Введение в физику гидросферы

2026 Лекция №5

Носов Михаил Александрович

кафедра физики моря и вод суши

отделение геофизики

физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова

Уравнения гидродинамики

Уравнение состояния

$$\rho = \rho(p, T, \ldots)$$

парциальное давление водяного пара

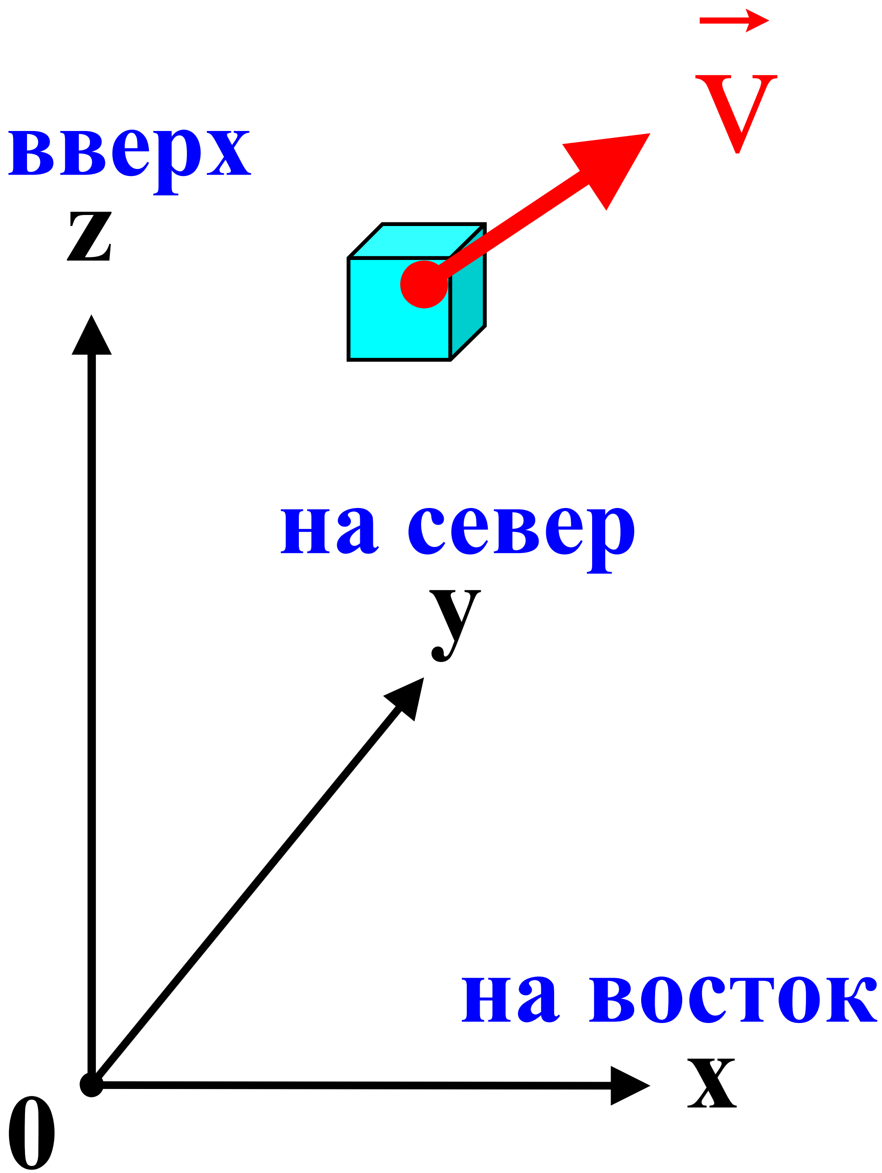
воздух

$$\rho = \rho(p, T, e)$$

соленость

вода

$$\rho = \rho(p, T, s)$$



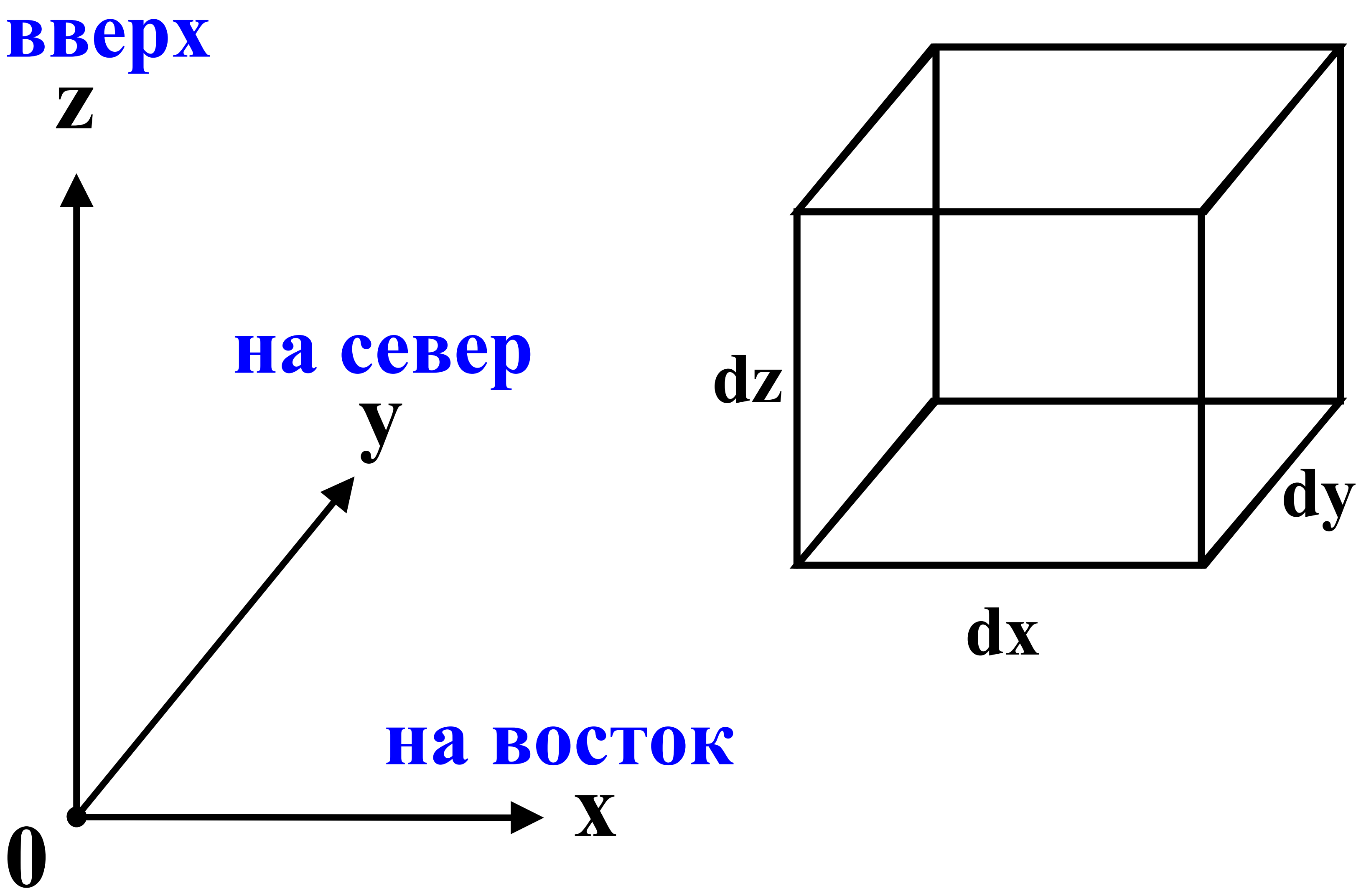
$$\vec{v} = \left(u_x, u_y, u_z\right)$$

$$\vec{v} \equiv \left(u, v, w\right)$$

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

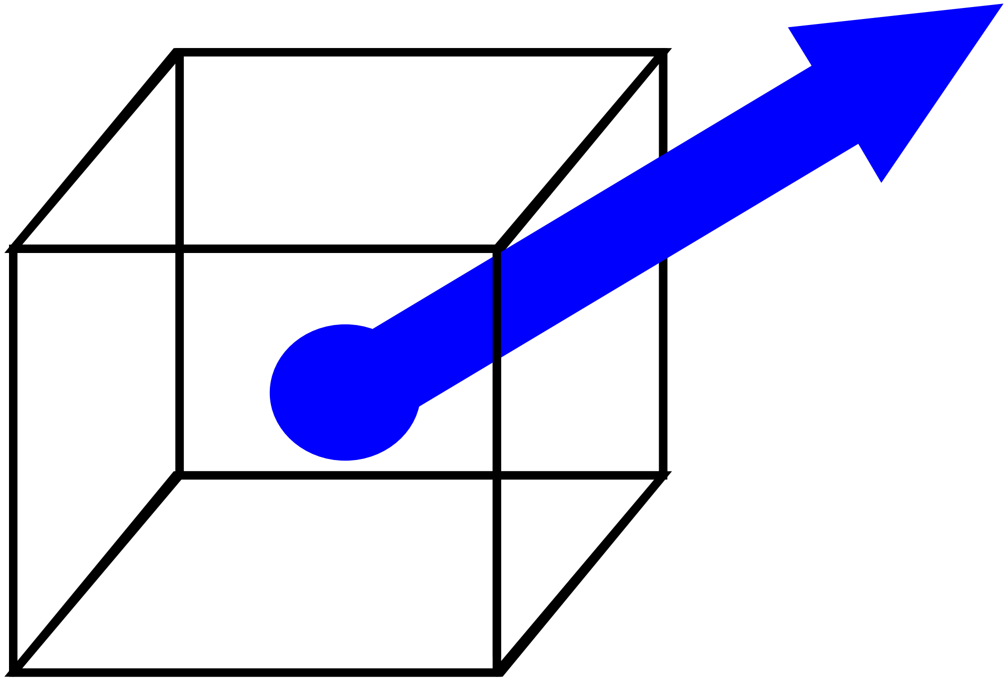
$$p = p(x, y, z, t)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$


вверх
z
на север
y
на восток
x
0
dz
dy
dx

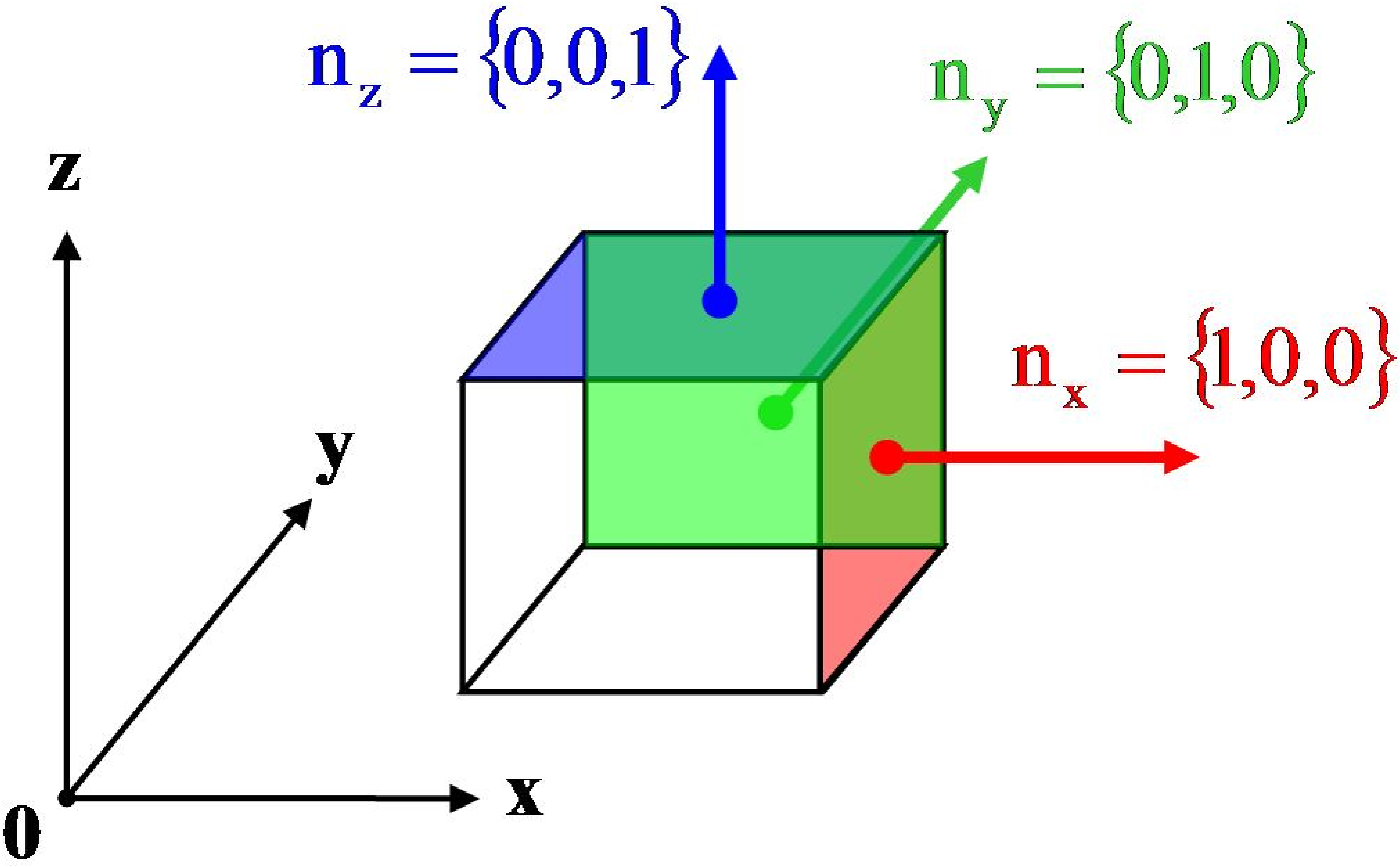
Массовые силы

$$F_{масс} \sim dm = dx\ dy\ dz\ \rho$$



- **сила притяжения (Земля, Луна, Солнце, …)**
- **силы инерции (Кориолиса, центробежная)**

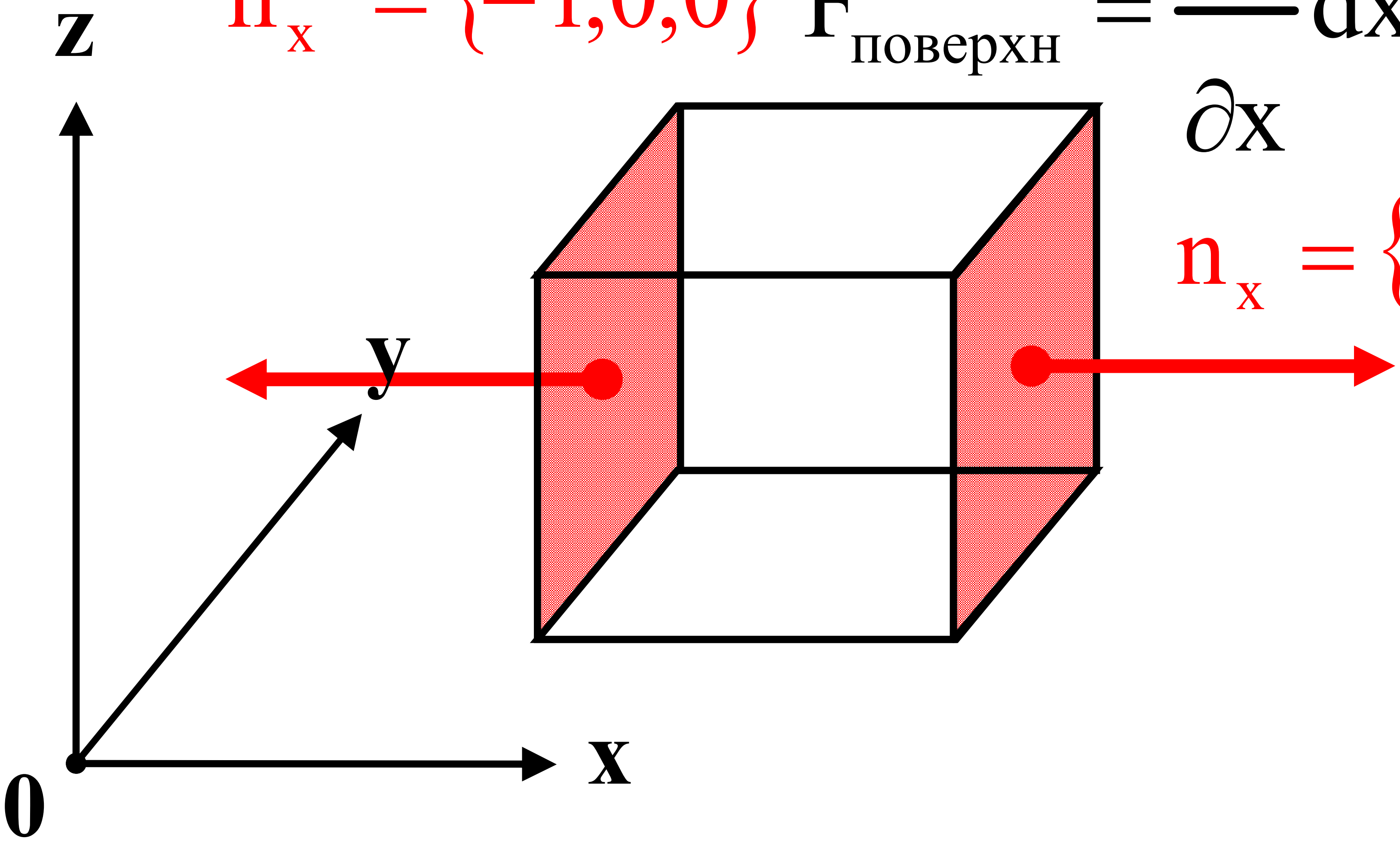
«Поверхностные» силы



«Поверхностные» силы

$$F_{\text{поверхн}} = \left[\tau(x+dx) - \tau(x)\right] dydz$$

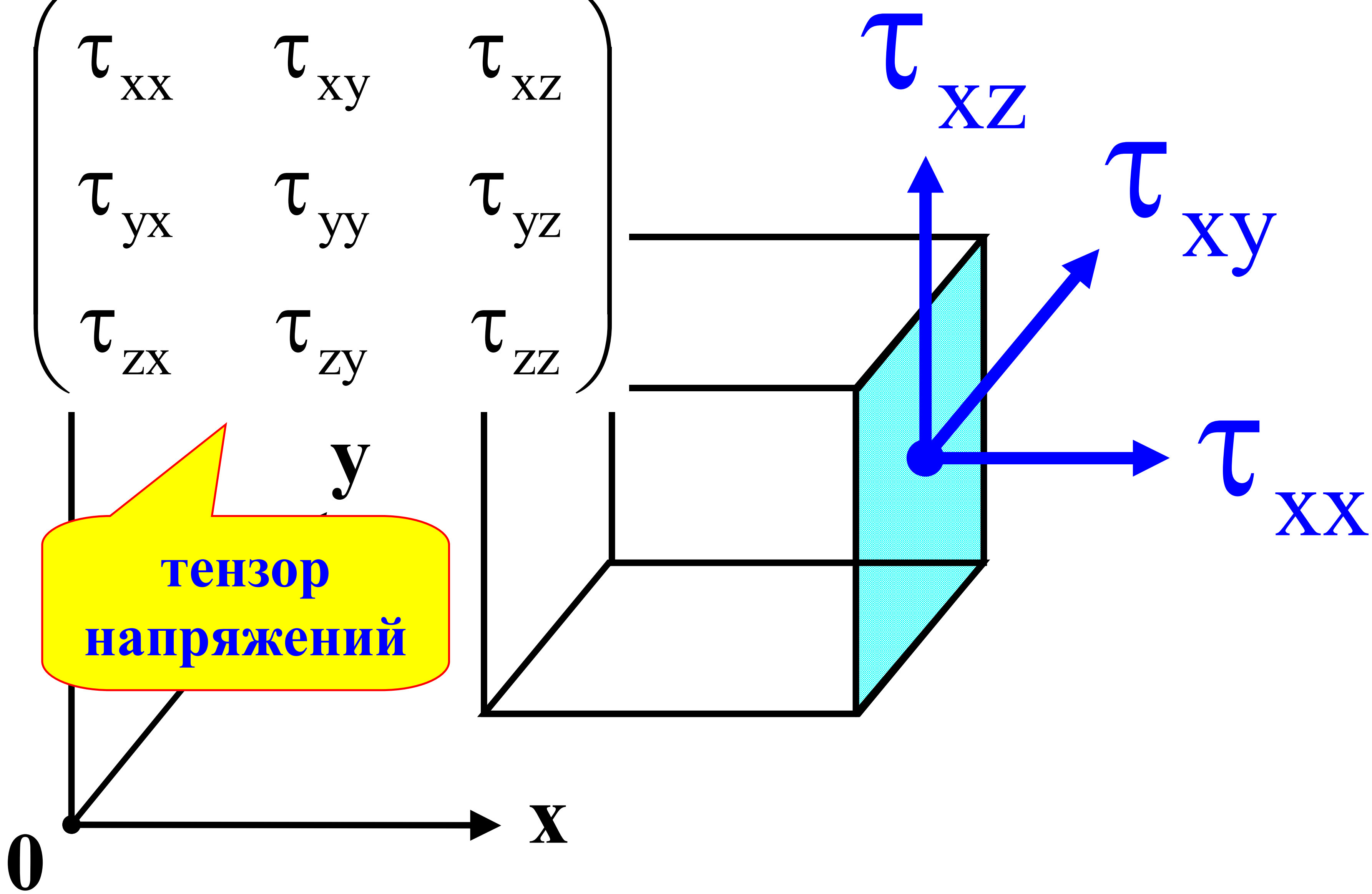
$$n_x' = \{-1,0,0\} \qquad F_{\text{поверхн}} = \frac{\partial \tau}{\partial x} dxdydz$$



$$n_x = \{1,0,0\}$$

«Поверхностные» силы

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$



$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{масс}} + \sum \vec{F}_{\text{поверхн}}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2\left[\vec{v}\times\vec{\omega}\right] - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \nu\Delta\vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$$

сила тяжести

сила Кориолиса

сила градиента давления

сила вязкого трения

полная производная

$$\vec{v} = \vec{v}\big(x(t), y(t), z(t), t\big)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Система уравнений гидродинамики

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$$

уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

уравнение неразрывности

5 уравнений

5 неизвестных функций

$$\rho = \rho(p)$$

уравнение состояния

Система уравнений гидродинамики
+уравнение переноса температуры
+уравнение переноса соли/водяного пара

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right) T = \chi \Delta T$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right) s = \vartheta \Delta s$$

$$\rho = \rho(p, T, s)$$

система остается замкнутой!!!

Система уравнений гидродинамики
+уравнение переноса температуры
+уравнение переноса соли/водяного пара

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right) T = \chi \Delta T$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right) s = \vartheta \Delta s$$

$$\rho = \rho(p, T, s)$$

Для решения уравнений необходимы граничные и начальные условия

Граничные условия на поверхностях, ограничивающих область решения задачи

условие прилипания

$$\vec{v} = 0 \quad \text{или} \quad \vec{v} = \vec{v}_0$$

заданное напряжение (поток импульса)

$$\eta \frac{\partial u}{\partial z} = \tau$$

заданное давление

$$p = p_0$$

заданный поток тепла

$$-C\rho\chi \frac{\partial T}{\partial z} = Q$$

заданная температура

$$T = T_0$$

Граничные условия на поверхностях, ограничивающих область решения задачи

Поверхности могут быть подвижными и неизвестными, т.е. их положение определяется из решения задачи

Примеры:

- **волны на поверхности воды**
- **течения с возможностью фазовых переходов (лед-вода, мантия-ядро Земли)**
- **размыв или выветривание**
- **etc.**

Начальные условия (при t=0)

$$\vec{v} = \vec{v}_0(x, y, z)$$
$$p = p_0(x, y, z)$$
$$T = T_0(x, y, z)$$
$$s = s_0(x, y, z)$$

применимы для описания процессов, имеющих выраженное «начало»

распространенная геофизическая практика

Проблема усвоения (ассимиляции) данных наблюдений в численные модели

Основные подходы к упрощению уравнений гидродинамики

Приближение №1:
«среда с постоянной плотностью (в.т.ч. несжимаемая)»

$$\boxed{\rho = \rho_0 = \mathrm{const}}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] + \nu \Delta \vec{v} + \cancel{\left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}}$$

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0$$

$$\rho = \rho(p)$$

$$\rho_0$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Приближение №1:
«среда с постоянной плотностью»

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v},\vec{\nabla}\right)\vec{v}=-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho_0}+\vec{g}+2\left[\vec{v}\times\vec{\omega}\right]+\nu\Delta\vec{v}$$

$$\operatorname{div}\vec{v}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\sim\frac{u_{\text{гориз}}}{L}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}\sim\frac{w_{\text{верт}}}{H}$$

$$\boxed{\left|w_{\text{верт}}\right|\sim\frac{H}{L}\left|u_{\text{гориз}}\right|}$$

Приближение №2:
«стационарное течение»

$$\cancel{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}+\left(\vec{v},\vec{\nabla}\right)\vec{v}=-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}+\vec{g}+2\left[\vec{v}\times\vec{\omega}\right]+\nu\Delta\vec{v}+\boxed{\left(\zeta+\frac{\nu}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}}$$

$$\cancel{\frac{\partial\rho}{\partial t}}+\operatorname{div}\left(\rho\,\vec{v}\right)=0$$

$$\rho=\rho(p)$$

Приближение №3:
«идеальная (невязкая) жидкость»

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v},\vec{\nabla}\right)\vec{v}=-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}+\vec{g}+2\left[\vec{v}\times\vec{\omega}\right]+\cancel{\nu\Delta\vec{v}}+$$

понижается порядок уравнения

$$+\cancel{\left(\zeta+\frac{\nu}{3}\right)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v}}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho\,\vec{v}\right)=0$$

$$\rho=\rho(p)$$

Изменение граничного условия:

«прилипание» → «непротекание»

$\{v_\tau=0,\ v_n=0\}\ \rightarrow\ \{v_n=0\}$

Приближение №4:
«идеальная жидкость постоянной плотности, линейное приближение»

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\cancel{\left(\vec{v},\vec{\nabla}\right)\vec{v}}=-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho_0}+\vec{g}+2\left[\vec{v}\times\vec{\omega}\right]$$

$$\operatorname{div}\vec{v}=0$$

$$\text{если}\begin{Bmatrix}\vec{v}_1, p_1\\ \vec{v}_2, p_2\end{Bmatrix}-\text{решения системы, то}\Rightarrow$$

$$A\vec{v}_1+B\vec{v}_2,\ Ap_1+Bp_2-\text{решения системы}$$

$$\text{где } A, B-\text{константы}$$

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

2. Геострофическое приближение

strophe (греч.) – вращение, поворот

Крупномасштабные течения атмосферы и океана обычно происходят в условиях гидростатического (по вертикали) и геострофического (по горизонтали) баланса

$$z: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] = 0$$

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

$$\cancel{\frac{dw}{dt}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

$$|w_{верт}| \sim \frac{H}{L}|u_{гориз}|$$

$$H << L$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow p(z) = p_0 - \rho_0 g\, z$$

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

2. Геострофическое приближение

strophe **(греч.) – вращение, поворот**

Крупномасштабные течения атмосферы и океана обычно происходят в условиях гидростатического (по вертикали) и геострофического (по горизонтали) баланса

$$z: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] = 0$$

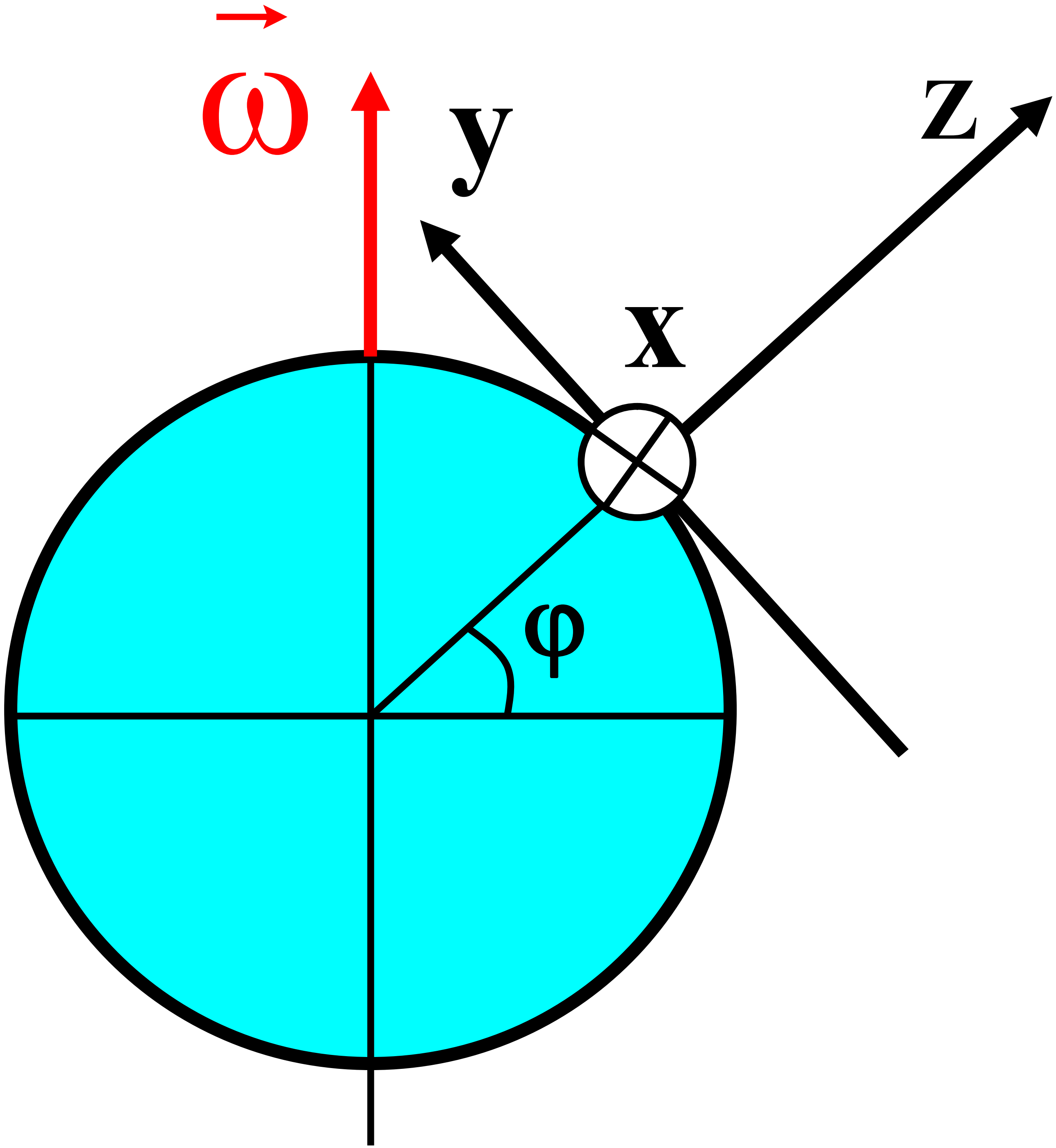
«Геофизические» приближения:

2. Геострофическое приближение

$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{\left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v}} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \cancel{\vec{g}} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right]$$

$$\operatorname{div}\left(\vec{v}\right) = 0$$

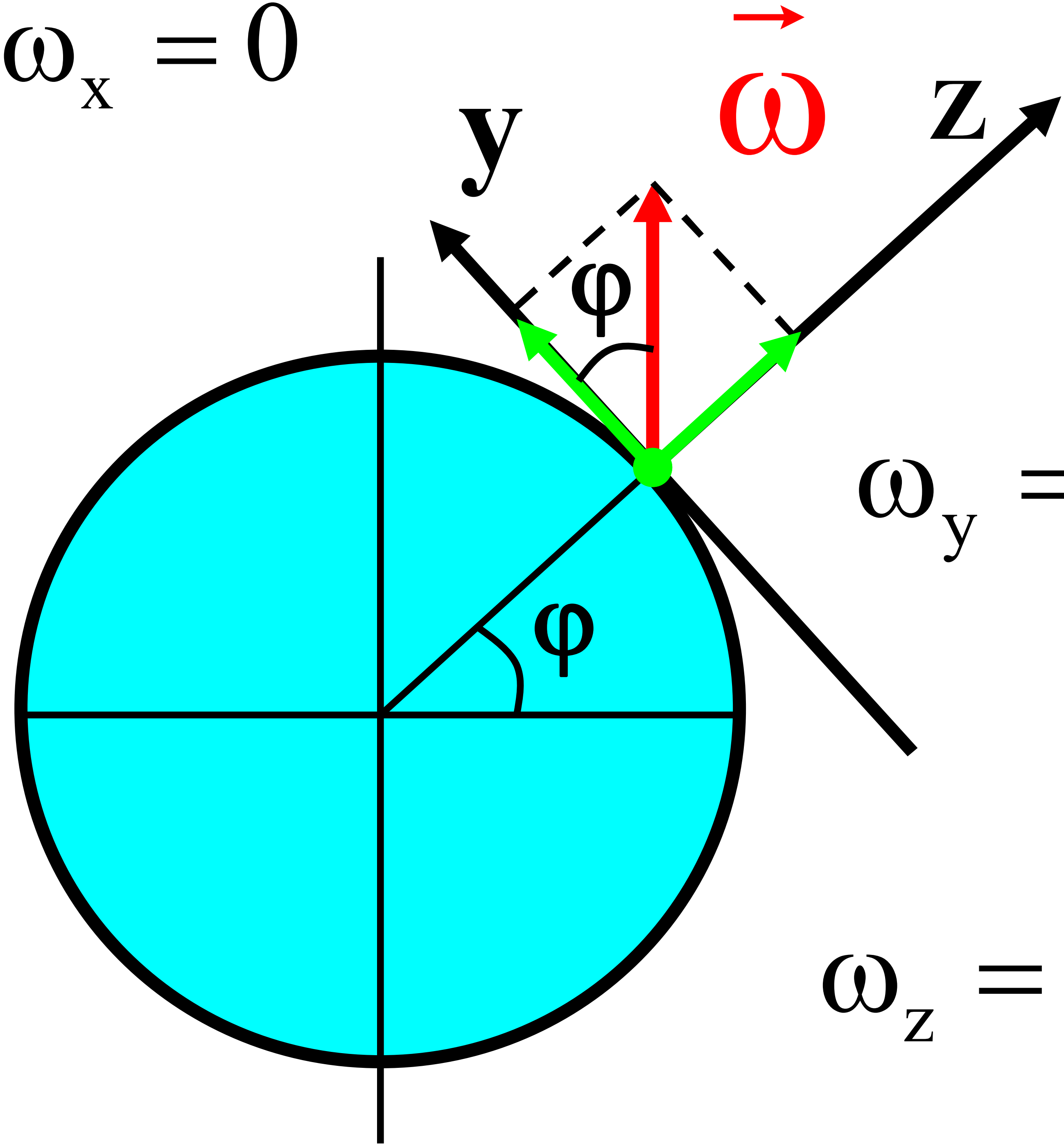
по горизонтали не действует!



$\vec{\omega}$
y
Z
x
φ

$$\omega_x = 0$$

$$\boxed{\omega \equiv |\vec{\omega}|}$$



$$\omega_y = \omega \cos \varphi$$

$$\omega_z = \omega \sin \varphi$$

$$\vec{v} = (u,\, v,\, w)$$

$$\vec{\omega} = \left(0,\; \omega\cos\varphi,\; \omega\sin\varphi\right)$$

$$2\left[\vec{v}\times\vec{\omega}\right] = 2\begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = 2\begin{pmatrix} v\omega_z - w\omega_y \\ w\omega_x - u\omega_z \\ u\omega_y - v\omega_x \end{pmatrix} =$$

$1.\ w << \{u, v\}$

традиционное приближение

$2.\ F_z^{Кор} = 0$

$$= 2\begin{pmatrix} v\omega\sin\varphi - w\omega\cos\varphi \\ -u\omega\sin\varphi \\ u\omega\cos\varphi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2v\omega\sin\varphi \\ -2u\omega\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2\left[\vec{v}\times\vec{\omega}\right]\approx\begin{pmatrix} 2v\omega\sin\varphi \\ -2u\omega\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f\,v \\ -f\,u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f = 2\omega\sin\varphi$$

параметр Кориолиса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}]$$

$$\boxed{\sim U^2 / L}$$

геострофическое приближение работает при

$$Ro \ll 1$$

$$\boxed{U \cdot f}$$

число Кибеля-Россби

на экваторе $Ro \to \infty$

$$Ro = \frac{\left|(\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v}\right|}{\left|2[\vec{v} \times \vec{\omega}]\right|} \sim \frac{U^2 / L}{U \cdot f} = \frac{U}{L \cdot f}$$

Carl-Gustaf Rossby
Swedish-US meteorologist
1898-1957

Число Россби (Кибеля-Россби)

$$Ro = \frac{U}{L \cdot f}$$

Кибель Илья Афанасьевич
советский математик гидромеханик и метеоролог
1904-1970

Оценка числа Россби для природных условий

$$\boxed{R_o = \frac{U}{L \cdot f}}$$

$$f = 2\omega \sin\varphi = \frac{4\pi}{T} \sin\varphi \sim 10^{-4} c^{-1}$$

сидерический период вращения Земли
23 ч 56 мин 4.0905 с

$$f_{max} \approx 1.458 \cdot 10^{-4} c^{-1}$$

геострофическое приближение

хорошо работает

$$R_o = \frac{1[м/с]}{10^6[м] \times 10^{-4}[с^{-1}]} \approx 0.01$$

работает

$$R_o = \frac{1[м/с]}{10^5[м] \times 10^{-4}[с^{-1}]} \approx 0.1$$

плохо работает

$$R_o = \frac{1[м/с]}{10^4[м] \times 10^{-4}[с^{-1}]} \approx 1$$