Носов Михаил Александрович

Физика цунами

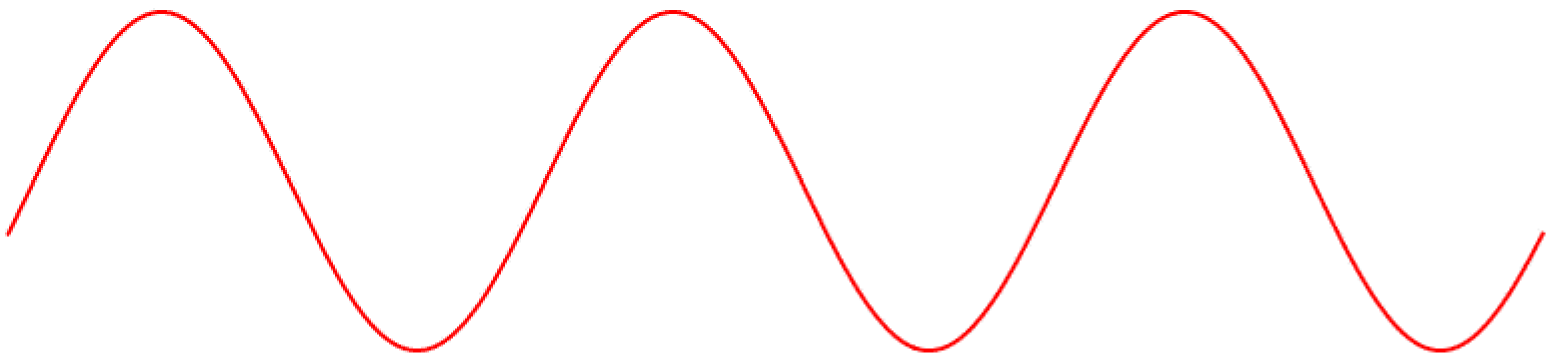
Межфакультетский учебный курс Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

Лекция №7

Волновые движения в океане и их математическое описание

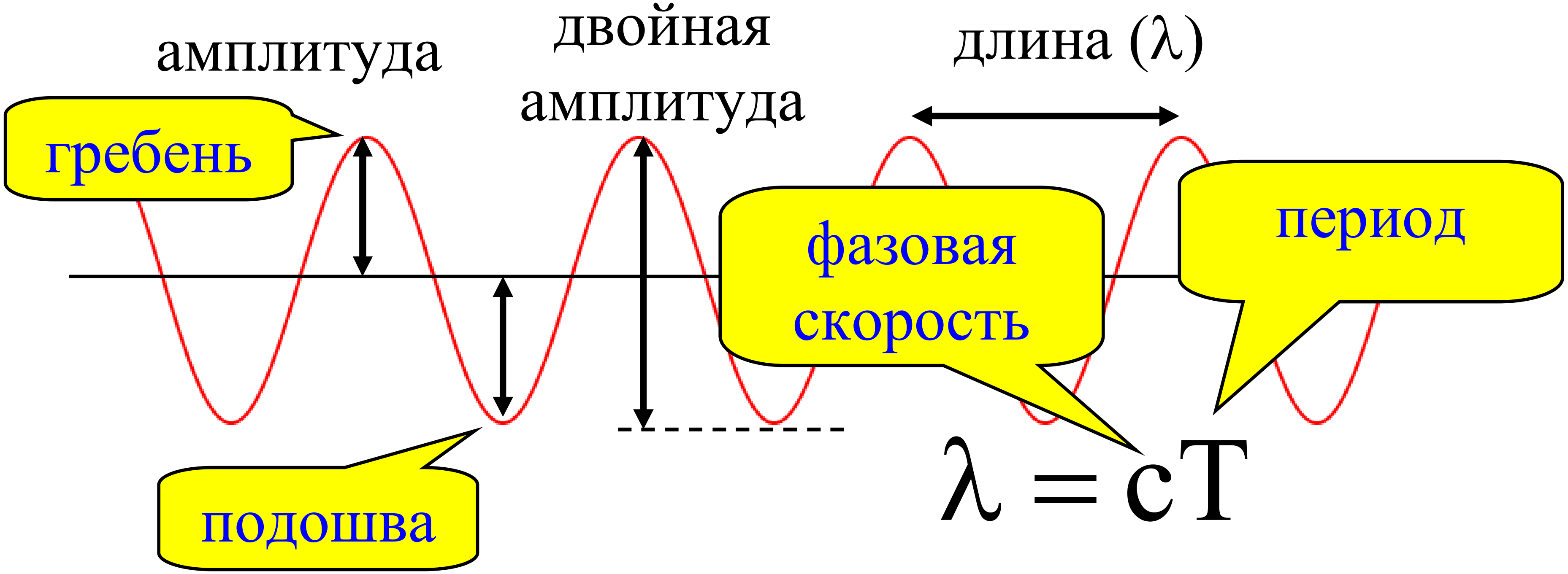
Волны – изменения некоторой совокупности физических величин (полей), способные перемещаться (распространяться), удаляясь от места их возникновения, или колебаться внутри ограниченных областей пространства

[Физическая энциклопедия]



Волны – изменения некоторой совокупности физических величин (полей), способные перемещаться (распространяться), удаляясь от места их возникновения, или колебаться внутри ограниченных областей пространства

[Физическая энциклопедия]

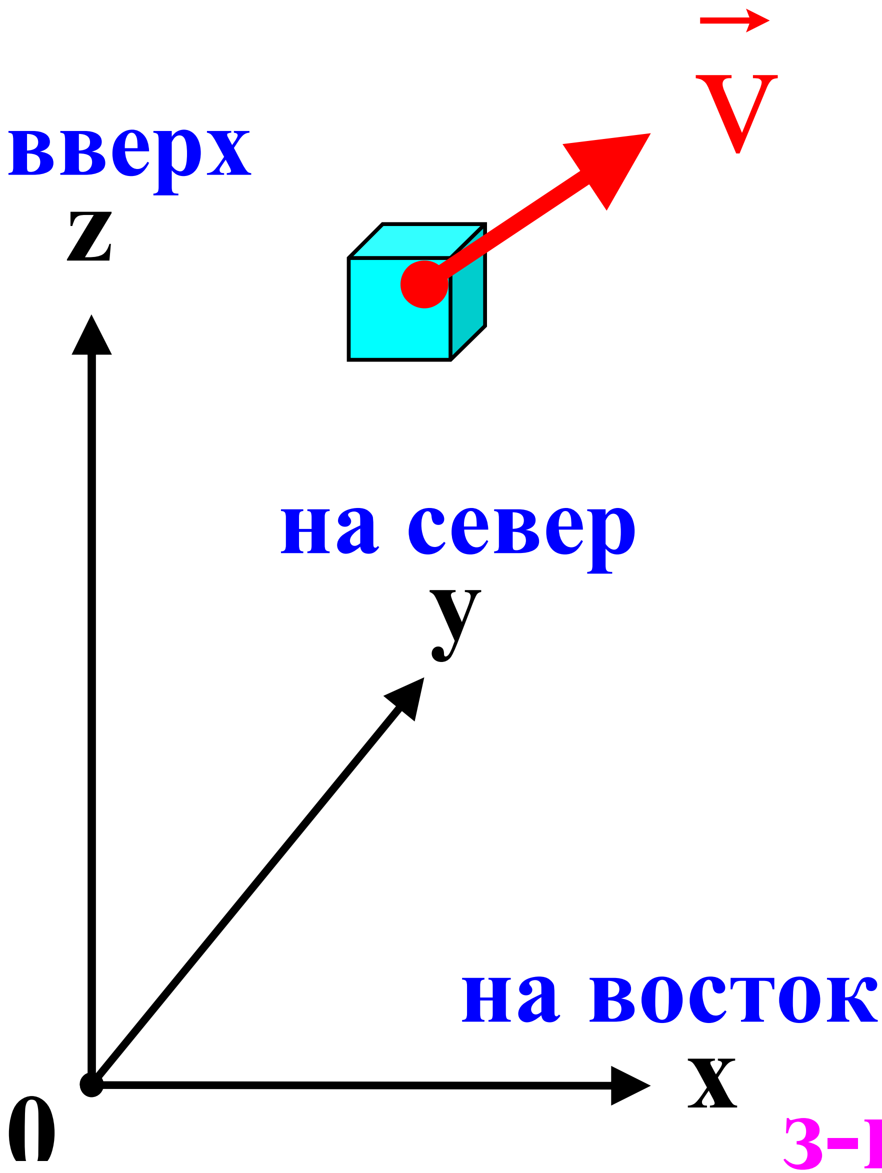


ТИПЫ ВОЛН

(классификация по типу возвращающей силы)

сила тяжести	гравитационные поверхностные и внутренние
сила поверхностного натяжения	капиллярные
сила упругости	(гидро)акустические
сила Кориолиса	гироскопические (инерционные)

Математическое описание волновых движений водного слоя



$$\vec{v} = \left(u_x, u_y, u_z\right)$$

$$\vec{v} \equiv \left(u, v, w\right)$$

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

$$p = p(x, y, z, t)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

2-й з-н Ньютона

з-н сохранения массы

уравнение состояния

Система уравнений Навье-Стокса

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \\
\qquad + \nu \Delta \vec{v} + \left(\varsigma + \dfrac{\nu}{3}\right)\vec{\nabla}\,\mathrm{div}\,\vec{v} \quad , \\
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho\,\vec{v}\right) = 0, \qquad \rho = \rho(p)
\end{cases}
$$

уравнение Навье-Стокса

уравнение неразрывности

уравнение состояния

Граничные условия на поверхностях, ограничивающих область решения задачи

Вязкая жидкость

Поверхности могут быть подвижными и неизвестными

идеальная (невязкая) жидкость

условие прилипания

$$\vec{v} = 0 \quad \text{или} \quad \vec{v} = \vec{v}_0$$

условие непротекания

$$v_n = 0$$

заданное напряжение (поток импульса)

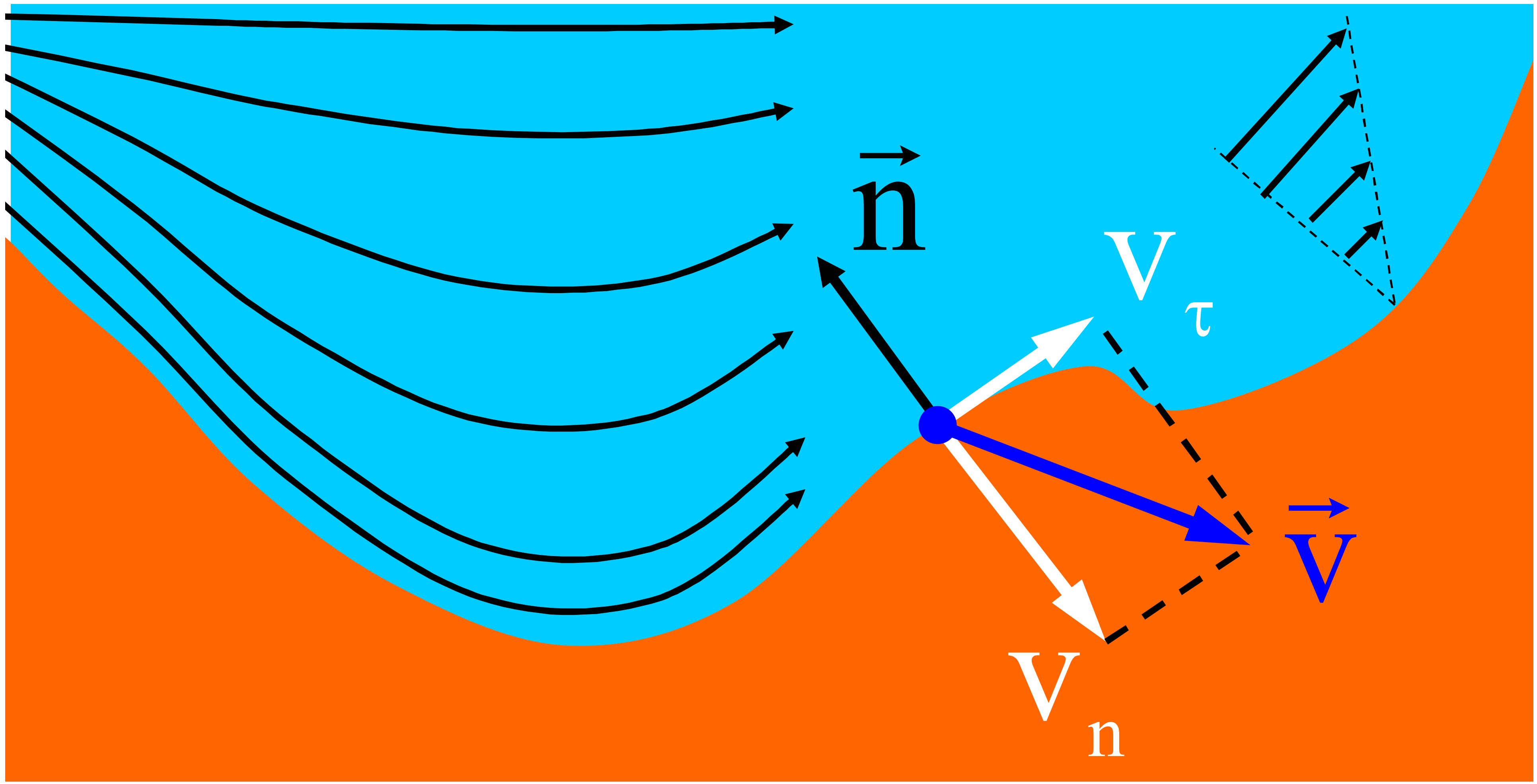
$$\eta \frac{\partial u}{\partial z} = \tau$$

заданное давление

$$p = p_0$$

Нормальные и тангенциальные (к поверхности) компоненты скорости течения

условие непротекания **условие прилипания**



Начальные условия (при t=0)

$$\vec{v} = \vec{v}_0(x, y, z), \quad p = p_0(x, y, z)$$

Обычно при моделировании цунами полагают:

Гидростатическое равновесие

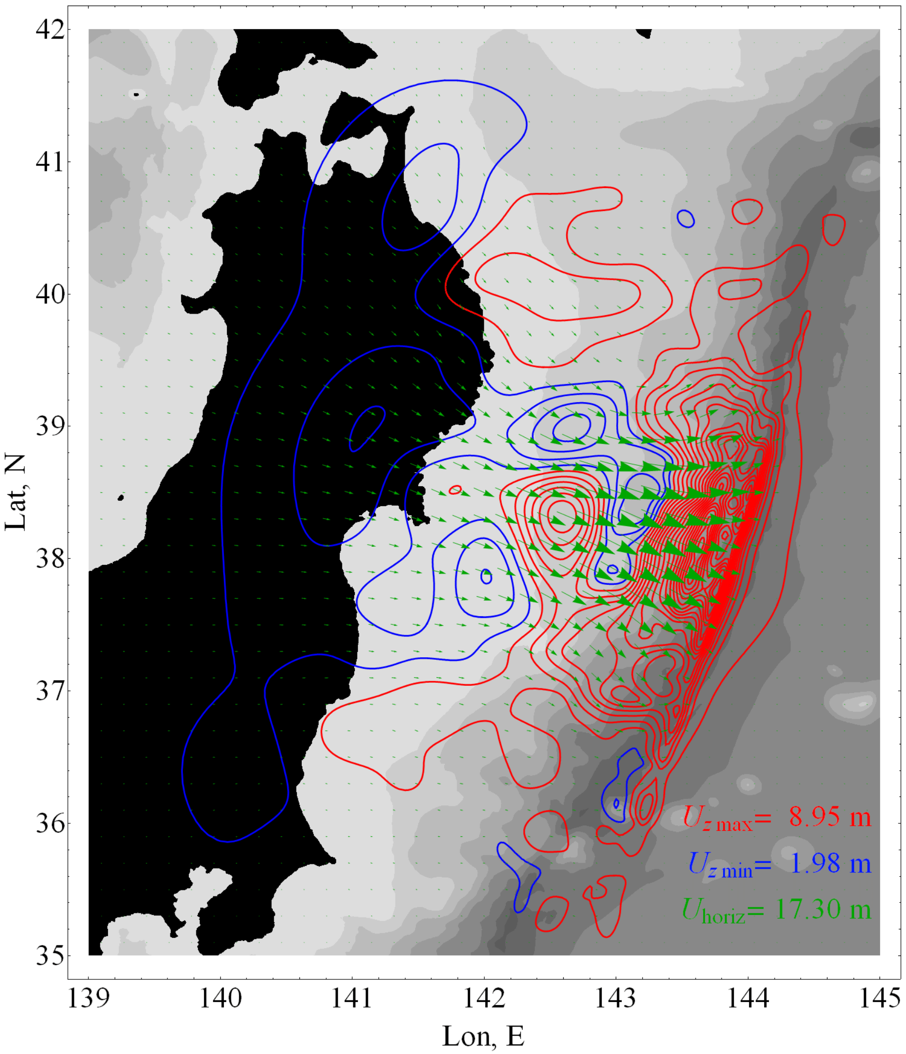
$$\vec{v}_0 = 0 \qquad \frac{\partial p_0}{\partial z} = -g\rho_0$$

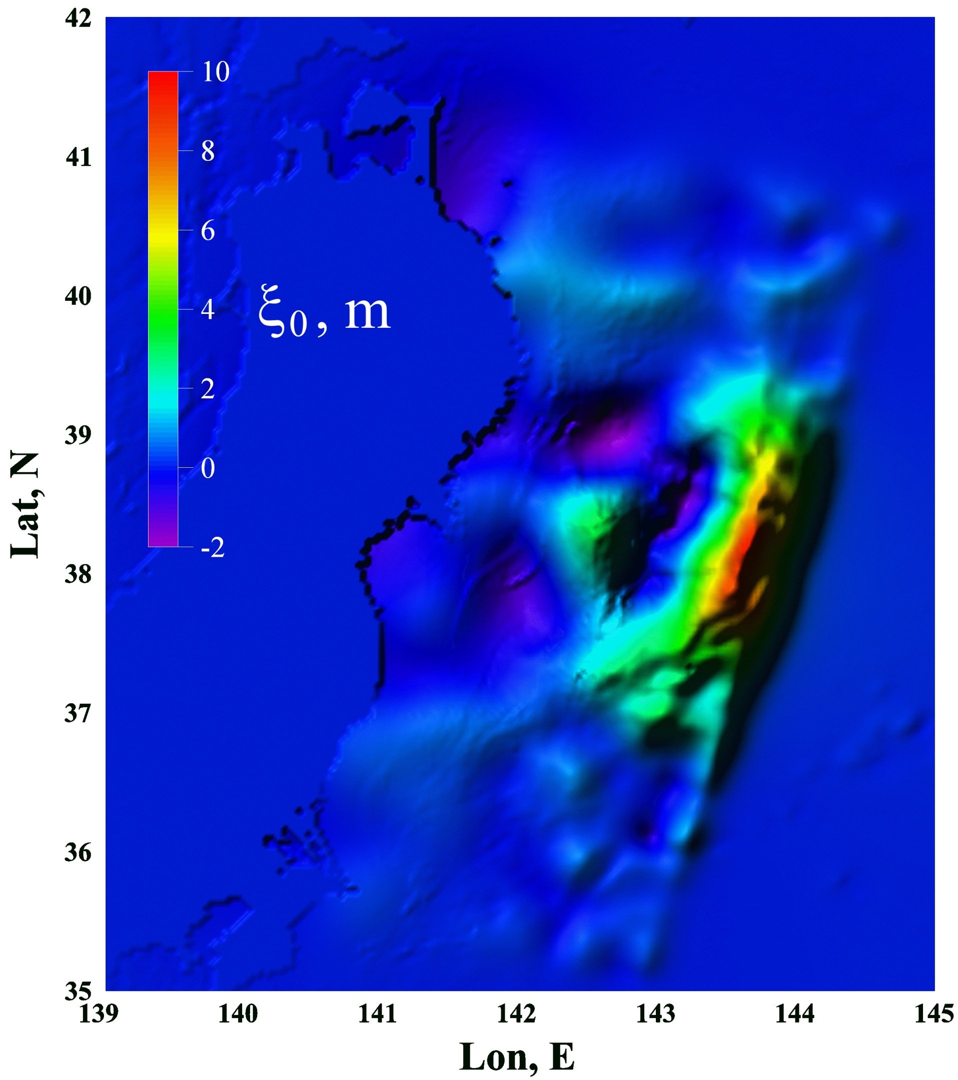
Начальное возвышение свободной поверхности

$$\vec{v}_0 = 0 \qquad \xi_0 = \xi_0(x, y)$$

Косейсмическая (остаточная) деформация дна океана в очаге цунами Тохоку 11.03.2011

Начальное возвышение водной поверхности, рассчитанное по косейсмической деформации дна





Основные приближения, используемые при описании волн в океане

Приближение №1:
«несжимаемая жидкость»

$$\boxed{\rho = \rho_0 = \mathrm{const}}$$

применимость для цунами – тонкий вопрос

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] + \nu \Delta \vec{v} + \cancel{\left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right) \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \vec{v}}$$

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \mathrm{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0$$

$$\rho = \rho(p)$$

ρ_0

$$\mathrm{div}\, \vec{v} = 0$$

Приближение №1: «несжимаемая жидкость (газ)»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2[\vec{v} \times \vec{\omega}] + \nu \Delta \vec{v}$$

Для волн цунами:

$H << L \Rightarrow w_{верт} << u_{гориз}$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{u_{гориз}}{L}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} \sim \frac{w_{верт}}{H}$$

$$\boxed{w_{верт} \sim \frac{H}{L} u_{гориз}}$$

Приближение №2: «идеальная несжимаемая жидкость»

понижается порядок уравнения

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] + \cancel{\nu \Delta \vec{v}}$$

$$\operatorname{div}\left(\vec{v}\right) = 0$$

Изменение граничного условия:

$$\text{"прилипание"} \rightarrow \text{"непротекание"}$$

$$\left\{v_\tau = 0,\ v_n = 0\right\} \rightarrow \left\{v_n = 0\right\}$$

Приближение №2: «идеальная несжимаемая жидкость»

подходит для цунами!

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] + \nu \Delta \vec{v}$$

$$\boxed{\frac{v_0}{T}}$$

$$\boxed{10^{-6}\,\text{м}^2/\text{с}}$$

для цунами

$$\boxed{\frac{\nu v_0}{L^2}}$$

$$\boxed{L = T\sqrt{gH}}$$

$$\frac{\dfrac{\nu v_0}{T^2 g H}}{\dfrac{v_0}{T}} = \frac{\nu}{TgH} << 1$$

$$\boxed{\frac{\nu v_0}{T^2 g H}}$$

$$\boxed{10^2 - 10^4\,\text{с}} \qquad \boxed{9.8\,\text{м}/\text{с}^2} \qquad \boxed{1 - 10^4\,\text{м}}$$

Приближение №3:
«идеальная несжимаемая жидкость, линейное приближение»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \cancel{\left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v}} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right]$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\text{если} \left\{ \begin{matrix} \vec{v}_1, p_1 \\ \vec{v}_2, p_2 \end{matrix} \right\} - \text{решения системы, то} \Rightarrow$$

$$A\vec{v}_1 + B\vec{v}_2, Ap_1 + Bp_2 - \text{решения системы}$$

$$\text{где } A, B - \text{константы}$$

Приближение №3: работает в открытом океане!

«идеальная несжимаемая жидкость, линейное приближение»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right]$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \to \boxed{\frac{v_0}{T}} \qquad \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} \to \boxed{\frac{v_0^{\,2}}{L}}$$

$$u_{гориз} \sim \frac{\lambda}{H} w_{верт}$$

на больших глубинах

$$\frac{v_0^{\,2}}{L} \bigg/ \frac{v_0}{T} = v_0 \frac{T}{L} = \begin{cases} w_{верт} \dfrac{T}{H} \sim \dfrac{A}{H} & \ll 1 \\[2ex] u_{гориз} \dfrac{T}{\lambda} \sim \dfrac{w_{верт} \cancel{\lambda}}{H} \dfrac{T}{\cancel{\lambda}} \sim \dfrac{A}{H} & \sim 1 \end{cases}$$

на мелководье

Приближение №4: в целом работает

«идеальная несжимаемая жидкость без учета вращения Земли»

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \vec{g} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right]$$

$$\frac{v_0}{T_{TS}}$$

$$10^2 - 10^4 c$$

$$\frac{v_0}{T_{сут}}$$

$$\frac{v_0}{T_{сут}} \Big/ \frac{v_0}{T_{TS}} = \frac{T_{TS}}{T_{сут}} \begin{matrix} <1 \\ \ll 1 \end{matrix}$$

Для коротко-периодных волн

$$24 \cdot 60 \cdot 60 = 8.64 \cdot 10^4 c$$

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

2. Геострофическое приближение

strophe (греч.) – вращение, поворот

Крупномасштабные течения атмосферы и океана обычно происходят в условиях гидростатического (по вертикали) и геострофического (по горизонтали) баланса

$$z: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] = 0$$

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

$$\cancel{\frac{dw}{dt}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

$$\boxed{\begin{gathered}\rho = \rho_0 = \text{const} \\ g = \text{const}\end{gathered}}$$

$$w_{\text{верт}} \sim \frac{H}{L} u_{\text{гориз}}$$

$$H << L$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_0 g \Rightarrow p(z) = p_0 - \rho_0 g\, z$$

«Геофизические» приближения:

1. Гидростатическое приближение

2. Геострофическое приближение

strophe (греч.) – вращение, поворот

Крупномасштабные течения атмосферы и океана обычно происходят в условиях гидростатического (по вертикали) и геострофического (по горизонтали) баланса

$$z: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}: -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right] = 0$$

«Геофизические» приближения:

2. Геострофическое приближение

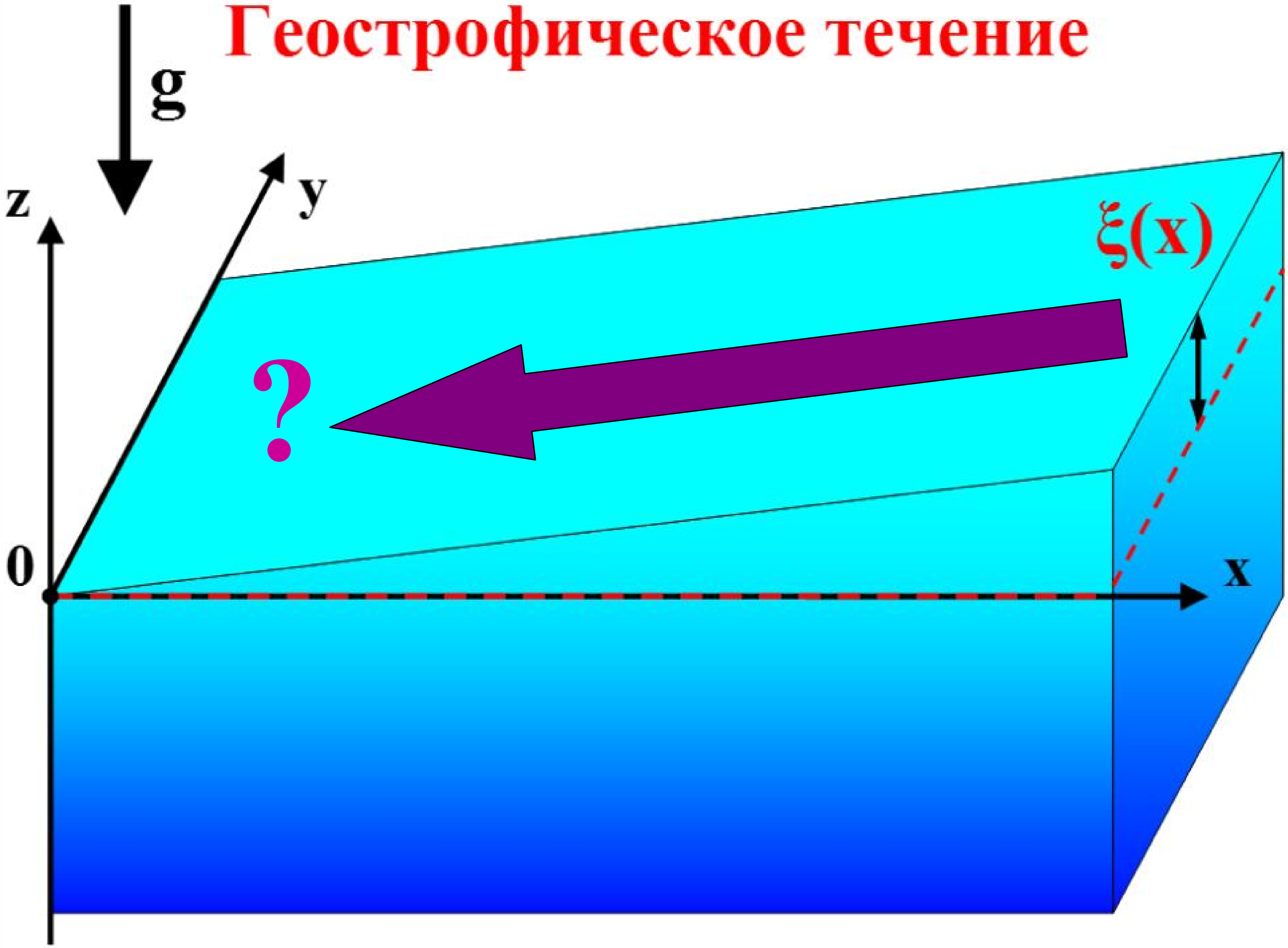
течение стационарное и медленное

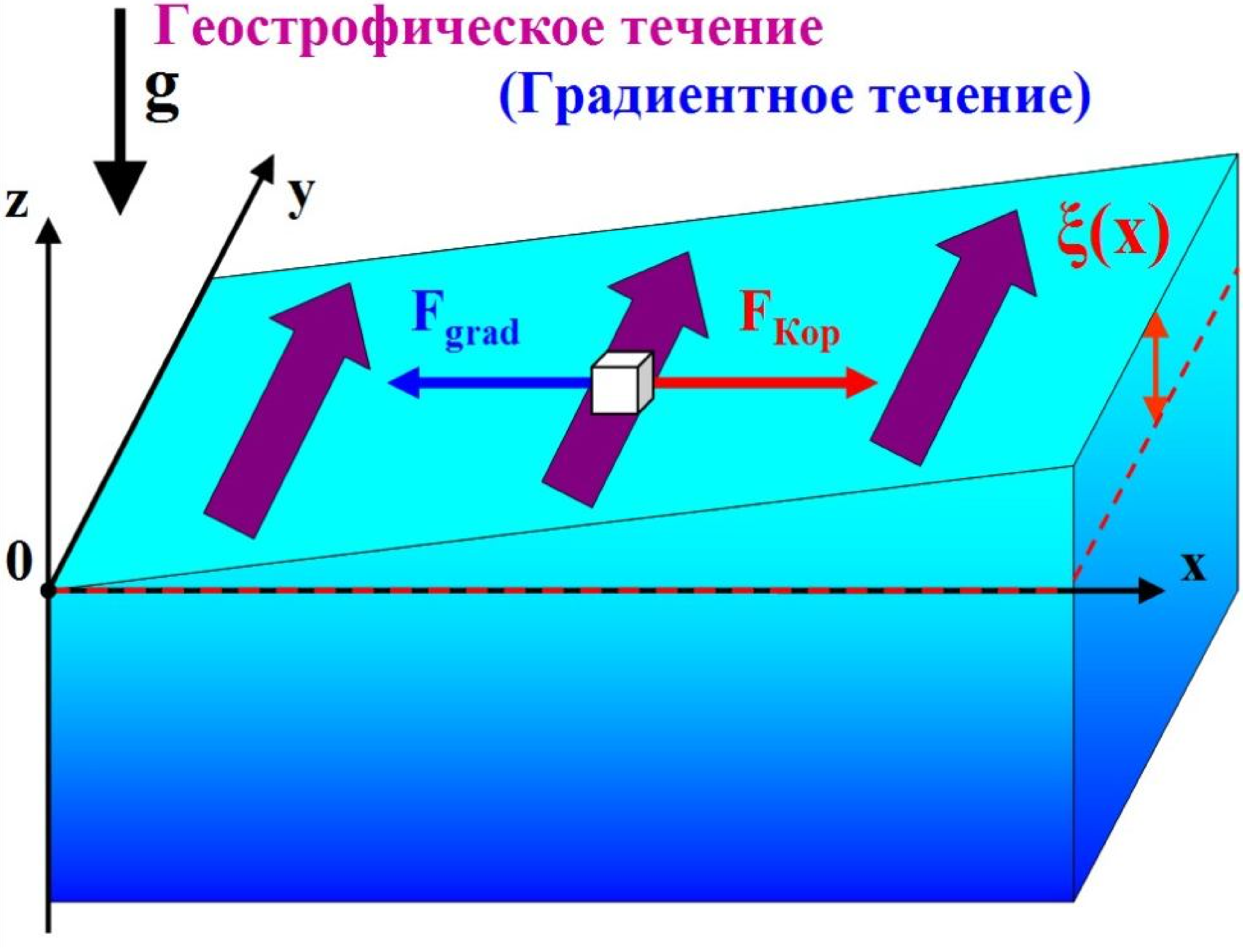
$$\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{\left(\vec{v}, \vec{\nabla}\right)\vec{v}} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \cancel{\vec{g}} + 2\left[\vec{v} \times \vec{\omega}\right]$$

$$\operatorname{div}\left(\vec{v}\right) = 0$$

по горизонтали не действует!

Геострофическое течение





Геострофическое течение
(Градиентное течение)
g
z
y
ξ(x)
F_{grad}
$F_{Кор}$
0
x

Выберем наиболее простое приближение для описания цунами (гравитационных волн) :

- идеальная (невязкая) жидкость;
- несжимаемая жидкость;
- линейное приближение (волны малой амплитуды);
- пренебрежем вращением Земли.