Введение в физику гидросферы

2024 Лекция №11

Носов Михаил Александрович

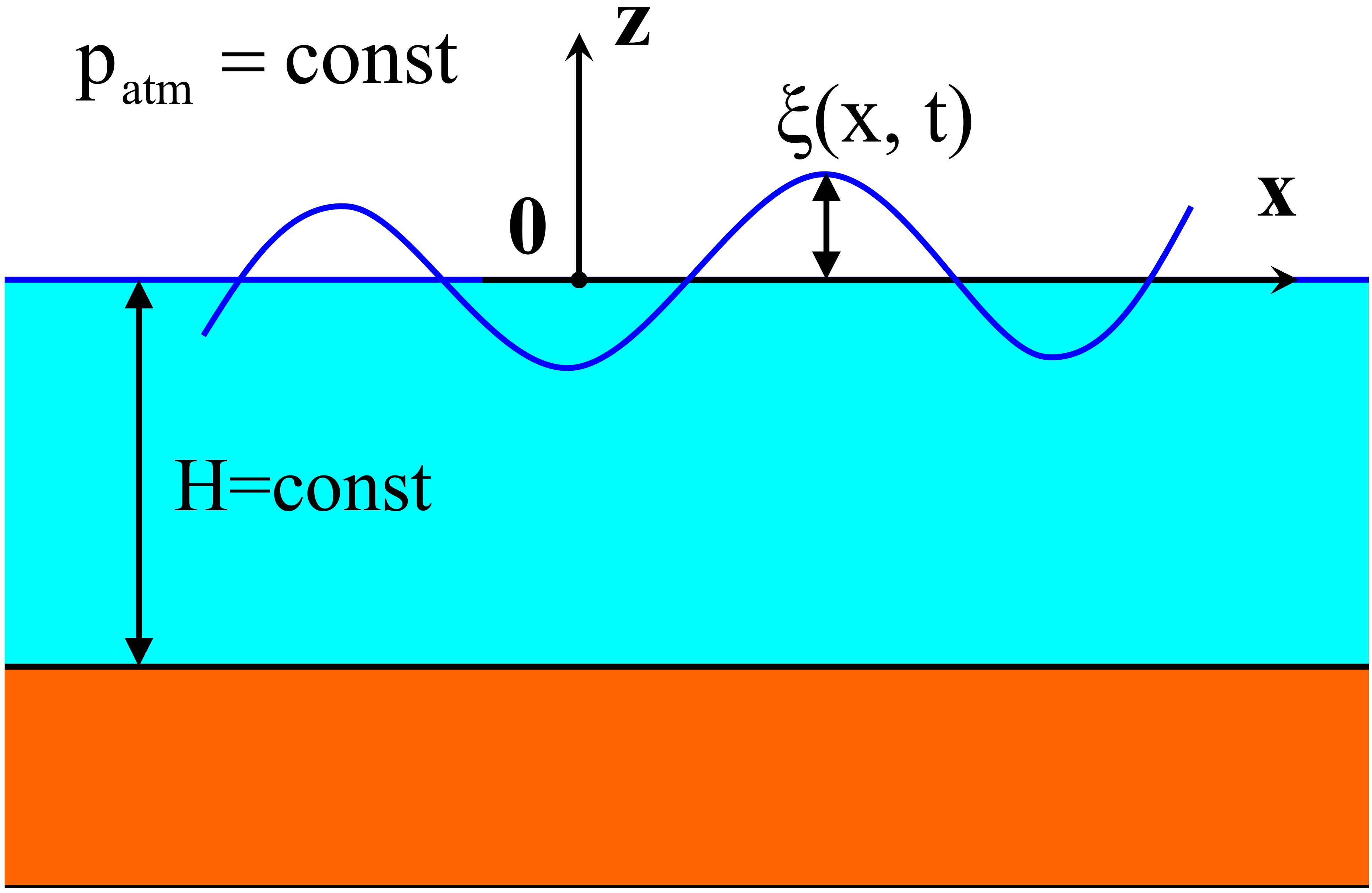
кафедра физики моря и вод суши

отделение геофизики

физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова

Элементы линейной потенциальной теории волн

Постановка 2D задачи (0xz)



Система уравнений для описания линейных гравитационных волн (ЛГВ)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \operatorname{div}\left(\vec{v}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} \equiv \left(u, w\right)$$

Граничные условия:

поверхность “вода-воздух”

$$p = p_{атм} = const$$

$$\partial \xi / \partial t = w$$

поверхность дна

$$w = 0$$

Потенциал скорости течения

$$\vec{v} = \vec{\nabla}F + \cancel{\vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

или

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad w = \frac{\partial F}{\partial z}$$

течение безвихревое

$$\mathrm{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta F = 0}$$

основное уравнение потенциальной теории

$$G = -gz$$

гравитационный потенциал

$$\vec{g} = \vec{\nabla}G$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{g} \Rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t)$$

произвольная фукция времени

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{p}{\rho}+gz=f(t)$$

используем для постановки граничного условия на свободной поверхности воды

$$\boxed{z=\xi: \quad p=p_{atm}=\text{const}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{p_{atm}}{\rho}+g\xi=f(t)$$

Переопределим потенциал, добавив к нему функцию времени, компенсирующую f(t)-p_{atm}/ρ. На поле скорости это не повлияет.

$$\frac{\partial F}{\partial t}+g\xi=0 \;\Big|\; \frac{\partial}{\partial t} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+g\frac{\partial\xi}{\partial t}=0$$

граничное условие сносим с возмущенной поверхности на невозмущенную

$$z=0: \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+gw=0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+g\frac{\partial F}{\partial z}=0}$$

Математическая постановка 2D задачи о линейных гравитационных волнах бесконечно малой амплитуды

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta F = 0$$

$$z = 0: \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$z = -H: \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Общий вид решения уравнения Лапласа

$$F = \left[A \cdot \mathrm{sh}(kz) + B \cdot \mathrm{ch}(kz)\right]\cos(\omega t - k x)$$

Решение, удовлетворяющее граничному условию на поверхности

$$F = A\left[\mathrm{sh}(kz) + \frac{gk}{\omega^2}\mathrm{ch}(kz)\right]\cos(\omega t - k x)$$

Удовлетворяя граничному усл $\boxed{\mathrm{th}(kH)}$ дне, получаем

$$\mathrm{ch}(kH) - \frac{gk}{\omega^2}\mathrm{sh}(kH) = 0 \qquad \omega^2 = gk\frac{\mathrm{sh}(kH)}{\mathrm{ch}(kH)}$$

Дисперсионное соотношение для поверхностных гравитационных волн

$$\boxed{\omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kH)}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$c = \lambda / T$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$c = \omega / k$$

$$c_{\text{фаз}} = \omega / k$$

циклическая частота

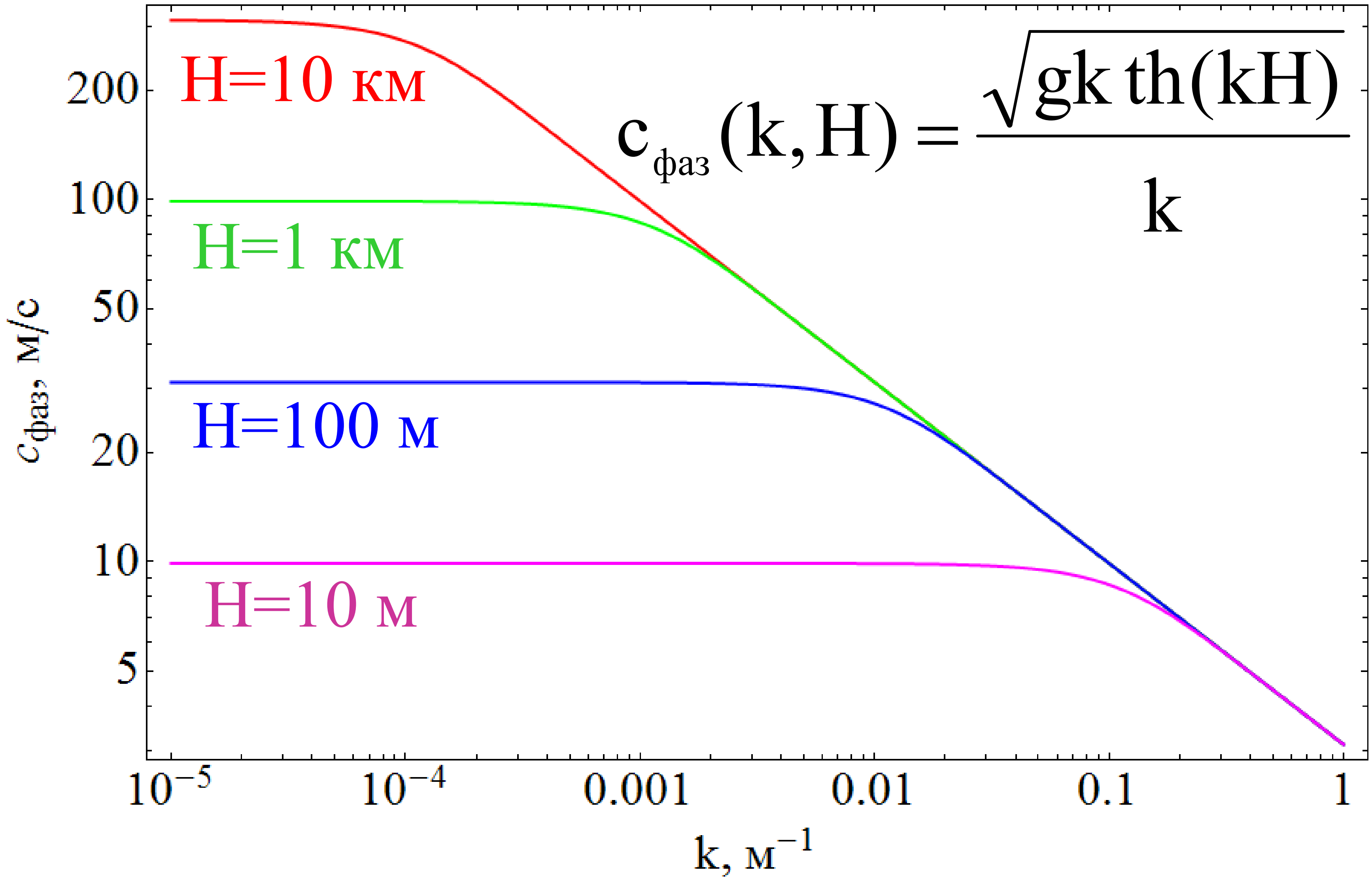
волновое число

Фазовая скорость гравитационных волн

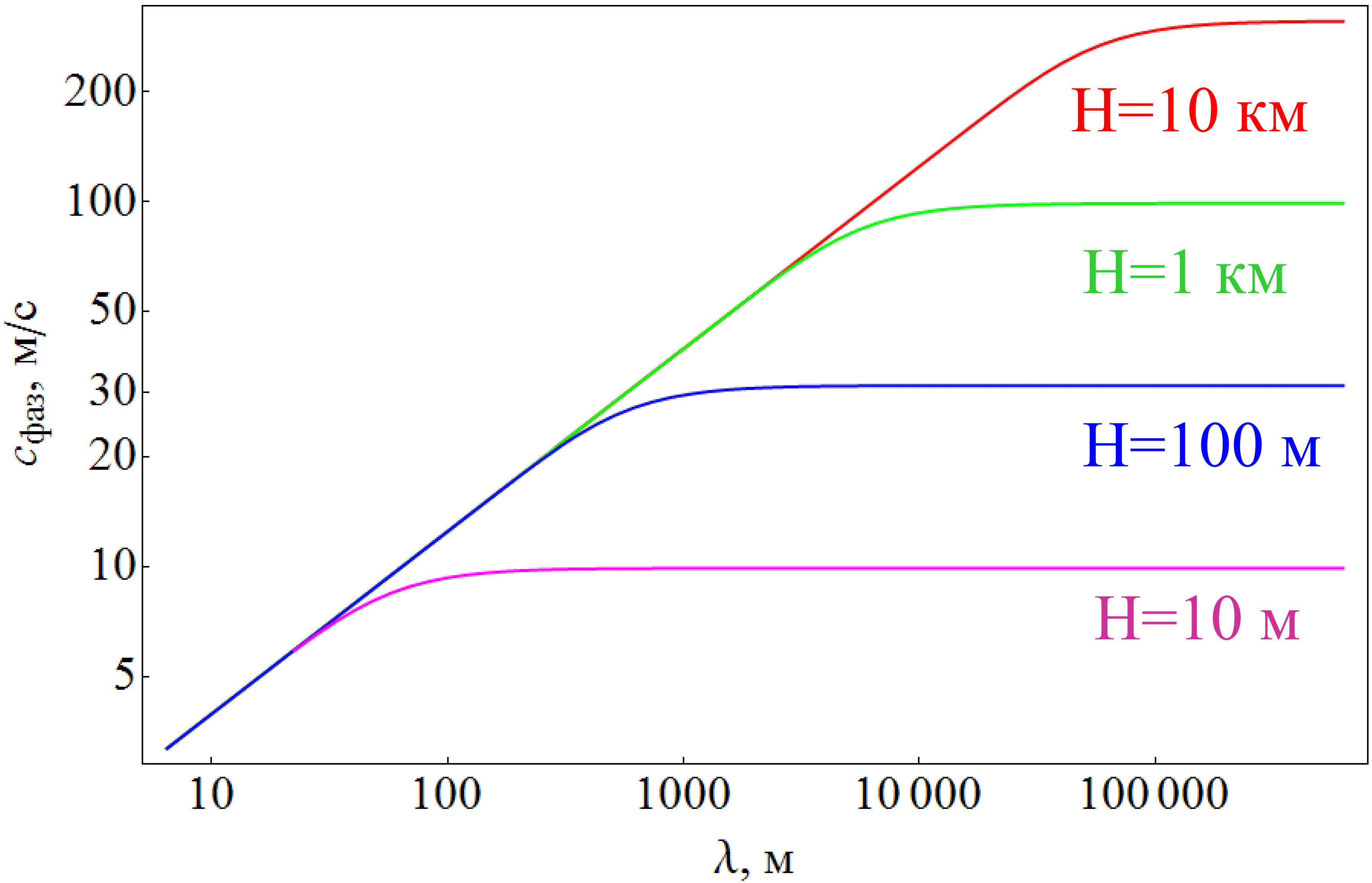
$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{gk\,\text{th}(kH)}}{k}$$

$$\boxed{\omega^2 = gk\,\text{th}(kH)}$$

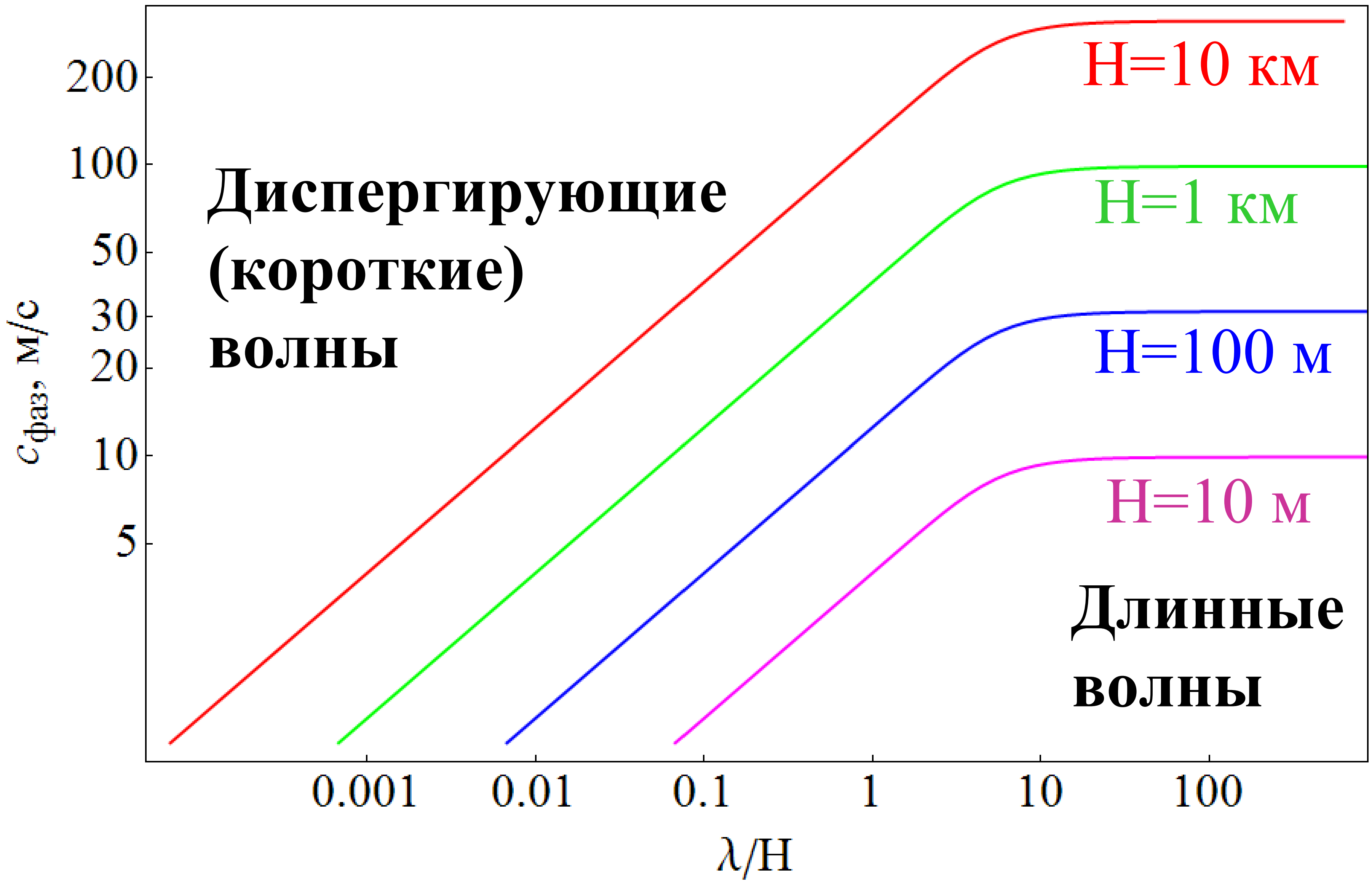
Фазовая скорость как функция волнового числа и глубины



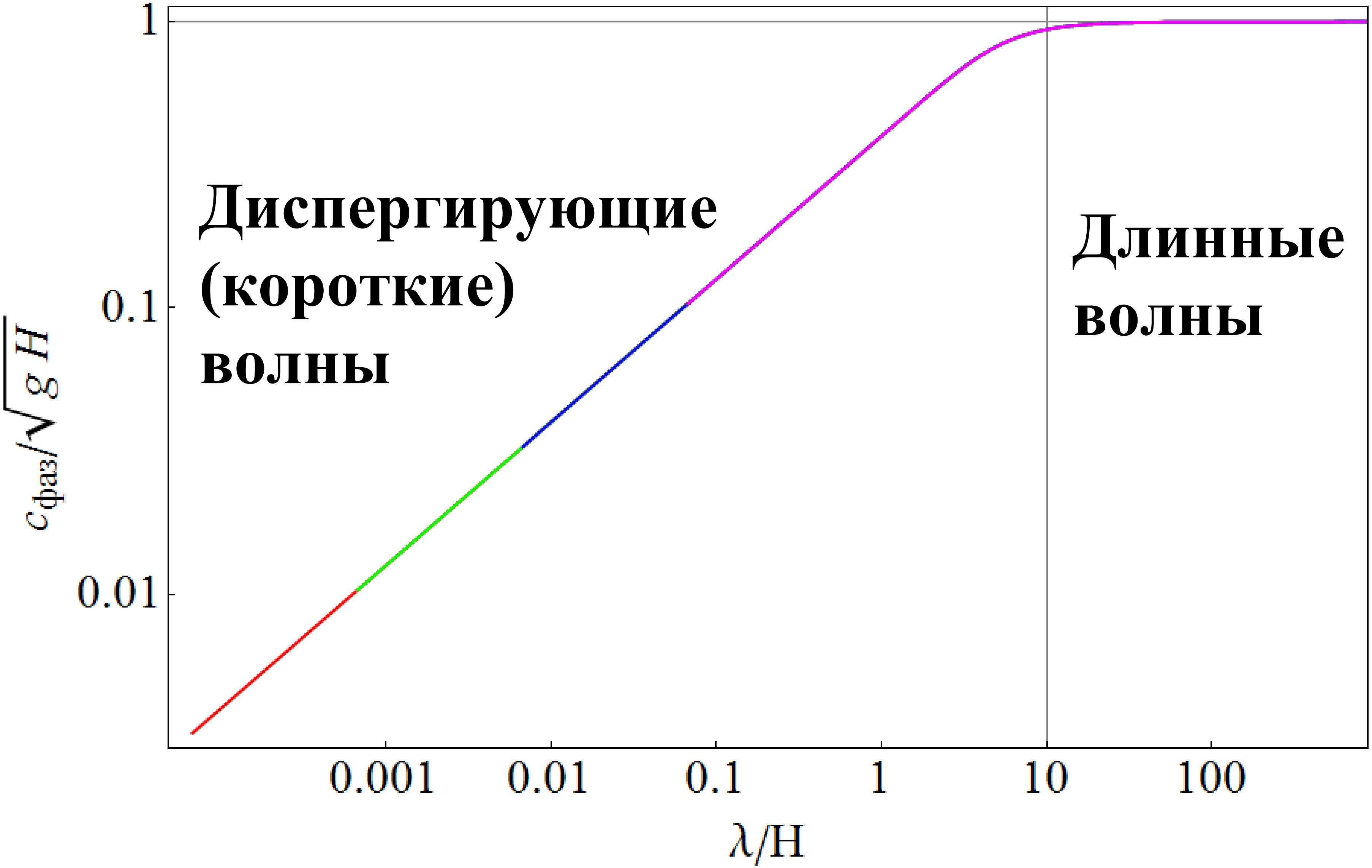
Фазовая скорость как функция длины волны и глубины



Фазовая скорость как функция отношения длины волны к глубине



Нормированная фазовая скорость как функция отношения длины волны к глубине



Дисперсионное соотношение для поверхностных гравитационных волн

$$\boxed{\omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kH)}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad c = \lambda / T \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

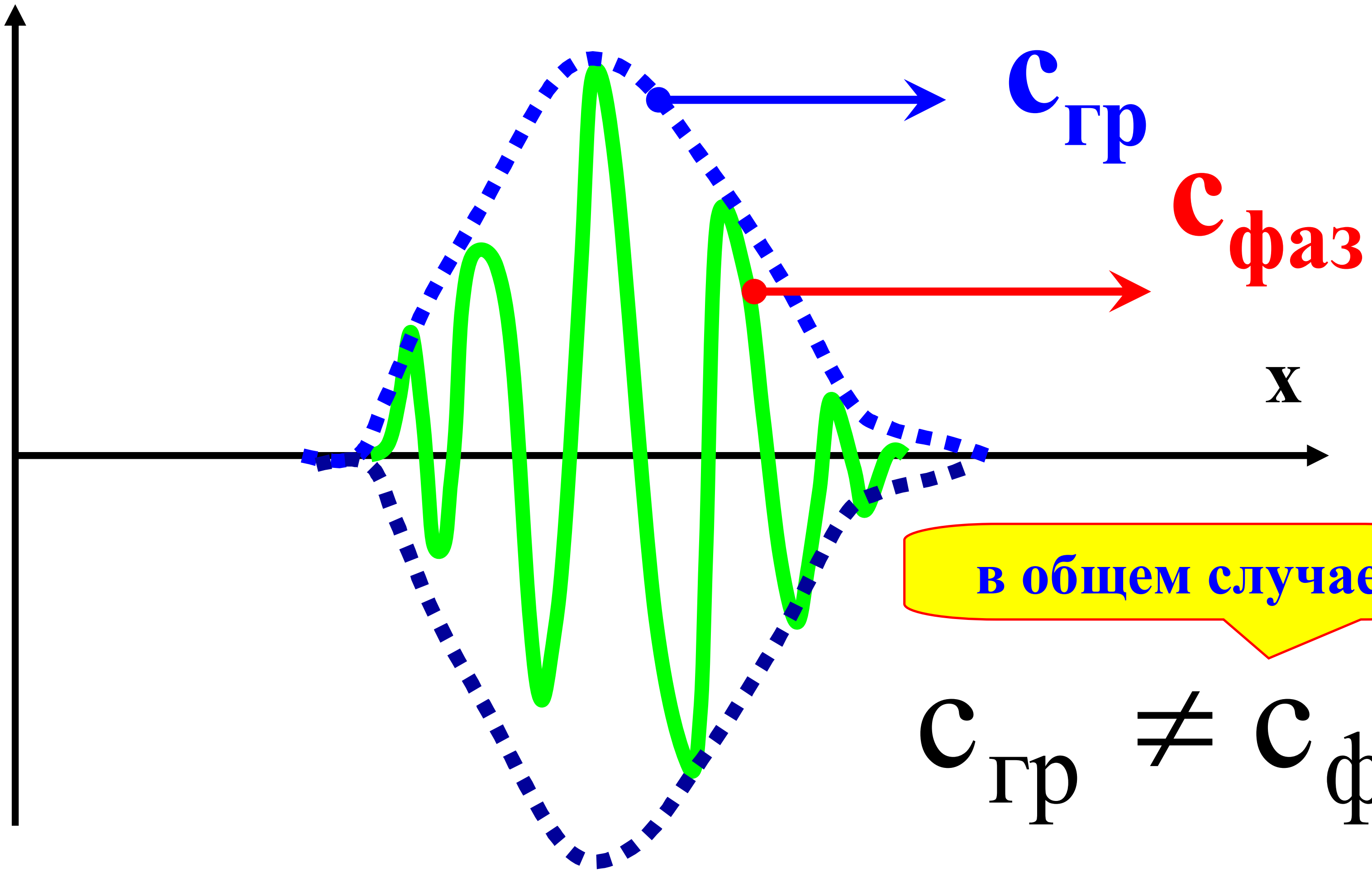
$$c = \omega / k$$

циклическая частота

волновое число

Фазовая и групповая скорости волн

энергия переносится группами волн,
т.е. с групповой скоростью



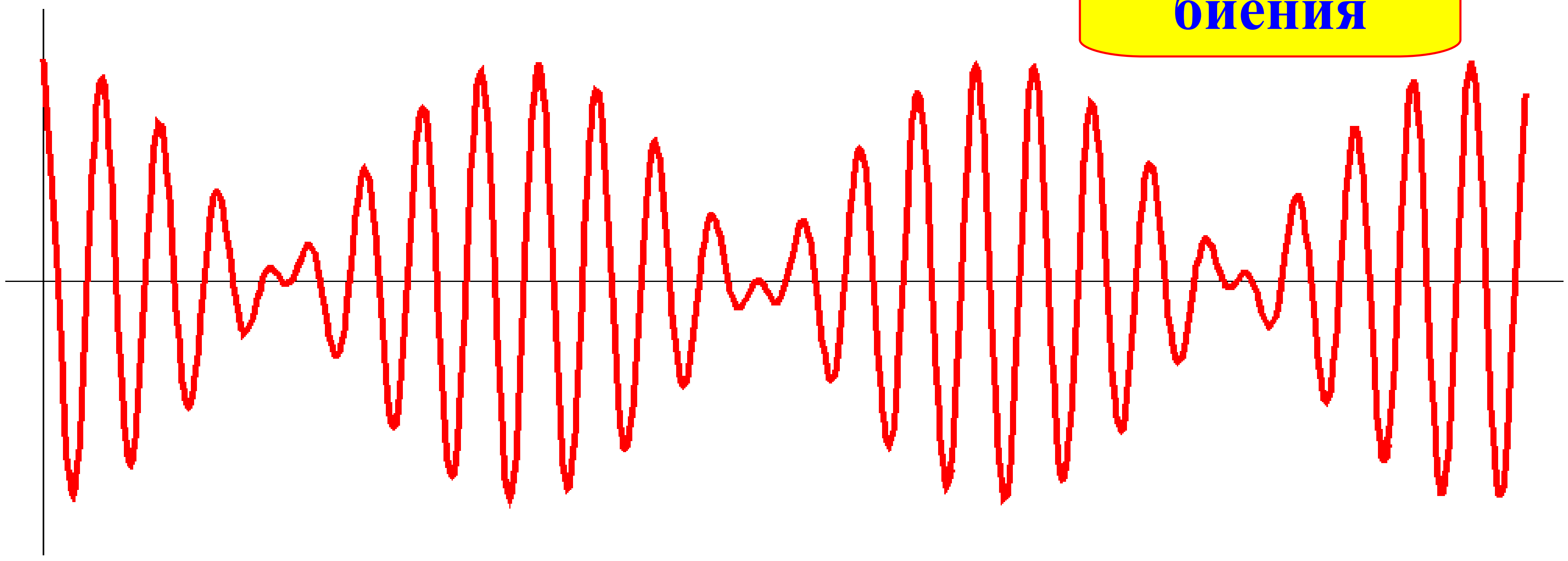
в общем случае

$$c_{гр} \neq c_{фаз}$$

$$\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

биения



$$\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \times$$

$$\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_1} << 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|k_1 - k_2|}{k_1} << 1$$

$$\times \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) =$$

$$= 2\cos\left(k\left[\frac{\omega}{k} t - x\right]\right)\cos\left(\frac{\Delta k}{2}\left[\frac{\Delta\omega}{\Delta k} t - x\right]\right)$$

$$c_{\text{фаз}} \qquad\qquad c_{\text{гр}}$$

$$c_{фаз} = \frac{\omega}{k} \qquad c_{гр} = \frac{d\omega}{dk}$$

Недиспергирующие волны

$$\omega = c_{фаз} k, \quad c_{фаз} \neq f(k)$$

$$c_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = c_{фаз}$$

Диспергирующие волны

$$c_{гр} \neq c_{фаз}$$

$$c_{фаз} = \frac{\omega}{k} \qquad c_{гр} = \frac{d\omega}{dk}$$

Диспергирующие волны

$$c_{фаз} = \frac{\sqrt{gk\,\mathrm{th}(kH)}}{k}$$

$$c_{гр} = \frac{g\left(kH/\mathrm{ch}^2(kH) + \mathrm{th}(kH)\right)}{2\sqrt{gk\,\mathrm{th}(kH)}}$$

Дисперсионное соотношение для гравитационно-капиллярных волн

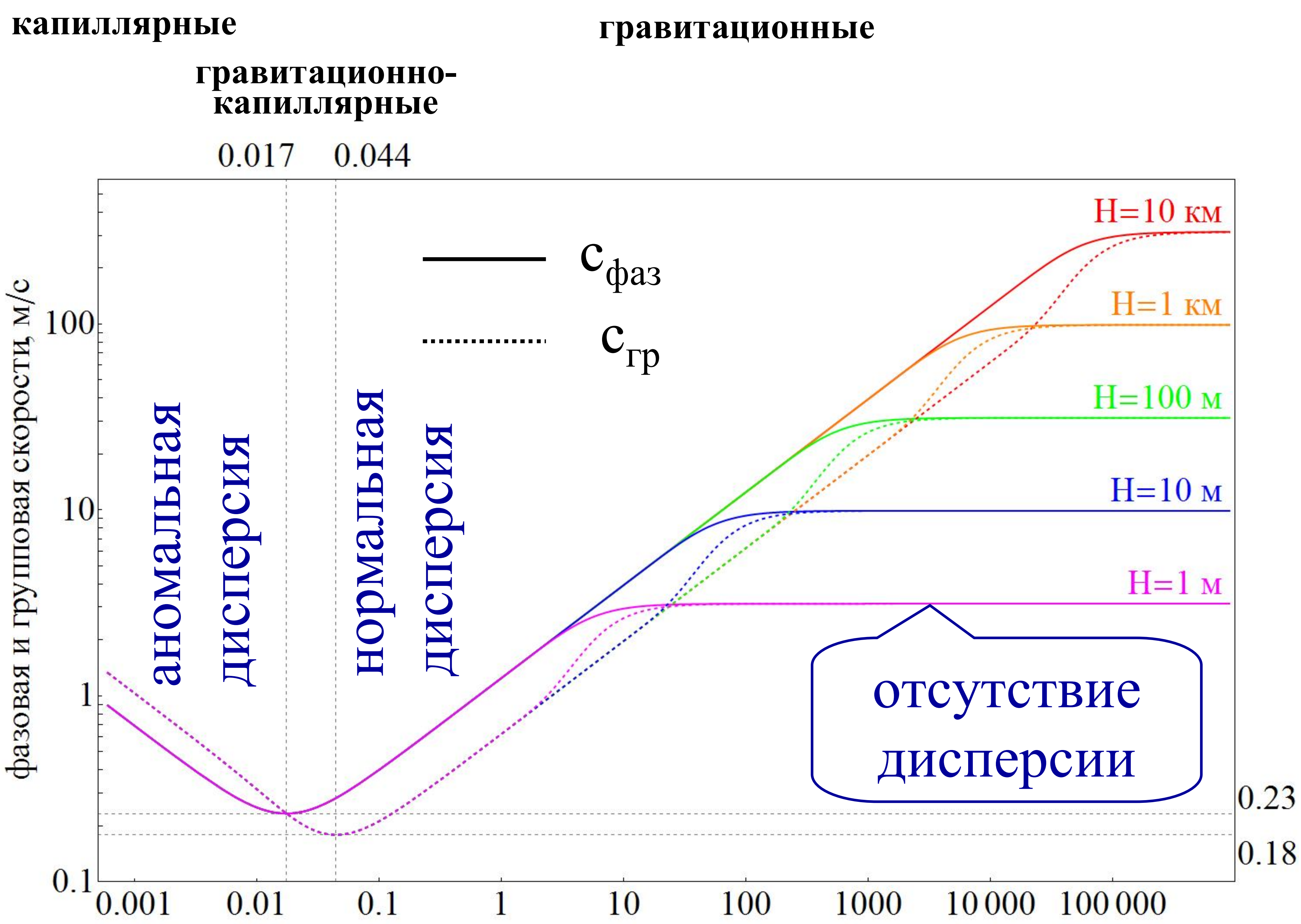
$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\alpha}{\rho} k^3 \right) \operatorname{th}(kH)$$

$\alpha \approx 0.075 \text{ Н/м}$

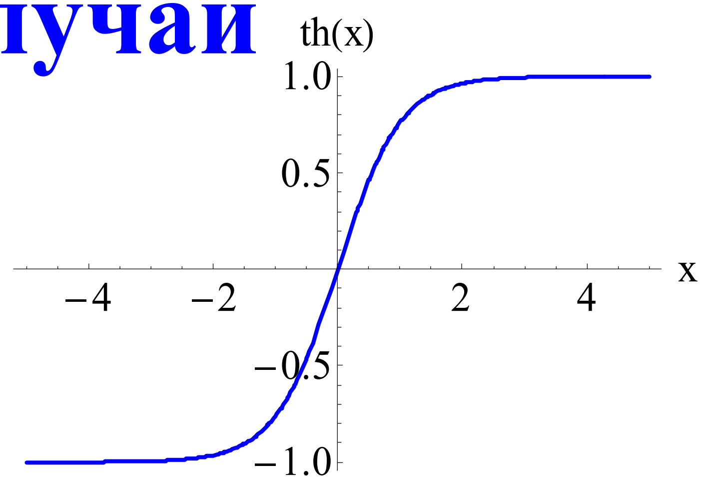
при $t = 20^\circ \text{C}$

$$p_1 - p_2 = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

формула Лапласа


капиллярные
гравитационные
гравитационно-
капиллярные
0.017
0.044
$c_{фаз}$
$c_{гр}$
H=10 км
H=1 км
H=100 м
H=10 м
H=1 м
аномальная
дисперсия
нормальная
дисперсия
отсутствие
дисперсии
фазовая и групповая скорости, м/с
100
10
1
0.1
0.23
0.18
0.001
0.01
0.1
1
10
100
1000
10 000
100 000

Предельные случаи



$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kH)$$

«Глубокая вода» (kH>>1)

$$\omega^2 = gk$$

$$c_{фаз} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$\omega = \sqrt{g\,k}$$

$$c_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$$

Волны на «глубокой воде» подвержены дисперсии

групповая скорость меньше фазовой

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

объясняет явление «мертвая зыбь»

$$\lambda = 1\,\text{м} \quad \Rightarrow \quad c \approx 1.3\,\text{м/с}$$

$$\lambda = 10\,\text{м} \quad \Rightarrow \quad c \approx 4\,\text{м/с}$$

$$\lambda = 100\,\text{м} \quad \Rightarrow \quad c \approx 13\,\text{м/с}$$

Предельные случаи

групповая скорость равна фазовой

Волны на «мелкой воде» не подвержены дисперсии

$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kH)$$

«Мелкая вода» ($kH \ll 1$)

$$\omega^2 = gHk^2$$

$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH}$$

$$\omega = \sqrt{gH}\,k$$

$$c_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{gH}$$

Сейши (*фр. seiche*) - стоячие волны, возникающие в замкнутых или частично замкнутых водоёмах.

Причины возникновения:

- метеорологические эффекты (ветер, колебания атмосферного давления);
- сейсмическая активность;
- оползни и обвалы;
- и др.

Период сейшевых колебаний (формула Мериана)

$$T = \frac{2L}{\sqrt{gH}}$$

L – *длина водоема*

H – *глубина*

одноузловая сейша

$$\lambda / 2 = L$$

$$\underbrace{T\sqrt{gH}}_{\lambda} / 2 = L$$

многоузловая сейша

$$n \cdot \lambda / 2 = L$$

$$n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$T_n = \frac{2L}{n \cdot \sqrt{gH}}$$

Внутренние сейши (формула Ватсона)

$$n \cdot \lambda / 2 = L$$

$$n = 1, 2, 3\ldots$$

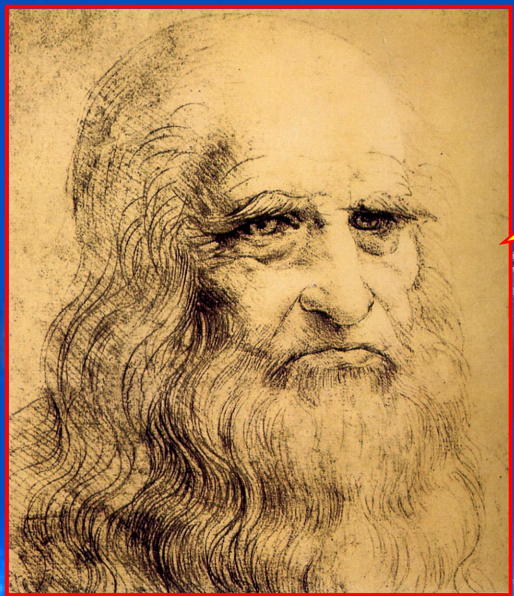
$$T_n = \frac{2L}{n \cdot c_{внутр}}$$

$$c_{внутр} = \sqrt{\frac{\delta g H_1 H_2}{H_1 + H_2}}$$

$$\delta \equiv \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$$

Акустические волны

«…погрузив трубу одним концом в воду и прижав другой ее конец к уху, можно услышать корабли, идущие вдали…»



Леонардо да Винчи
1452- 1519

Система уравнений для описания линейных волн без учета вращения Земли и сил вязкого трения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \end{cases}$$

Гравитационные волны

Акустические волны

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} \\ \dfrac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0 \end{cases}$$

$\vec{v}'$ **- малая величина**

$$\frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho_0} = \vec{g}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' \qquad \vec{v}_0 = 0$$

$$p = p_0 + p' \qquad |p'| << p_0$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \qquad |\rho'| << \rho_0$$

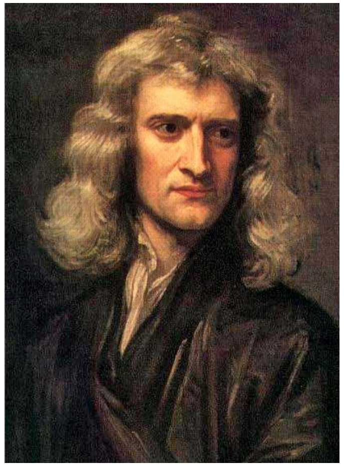
$$\cancel{\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T p'}$$

$$\cancel{\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{c_N^{\;2}}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p'}{\rho_0} \\[2ex] \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0 \end{cases}$$

$|\operatorname{div}$

$\left|\dfrac{\partial}{\partial t}\right.$



Sir Isaac Newton

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s p'$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{c^2}$$

Pierre-Simon Laplace

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s p' \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \operatorname{div}(\vec{v}')}{\partial t} = -\dfrac{\Delta p'}{\rho_0} \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \rho_0 \dfrac{\partial \operatorname{div}(\vec{v}')}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{c^2}$$

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \Delta p' = 0$$

Скорость звука

Волновое уравнение (акустика)

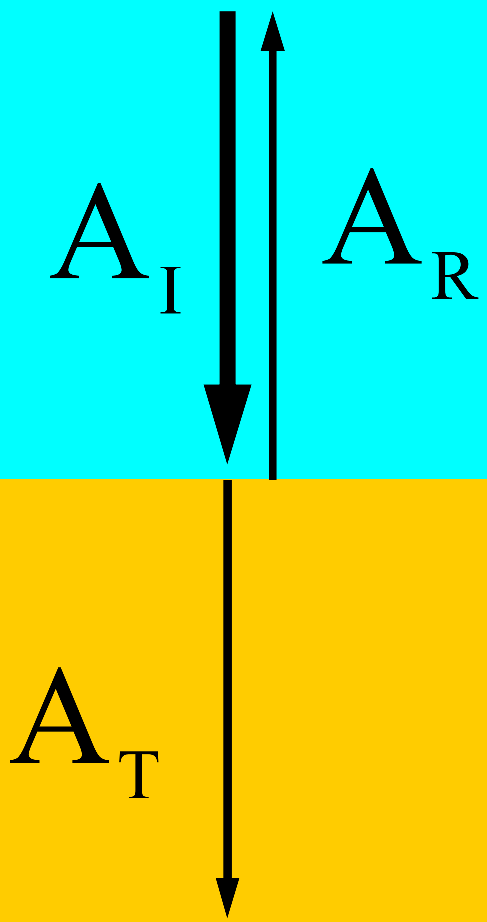
$$\boxed{\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \Delta p' = 0}$$

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \begin{array}{l} \overset{\textbf{воздух}}{\approx 340\ \text{м/с}} \\ \overset{\textbf{вода}}{\approx 1500\ \text{м/с}} \end{array}$$

Скорость звука

Граничные условия

ρc — **акустическая жесткость**



$$\rho_2 c_2 >> \rho_1 c_1 \Rightarrow R = 1$$

$$\rho_2 c_2 << \rho_1 c_1 \Rightarrow R = -1$$

$$R \equiv \frac{A_R}{A_I} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}$$

$$\rho_2 c_2 \approx \rho_1 c_1 \Rightarrow R \approx 0$$

Граничные условия (1)

ρc — **акустическая жесткость**

$$\rho c = 1.26 \cdot 340 \approx 430 \, \text{кг} / \text{м}^2 \cdot \text{с}$$ **воздух**

отражение R= -1 $$p' = 0$$

$$\rho c = 1000 \cdot 1500 \approx 1.5 \cdot 10^6 \, \text{кг} / \text{м}^2 \cdot \text{с}$$ **вода**

отражение R=1 $$w' = 0 \quad \text{или} \quad \partial p' / \partial z = 0$$

$$\rho c = 3000 \cdot 4000 \approx 12 \cdot 10^6 \, \text{кг} / \text{м}^2 \cdot \text{с}$$ **дно**

Граничные условия (2)

$$\rho c = 1.26 \cdot 340 \approx 430\,\text{кг}/\text{м}^2 \cdot \text{с}$$

воздух

отражение R= -1

$$p' = 0$$

$$\rho c = 1000 \cdot 1500 \approx 1.5 \cdot 10^6\,\text{кг}/\text{м}^2 \cdot \text{с}$$

вода

преломление R<1

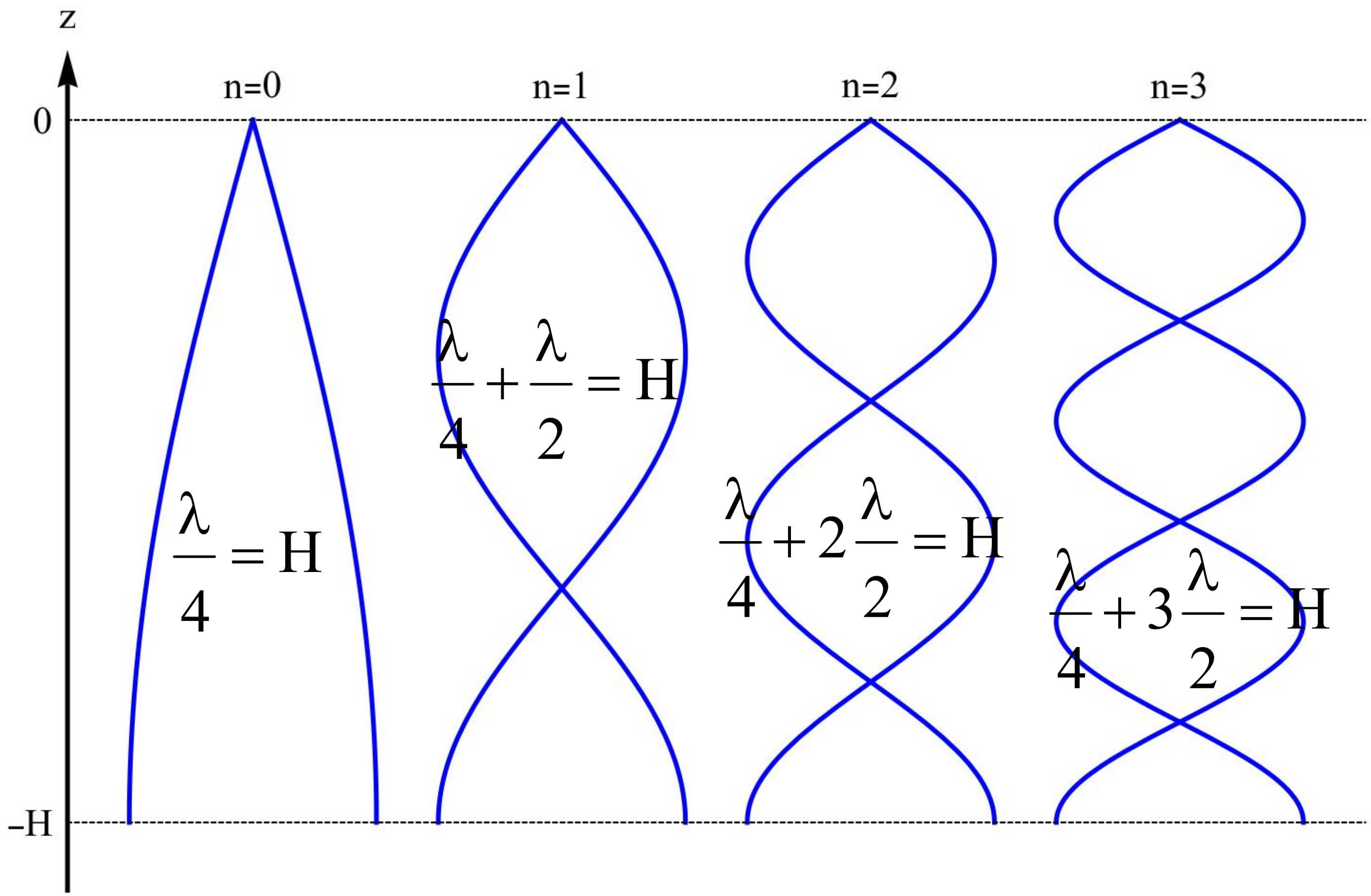
$$w_1 = w_2, \quad p_1 = p_2$$

$$\rho c = 3000 \cdot 4000 \approx 12 \cdot 10^6\,\text{кг}/\text{м}^2 \cdot \text{с}$$

дно

Сжимаемый океан как волновод

$$p' = \sum_n A^n \sin(k_z^n z) \qquad k_z^n = \frac{\pi(1+2n)}{2H}$$



$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2}\right) = 0$$

$$k_z^n = \frac{\pi(1+2n)}{2H}$$

$$p'(x,z,t) = p_0\, e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)}$$

$$\omega^2 / c^2 = k_x^{\ 2} + k_z^{\ 2}$$

$$k_x = \sqrt{\omega^2 / c^2 - \left(k_z^n\right)^2} = \sqrt{\omega^2 / c^2 - \frac{\pi^2 (1+2n)^2}{4H^2}}$$

4500 м

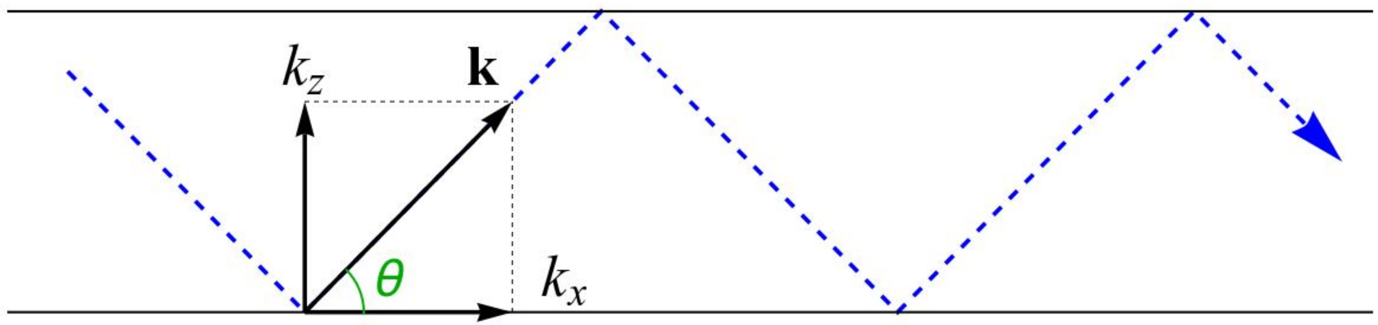
$$\omega_{min} = \frac{\pi c}{2H} \qquad T_{max} = \frac{4H}{c} \approx \mathbf{12\ с} \qquad \lambda_{max} = 4H$$

1500 м/с

$$\omega = c\sqrt{k_x{}^2 + \left(k_z^n\right)^2}$$ **- дисперсионное соотношение**

$$C_{фаз} \equiv \frac{\omega}{k_x} = c\sqrt{1+\left(k_z^n / k_x\right)^2} = \frac{c}{\cos\theta}$$

$$C_{гр} \equiv \frac{d\omega}{dk_x} = \frac{c}{\sqrt{1+\left(k_z^n / k_x\right)^2}} = c\cdot\cos\theta$$



Скорость звука в воде

$$c = c(T, S, p)$$

эмпирическая зависимость

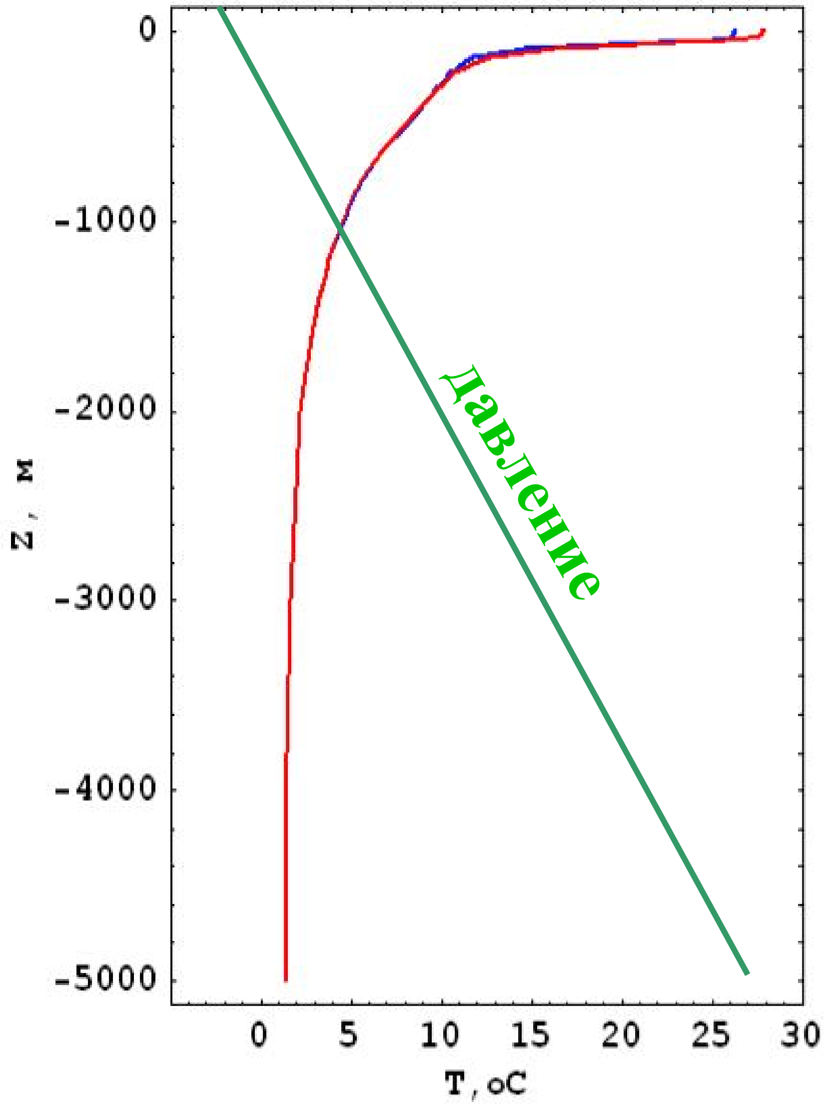
TEOS-10
www.teos-10.org

$$1480 < c < 1545 \text{ м/с}$$

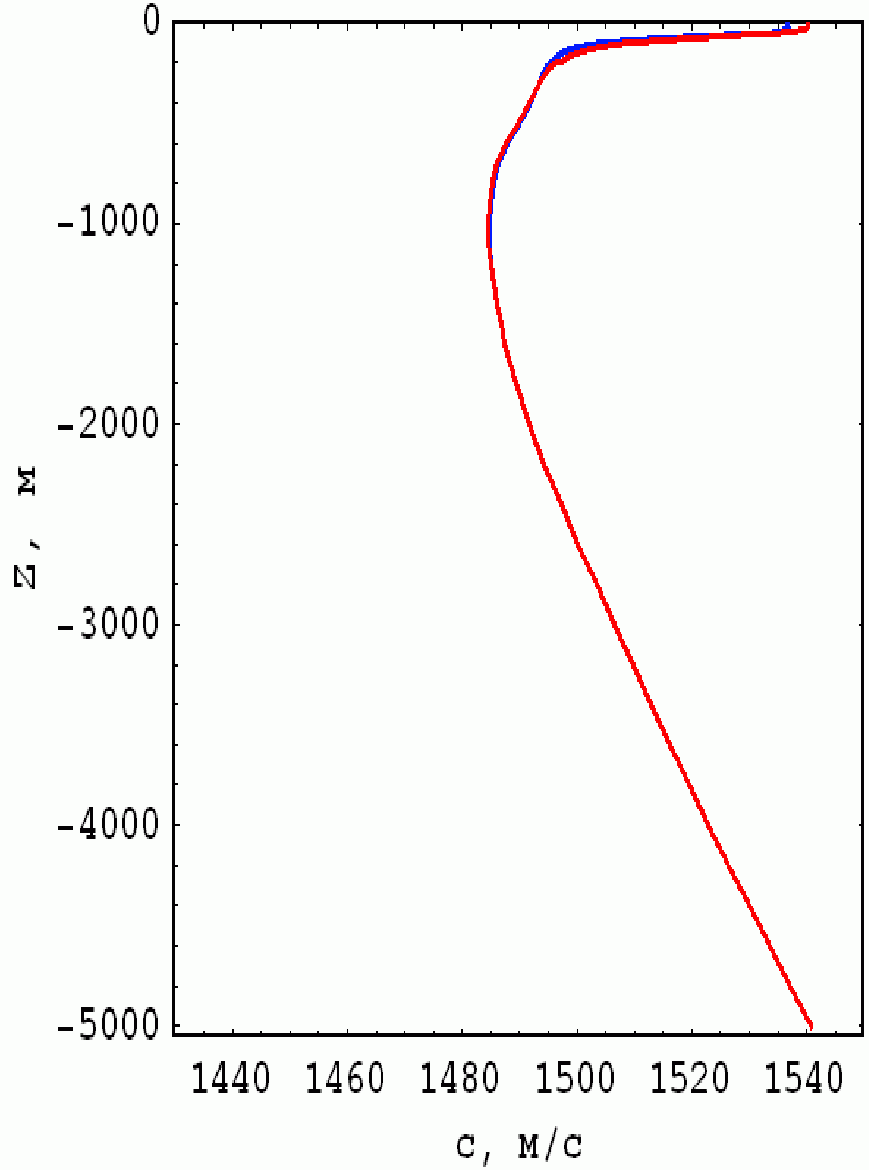
$$\frac{\partial c}{\partial T} > 0 \qquad \frac{\partial c}{\partial p} > 0$$

Lat=10   Lon=-150

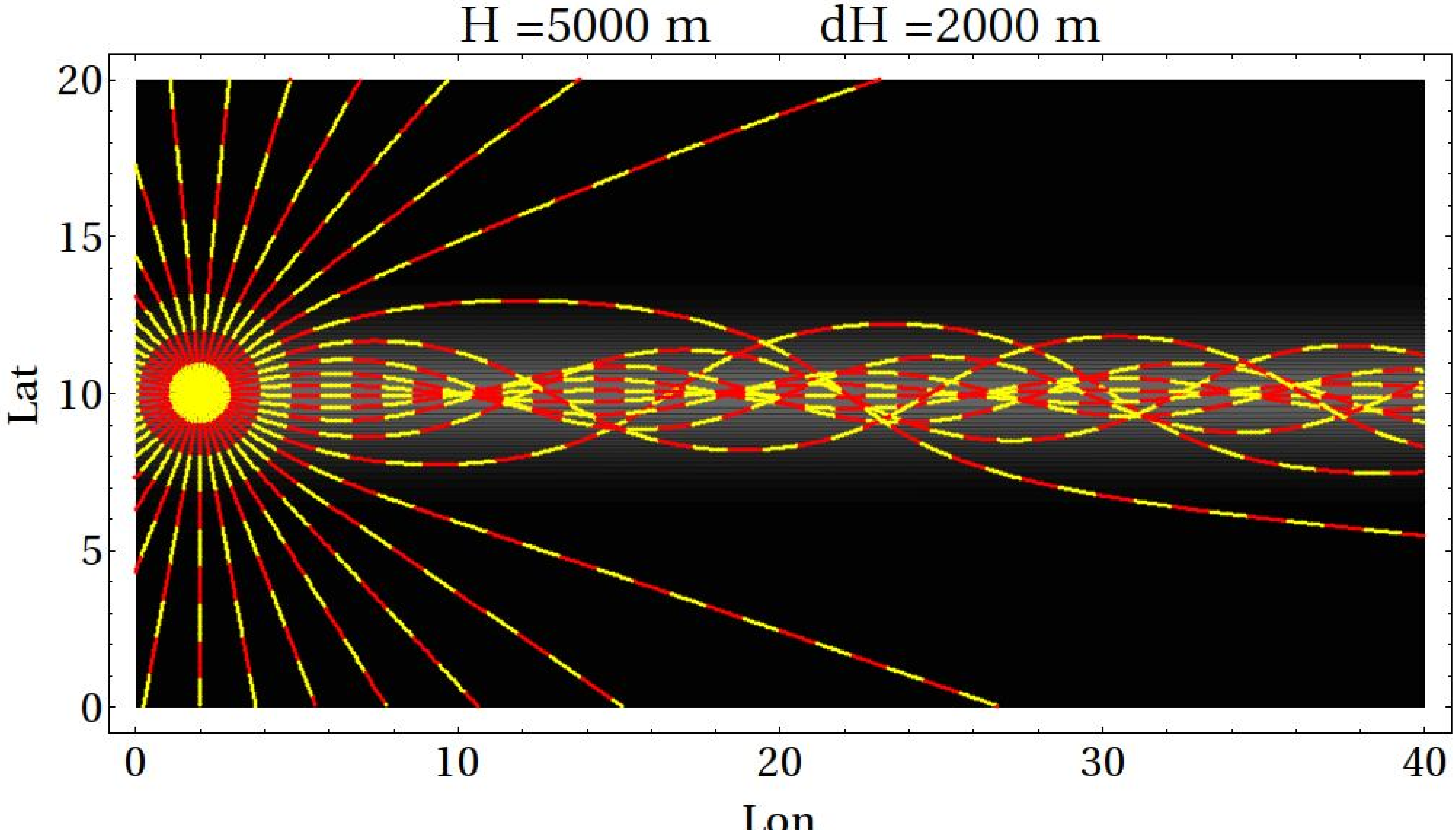
Температура



Скорость звука



Захват волн подводными хребтами
т.е. областями с пониженной скоростью распространения длинных волн

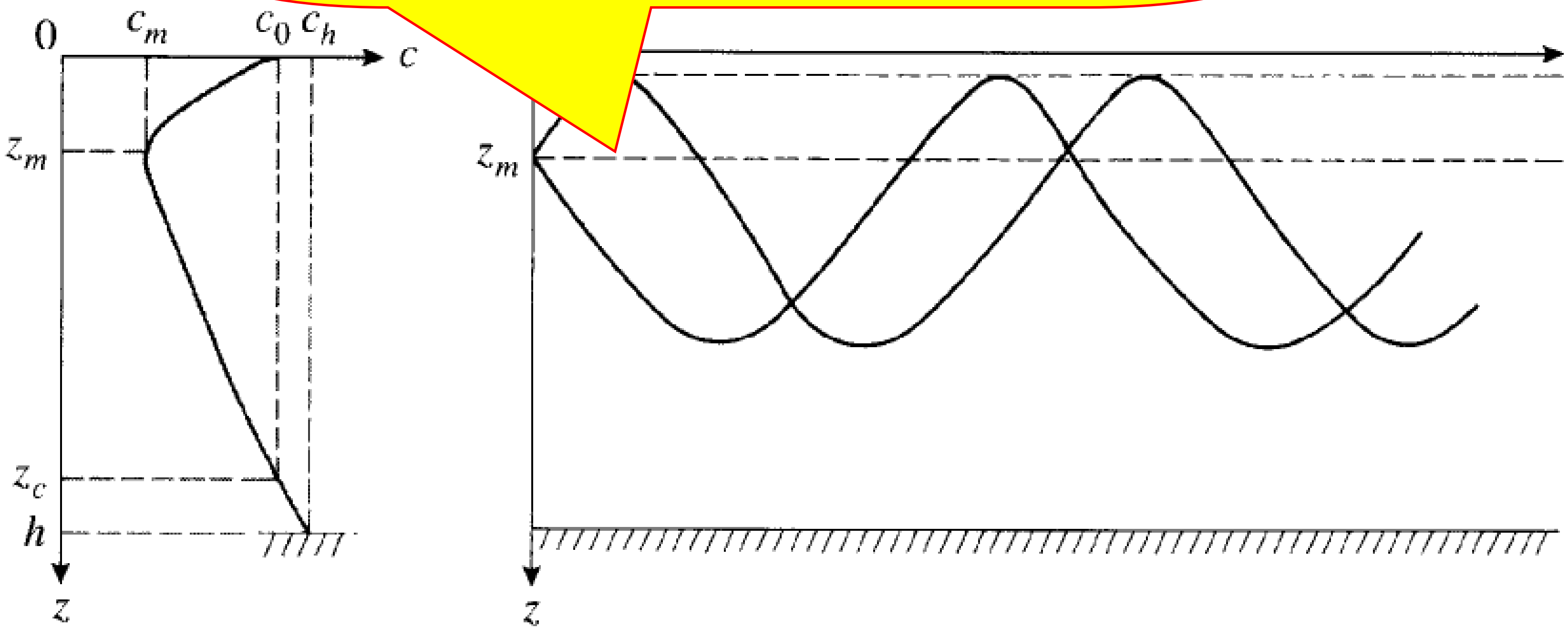


Подводный звуковой канал (ПЗК)

Deep Sound Channel

SOFAR Channel
(Sound Fixing and Ranging)

Ось ПЗК обычно лежит на глубине ~1000 м

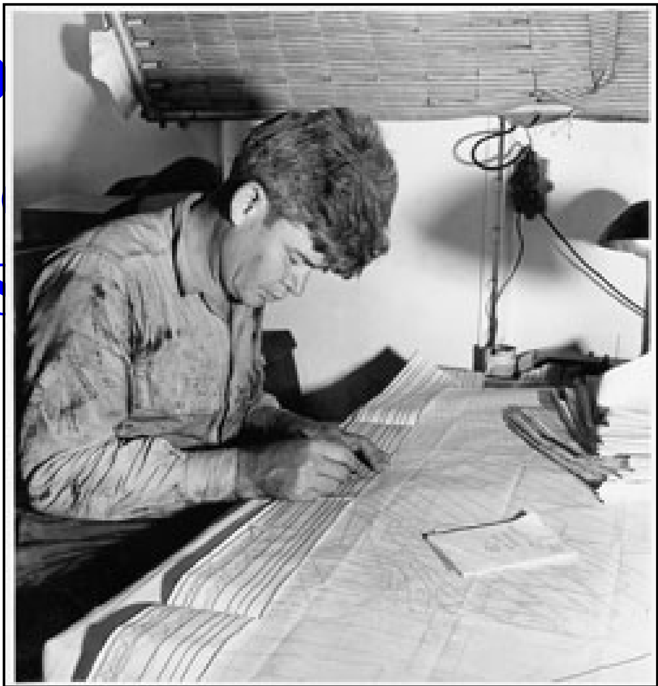


Подводный звуковой канал (ПЗК)

D

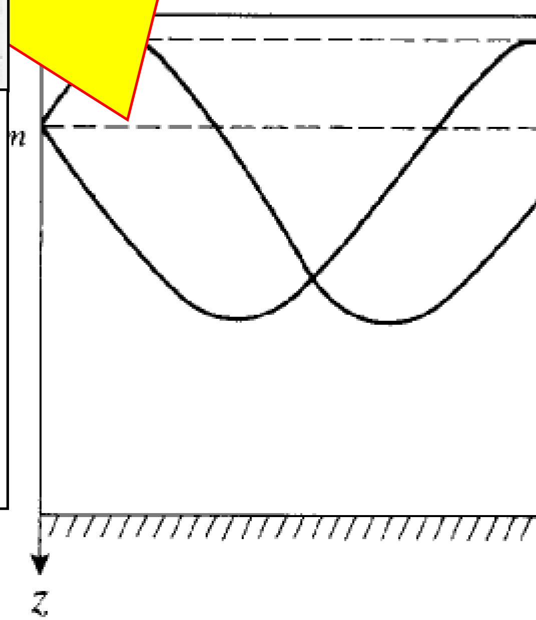
S

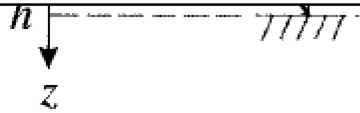
(S nging)



William Maurice Ewing
1906 – 1974
american geophysicist and oceanographer

ПЗК обычно лежит на глубине ~1000 м





Леонид Максимович Бреховских
1917-2005
выдающийся учёный в области физики, акустики океана, академик АН СССР

Прикладная гидроакустика

- **Акустический радар (сонар)**
- **Подводная связь (передача информации)**
- **Подводная навигация**
- **Наблюдения за погодой и климатом (регистрация шумов от ветра или осадков, акустическая термометрия)**
- **Измерение скорости течения (ADCP)**
- **…**