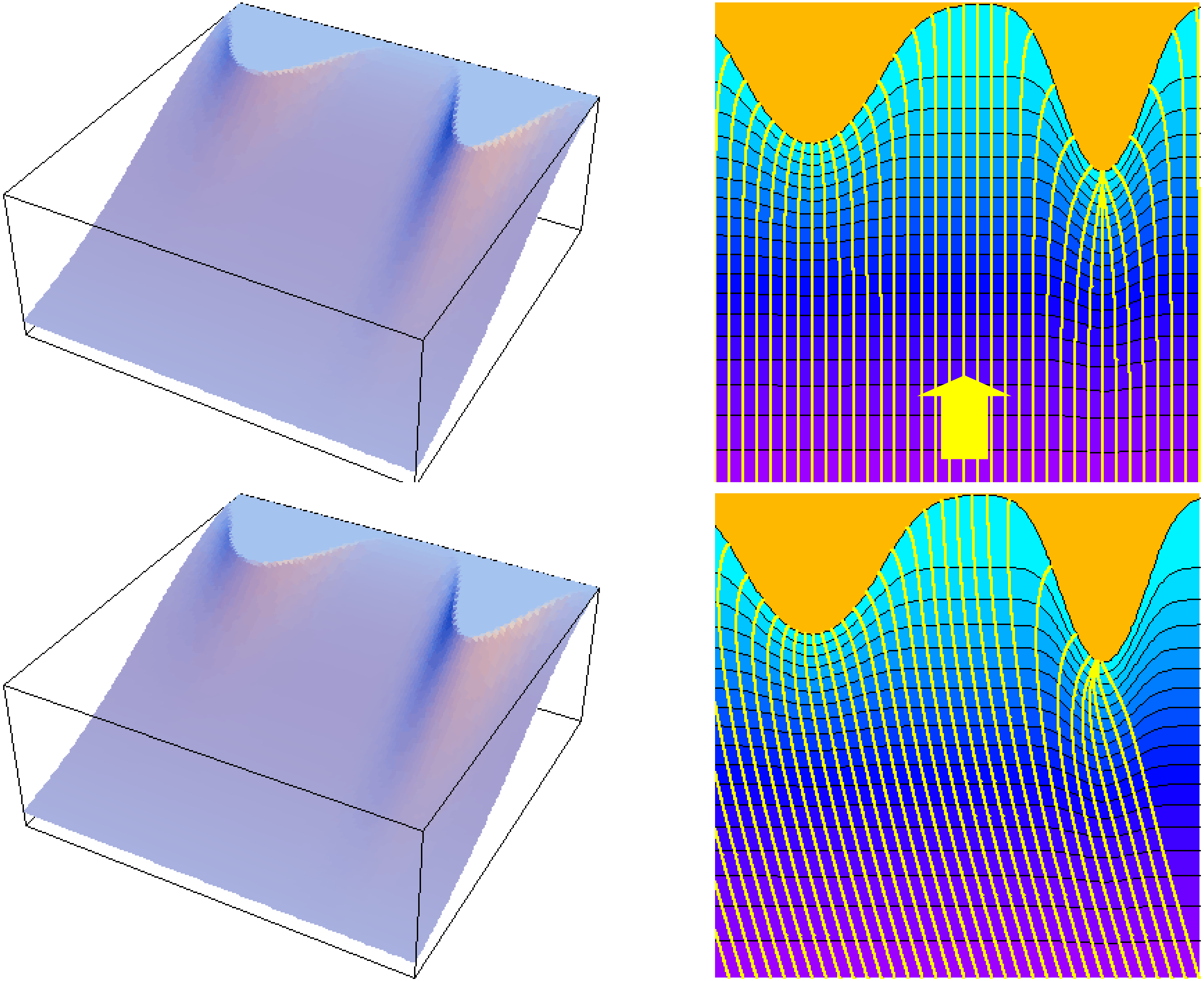
Рефракция гравитационных волн в прибрежной зоне





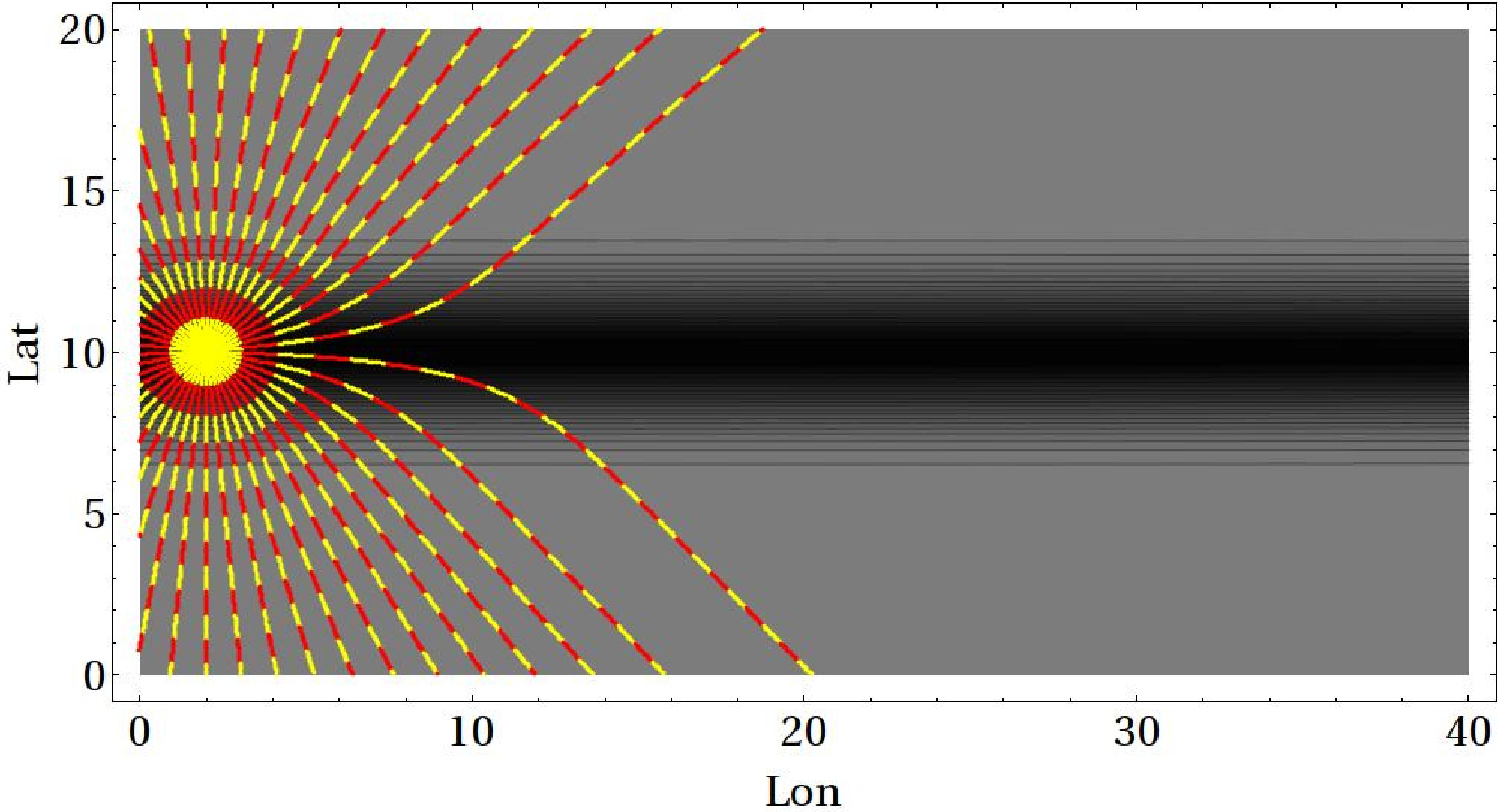
Волновые лучи подходят к побережью по нормали

Концентрация волновой энергии на мысах и защищенность бухт

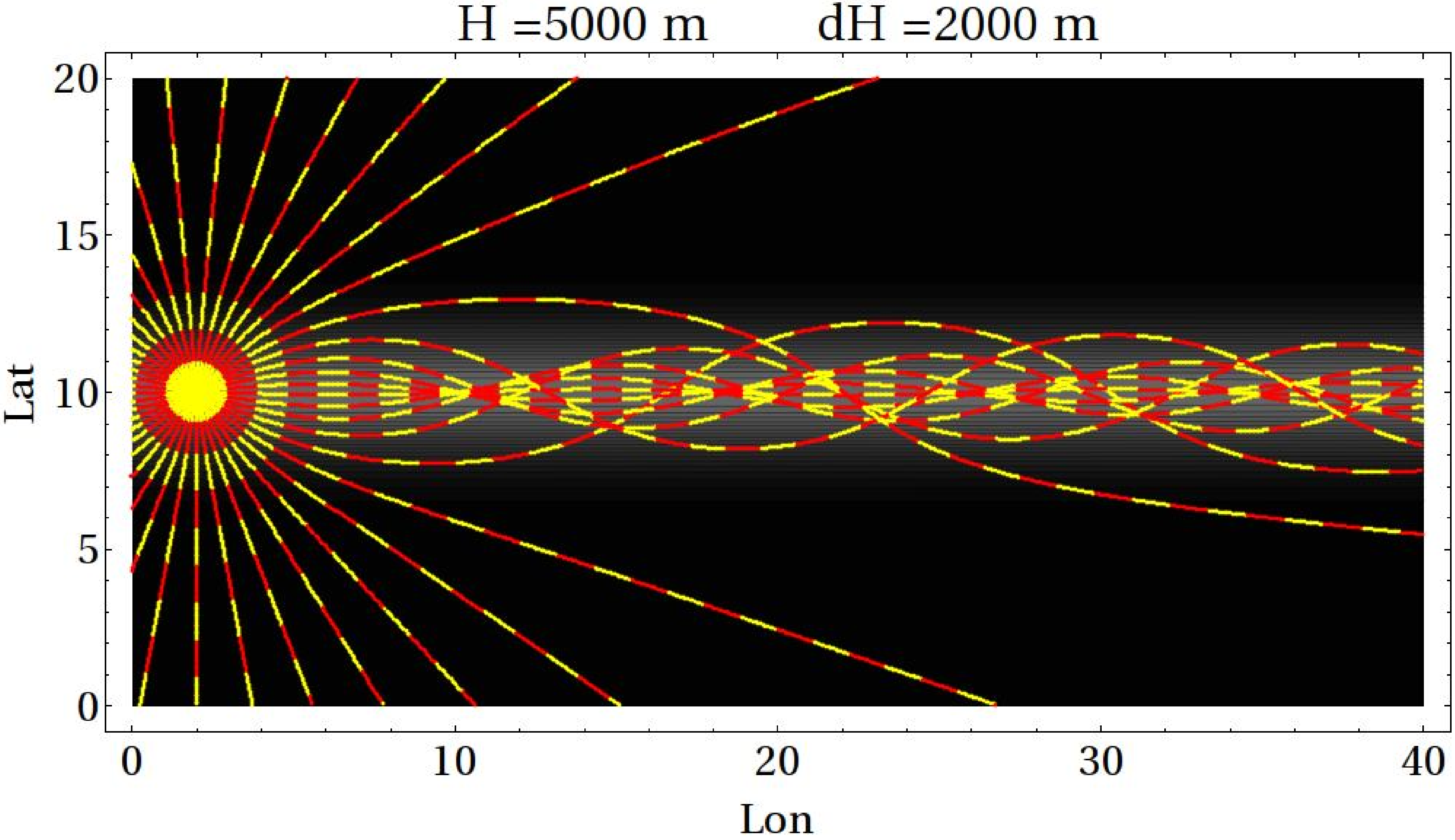


Ход волновых лучей вблизи глубоководного желоба

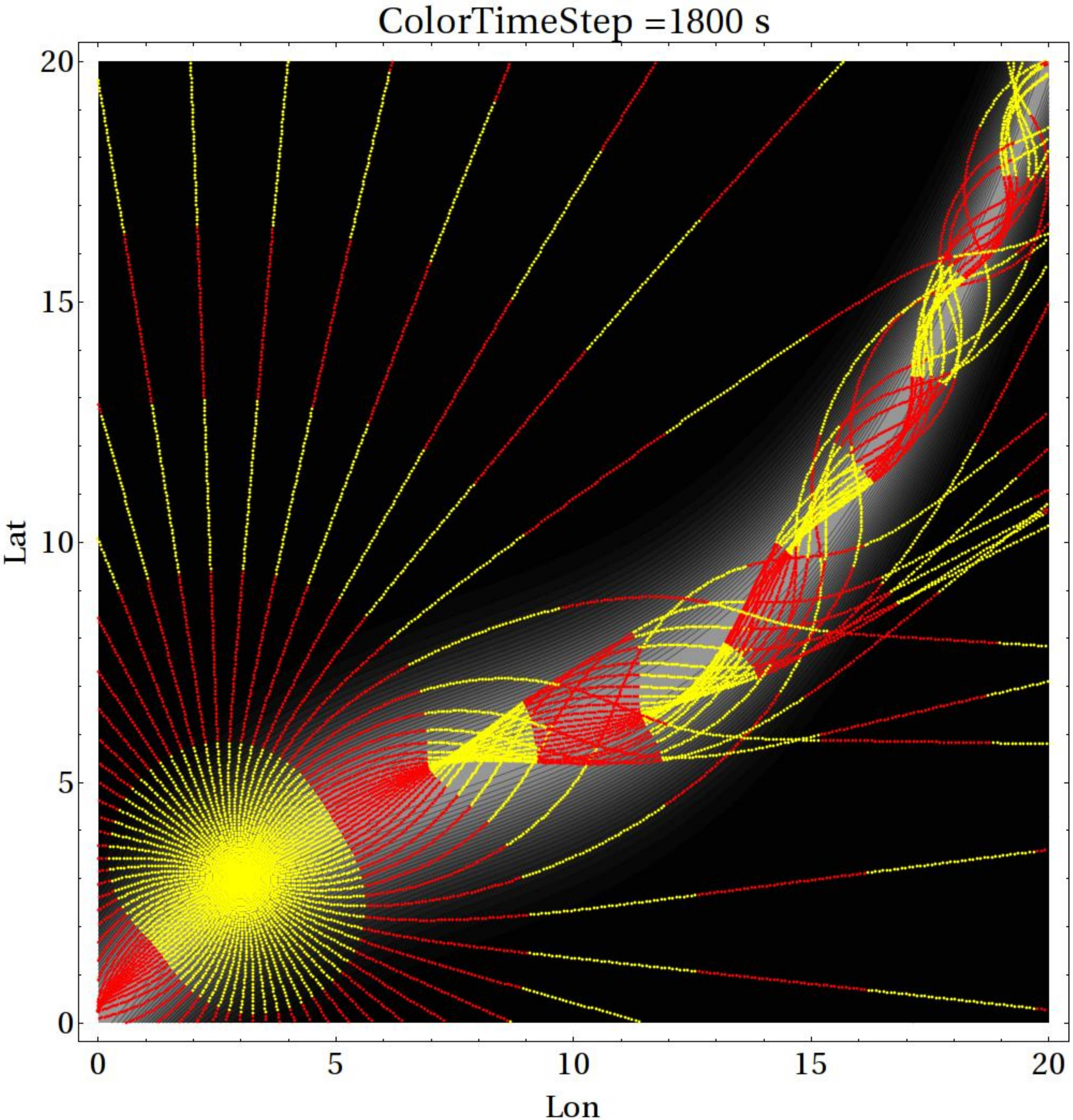
H =2000 m   dH =−2000 m



Ход волновых лучей вблизи подводного хребта

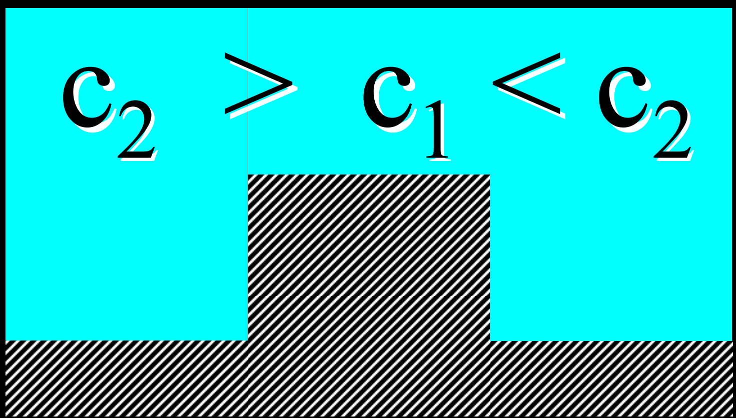


Ход волновых лучей вблизи подводного хребта

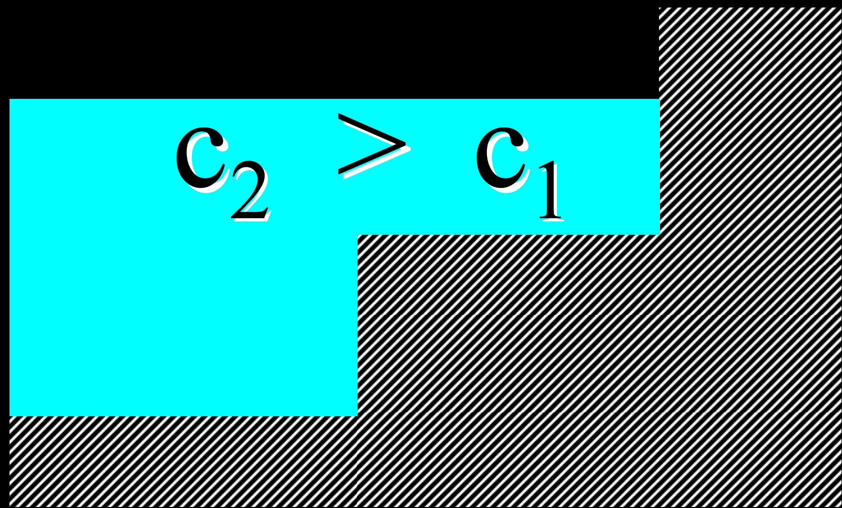


Захваченные волны

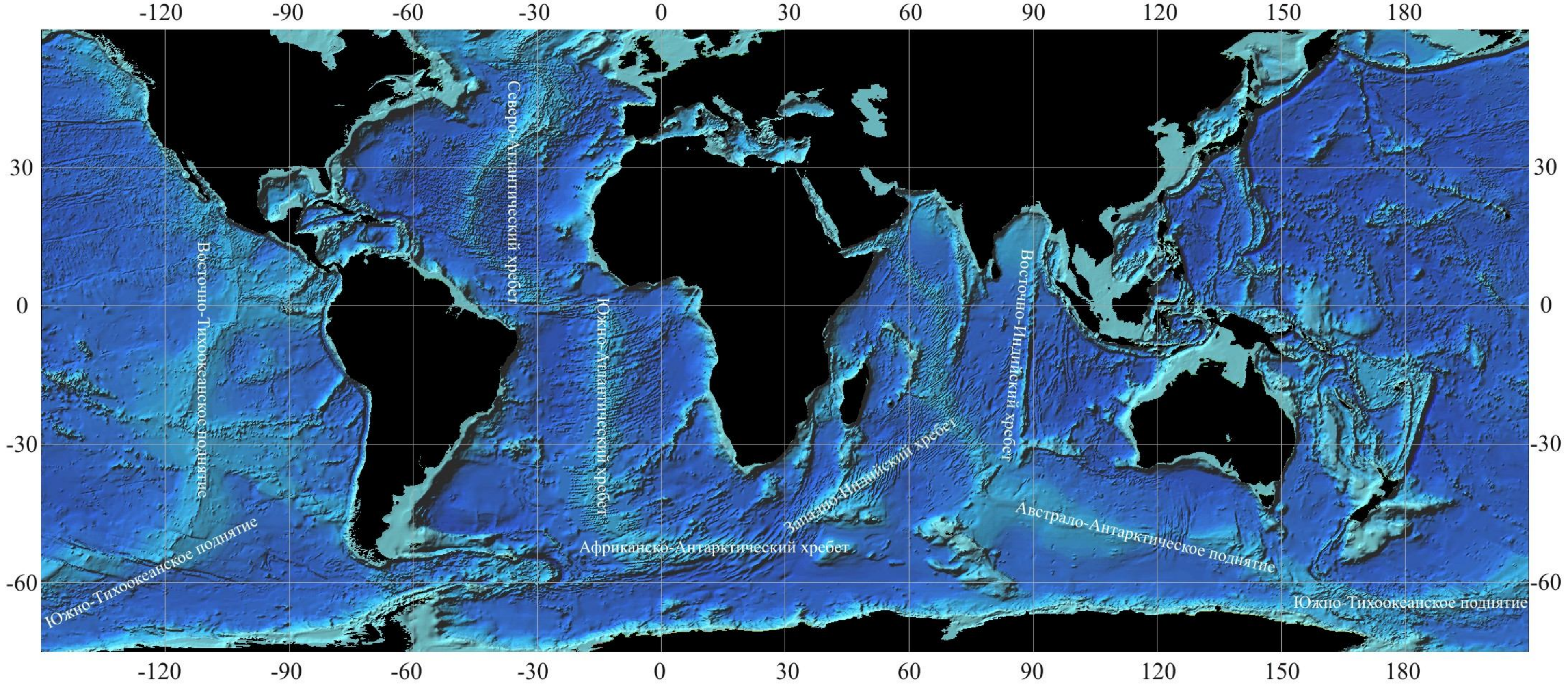
подводный хребет



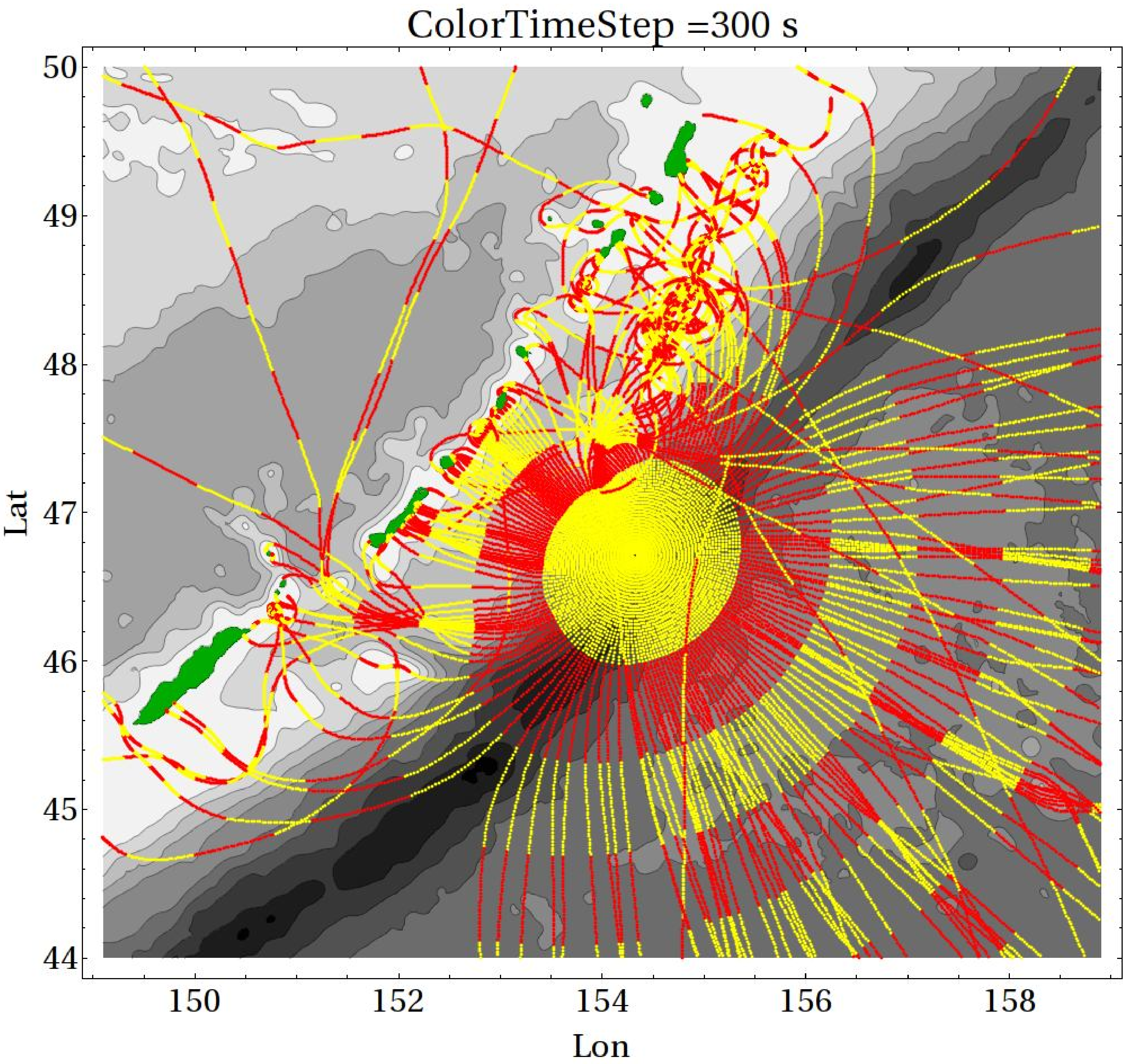
материковый склон и берег



[redacted]



[redacted]

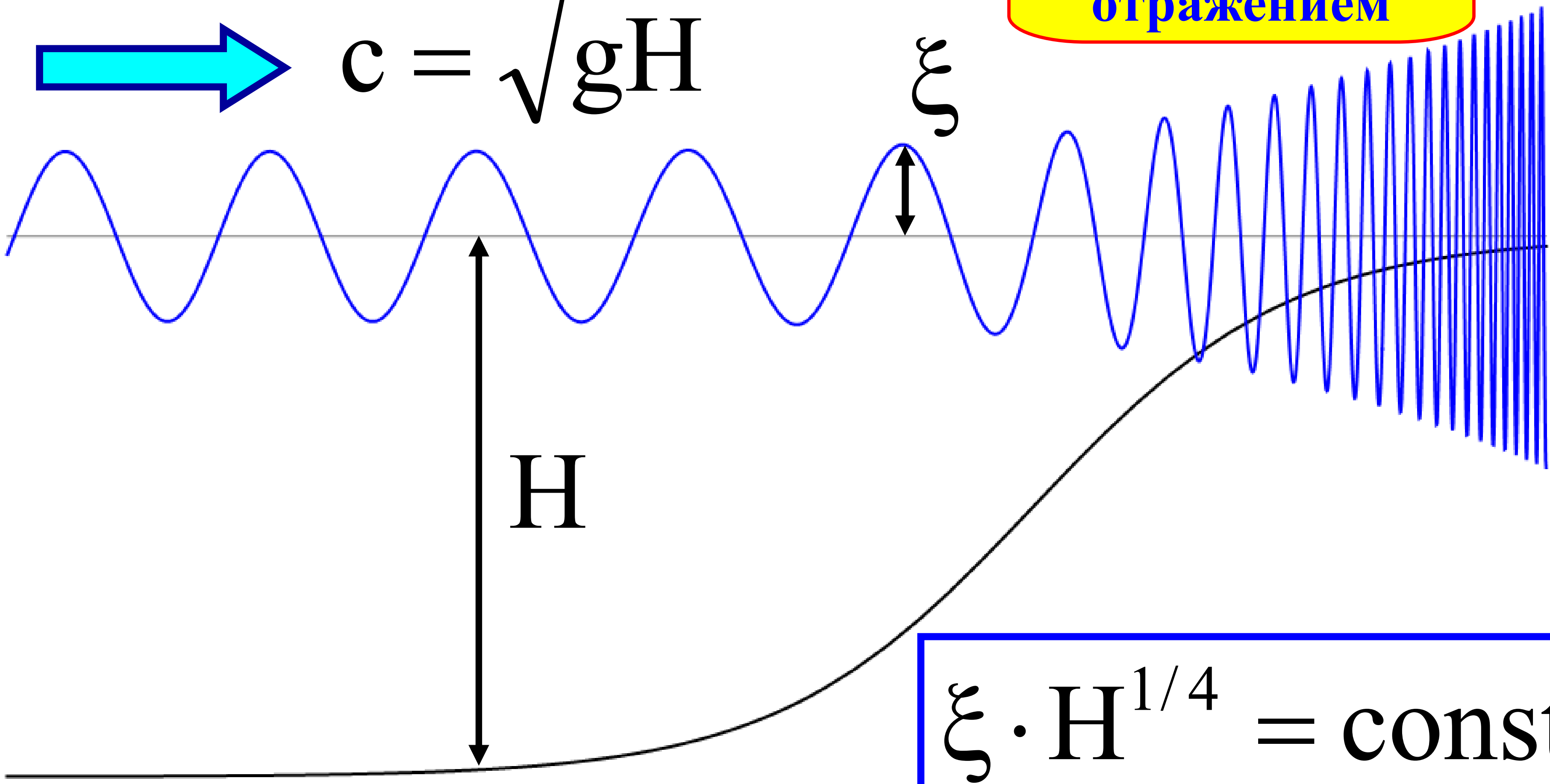

ColorTimeStep =300 s
50
49
48
47
46
45
44
Lat
150
152
154
156
158
Lon

Закон Грина (закон "1/4")

$$W \sim \xi^2 \qquad Q \sim \xi^2 c \sim \xi^2 \sqrt{H} = \text{const}$$

пренебрегаем отражением

$$c = \sqrt{gH}$$



$$\boxed{\xi \cdot H^{1/4} = \text{const}}$$

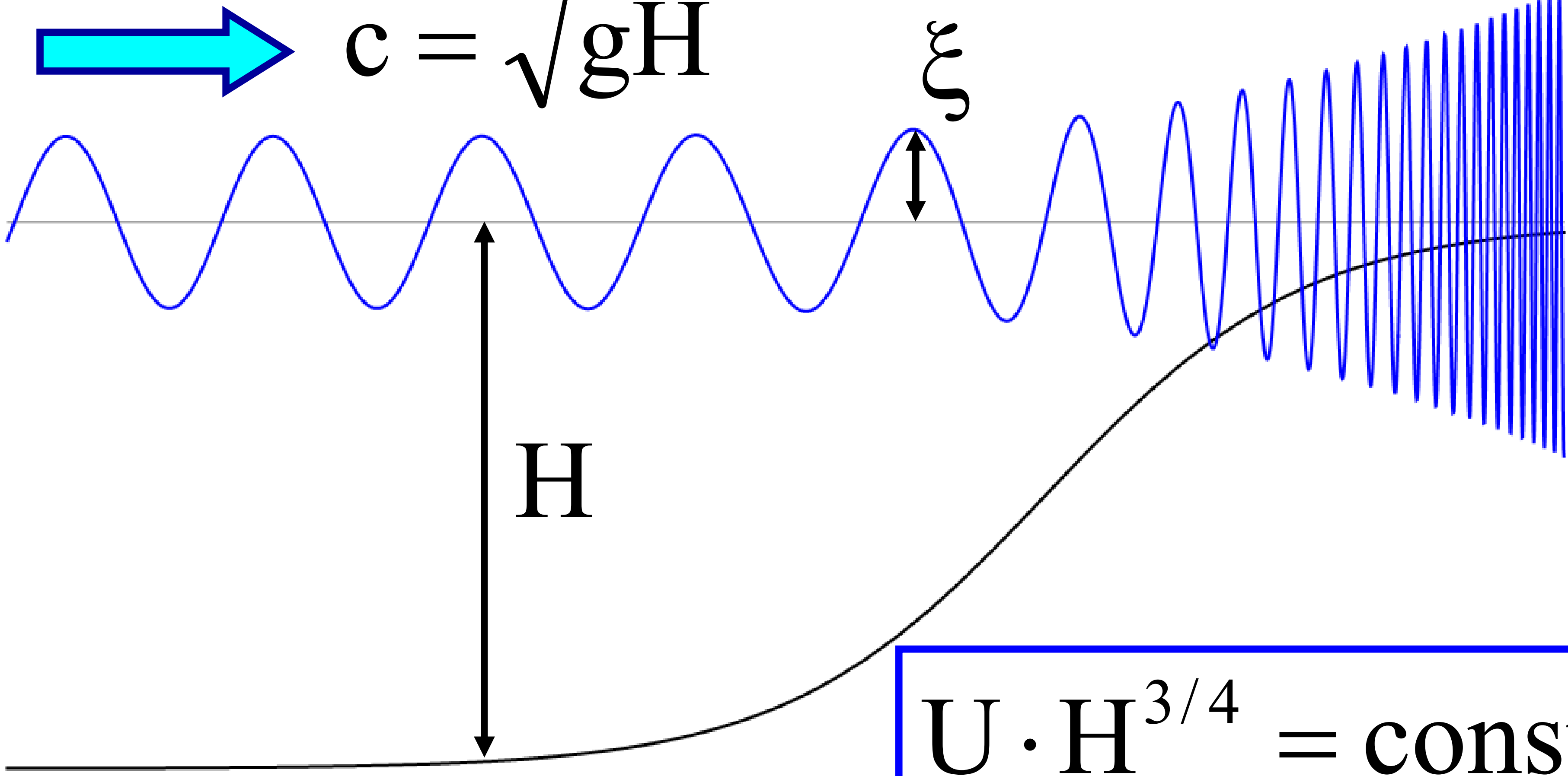
Закон для скорости течения (закон «3/4")

$$W \sim U^2 H$$

пренебрегаем отражением

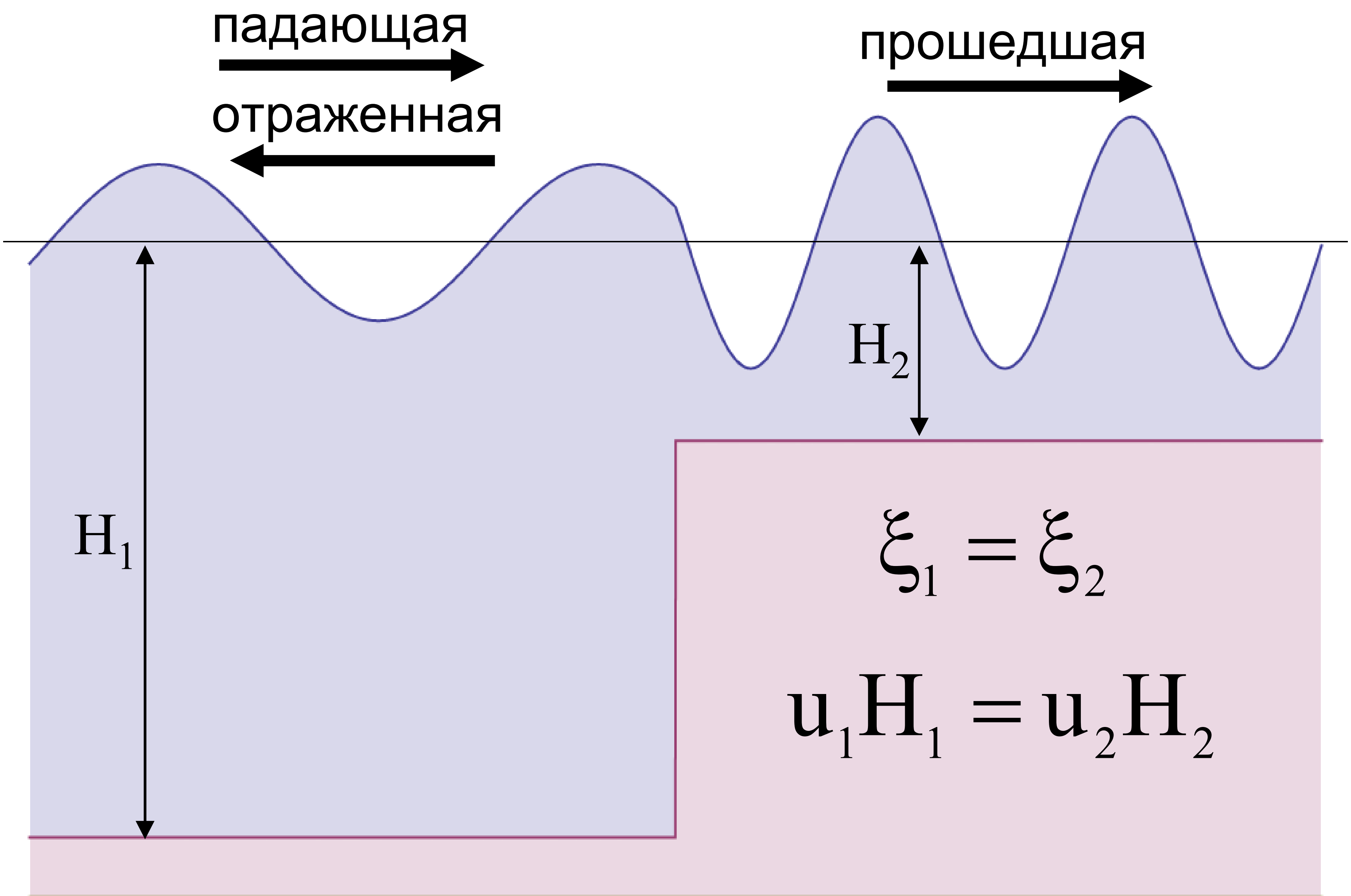
$$Q \sim U^2 H c \sim U^2 H^{3/2} = \mathrm{const}$$

$$c = \sqrt{gH}$$



$$\boxed{U \cdot H^{3/4} = \mathrm{const}}$$

Взаимодействие волны со ступенькой



$$\xi_I = e^{i(\omega t - k_1 x)}$$ - падающая волна единичной амплитуды

$$\xi_R = R \cdot e^{i(\omega t + k_1 x)}$$ - отраженная волна амлитуды R

$$\xi_T = T \cdot e^{i(\omega t - k_2 x)}$$ - прошедшая волна амлитуды T

R – амплитудный коэффициент отражения

T – амплитудный коэффициент прохожения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad \xi \sim e^{i(\omega t \pm kx)} \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = \pm ik\xi$$

$$\Downarrow \qquad u \sim e^{i(\omega t \pm kx)} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = i\omega u$$

$$u = \mp\frac{k}{\omega}g\xi = \mp\xi\sqrt{\frac{g}{H}} \qquad \frac{\omega}{k} \equiv C_{ph} = \sqrt{gH}$$

$$\xi_I = e^{i(\omega t - k_1 x)}$$ - **падающая волна единичной амплитуды**

$$\xi_R = R \cdot e^{i(\omega t + k_1 x)}$$ - **отраженная волна амлитуды R**

$$\xi_T = T \cdot e^{i(\omega t - k_2 x)}$$ - **прошедшая волна амлитуды T**

«Сшиваем» смещения свободной поверхности

$$x = 0: \quad \xi_I + \xi_R = \xi_T \Longrightarrow e^{i\omega t} + R \cdot e^{i\omega t} = T \cdot e^{i\omega t}$$

$$\boxed{1 + R = T}$$

«Сшиваем» потоки

$$x = 0: \quad (u_I + u_R)H_1 = u_T H_2 \qquad u = \mp\xi\sqrt{\frac{g}{H}}$$

$$\boxed{\sqrt{H_1}(1 - R) = \sqrt{H_2}\,T}$$

$$\boxed{1 + R = T}$$

$$\boxed{\sqrt{H_1}(1 - R) = \sqrt{H_2}\,T}$$

$$R = \frac{\sqrt{H_1 / H_2} - 1}{\sqrt{H_1 / H_2} + 1}$$

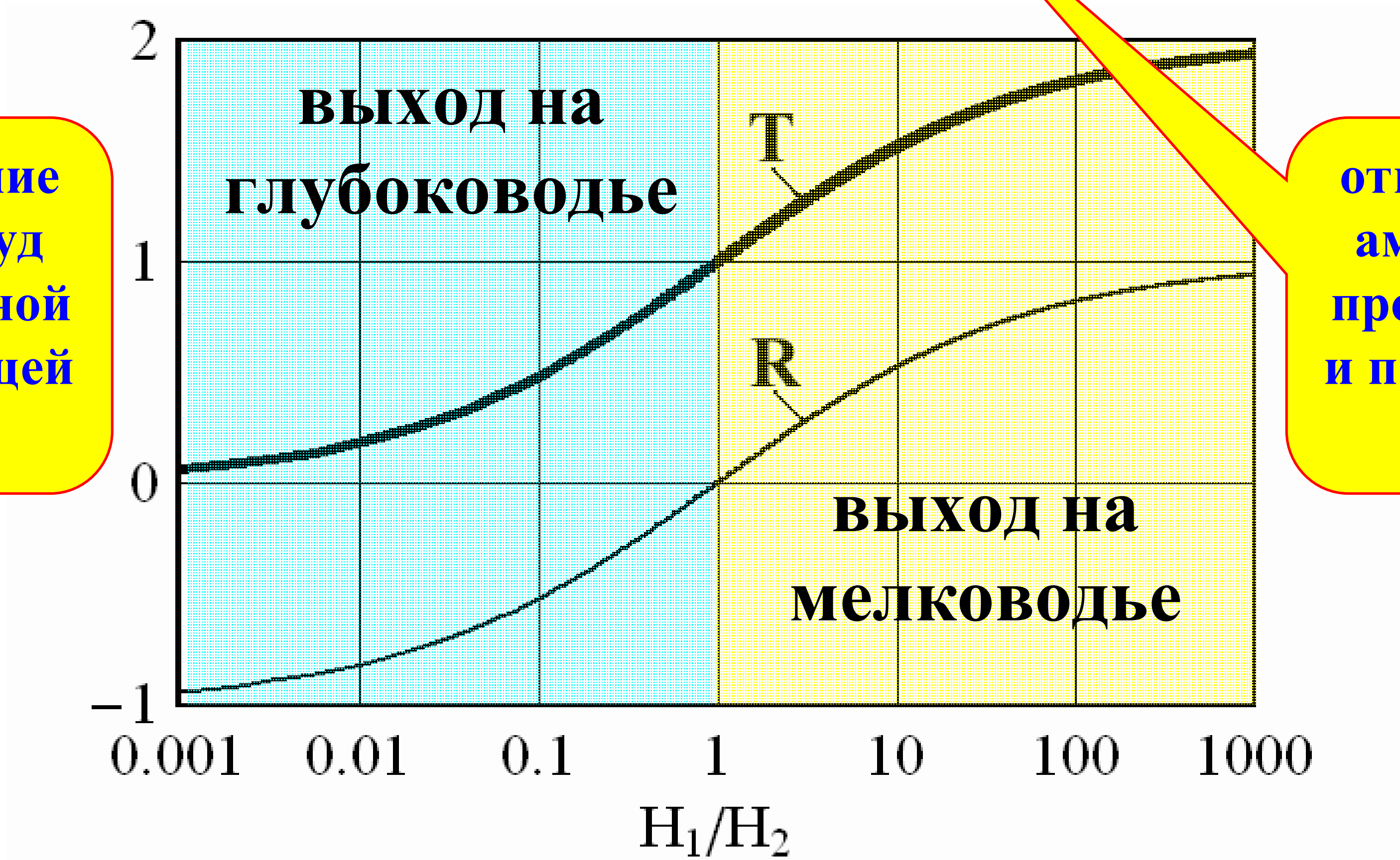
$$T = \frac{2\sqrt{H_1 / H_2}}{\sqrt{H_1 / H_2} + 1}$$

Амплитудные коэффициенты отражения и прохождения при падении волны на ступеньку

$$R = \frac{\sqrt{H_1 / H_2} - 1}{\sqrt{H_1 / H_2} + 1}$$

$$T = \frac{2\sqrt{H_1 / H_2}}{\sqrt{H_1 / H_2} + 1}$$

отношение амплитуд отраженной и падающей волн



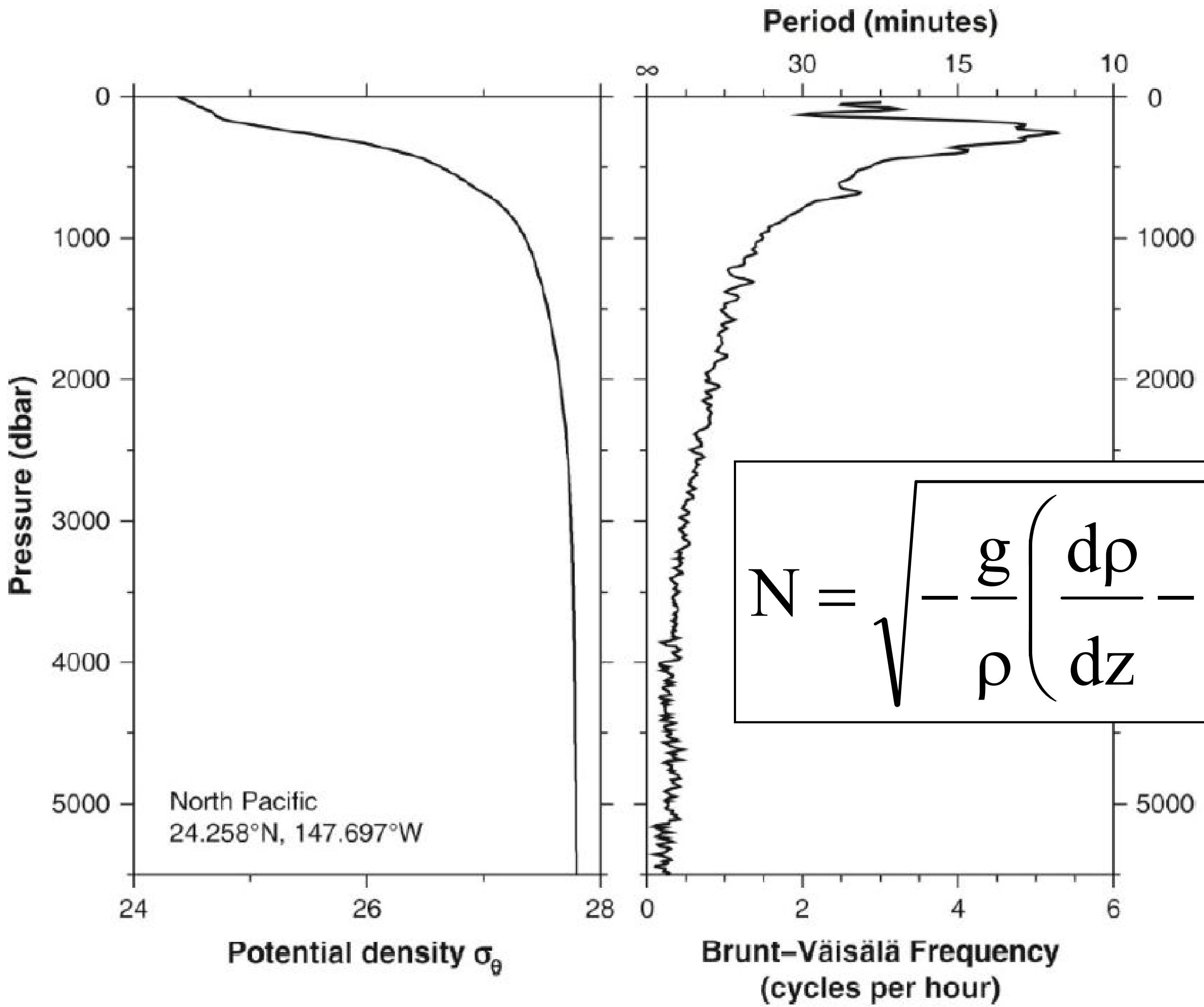
отношение амплитуд прошедшей и падающей волн

Внутренние волны в океане

Гибралтар

Astronaut photographs June 3, 2004

Вертикальные профили плотности и частоты Вяйсяля-Брента в океане



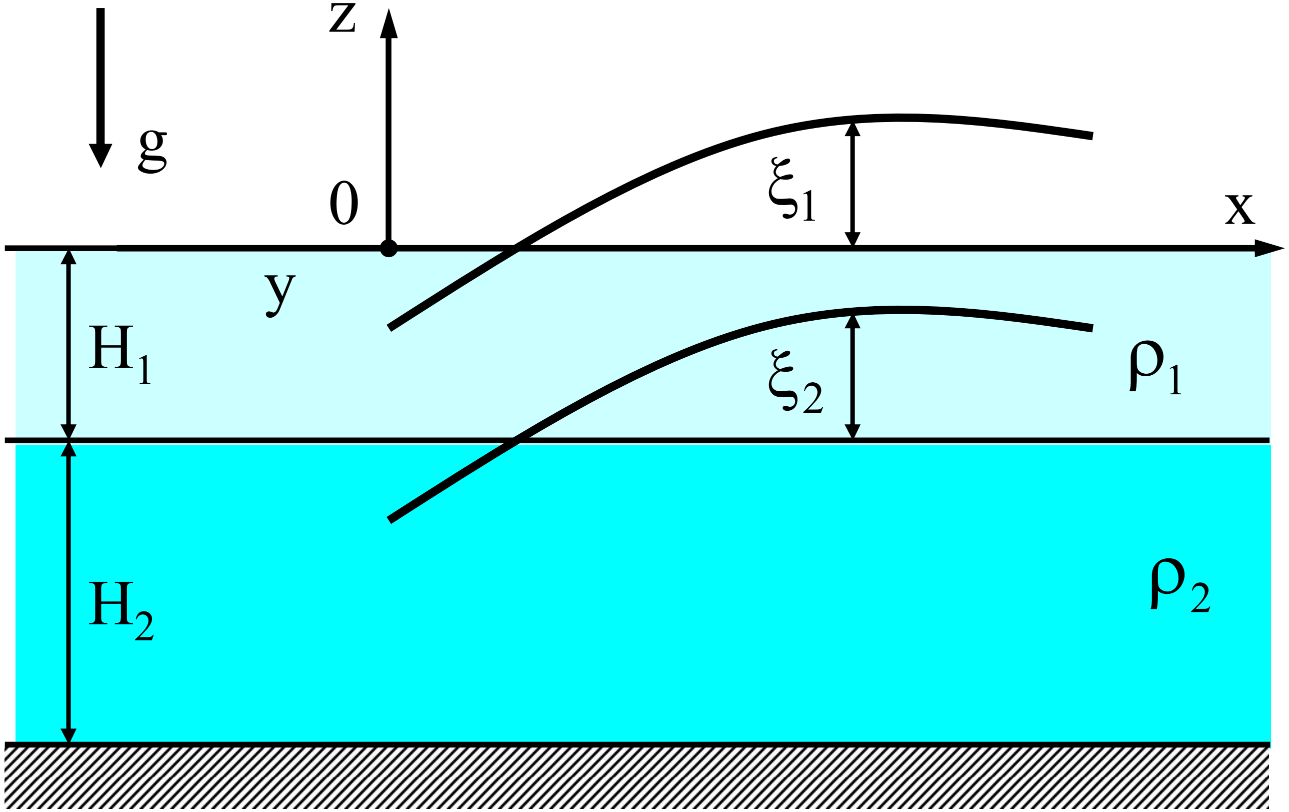
$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s\right)}$$

Длинные волны в двухслойной жидкости: постановка 2D задачи

приближение гидростатики

p_{atm}=const

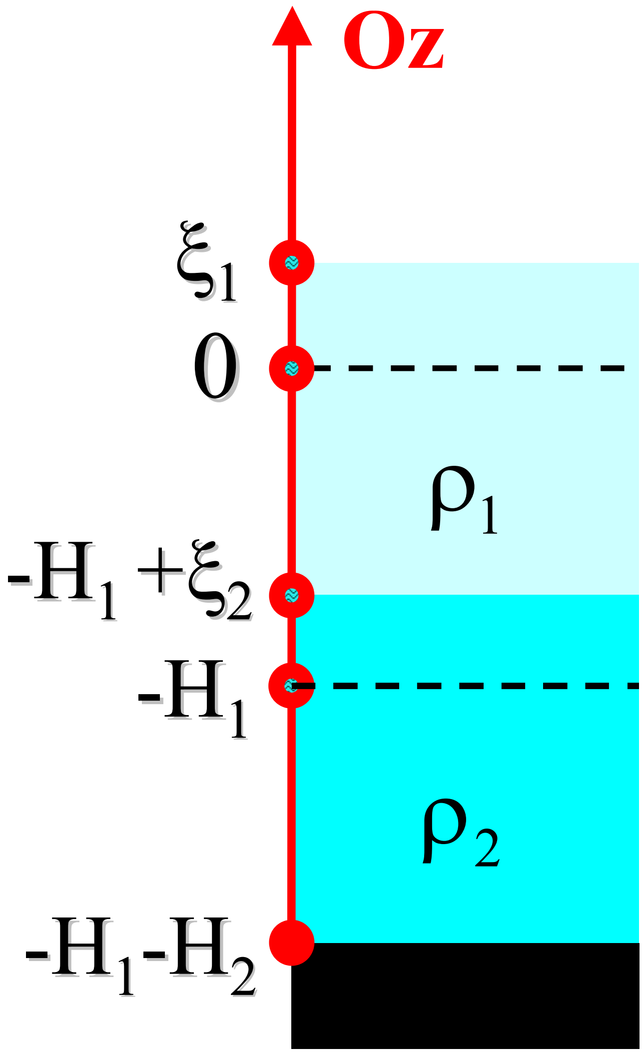
$\rho_2 > \rho_1$



$$p(\xi) = p_{атм} = const$$

$$\int_z^{\xi} dz \; \Big| \; \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(z)\, g$$

уравнение гидростатики



1-й слой

$$p_1 = p_{атм} + \rho_1 g(\xi_1 - z)$$

2-й слой

$$p_2 = p_{атм} + \rho_1 g(\xi_1 + H_1 - \xi_2) +$$

$$+ \rho_2 g(-H_1 + \xi_2 - z)$$

$$p_1 = p_{атм} + \rho_1 g(\xi_1 - z)$$

$$\boxed{u = f(z)}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi_1}{\partial x}$$

$$p_2 = p_{атм} + \rho_1 g(\xi_1 + H_1 - \xi_2) + \\ + \rho_2 g(-H_1 + \xi_2 - z)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial t} = -g\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} - g\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \Bigg| \quad \int_{\xi_2-H_1}^{\xi_1} dz \qquad \int_{-H_1-H_2}^{\xi_2-H_1} dz$$

$$|\xi_1| << H_1$$

$$|\xi_2| << H_2$$

$$H_1 \sim H_2$$

$$(H_1+\cancel{\xi_1}-\cancel{\xi_2})\frac{\partial u_1}{\partial x}+w(\xi_1)-w(\xi_2-H_1)=0$$

$$H_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial \xi_1}{\partial t}-\frac{\partial \xi_2}{\partial t}=0$$

$$(H_2+\cancel{\xi_2})\frac{\partial u_2}{\partial x}+w(\xi_2-H_1)-\underbrace{w(-H_1-H_2)}_{\mathbf{0}}=0$$

$$H_2\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial \xi_2}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \left| \frac{\partial}{\partial x} \right.$$

$$H_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = 0 \left| \frac{\partial}{\partial t} \right.$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -g\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} - g\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi_1}{\partial x} - g\delta\frac{\partial \xi_2}{\partial x} \left| \frac{\partial}{\partial x} \right.$$

$$H_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = 0 \left| \frac{\partial}{\partial t} \right.$$

$$\delta \equiv \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2}$$

$$\delta << 1$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x} = -g \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}$$

$$H_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x} = -g \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} - g\delta \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2}$$

$$H_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} - H_1 g \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} - \delta g H_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} = g H_2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}$$

преобразуются к виду:

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} - g(H_1 + H_2) \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = \delta g H_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} - \frac{\delta g H_1 H_2}{H_1 + H_2} \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} = \frac{H_2}{H_1 + H_2} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} - g\left(H_1 + H_2\right)\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = \delta g H_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2}$$

квадрат скорости длинных поверхностных волн

взаимное влияние длинных внутренних и поверхностных волн

квадрат скорости длинных волн на поверхности раздела

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} - \frac{\delta g H_1 H_2}{H_1 + H_2}\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} = \frac{H_2}{H_1 + H_2}\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2}$$

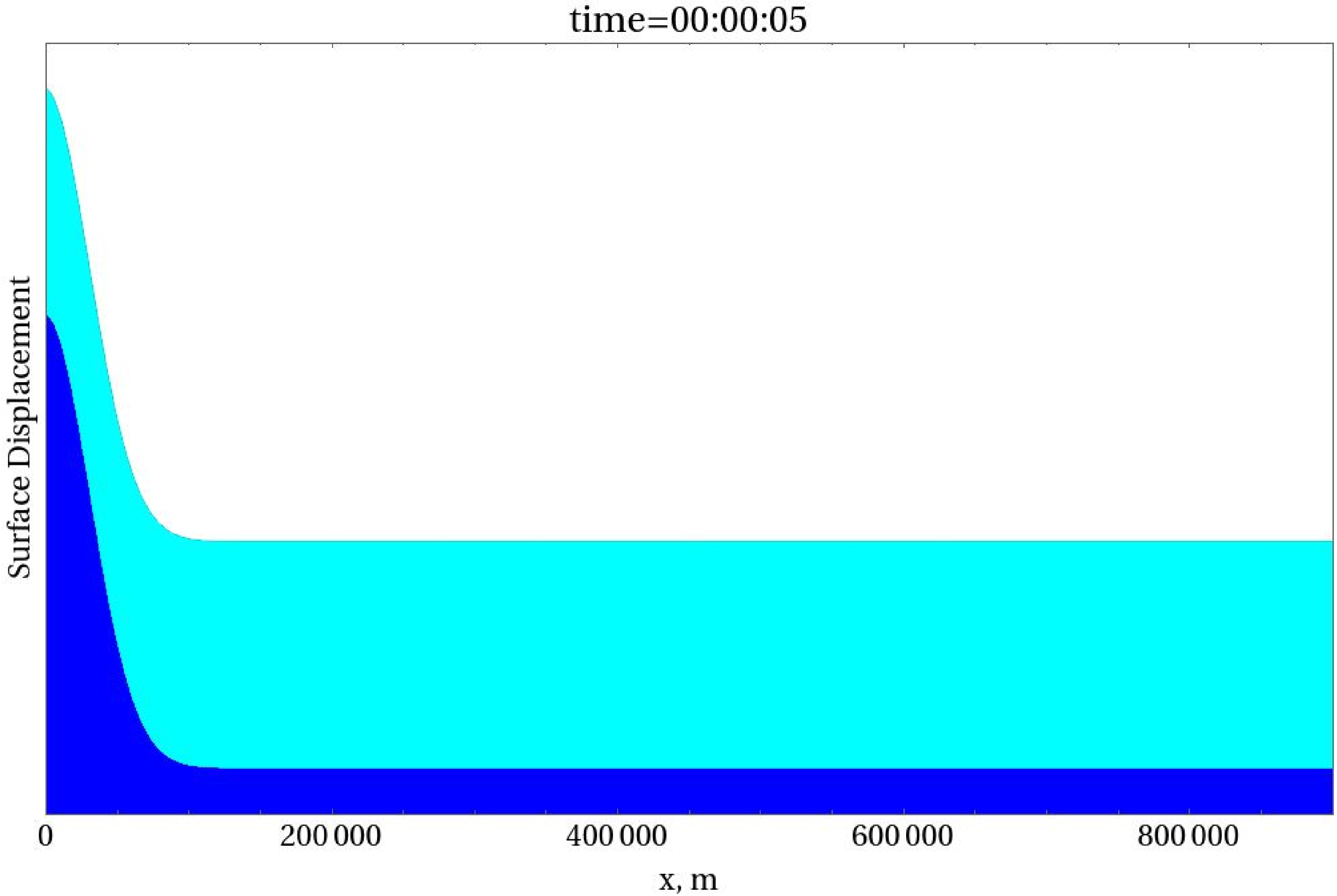
Оценка скоростей распространения поверхностных и внутренних волн

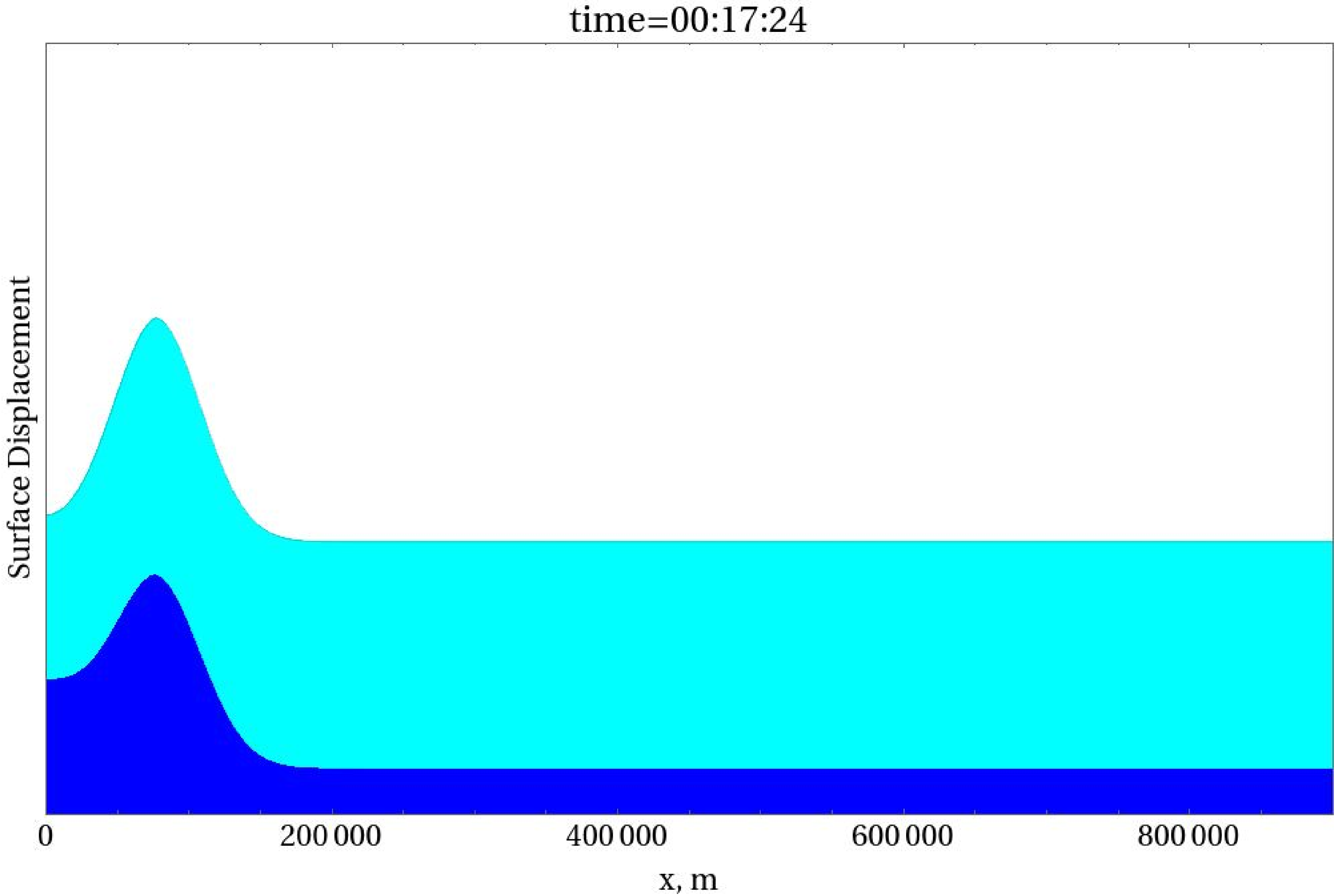
$$c_{\text{поверхн}} = \sqrt{g\left(H_1 + H_2\right)} \approx 200\ \text{м}/\text{с}$$

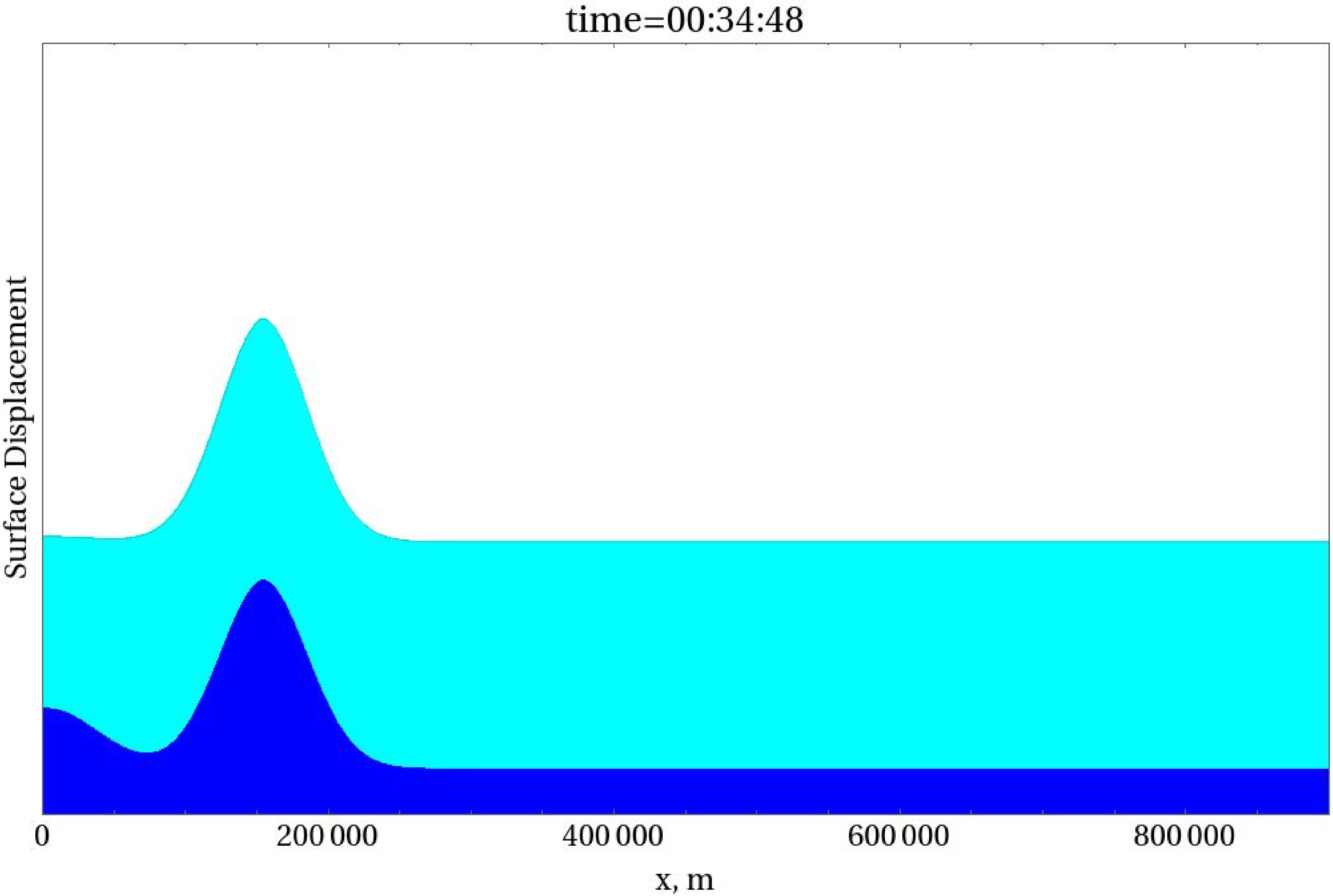
$$H_1 = 100\ \text{м} \qquad H_2 = 4000\ \text{м}$$

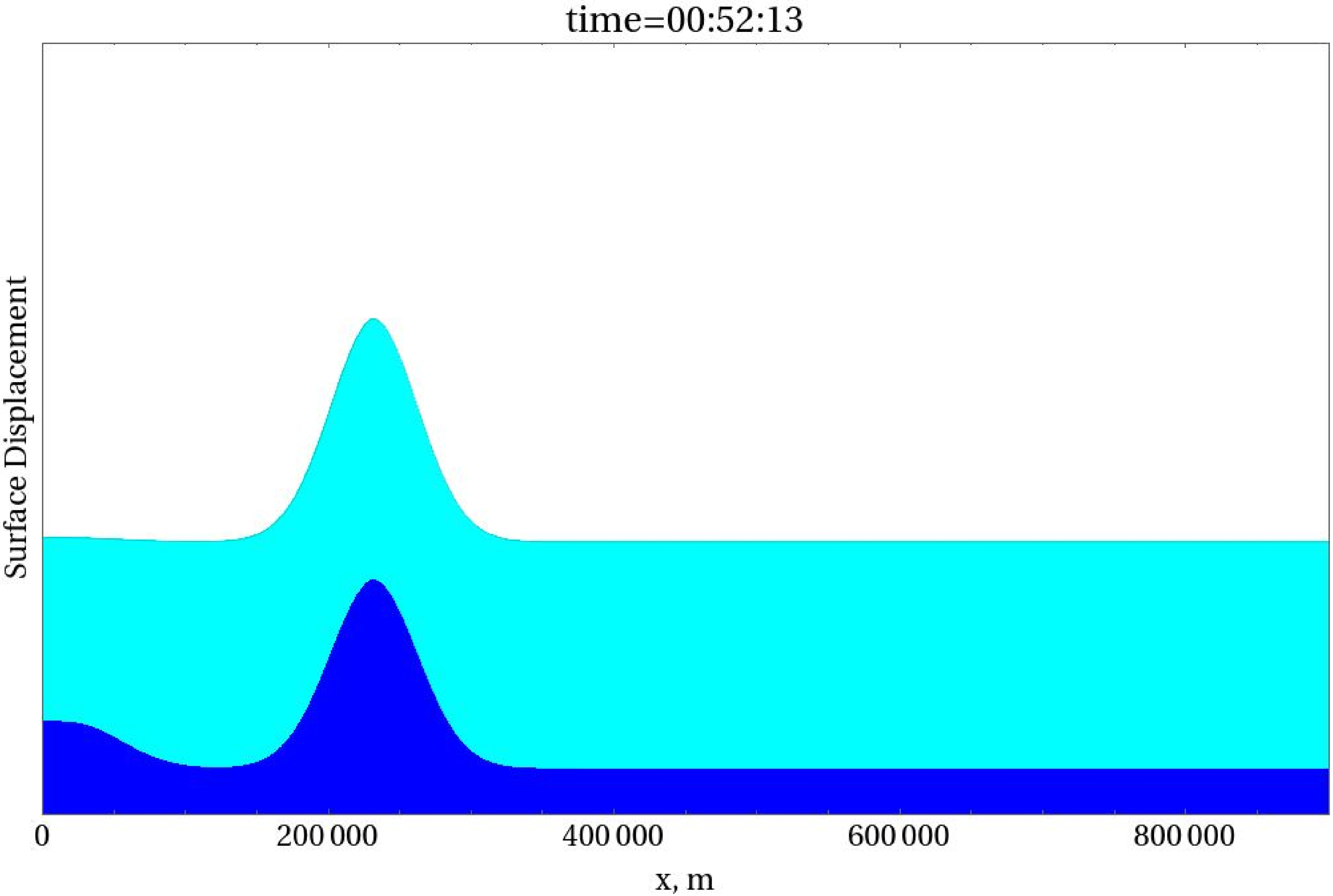
$$g = 9.8\ \text{м}/\text{с}^2 \qquad \delta = 0.003$$

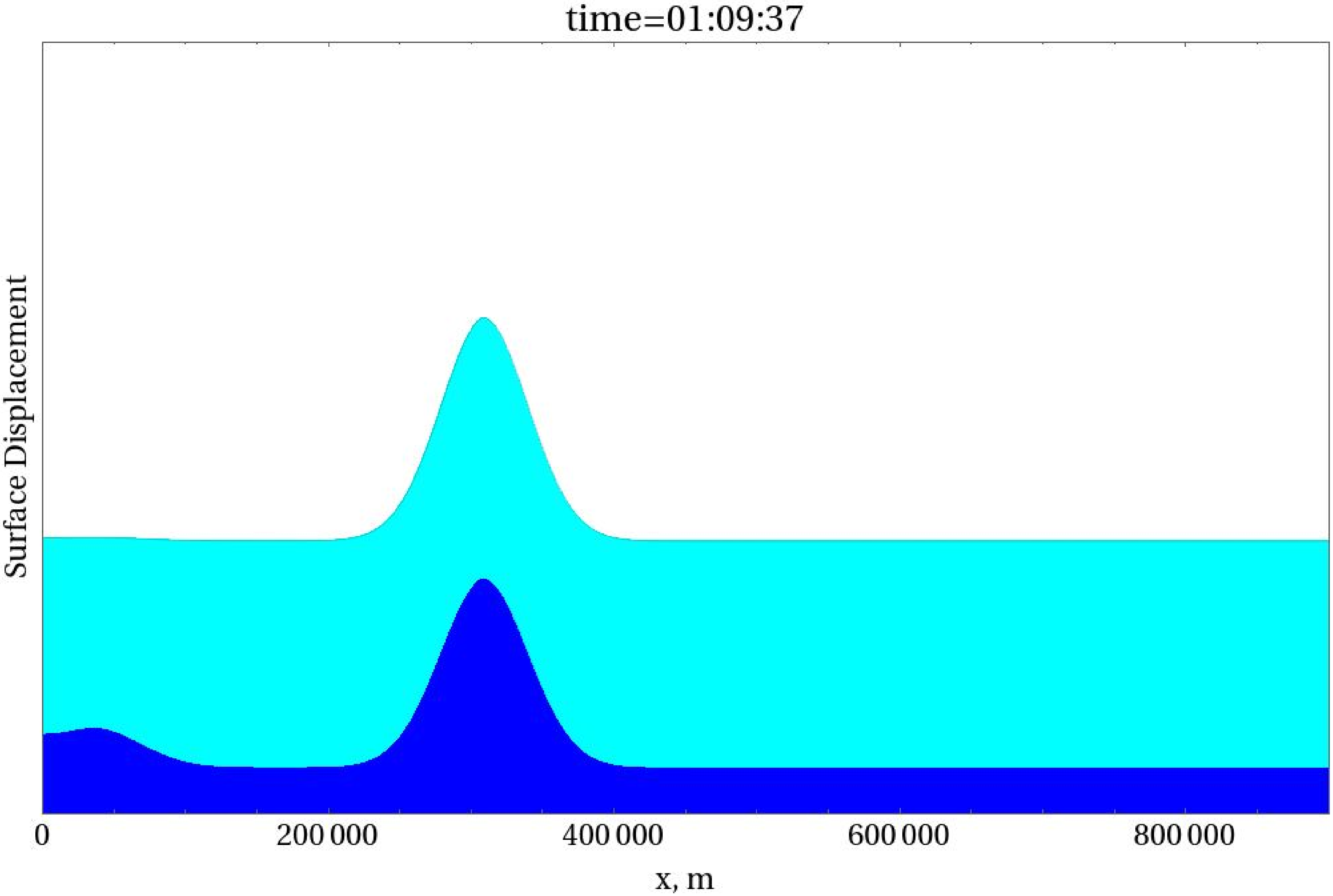
$$c_{\text{внутр}} = \sqrt{\frac{\delta g H_1 H_2}{H_1 + H_2}} \approx 1.7\ \text{м}/\text{с}$$

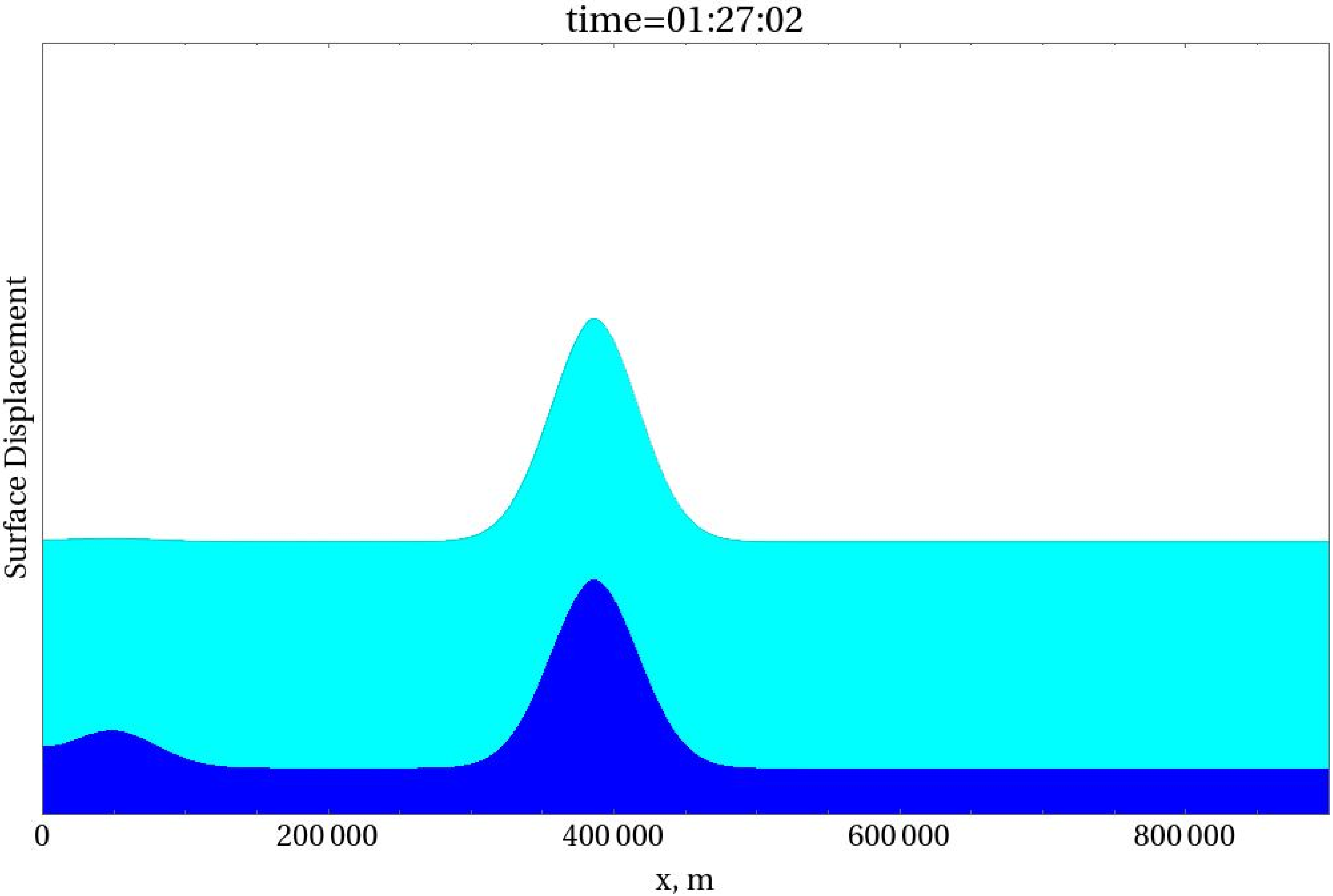

time=00:00:05
Surface Displacement
0
200 000
400 000
600 000
800 000
x, m

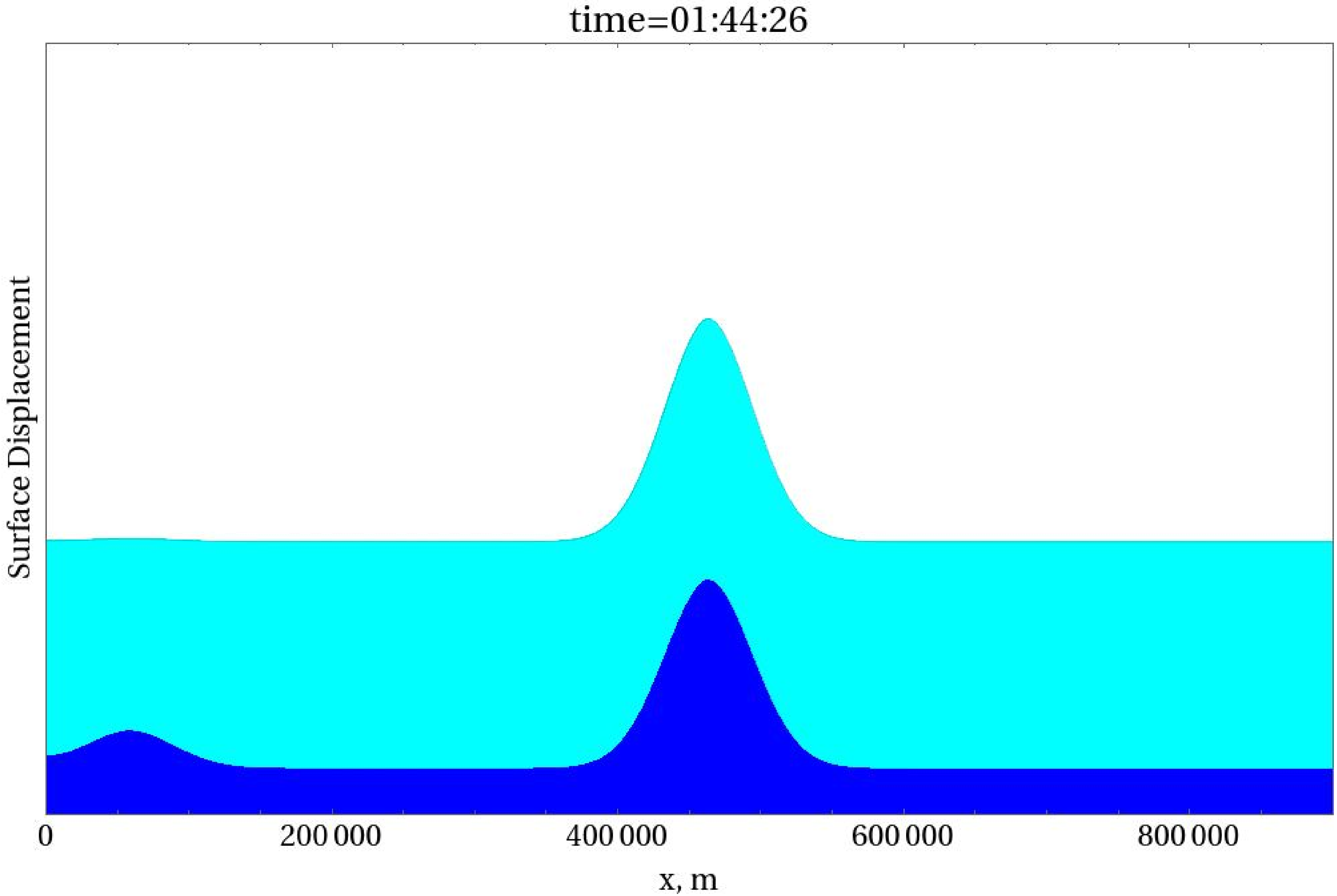

time=00:17:24
Surface Displacement
0
200 000
400 000
600 000
800 000
x, m

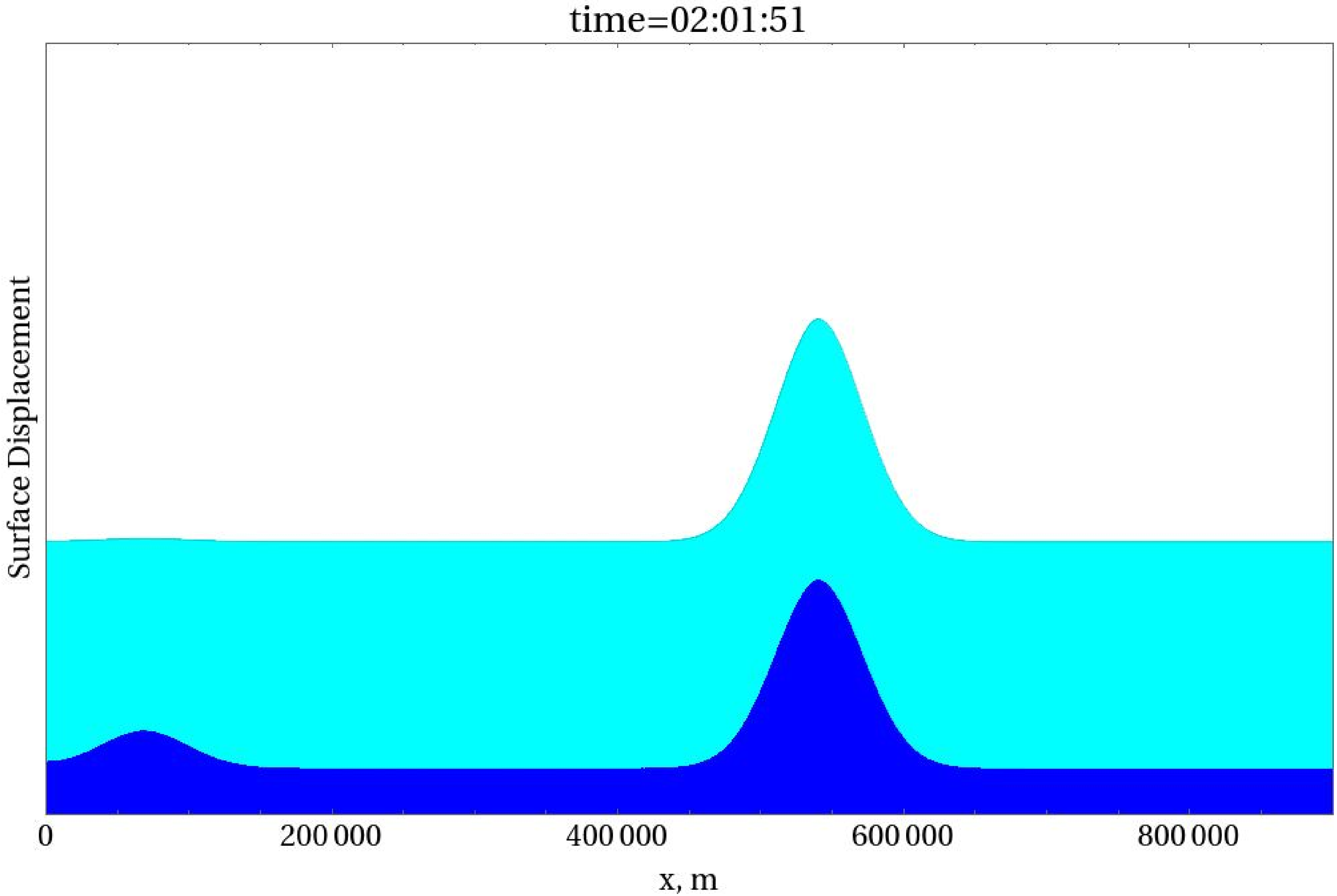

time=00:34:48
Surface Displacement
0
200 000
400 000
600 000
800 000
x, m

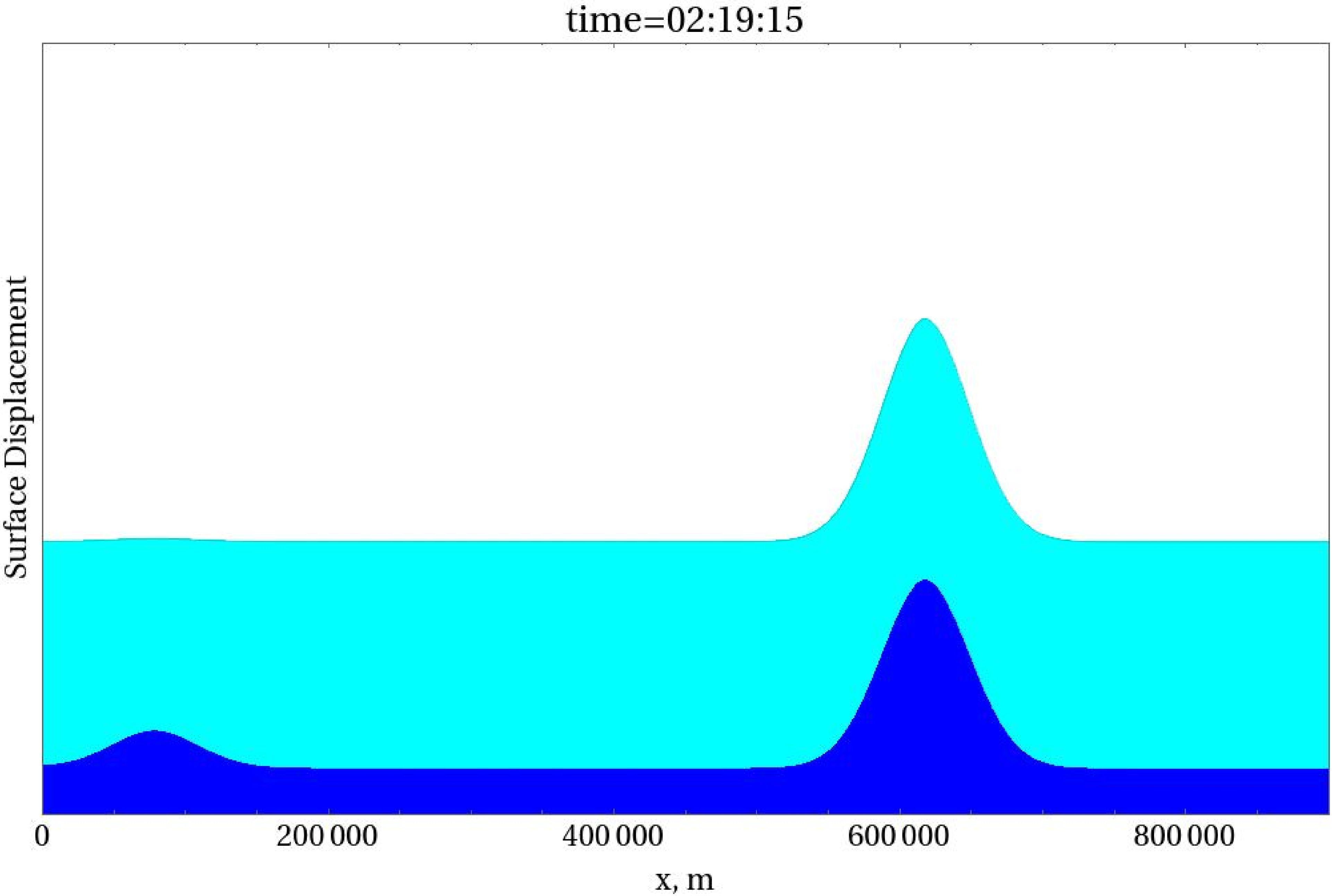

time=00:52:13
Surface Displacement
0
200 000
400 000
600 000
800 000
x, m

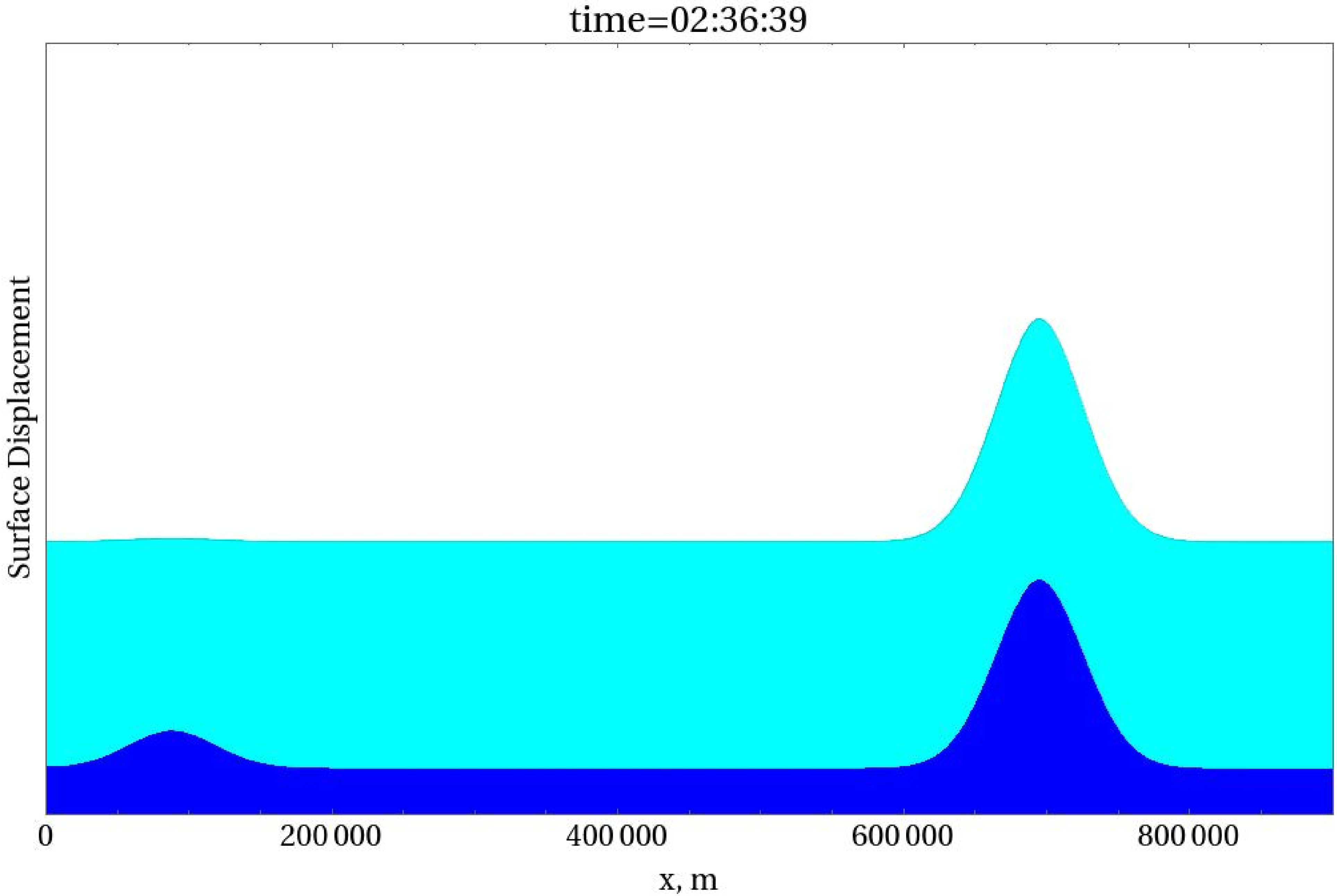

time=01:09:37
Surface Displacement
0
200 000
400 000
600 000
800 000
x, m

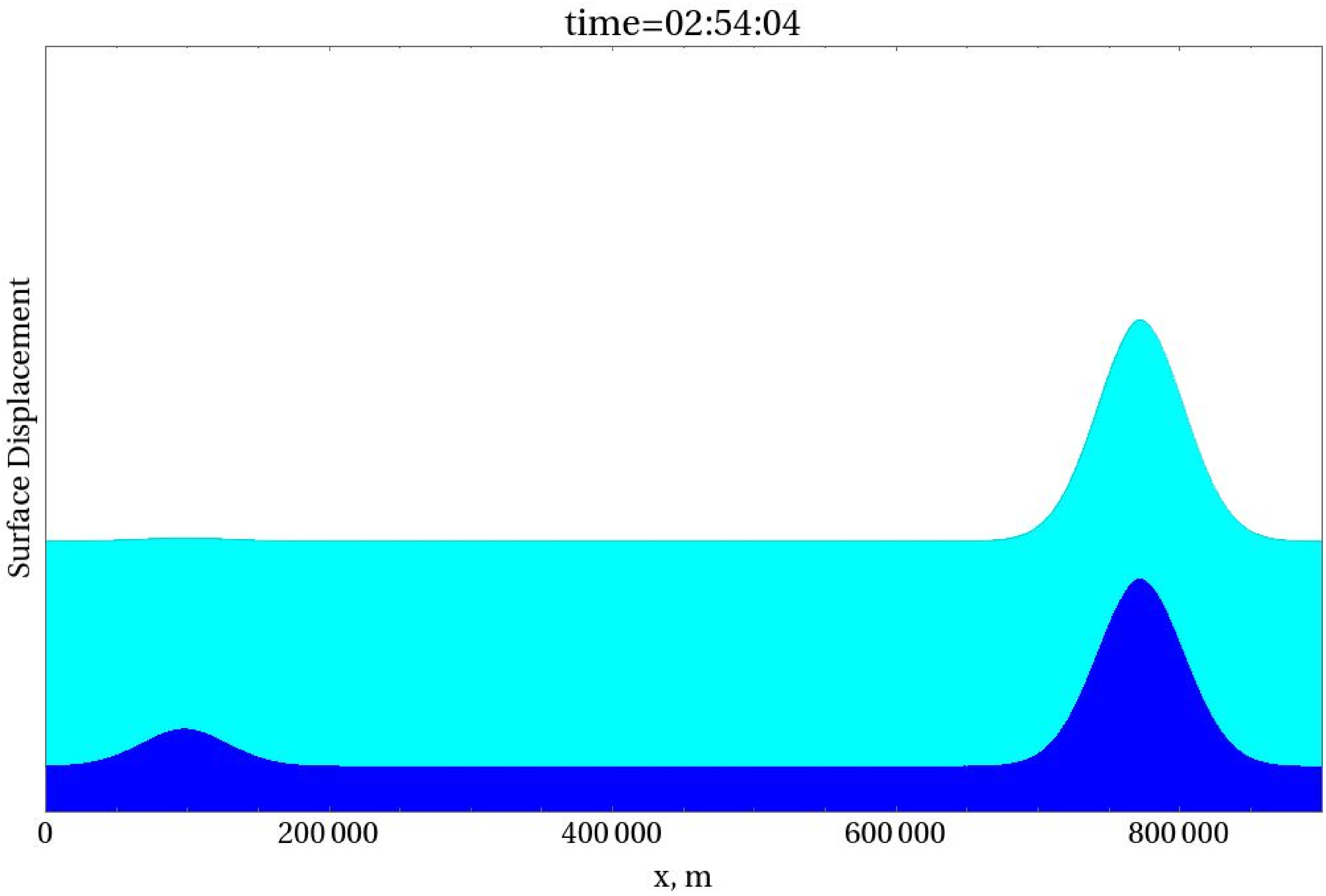

time=01:27:02
Surface Displacement
0
200 000
400 000
600 000
800 000
x, m


time=01:44:26
Surface Displacement
0
200 000
400 000
600 000
800 000
x, m


time=02:01:51
Surface Displacement
0
200 000
400 000
600 000
800 000
x, m

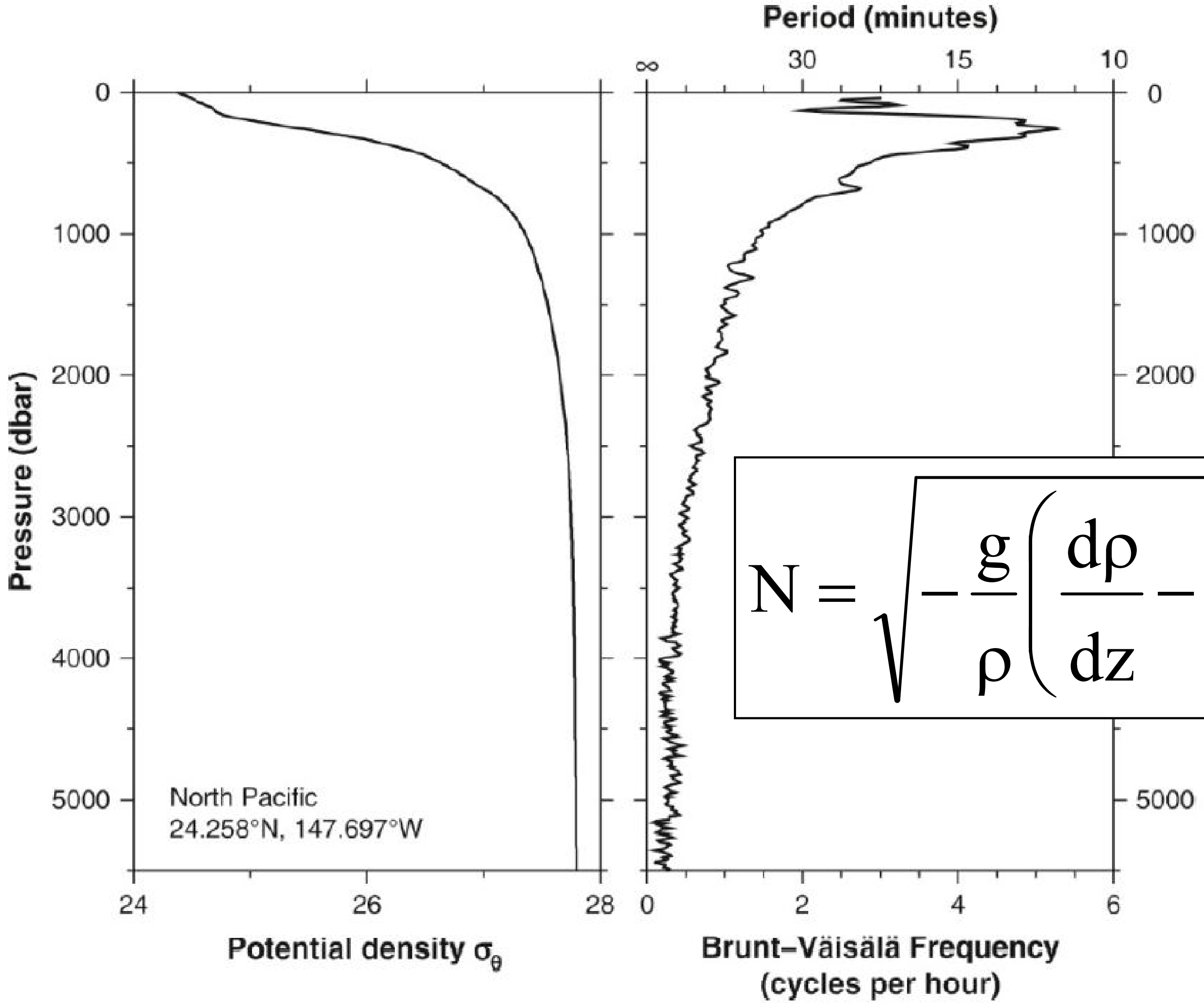

time=02:19:15
Surface Displacement
0
200 000
400 000
600 000
800 000
x, m


time=02:36:39
Surface Displacement
0
200 000
400 000
600 000
800 000
x, m



time=02:54:04
Surface Displacement
0
200 000
400 000
600 000
800 000
x, m

Вертикальные профили плотности и частоты Вяйсяля-Брента в океане



$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s\right)}$$

Внутренние волны в непрерывно стратифицированной жидкости