Введение в физику гидросферы

2026 Лекция №9

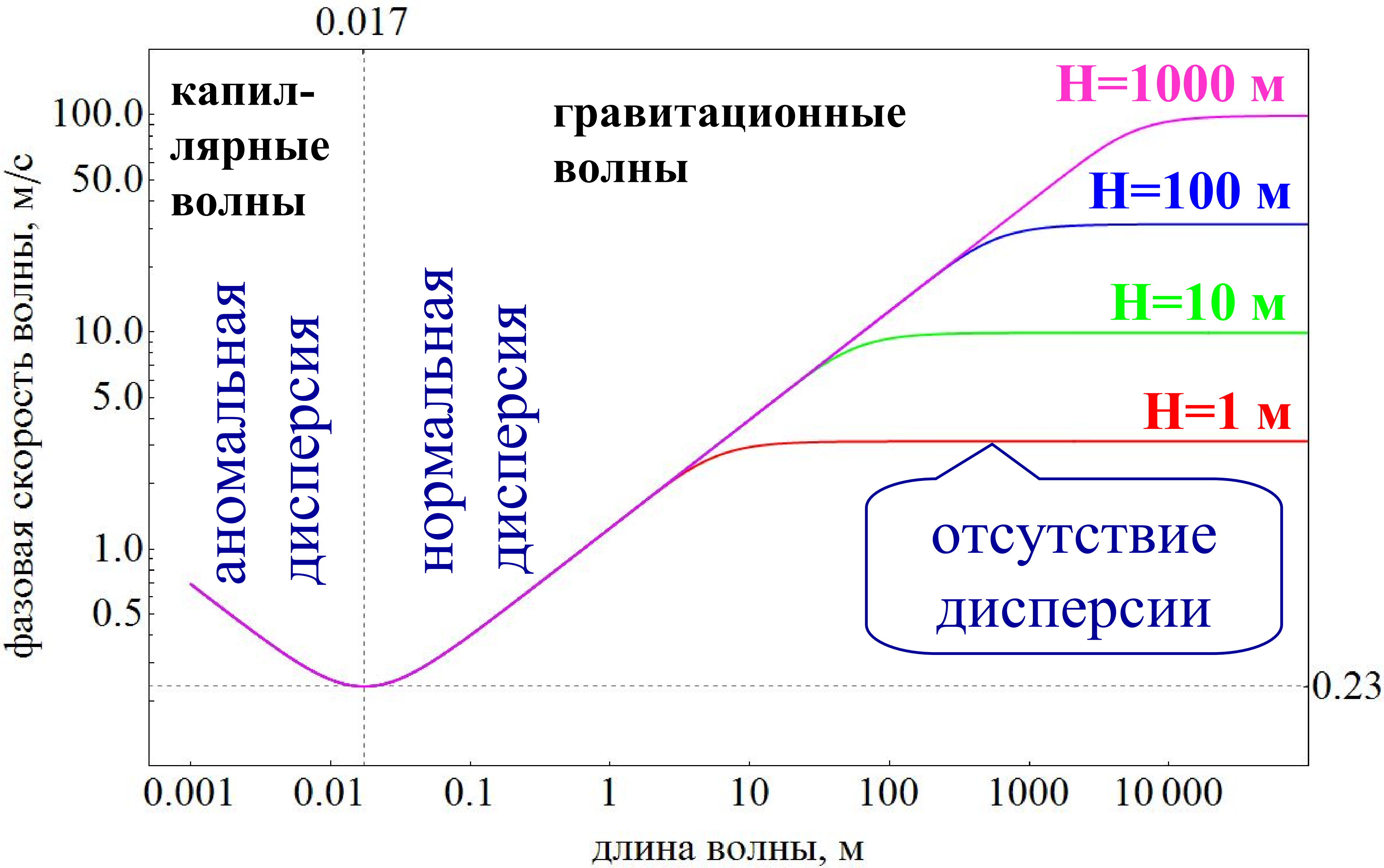
Носов Михаил Александрович

кафедра физики моря и вод суши

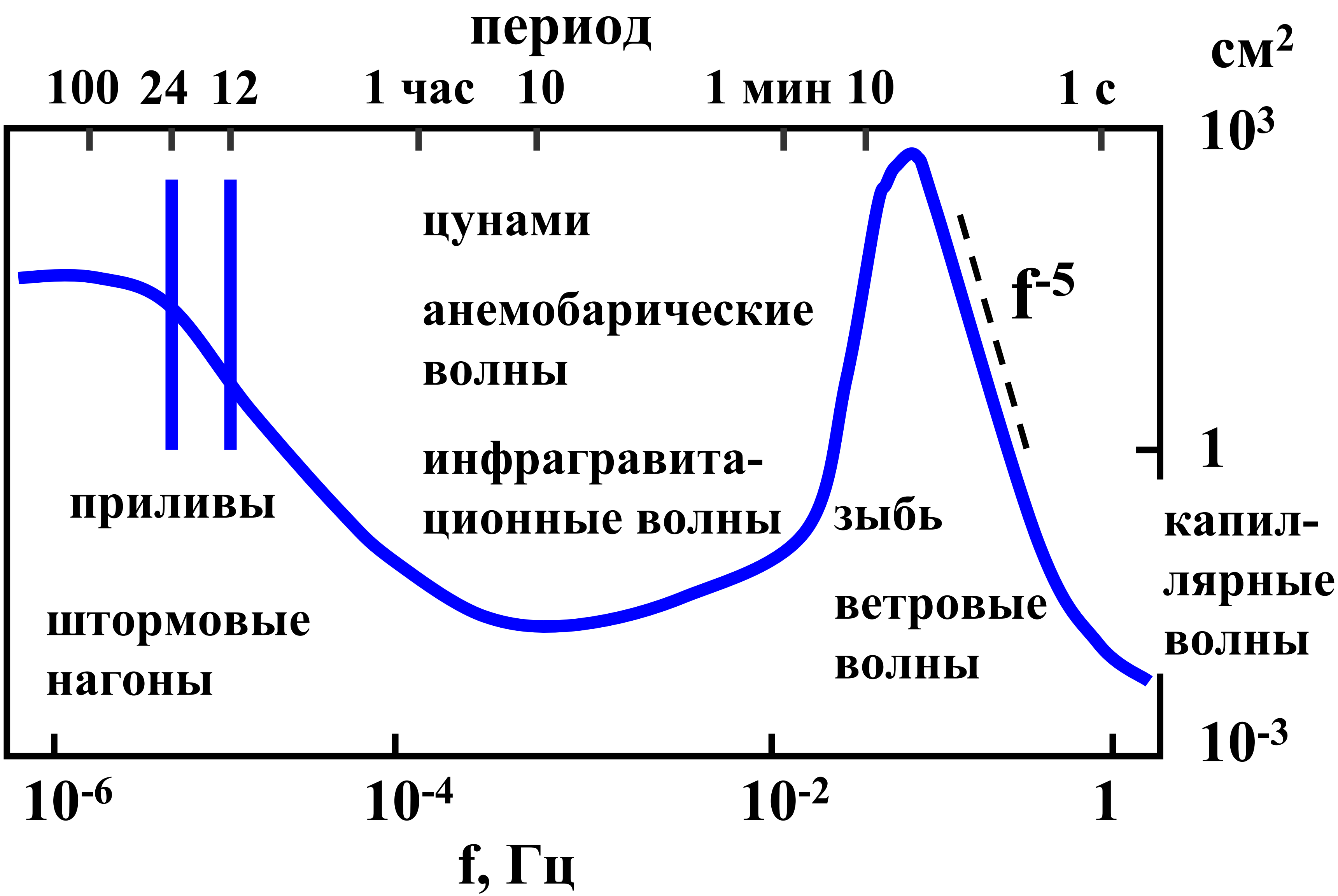
отделение геофизики

физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова

Фазовая скорость поверхностных волн на воде как функция длины волны и толщины водного слоя H



Спектр гравитационных поверхностных волн в океане



Математическое описание волновых движений

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{\left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v}} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + \cancel{2[\vec{v} \times \vec{\omega}]} \\
\qquad\qquad + \nu \Delta \vec{v} + \cancel{\left(\varsigma + \dfrac{\nu}{3}\right) \vec{\nabla}\, \mathrm{div}\, \vec{v}} \\
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho\, \vec{v}\right) = 0
\end{cases}
$$

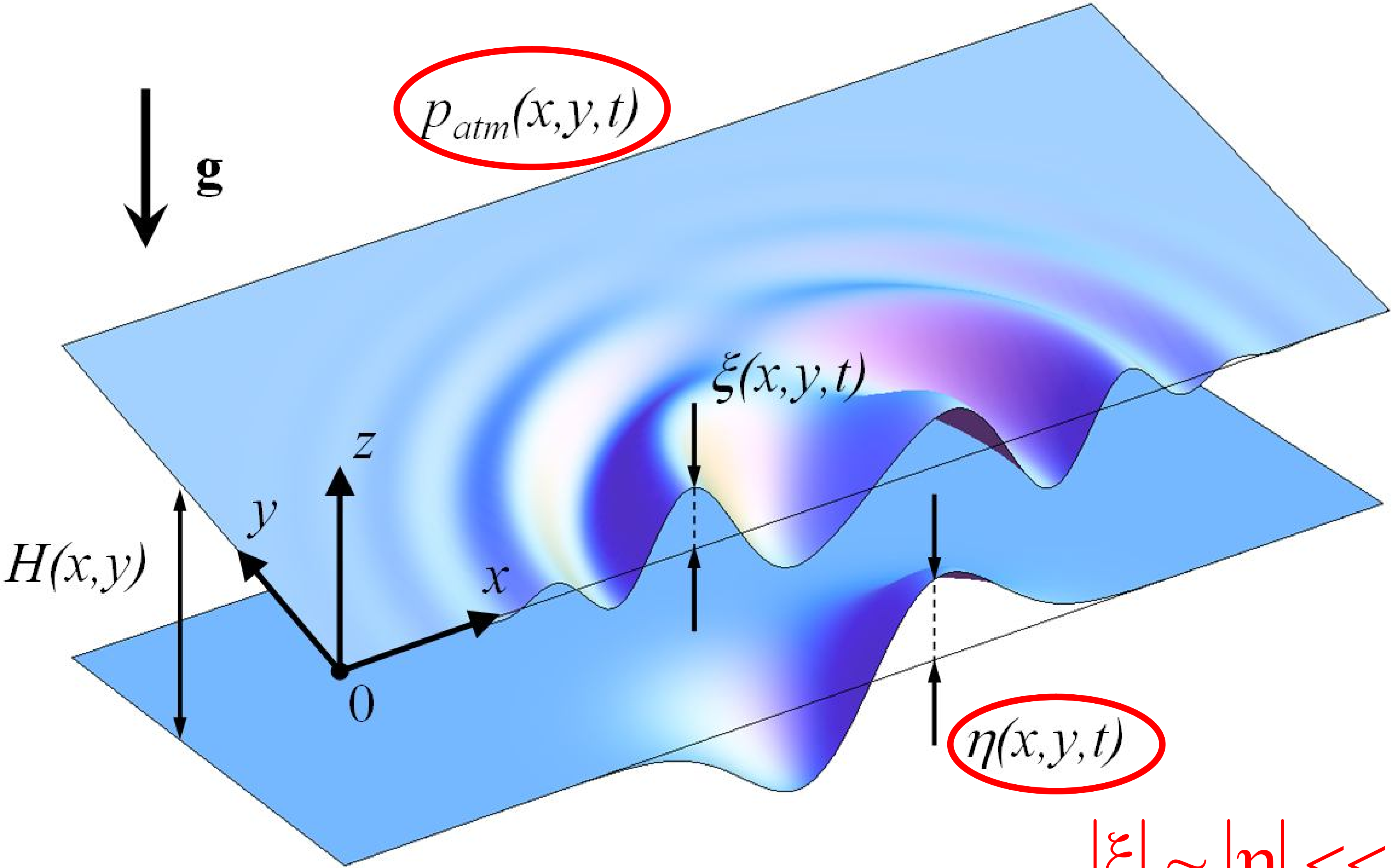
Система уравнений для описания линейных волн без учета вращения Земли и сил вязкого трения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\[2ex] \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0 \end{cases}$$

Гравитационные волны

Акустические волны

Математическая постановка 3D задачи



$$|\xi| \sim |\eta| << H$$

Математическая постановка 3D задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \end{cases}$$

Граничные условия:

поверхность “вода-воздух”

$$p = p_{атм}$$

$$\partial \xi / \partial t = w$$

поверхность дна

$$(\vec{v}, \vec{n}) = 0$$

$\vec{n}$ **- нормаль к поверхности дна**

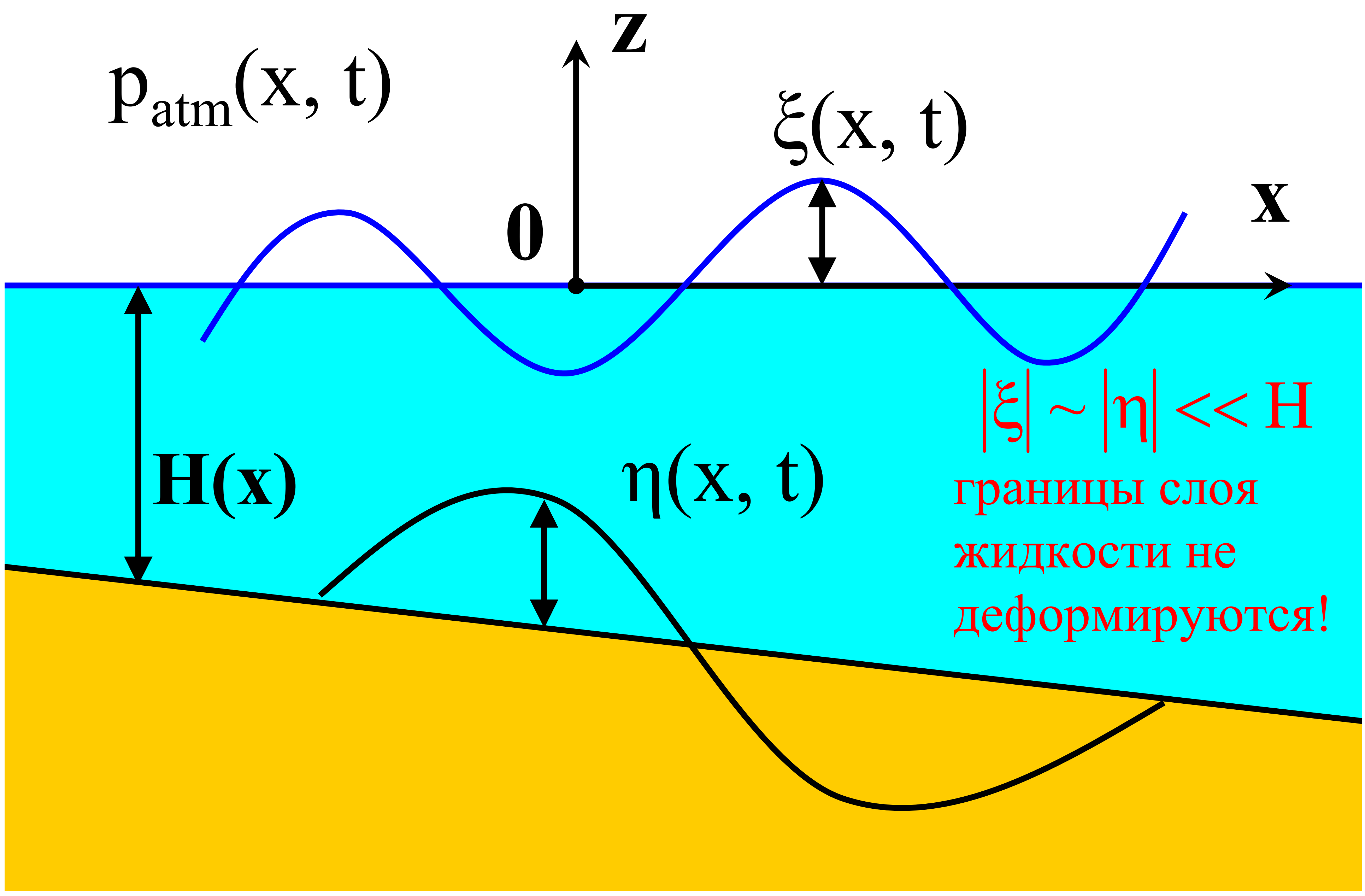
Линейная теория длинных гравитационных волн или теория “мелкой воды” (λ >> H)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad |w| \sim \frac{H}{\lambda} |u_{\text{гориз.}}|$$

$$\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

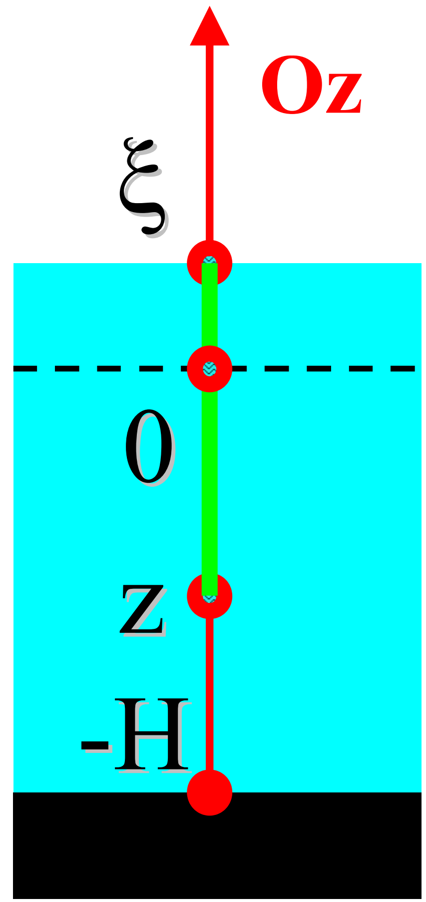
приближение гидростатики

Постановка 2D задачи (0xz)



$$p(\xi) = p_{atm}(x,t)$$

$$\int_z^\xi dz \left| \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, g \right.$$



$$p(\xi) - p(z) = -\rho g(\xi - z)$$

$$p(x,z,t) = p_{atm}(x,t) + \rho g \xi(x,t) - \rho g z$$

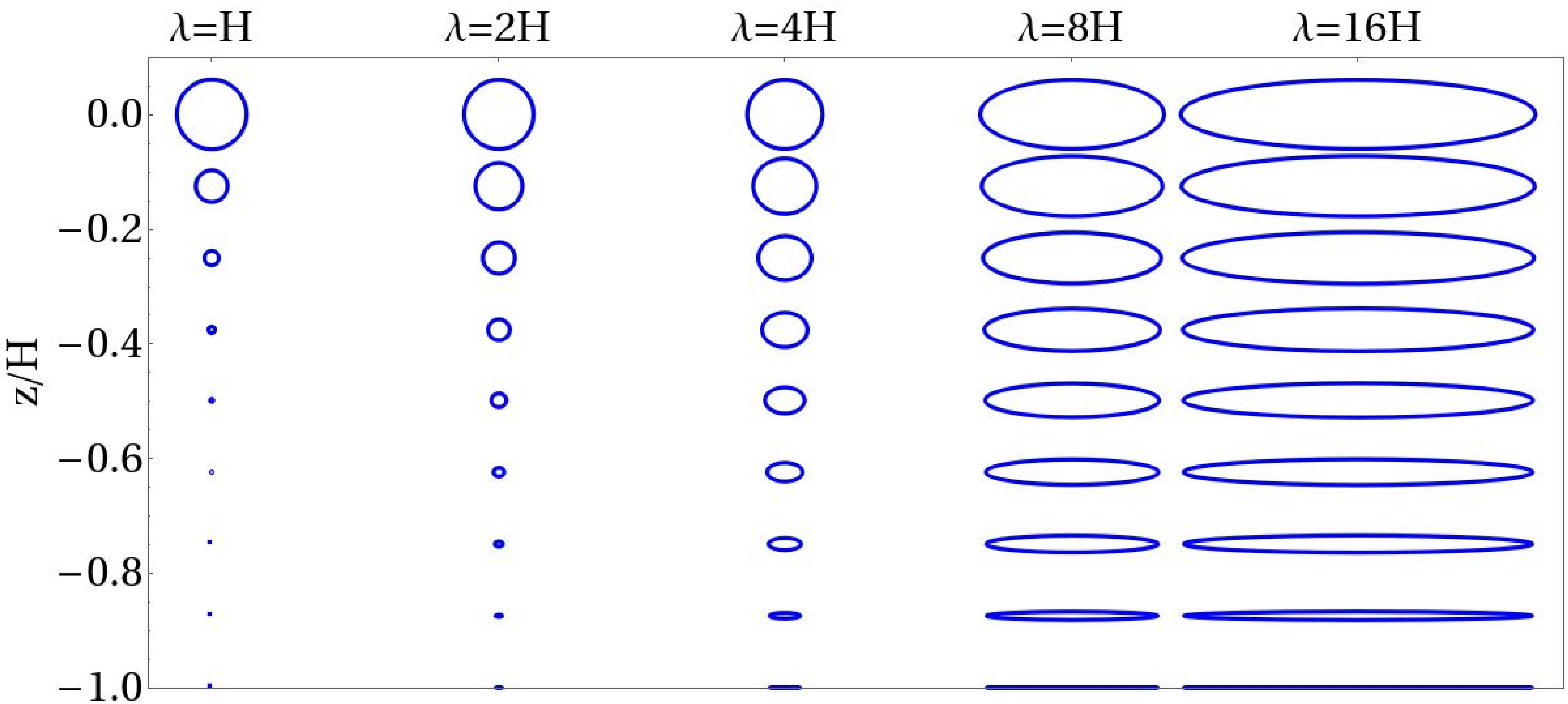
$$p(x,z,t) = p_{atm}(x,t) + \rho g \xi(x,t) - \rho g z$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{atm}}{\partial x} - g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

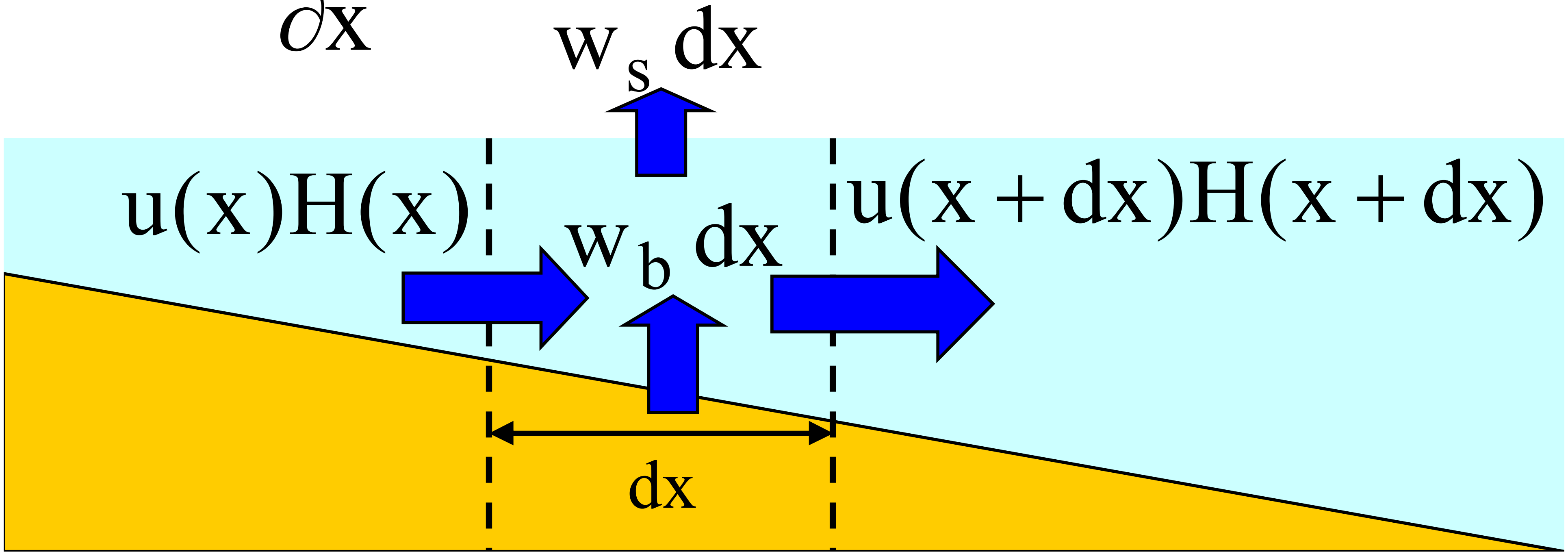
$$u \neq f(z)$$

Траектории частиц в поверхностных волнах малой амплитуды



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Bigg| \int_{-H+\eta}^{\xi} dz$$

$$\frac{\partial [u(H - \eta + \xi)]}{\partial x} + w(\xi) - w(-H + \eta) = 0$$



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Bigg| \quad \int_{-H+\eta}^{\xi} dz$$

$$|\xi| \sim |\eta| << H$$

$$\frac{\partial [u(H - \cancel{\eta} + \cancel{\xi})]}{\partial x} + w(\xi) - w(-H + \cancel{\eta}) = 0$$

$$\frac{\partial (uH)}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

Уравнения линейной 1D теории мелкой воды (длинных волн)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{atm}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (uH)}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

волны формируются неоднородностями атмосферного давления и движениями дна

Переход к волновому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{atm}}{\partial x} \qquad \times H \qquad \Big| \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (uH)}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \qquad \Big| \frac{\partial}{\partial t}$$

Переход к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 (uH)}{\partial t \partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(gH \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(H \frac{\partial p_{atm}}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (uH)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(gH\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial p_{atm}}{\partial x}\right)$$

источники волн

при H=const, η=const, p_{atm}=const

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad c = \sqrt{gH}$$

скорость длинных волн

Решение: $$\xi(x,t) = f(x \pm c \cdot t)$$

Неоднородное 1D волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \Phi(x, t)$$

Аналитическое решение:

при н.у. $t = 0$: $\quad \xi = 0, \dfrac{\partial \xi}{\partial t} = 0$

$$\xi(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\hat{t})}^{x+c(t-\hat{t})} \Phi(\hat{x}, \hat{t})\, d\hat{x}\, d\hat{t}$$

Бегущая подвижка дна

$$\boxed{\eta(x,t) = f(x - vt)}$$

$$\boxed{\xi(x,t) = C_b\, f(x - vt)}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Амплитуда и знак (!) возмущения на поверхности воды определяются соотношением скоростей «v» и «c»

$$v^2 C_b f'' - c^2 C_b f'' = v^2 f''$$

$$C_b = \frac{v^2}{v^2 - c^2}$$

$$\xi(x,t) = \frac{v^2}{v^2 - c^2} f(x - vt)$$

$$c = \sqrt{gH}$$

Бегущее возмущение атмосферного давления

$$\boxed{p_{atm}(x,t) = f(x - vt)}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{H}{\rho}\frac{\partial^2 p_{atm}}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\xi(x,t) = C_p\, f(x - vt)}$$

$$v^2 C_p f'' - c^2 C_p f'' = \frac{H}{\rho} f''$$

$$\Rightarrow \quad C_p = \frac{H/\rho}{v^2 - c^2}$$

$$\xi(x,t) = \frac{H/\rho}{v^2 - c^2} f(x - vt)$$

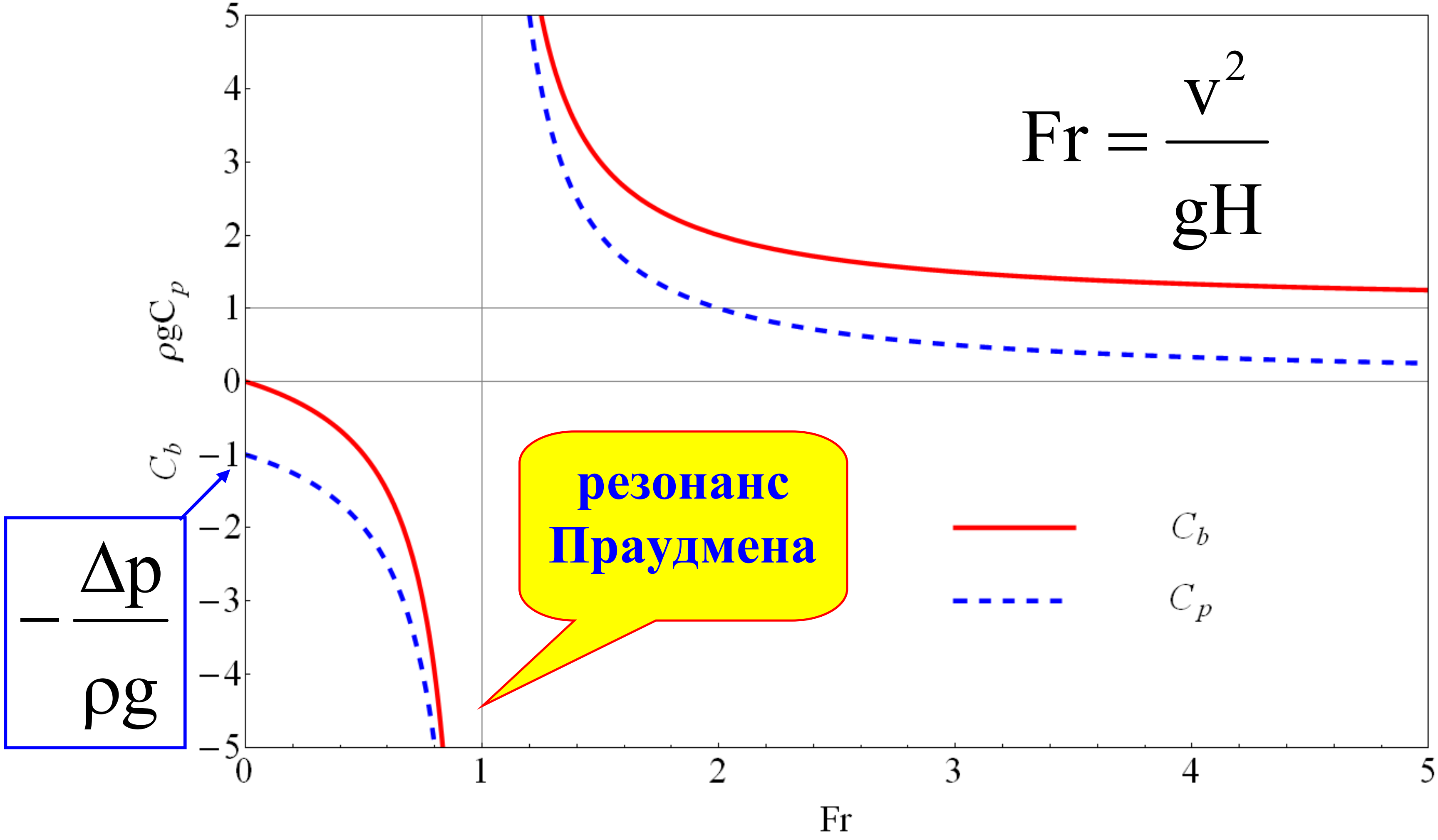
Амплитуда и знак (!) возмущения на поверхности воды определяются соотношением скоростей «v» и «c»

дно

$$C_b = \frac{v^2}{v^2 - c^2} = \frac{Fr}{Fr - 1}$$

атмосфера

$$C_p = \frac{H/\rho}{v^2 - c^2} = \frac{1}{\rho g (Fr - 1)}$$



Длинные гравитационные волны в бассейне переменной глубины

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \operatorname{div}\left(gH \vec{\nabla} \xi\right)$$

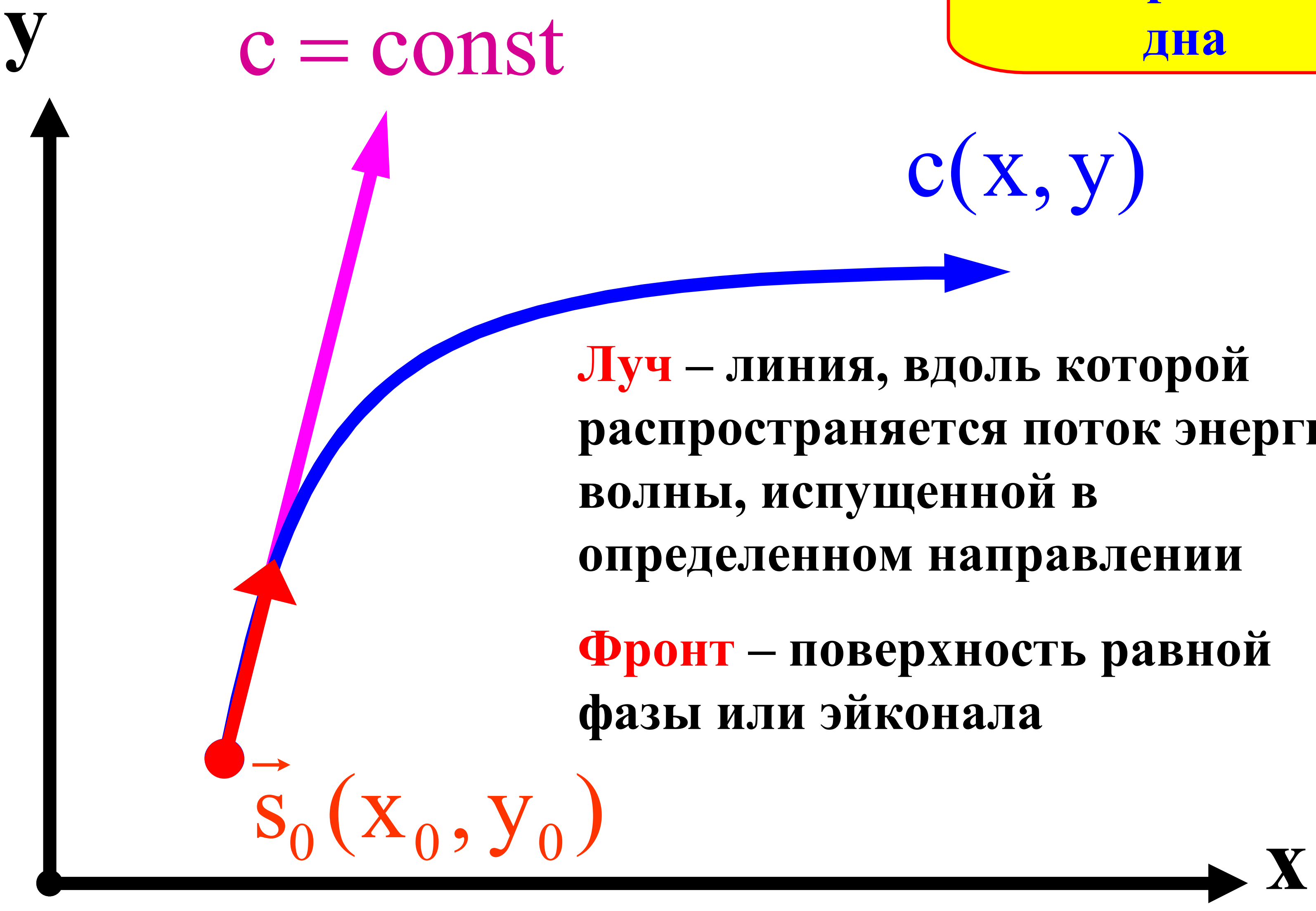
квадрат
скорости
длинных
волн

Приближение «геометрической оптики»

глубина

$$H \ll \lambda \ll L$$

масштаб неоднородностей дна



Луч – линия, вдоль которой распространяется поток энергии волны, испущенной в определенном направлении

Фронт – поверхность равной фазы или эйконала

Уравнение эйконала (расчет изохрон)

$$(\nabla\tau)^2 = c^{-2} \Longleftrightarrow \left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{gH(x,y)}$$

$$c(x,y) = \sqrt{gH(x,y)}$$

Уравнения для расчета эволюции луча на плоскости

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c\frac{k_x}{\sqrt{k_x^{\;2} + k_y^{\;2}}}} \qquad \boxed{\frac{dy}{dt} = c\frac{k_y}{\sqrt{k_x^{\;2} + k_y^{\;2}}}}$$

$$\boxed{\frac{dk_x}{dt} = -\frac{\partial c}{\partial x}\sqrt{k_x^{\;2} + k_y^{\;2}}} \qquad \boxed{\frac{dk_y}{dt} = -\frac{\partial c}{\partial y}\sqrt{k_x^{\;2} + k_y^{\;2}}}$$

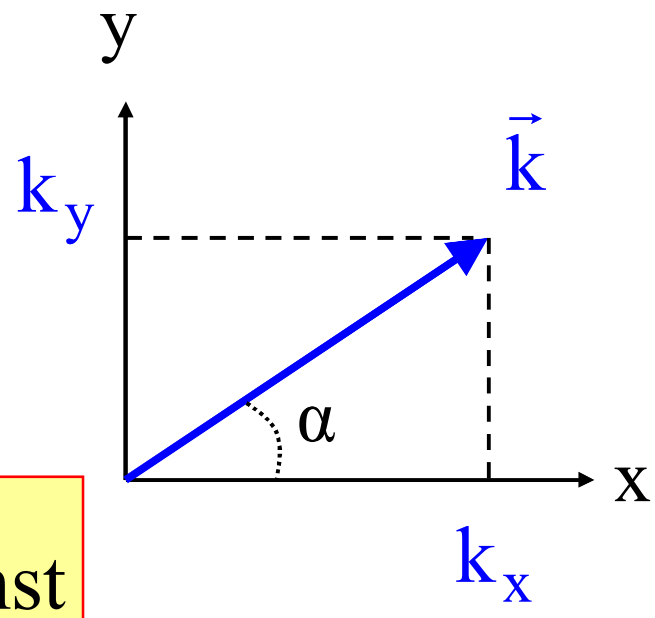
Соответствие лучевых уравнений закону Снеллиуса

Пусть скорость меняется только по оси 0x: $c = c(x)$

$$\frac{dk_y}{dt} = -\frac{\partial c}{\partial y}\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \;\Rightarrow\; \frac{dk_y}{dt} = 0$$

$$k_y = \text{const}$$

$$k_y = |\vec{k}| \sin\alpha$$

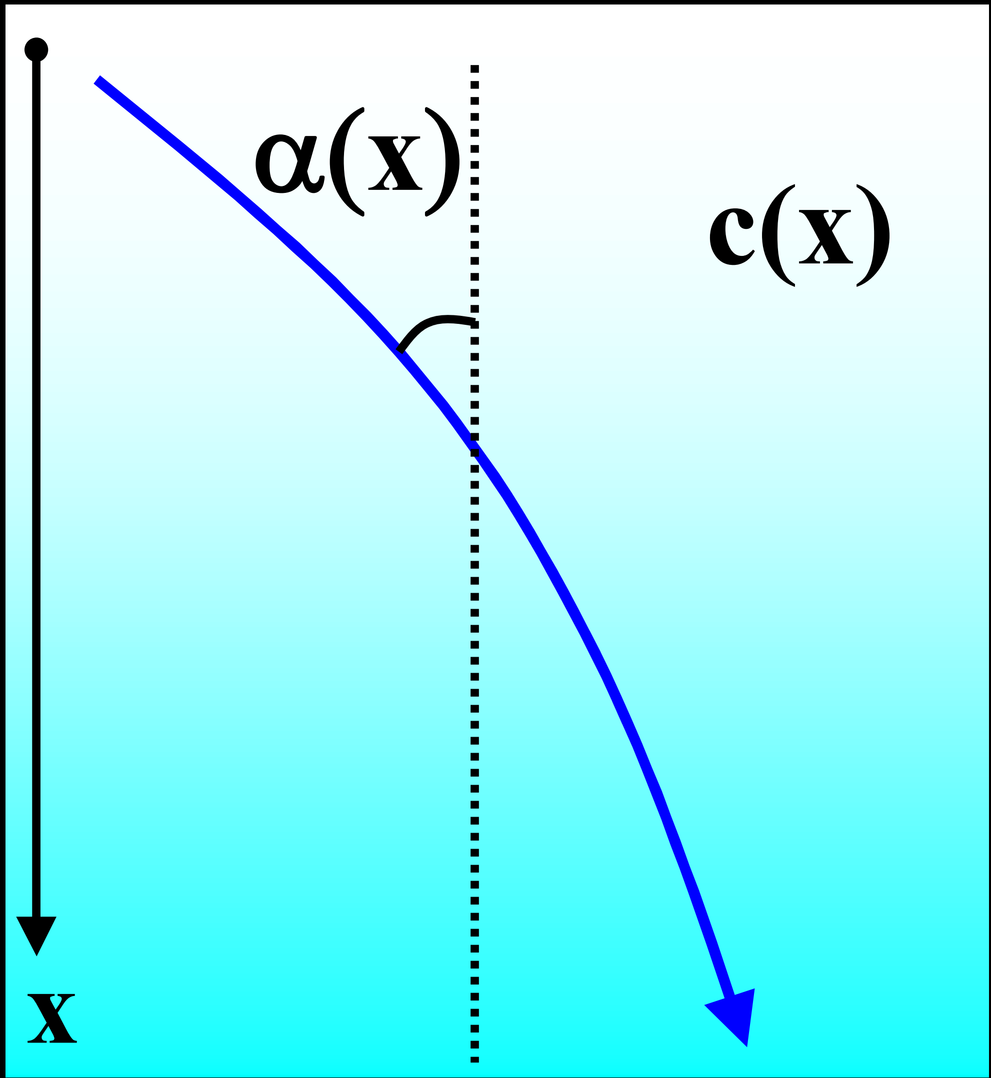


$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c(x)\cdot T}$$

$$T = \text{const}$$

$$\frac{\sin\alpha(x)}{c(x)} = \text{const}$$

Рефракция

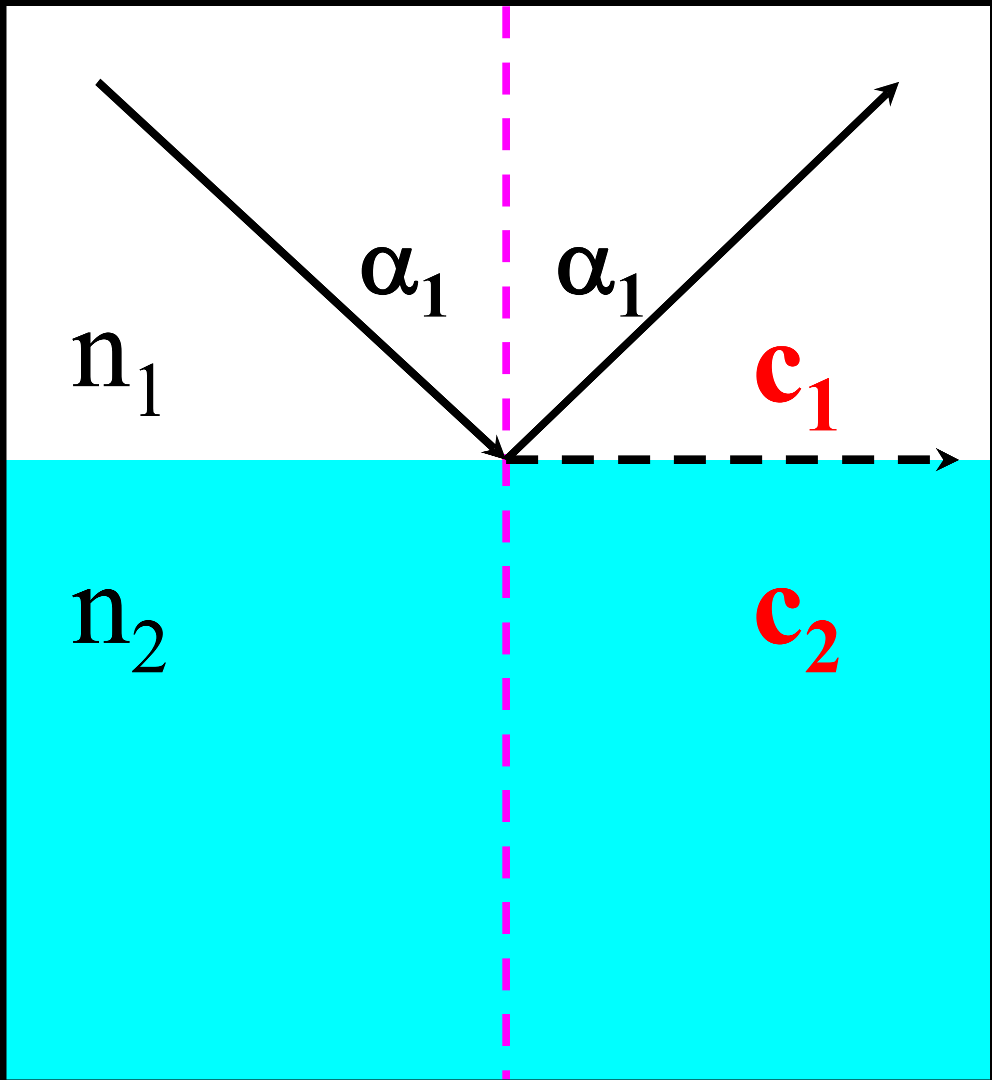


$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{\sin\alpha(z)}{c(z)} = \mathrm{const}$$

Рефракция – изменение направления волновых лучей в среде с (плавно) изменяющейся в пространстве скоростью

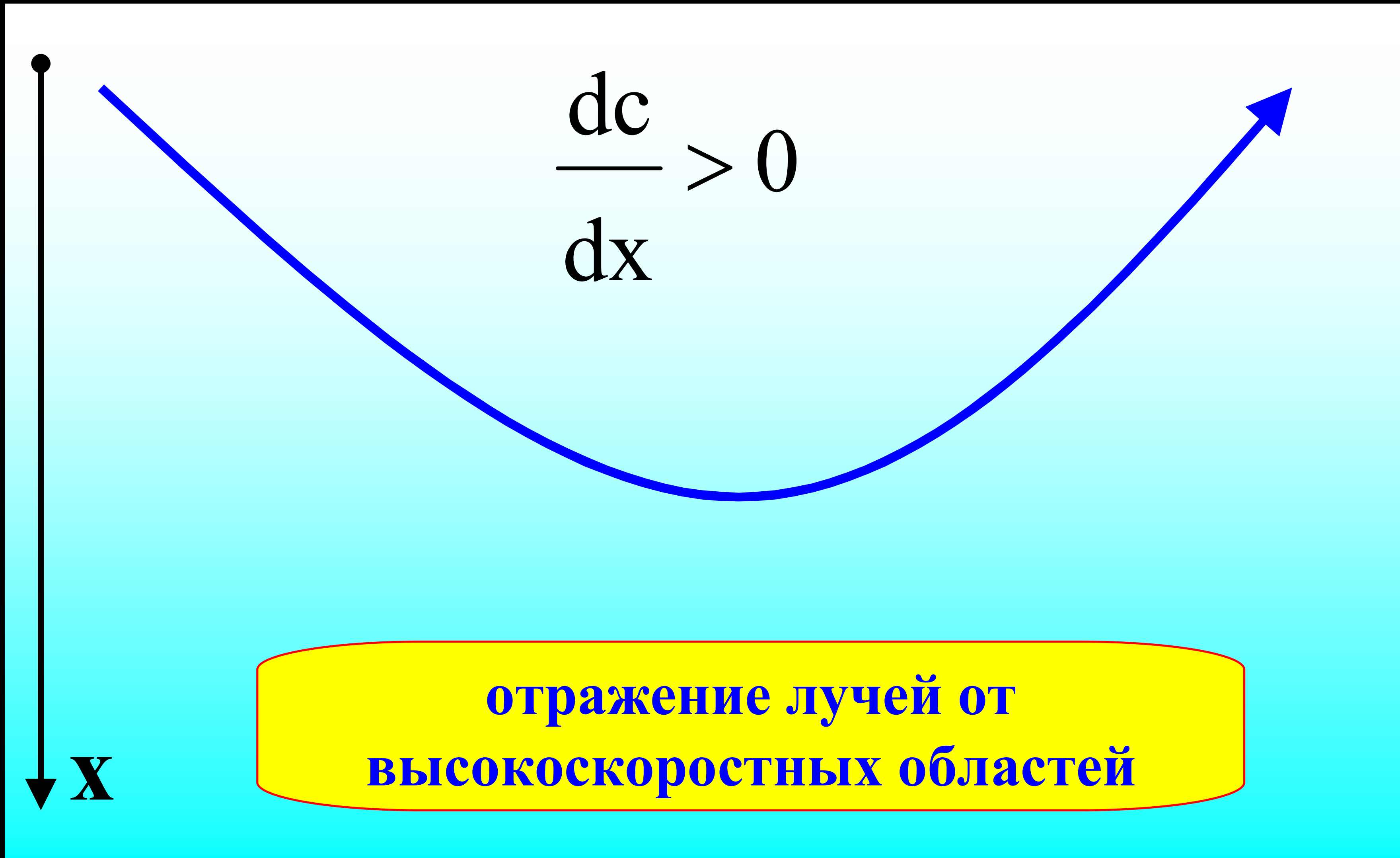
Полное внутреннее отражение



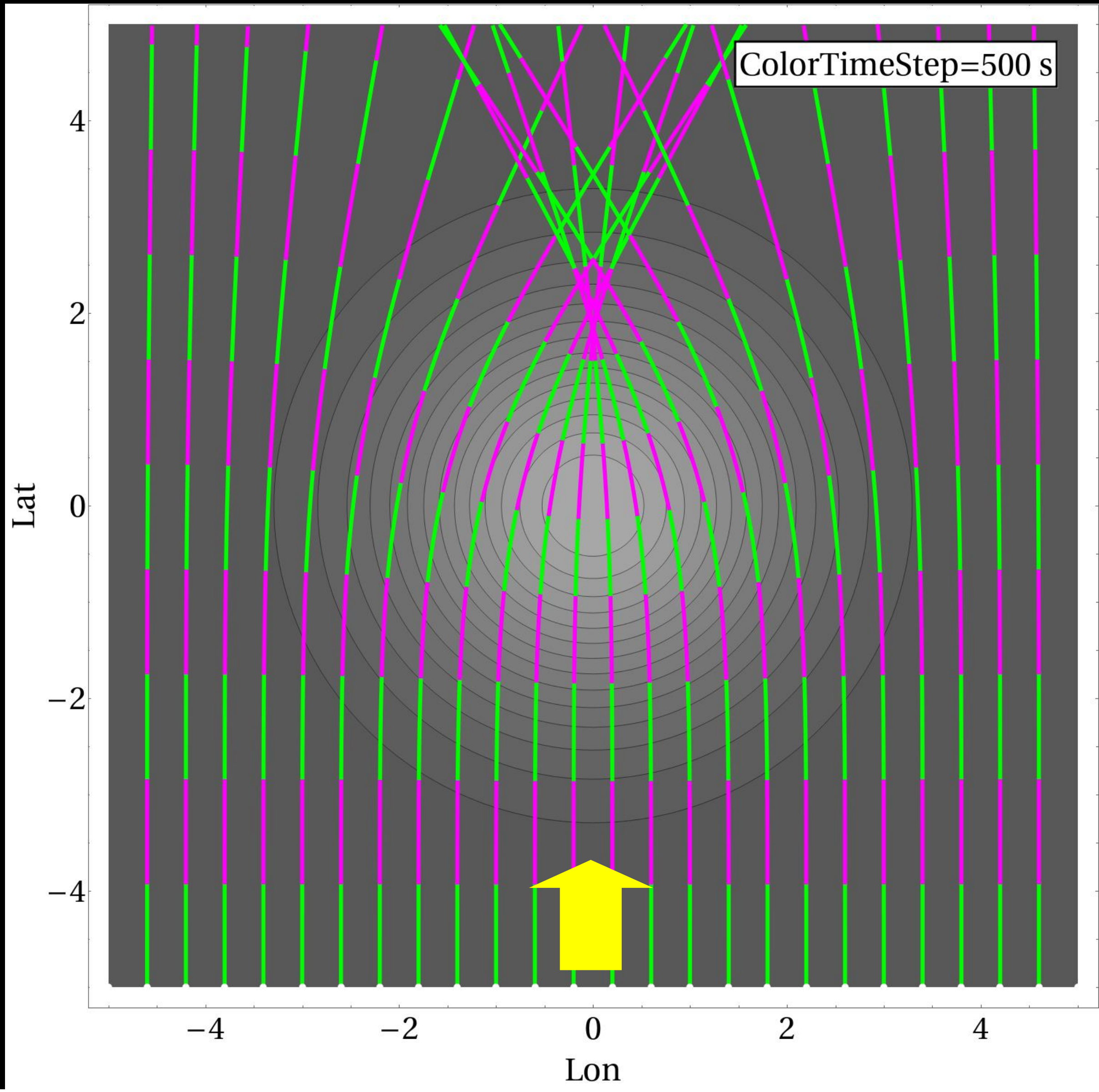
$$n_2 < n_1$$

$$c_2 > c_1$$

Полное внутреннее отражение

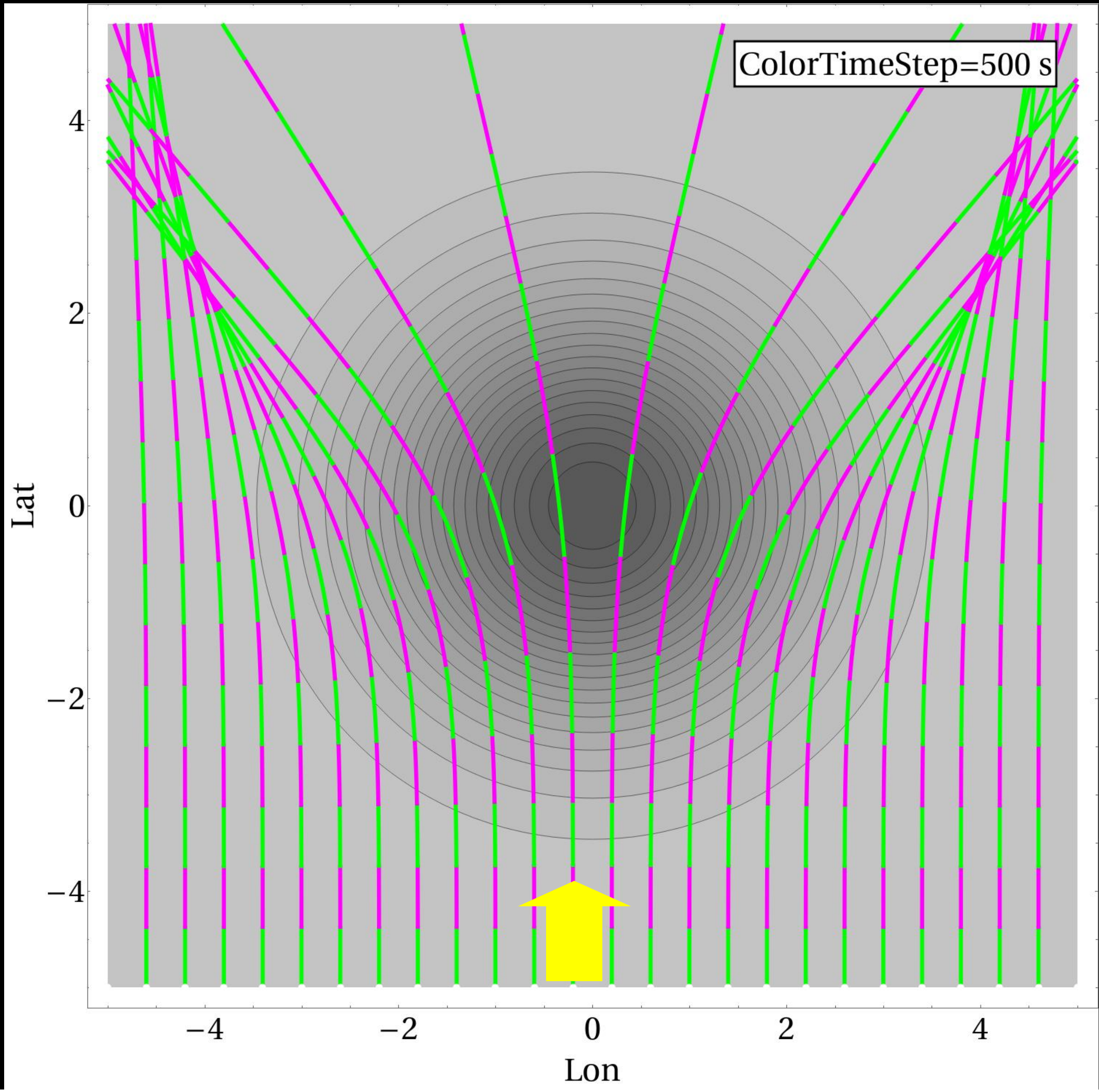


Ход волновых лучей над подводной возвышенностью



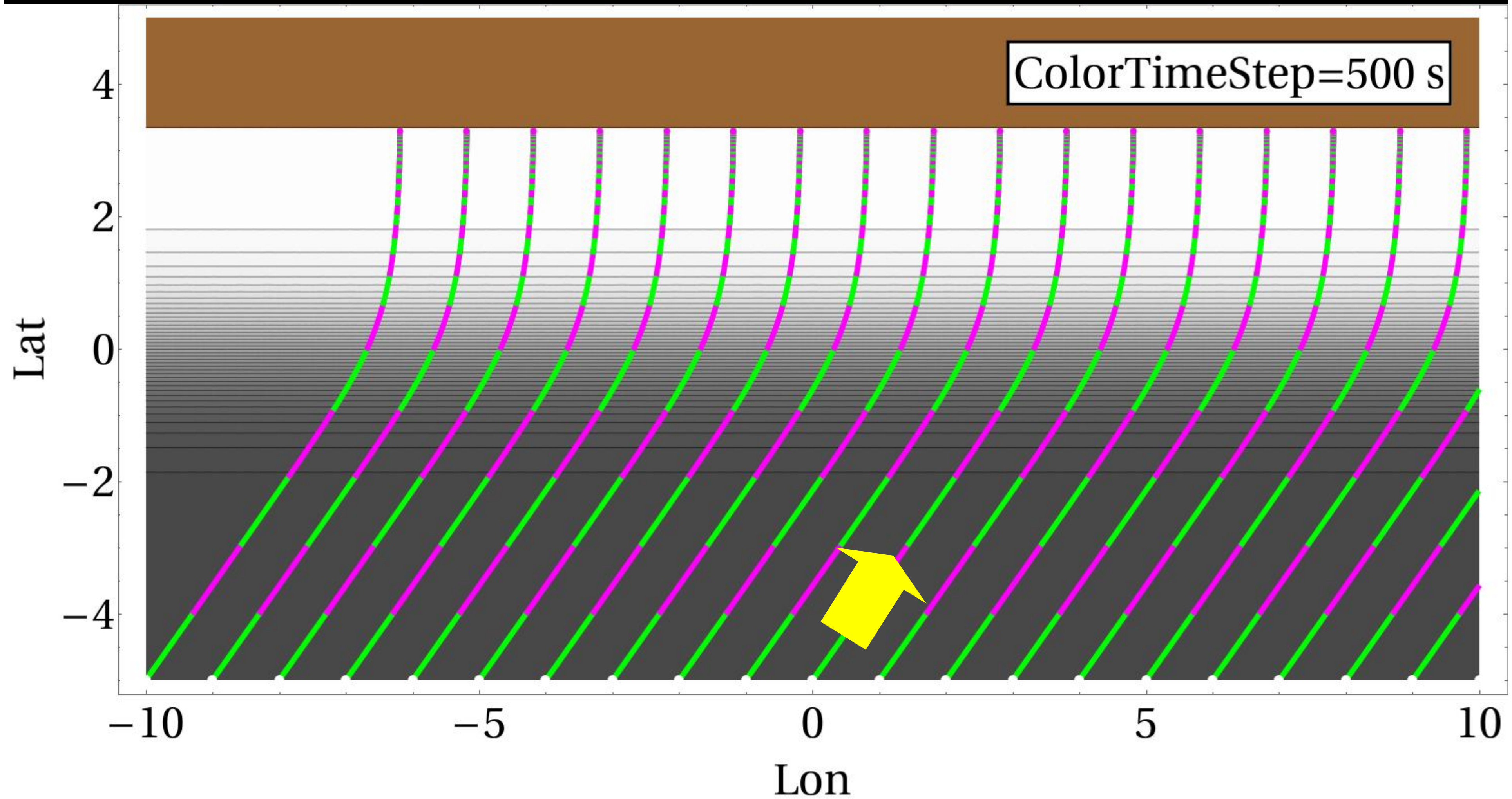
$\Delta H = 3$ км

Ход волновых лучей над подводной депрессией



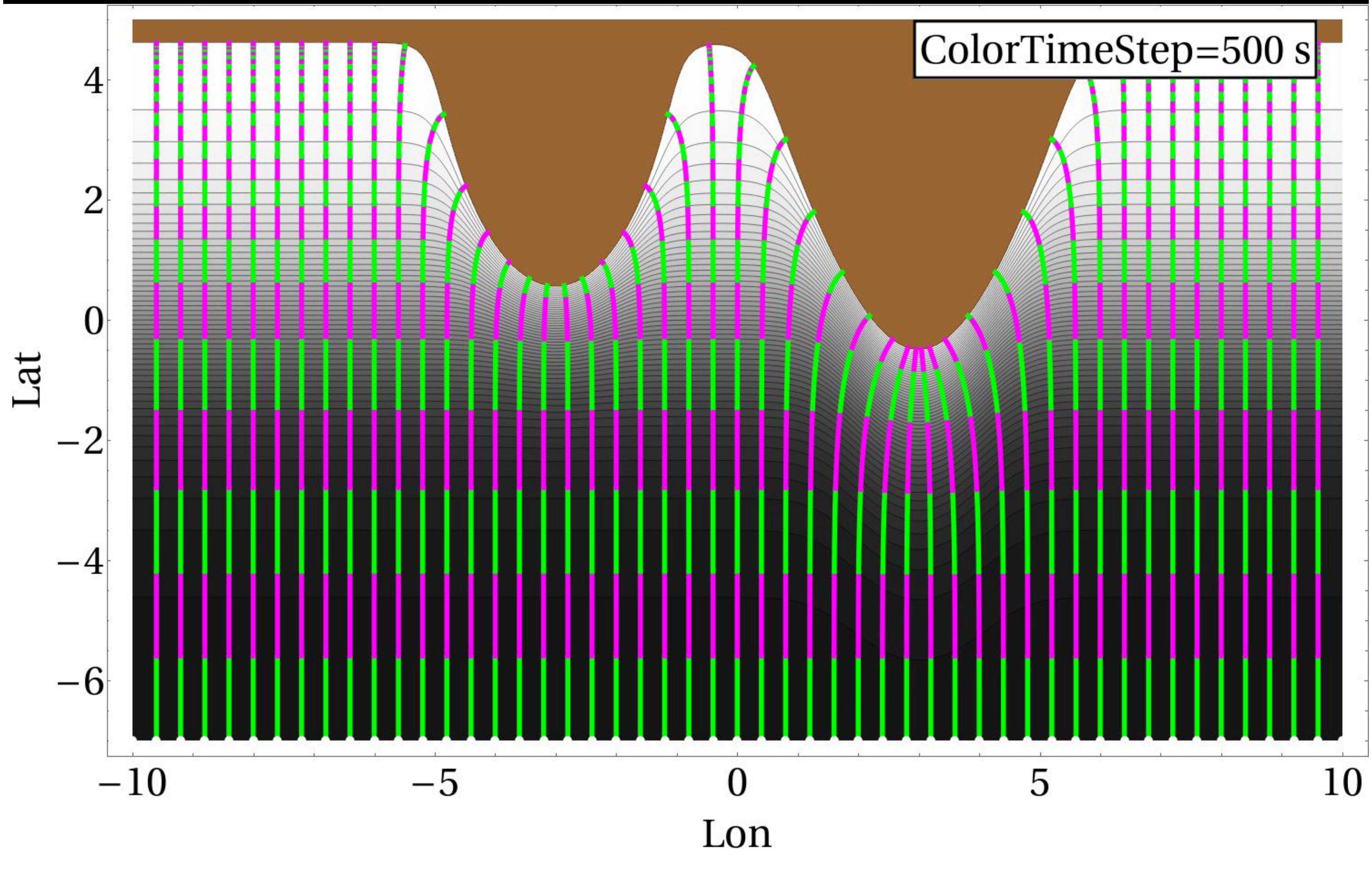
$\Delta H = 4$ км

Рефракция волн в прибрежной зоне



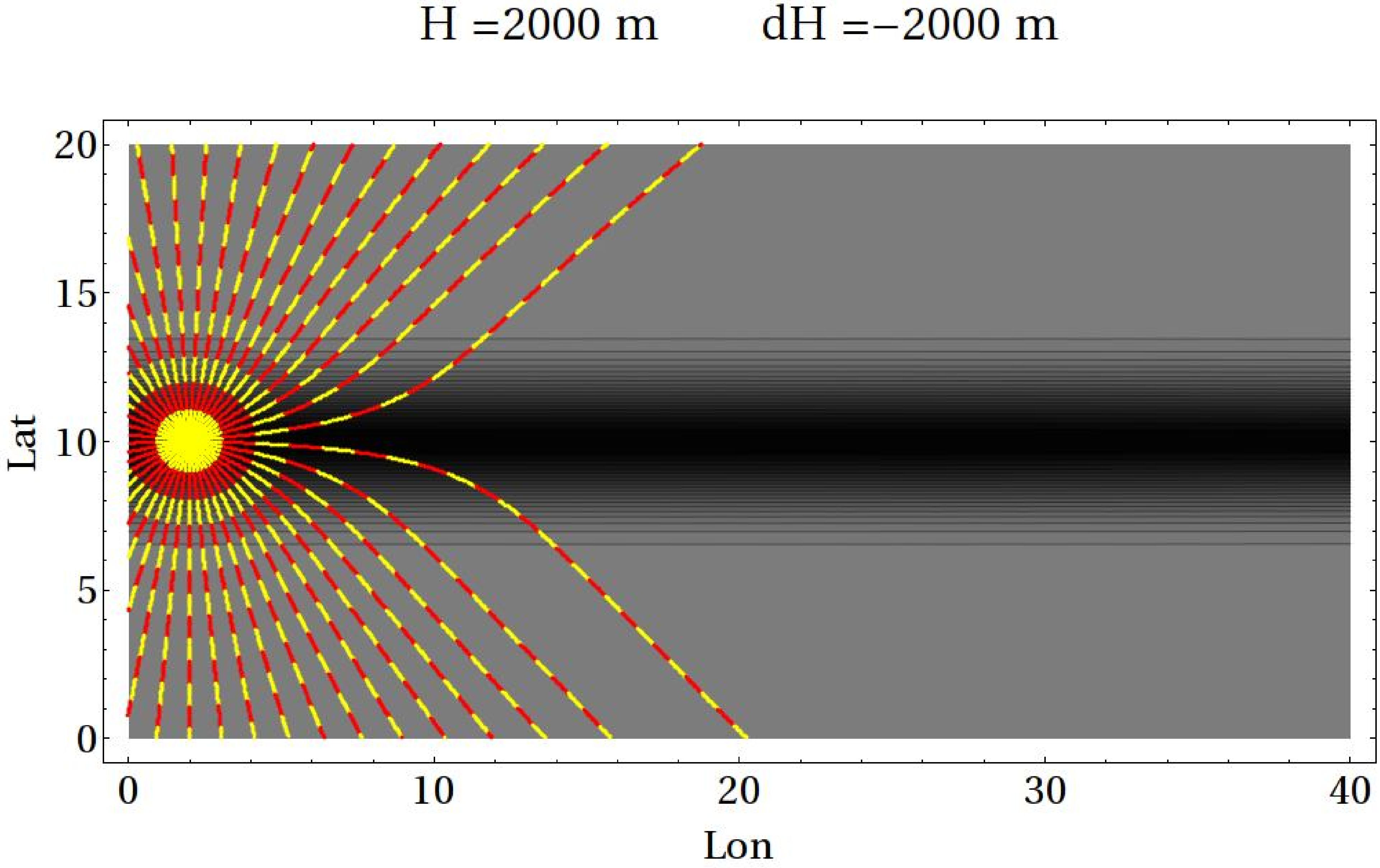
Лучи подходят к побережью по нормали

Рефракция волн в прибрежной зоне

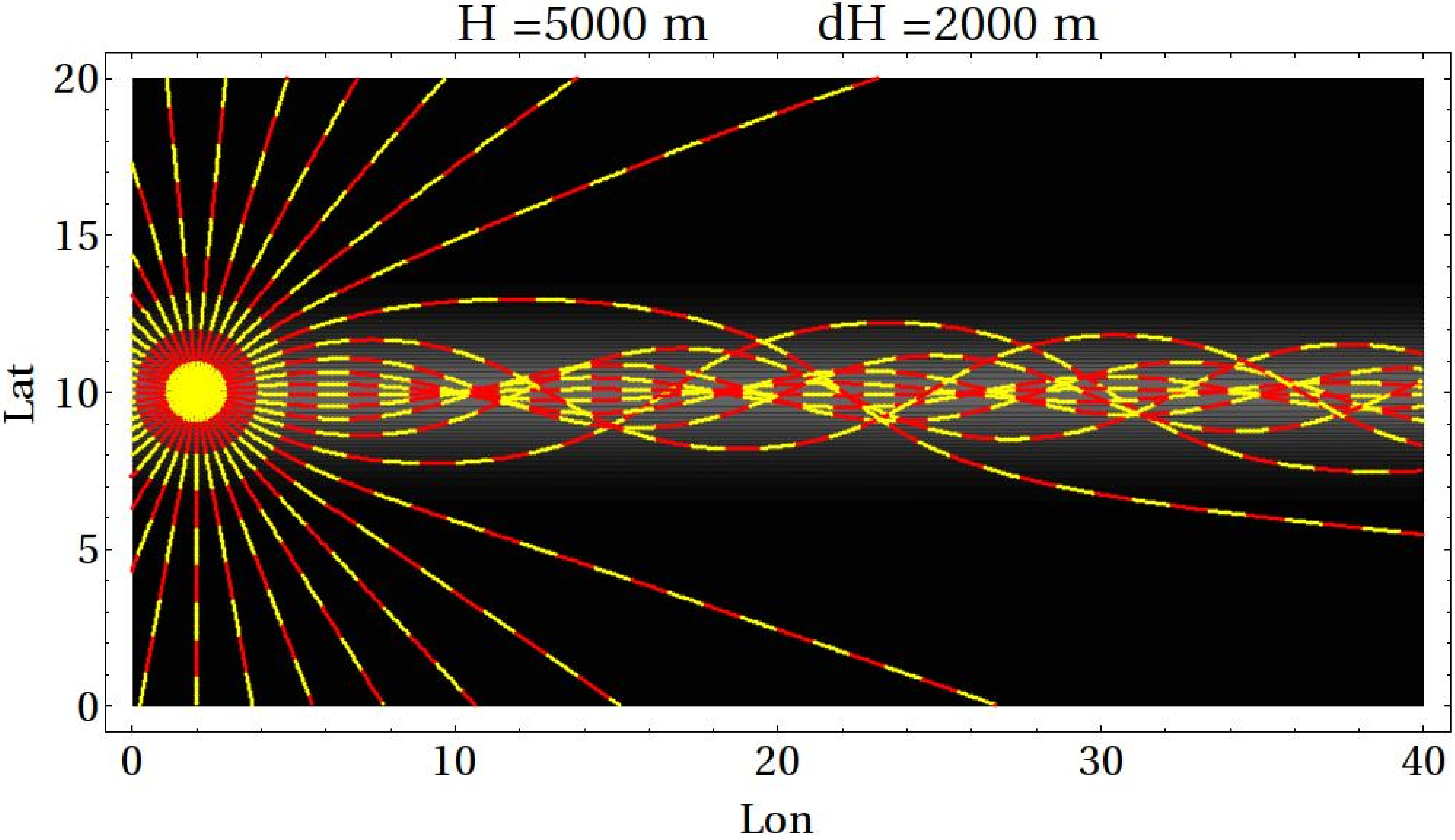


Концентрация волновой энергии на мысах и защищенность бухт

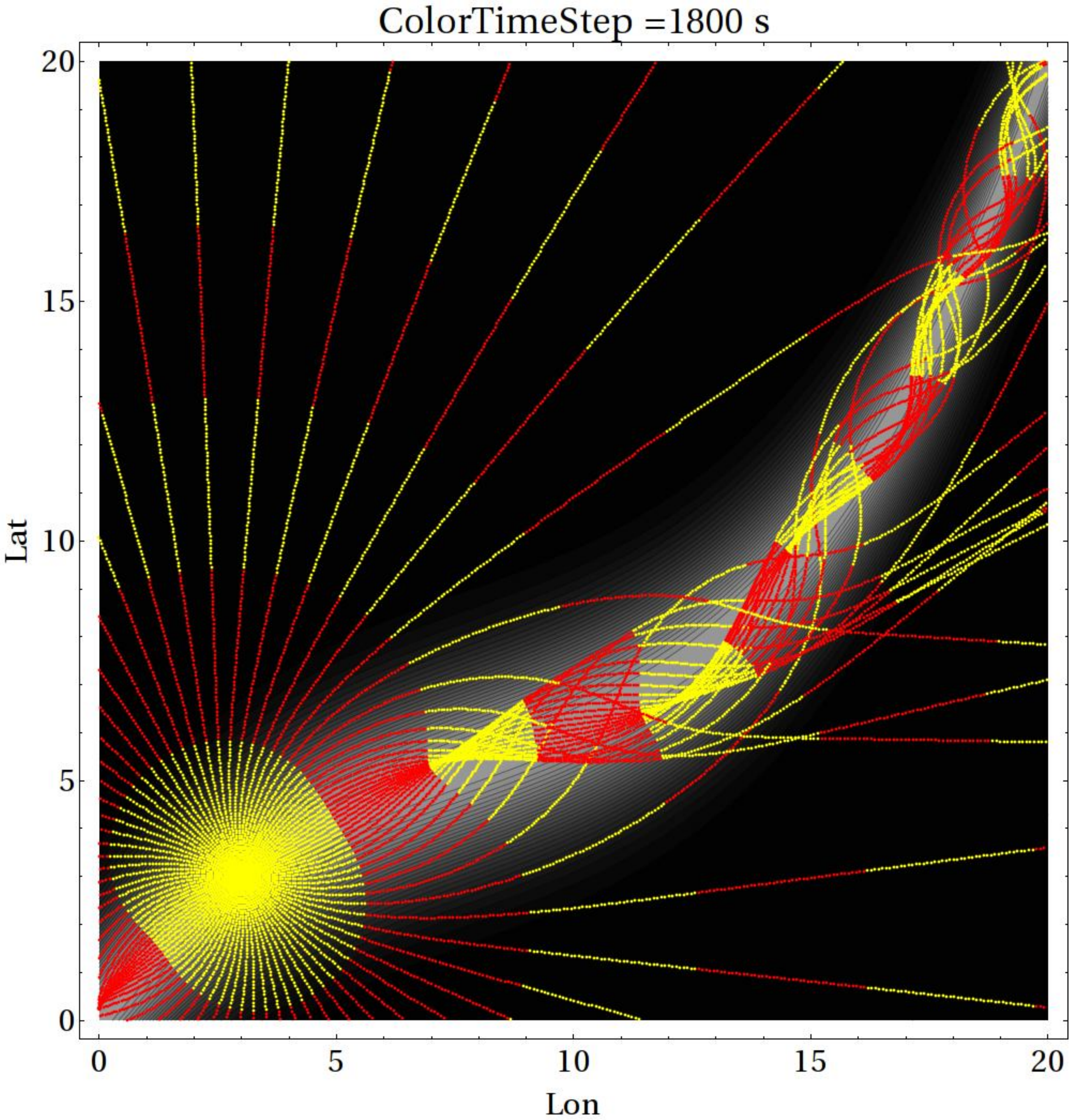
Ход волновых лучей вблизи глубоководного желоба



Ход волновых лучей вблизи подводного хребта

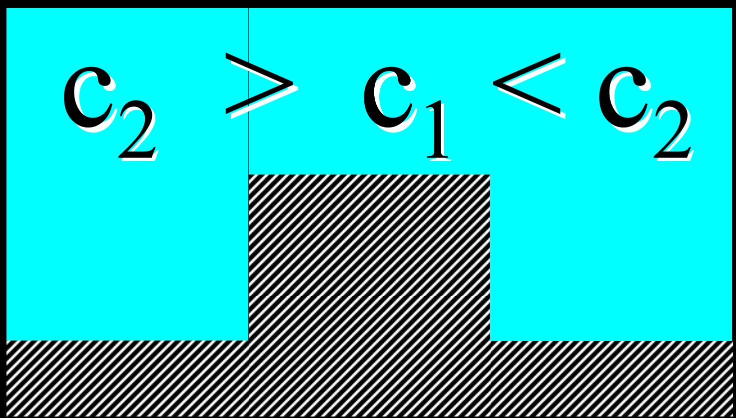


Ход волновых лучей вблизи подводного хребта

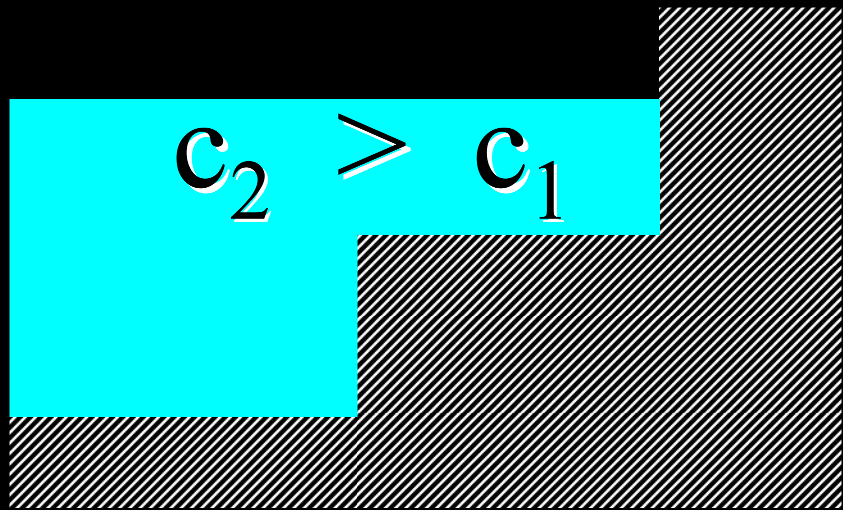


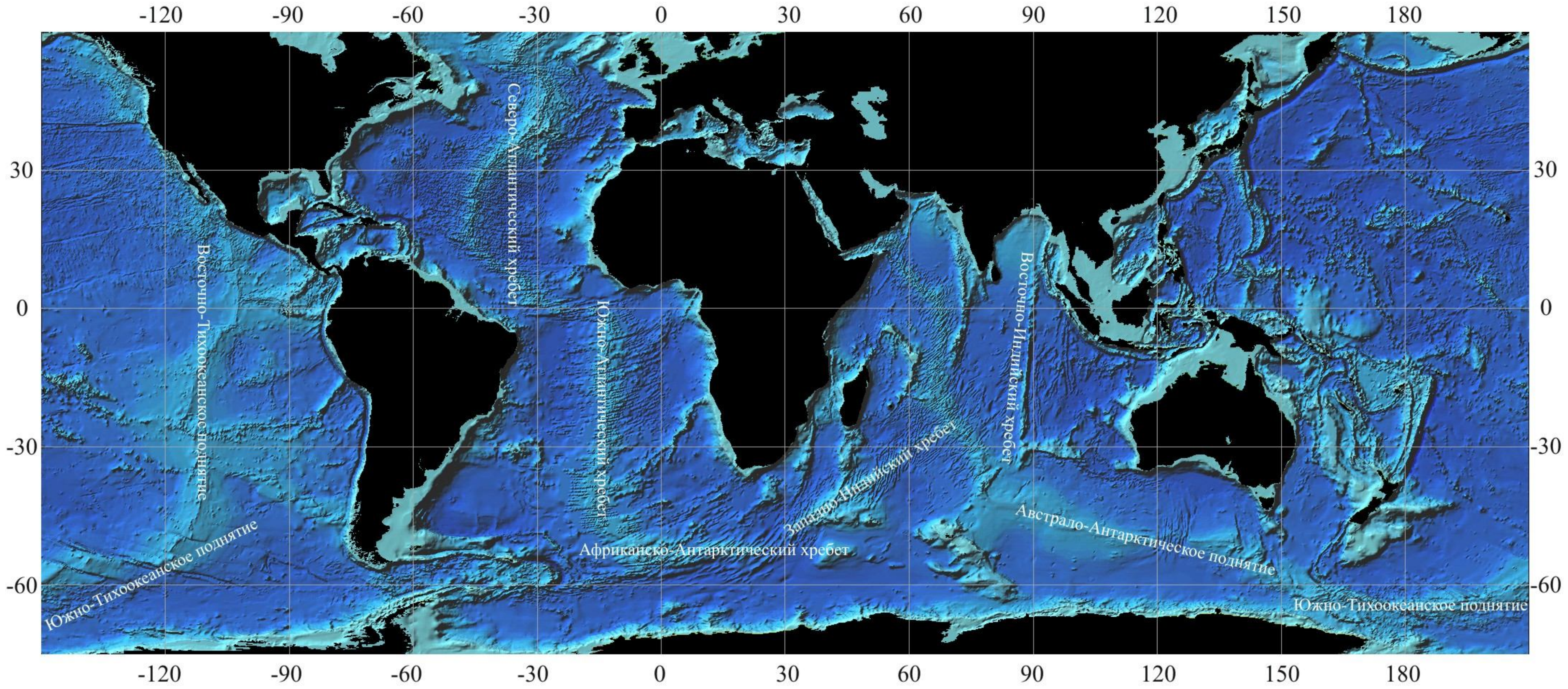
Захваченные волны

подводный
хребет



материковый
склон и берег



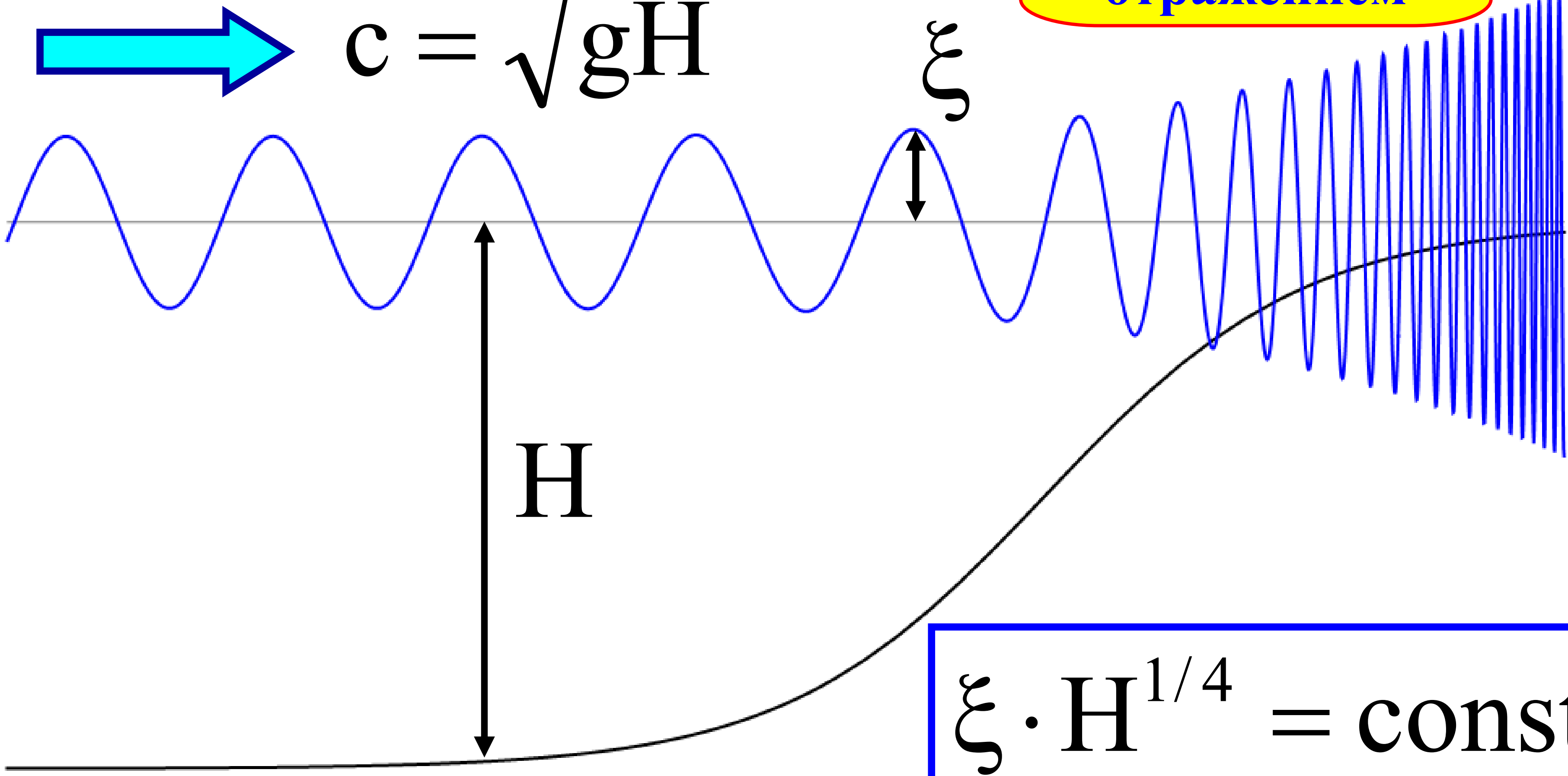

Северо-Атлантический хребет
Восточно-Тихоокеанское поднятие
Южно-Атлантический хребет
Восточно-Индийский хребет
Западно-Индийский хребет
Австрало-Антарктическое поднятие
Африканско-Антарктический хребет
Южно-Тихоокеанское поднятие
Южно-Тихоокеанское поднятие

Закон Грина (закон "1/4")

$$W \sim \xi^2 \qquad Q \sim \xi^2 c \sim \xi^2 \sqrt{H} = \mathrm{const}$$

пренебрегаем отражением

$$c = \sqrt{gH}$$



$$\boxed{\xi \cdot H^{1/4} = \mathrm{const}}$$

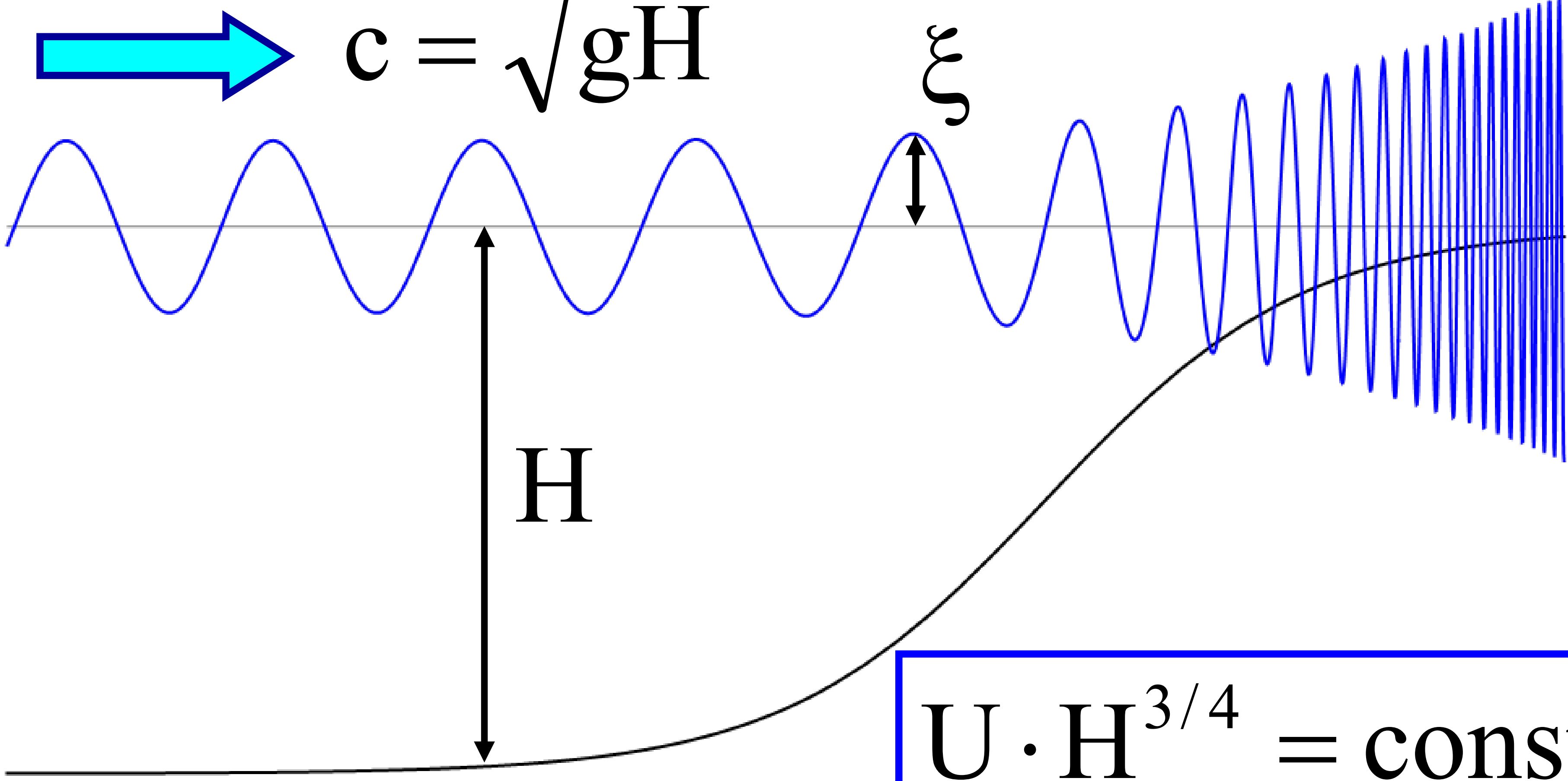
Закон для скорости течения (закон «3/4")

$$W \sim U^2 H$$

пренебрегаем отражением

$$Q \sim U^2 H c \sim U^2 H^{3/2} = \mathrm{const}$$

$$c = \sqrt{gH}$$



$$\boxed{U \cdot H^{3/4} = \mathrm{const}}$$