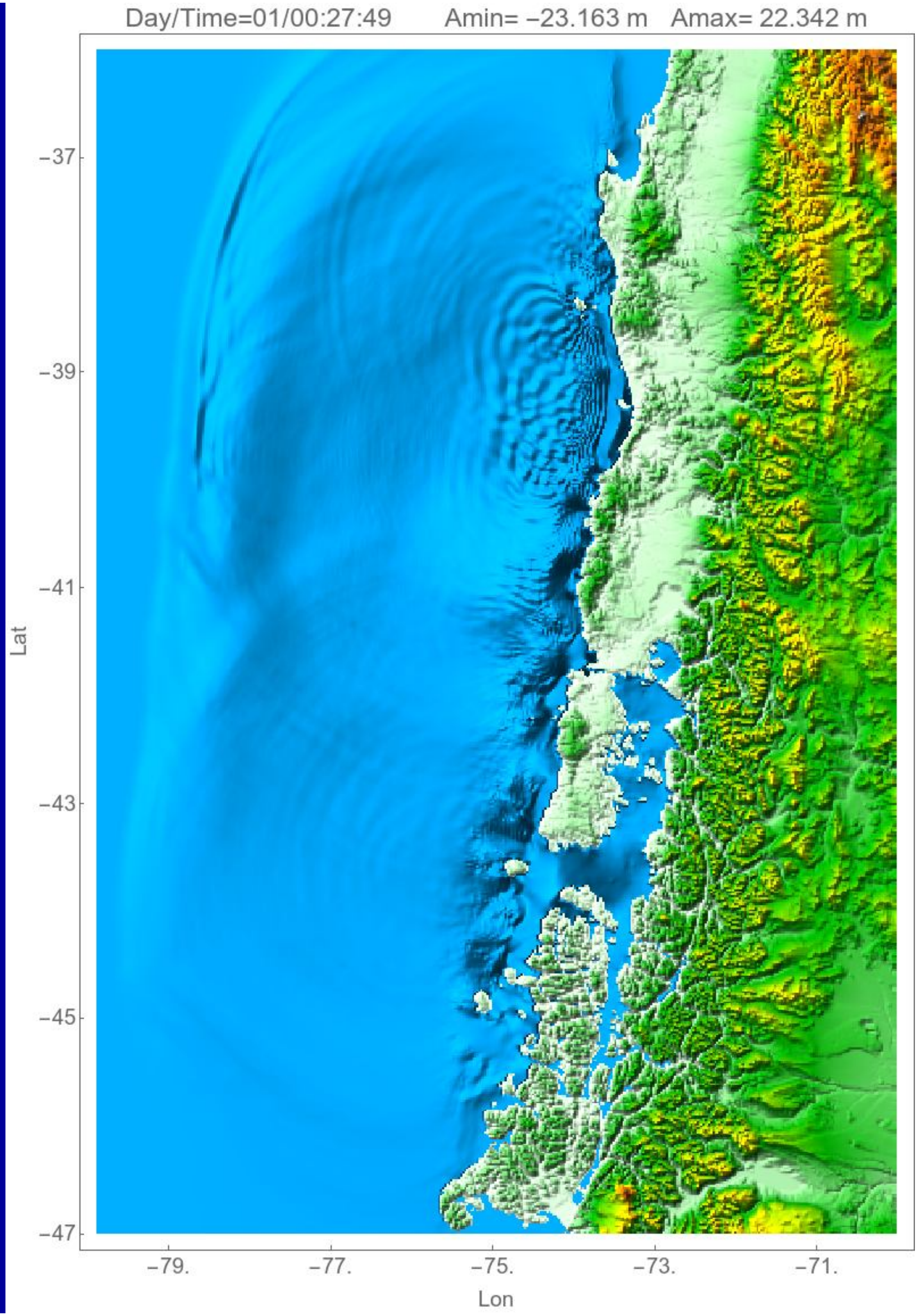
Носов Михаил Александрович

Физика цунами

Межфакультетский учебный курс Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

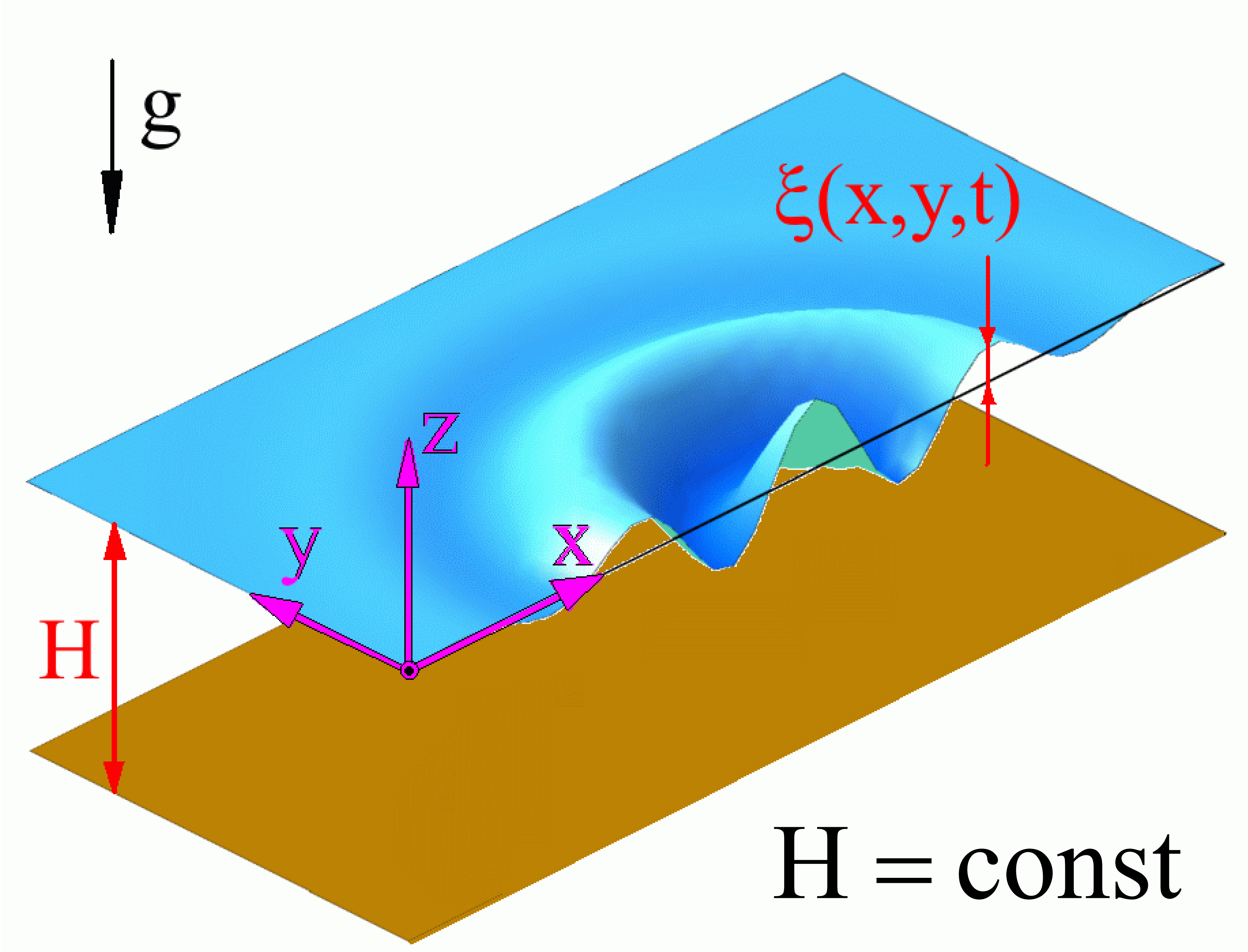
Лекция №8

Математи-
ческое
описание
волн
цунами



Выберем наиболее простое приближение для описания цунами (гравитационных волн) :

- идеальная (невязкая) жидкость;
- несжимаемая жидкость;
- линейное приближение (волны малой амплитуды);
- пренебрежем вращением Земли.


g
ξ(x,y,t)
z
y
x
H
H = const

Система уравнений для описания линейных гравитационных волн

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \operatorname{div}\left(\vec{v}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} \equiv \left(u, v, w\right)$$

Граничные условия:

$$p\big|_{z=0} = p_{атм}$$

$$w\big|_{z=-H} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

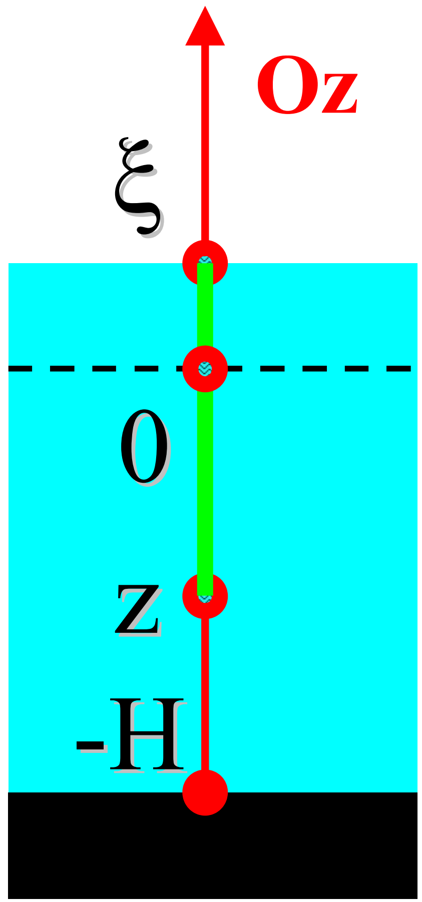
Линейная теория длинных волн или теория “мелкой воды” ($\lambda >> H$)

приближение гидростатики

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w_{\text{верт}} \sim \frac{H}{\lambda} u_{\text{гориз}}$$

$$p(\xi) = p_{\text{атм}} = \text{const}$$

$$\int_{z}^{\xi} dz \; \Bigg| \; \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho\, g$$



$$p(\xi) - p(z) = -\rho g \xi + \rho g z$$

$$p(x, y, z, t) = p_{\text{атм}} + \rho g \xi(x, y, t) - \rho g z$$

$$p(x, y, z, t) = p_{\text{атм}} + \rho g \xi(x, y, t) - \rho g z$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$(u, v) \neq f(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \Bigg| \int_{-H}^{\xi} dz$$

$$|\xi| << H$$

$$(H+\cancel{\xi})\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\underbrace{w(\xi)}_{\frac{\partial \xi}{\partial t}}-\underbrace{w(-H)}_{\mathbf{0}}=0$$

$$H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial \xi}{\partial t}=0$$

Уравнения линейной теории длинных волн (мелкой воды)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

для H=const

$$H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

Уравнения линейной теории длинных волн (мелкой воды)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

для H=H(x,y)

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial (uH)}{\partial x} + \frac{\partial (vH)}{\partial y} = 0$$

Уравнения линейной теории длинных волн (мелкой воды) в векторной форме

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -g\nabla\xi$$

для H=H(x,y)

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\vec{v}H\right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -g \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} = -g \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$

$$H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t}\right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)$$

$$c = \sqrt{gH}$$

скорость длинных волн

Одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Решение: $$\xi(x, t) = f(x \pm c \cdot t)$$

Волновое уравнение для случая неровного дна

1D

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[c^2(x)\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]$$

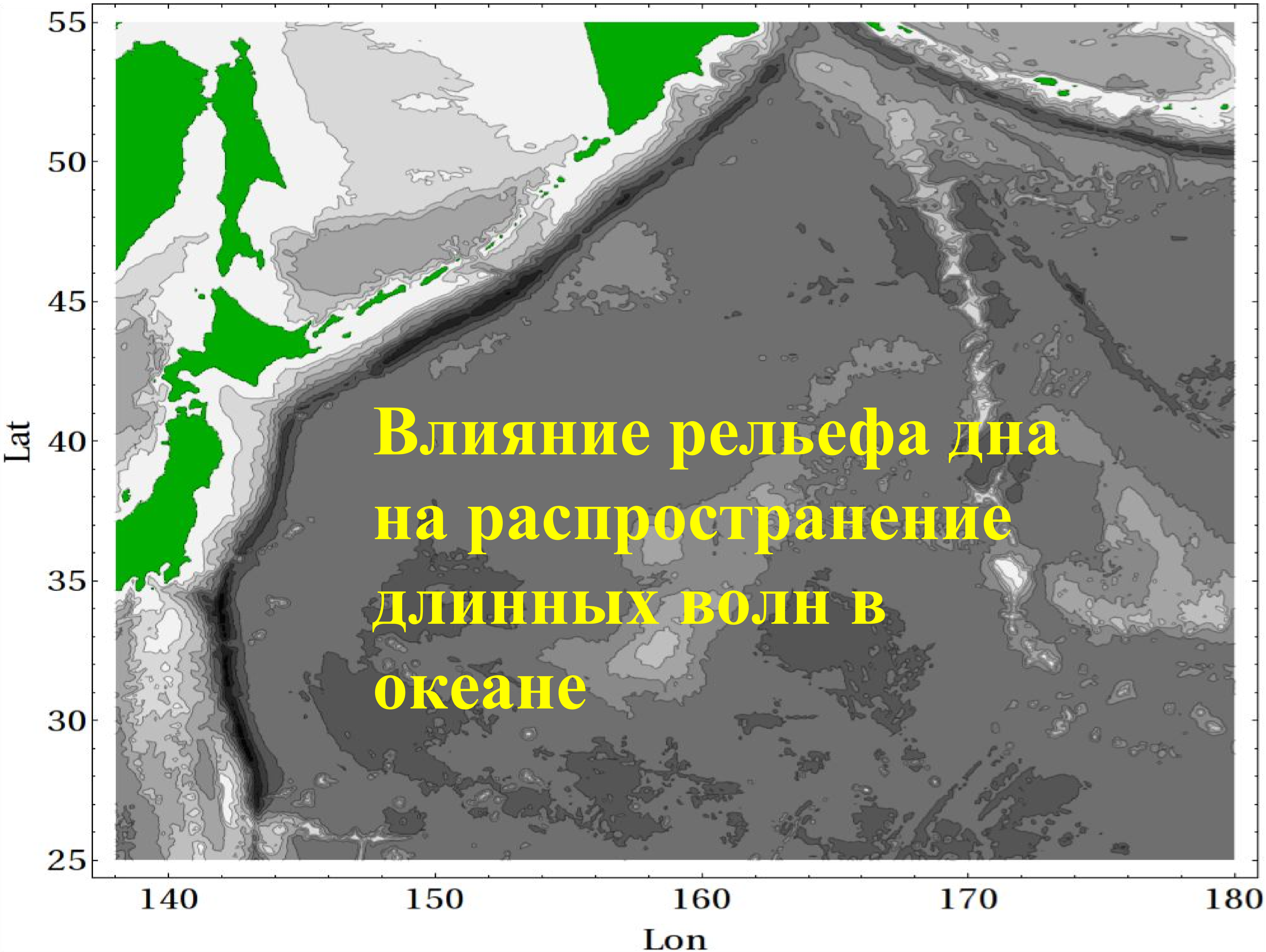
$$c = \sqrt{gH(x)}$$

2D

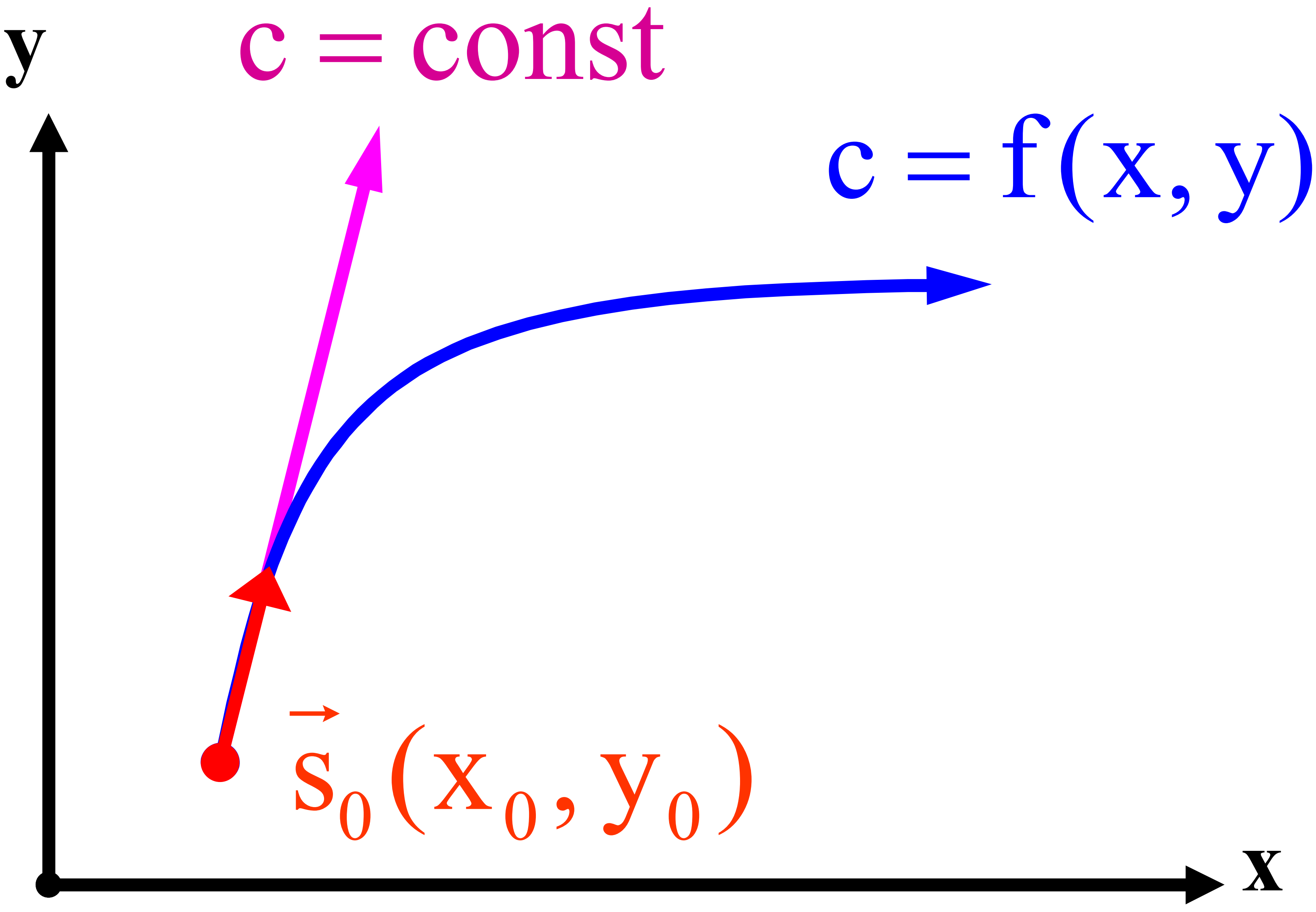
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \operatorname{div}\left[c^2(x, y)\,\operatorname{grad}\xi\right]$$

$$c = \sqrt{gH(x, y)}$$

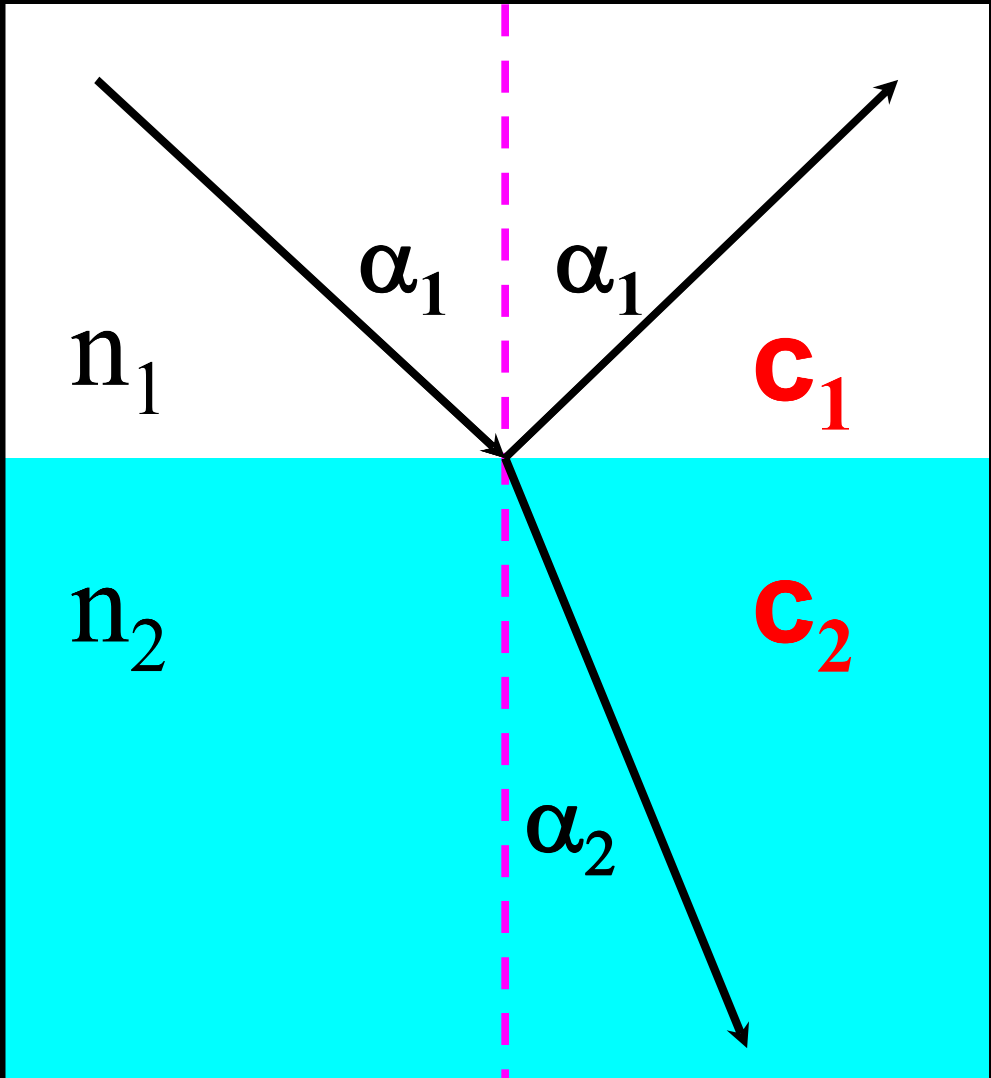
Влияние рельефа дна на распространение длинных волн в океане



Приближение «геометрической оптики»



Закон Снеллиуса



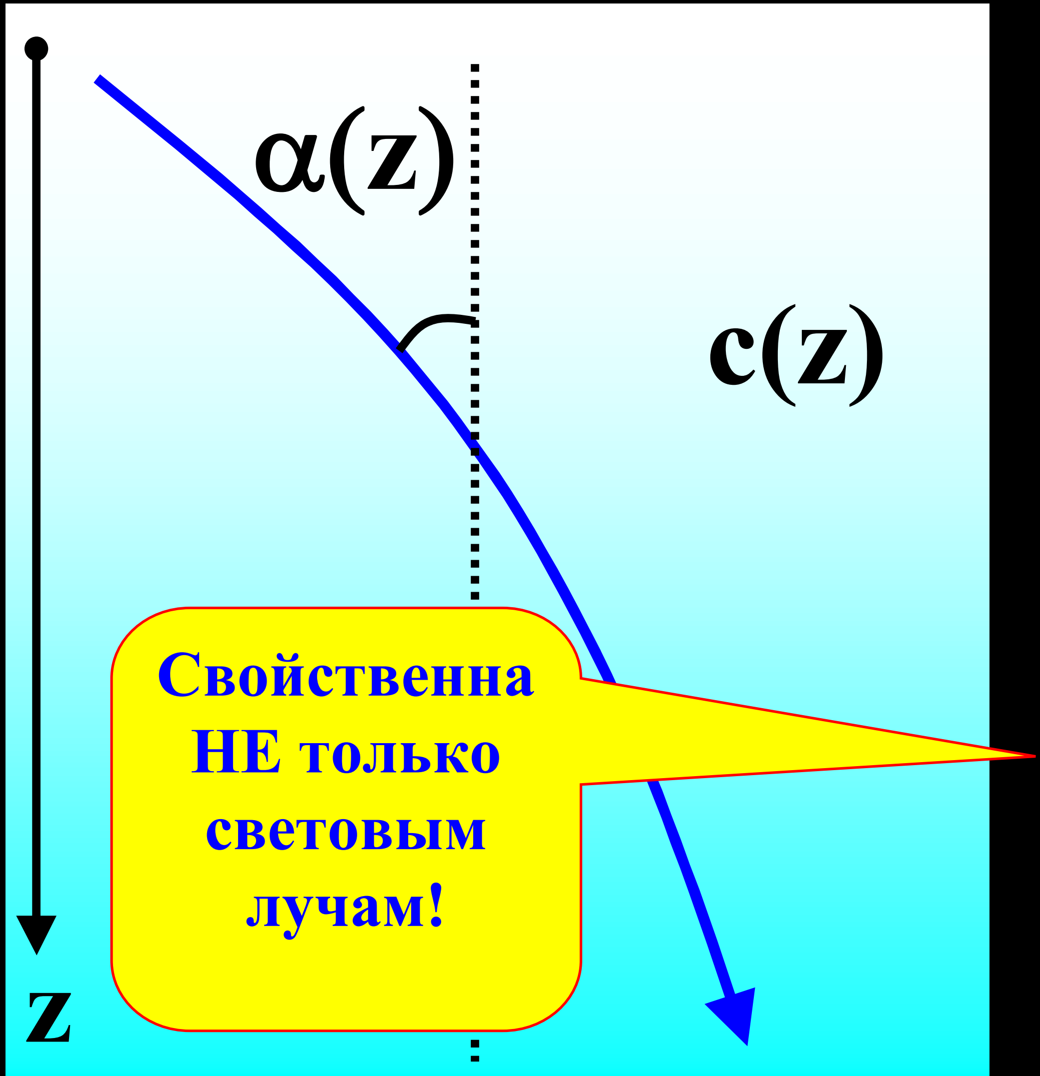
$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$n = c_0 / c$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Рефракция

Закон Снеллиуса

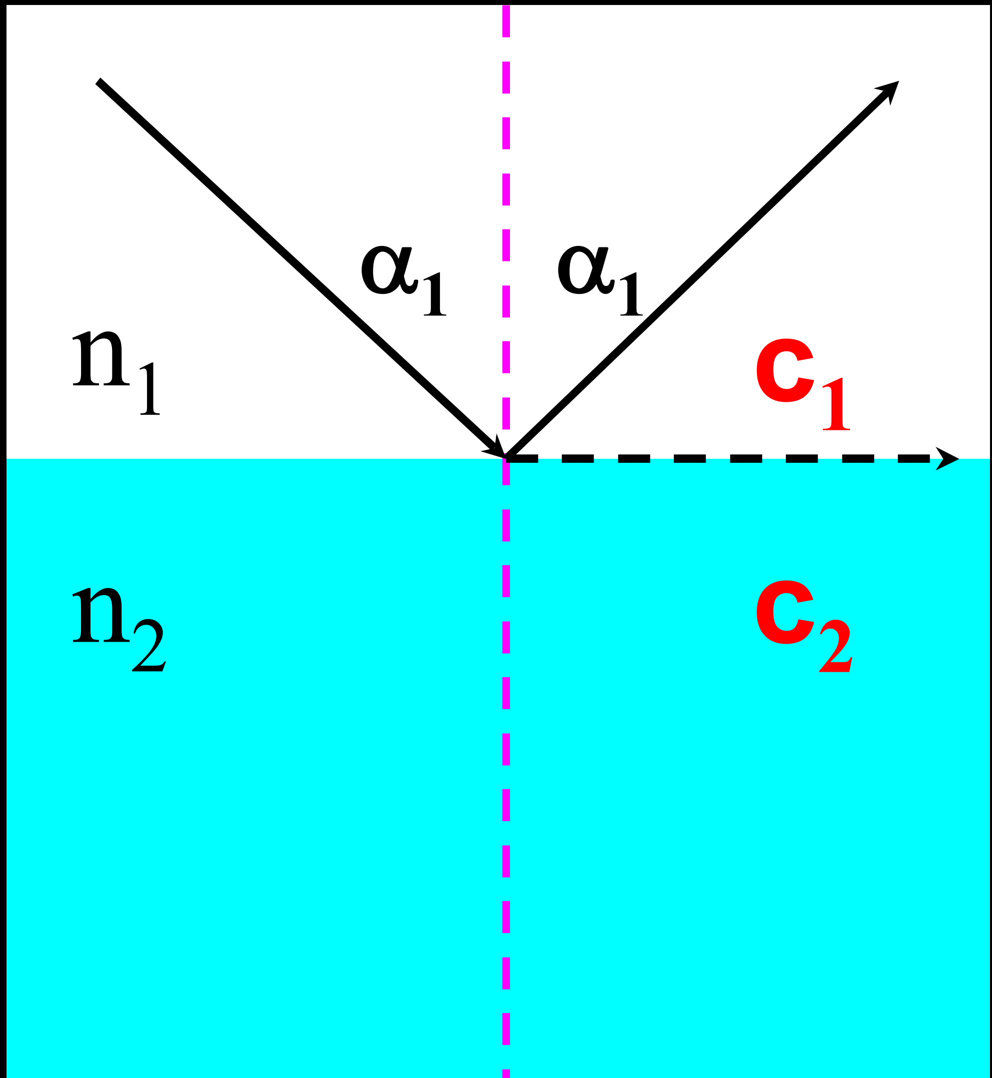


$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{\sin\alpha(z)}{c(z)} = \mathrm{const}$$

Рефракция – изменение направления волновых лучей в среде с (плавно) изменяющейся в пространстве скоростью

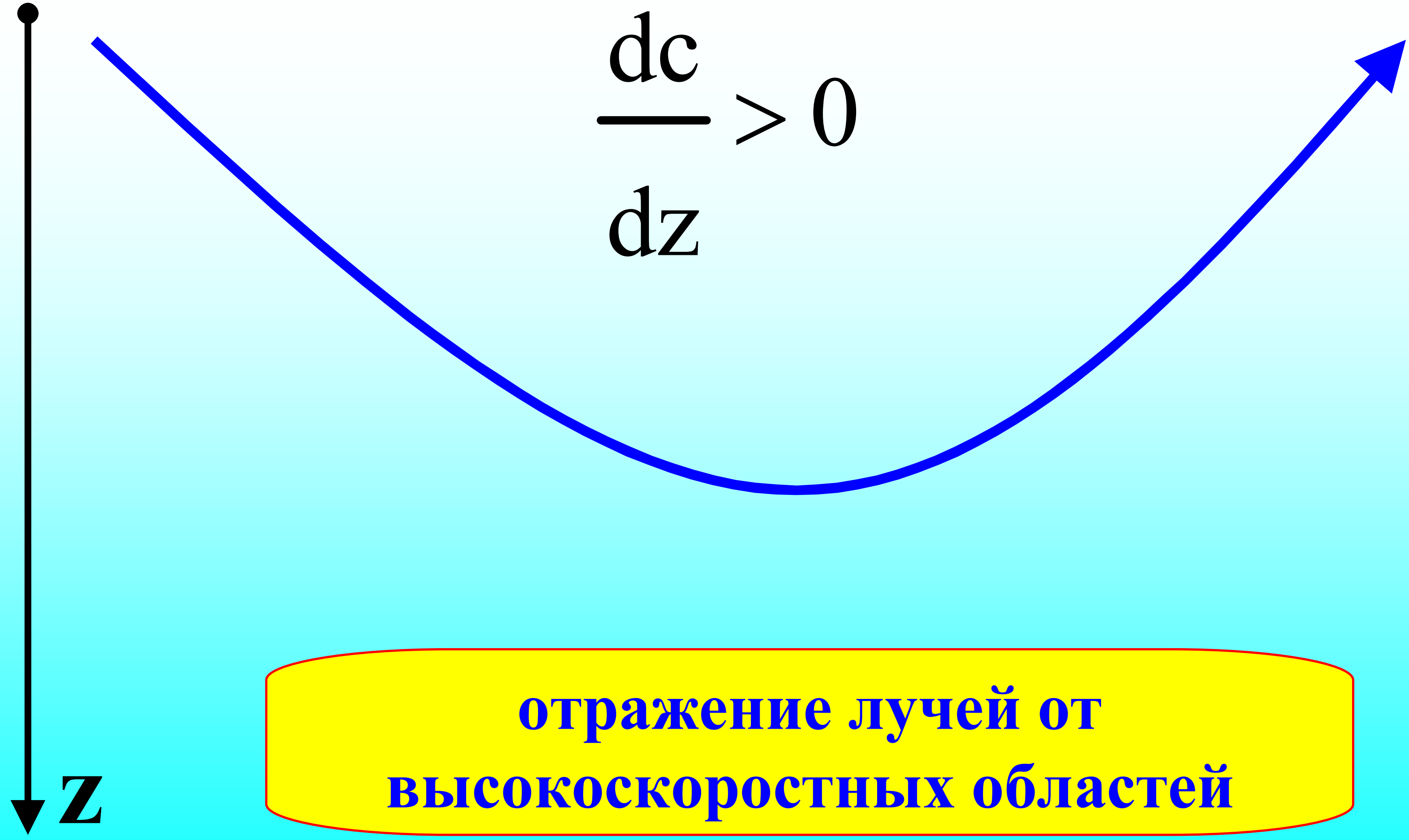
Полное внутреннее отражение



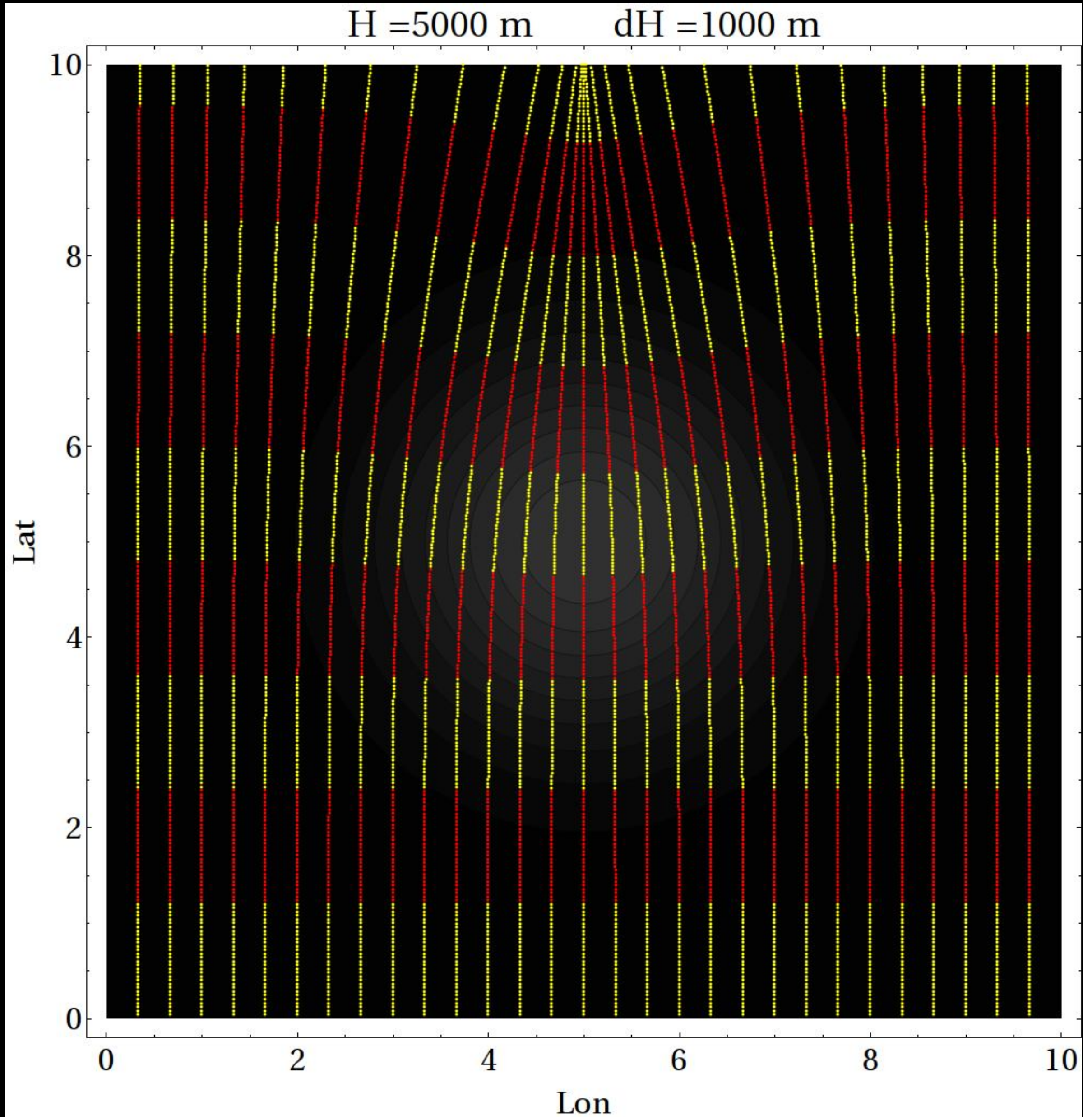
$$n_2 < n_1$$

$$c_2 > c_1$$

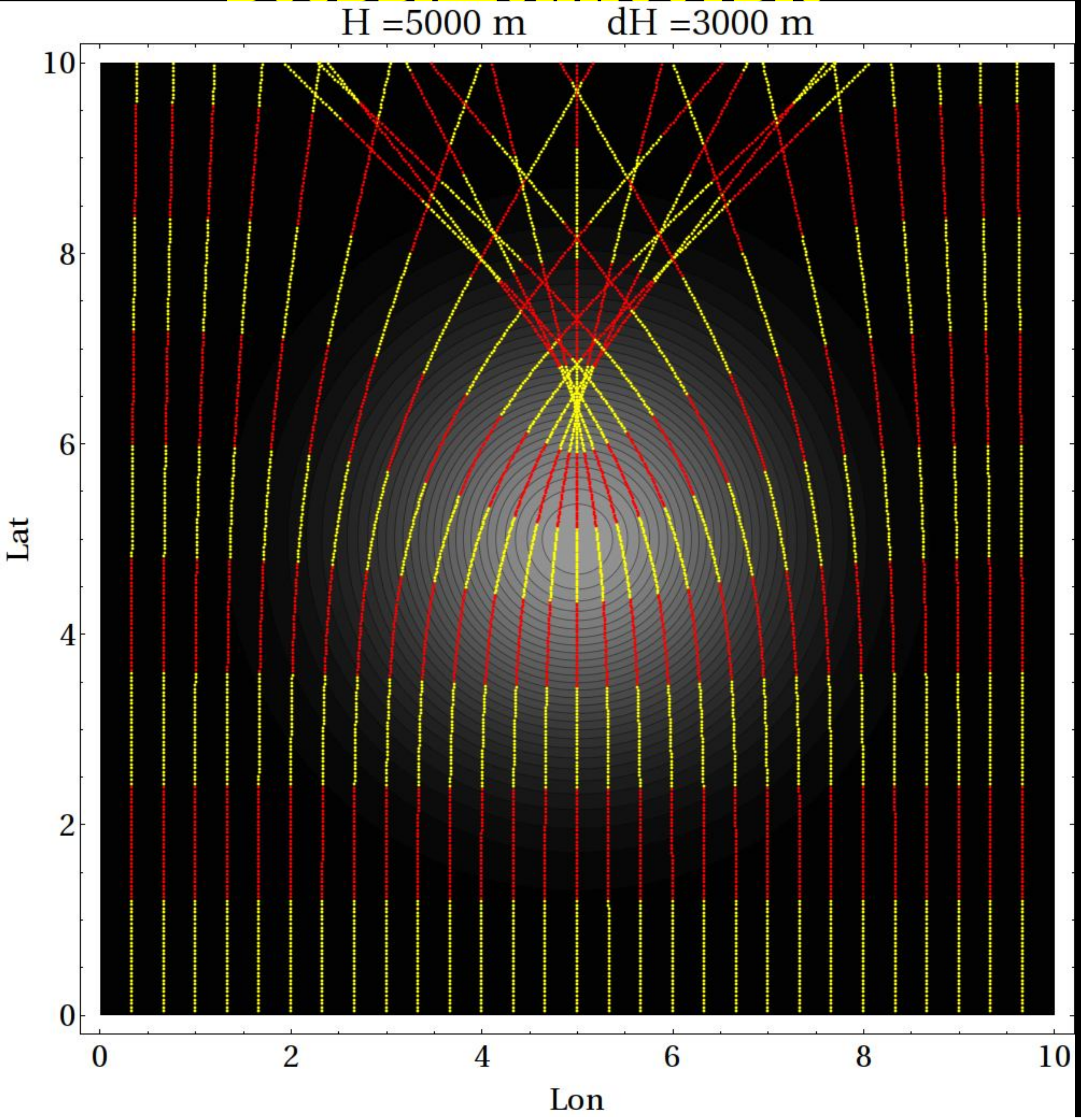
Полное внутреннее отражение



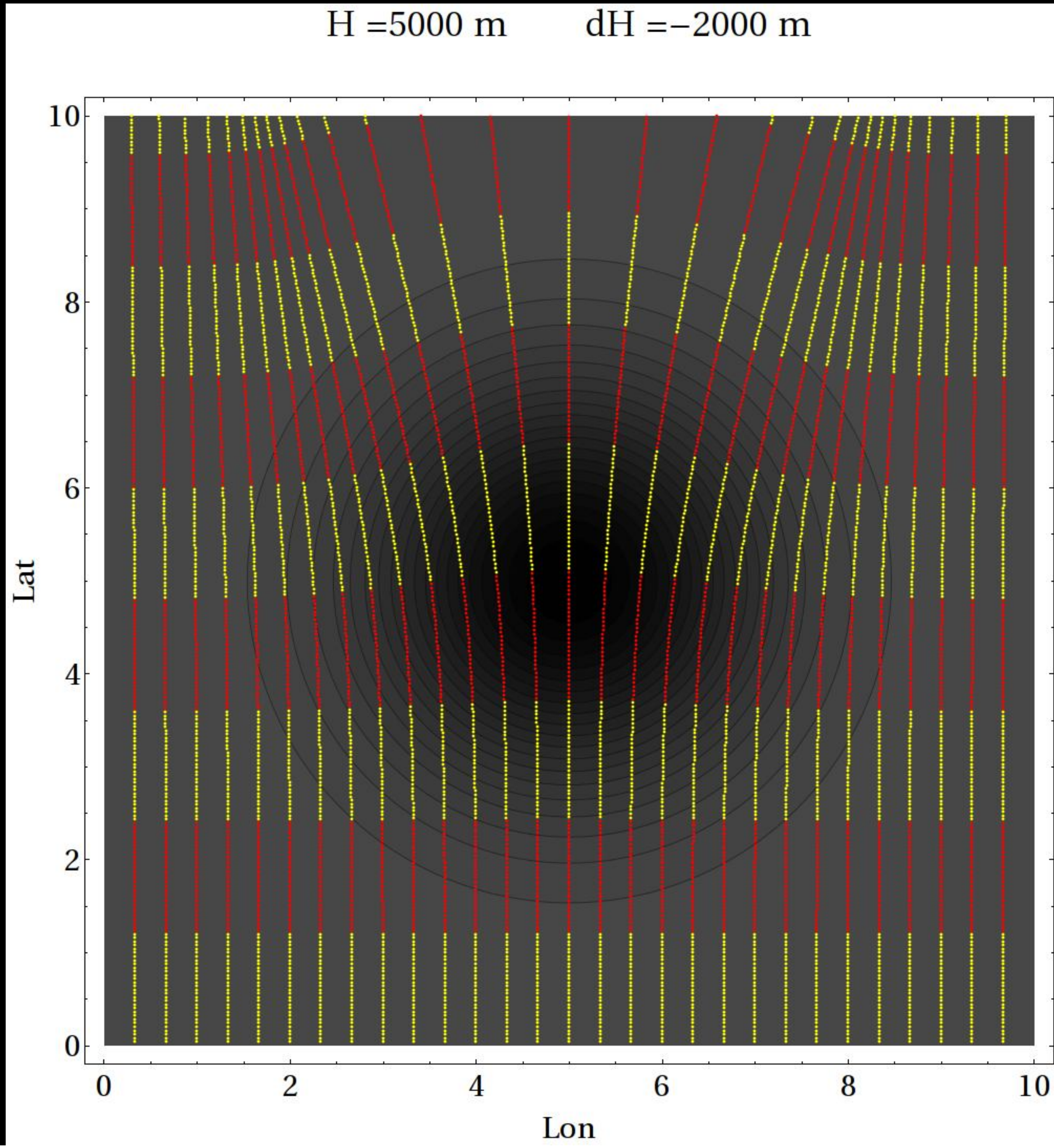
Ход волновых лучей над подводной возвышенностью



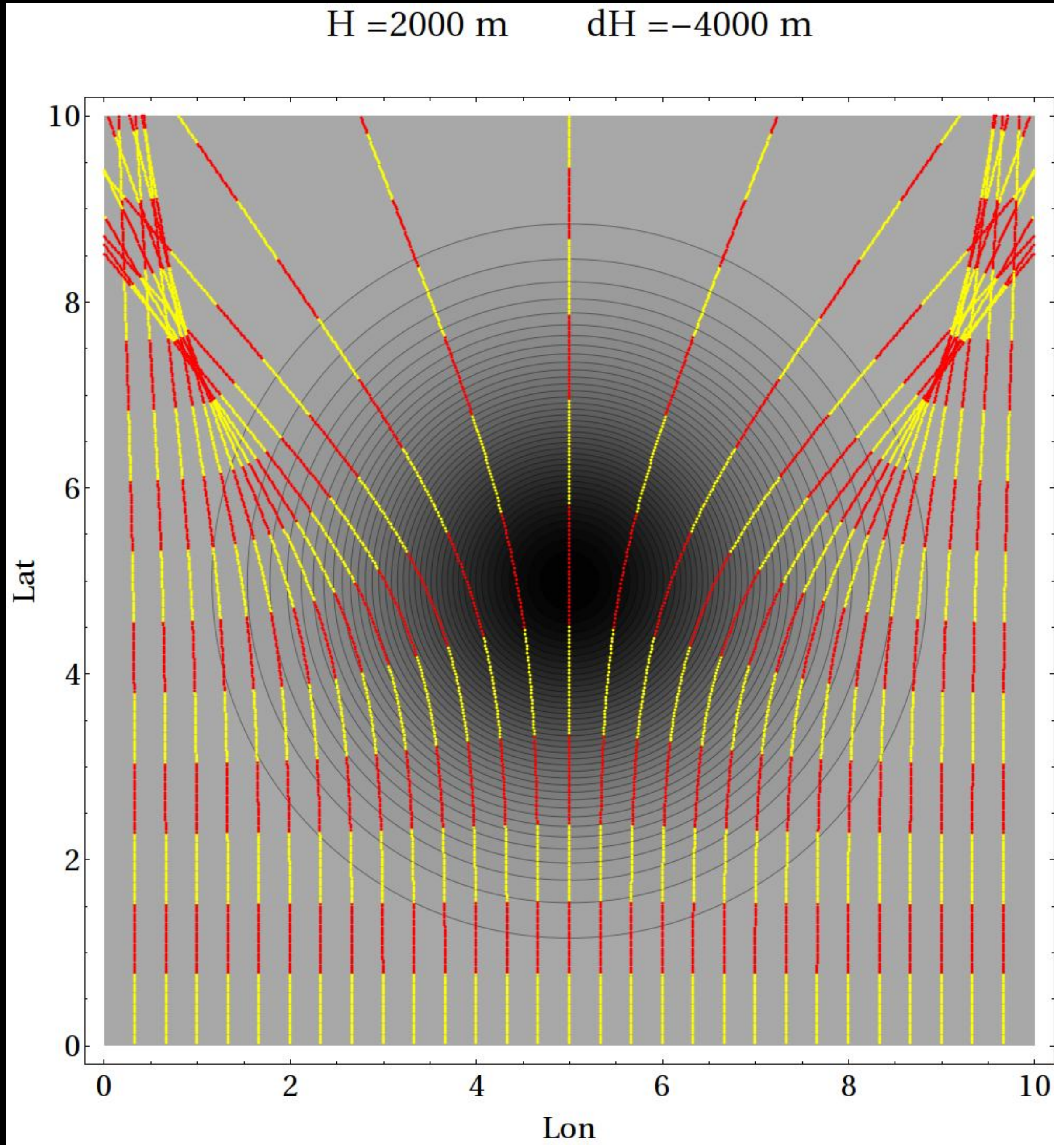
Ход волновых лучей над подводной возвышенностью



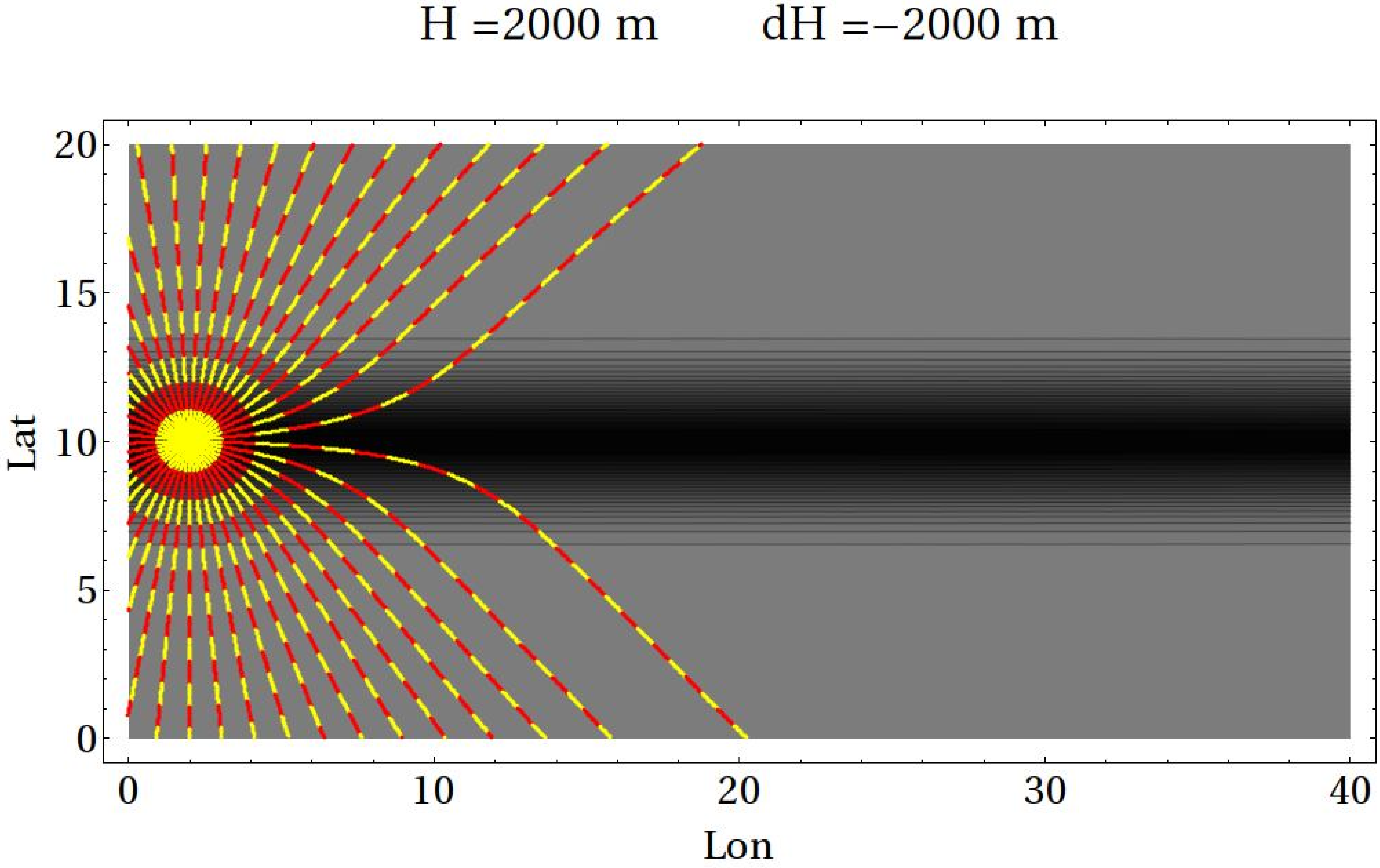
Ход волновых лучей над подводной депрессией



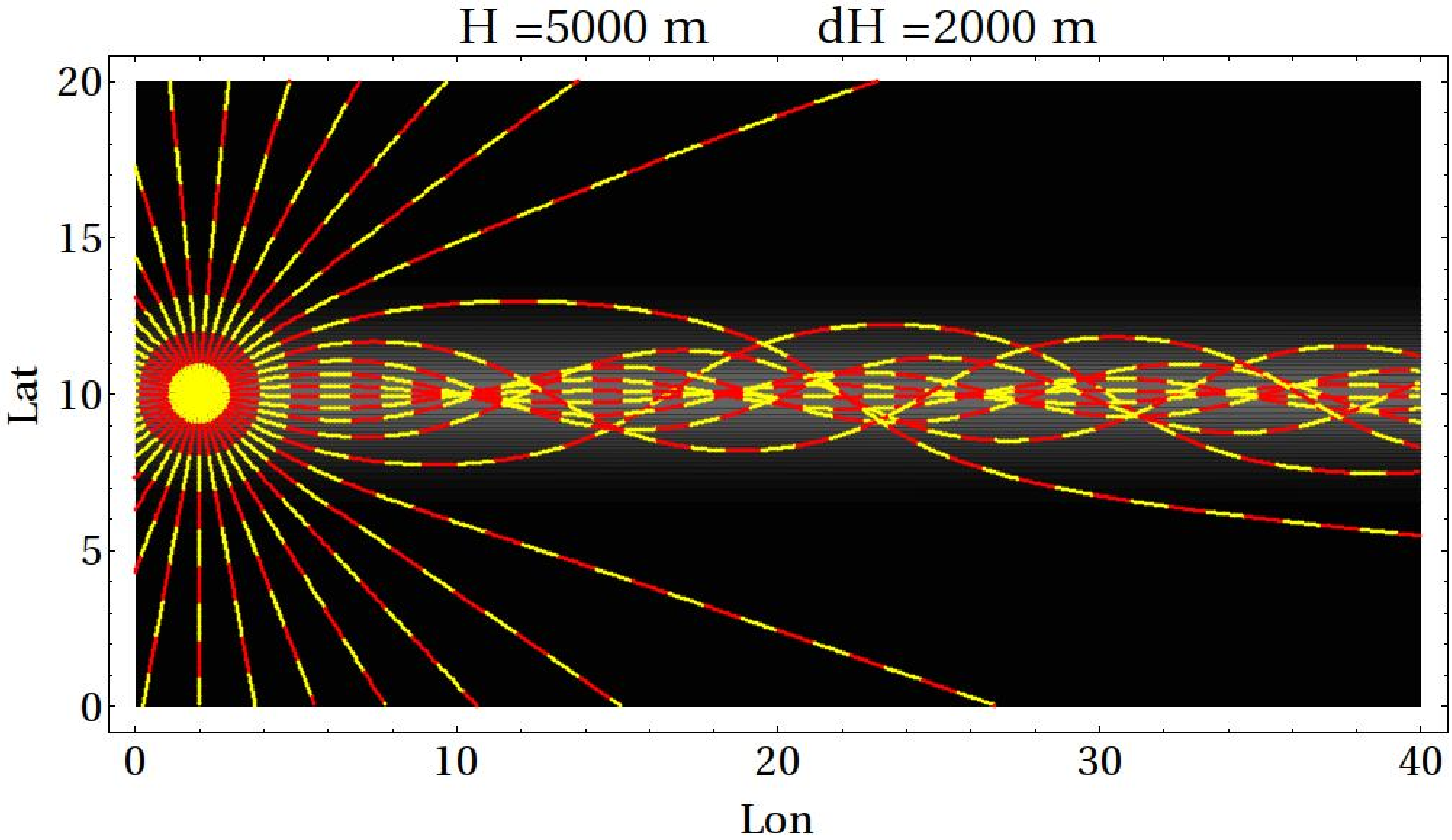
Ход волновых лучей над подводной депрессией



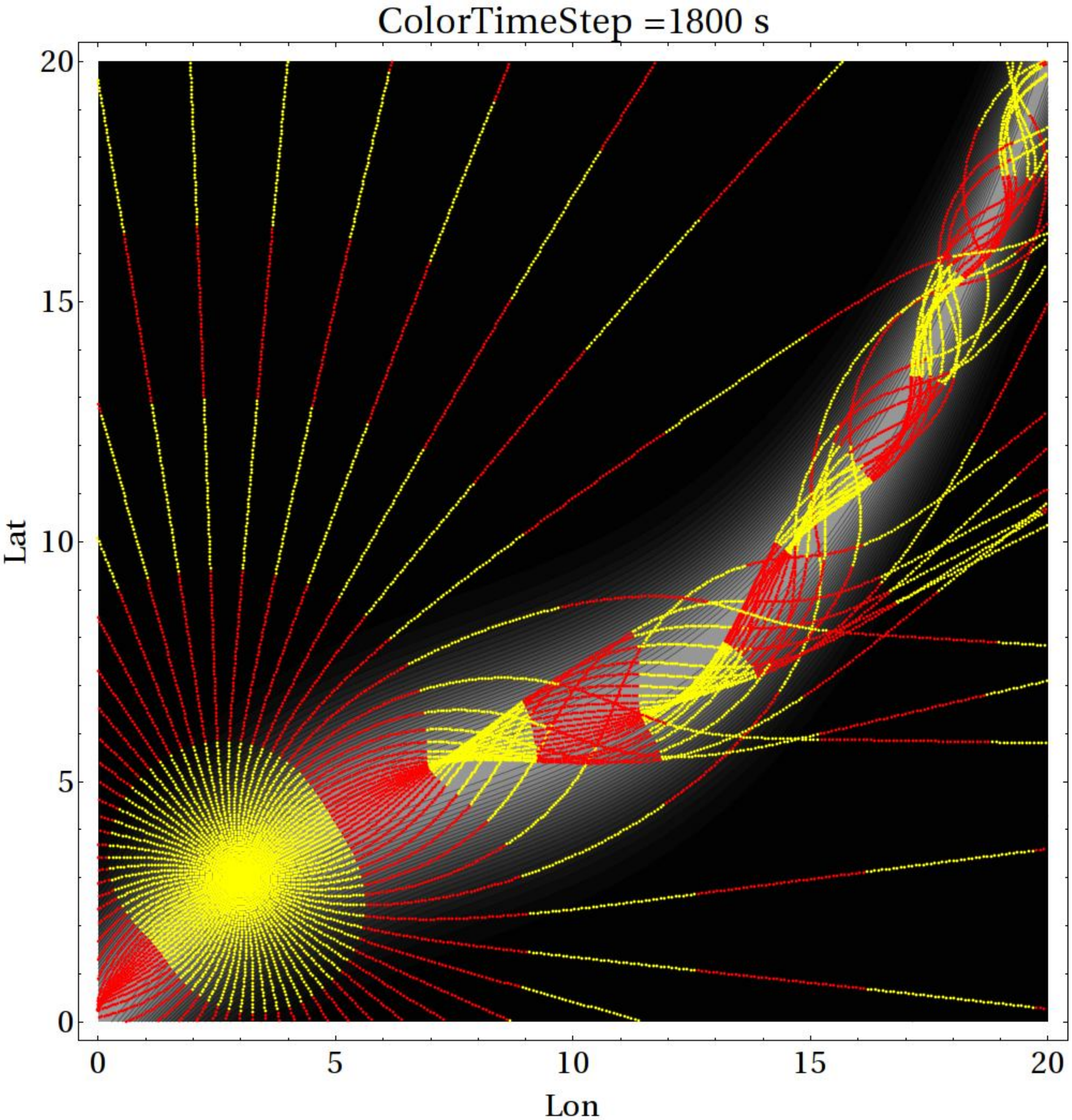
Ход волновых лучей вблизи глубоководного желоба



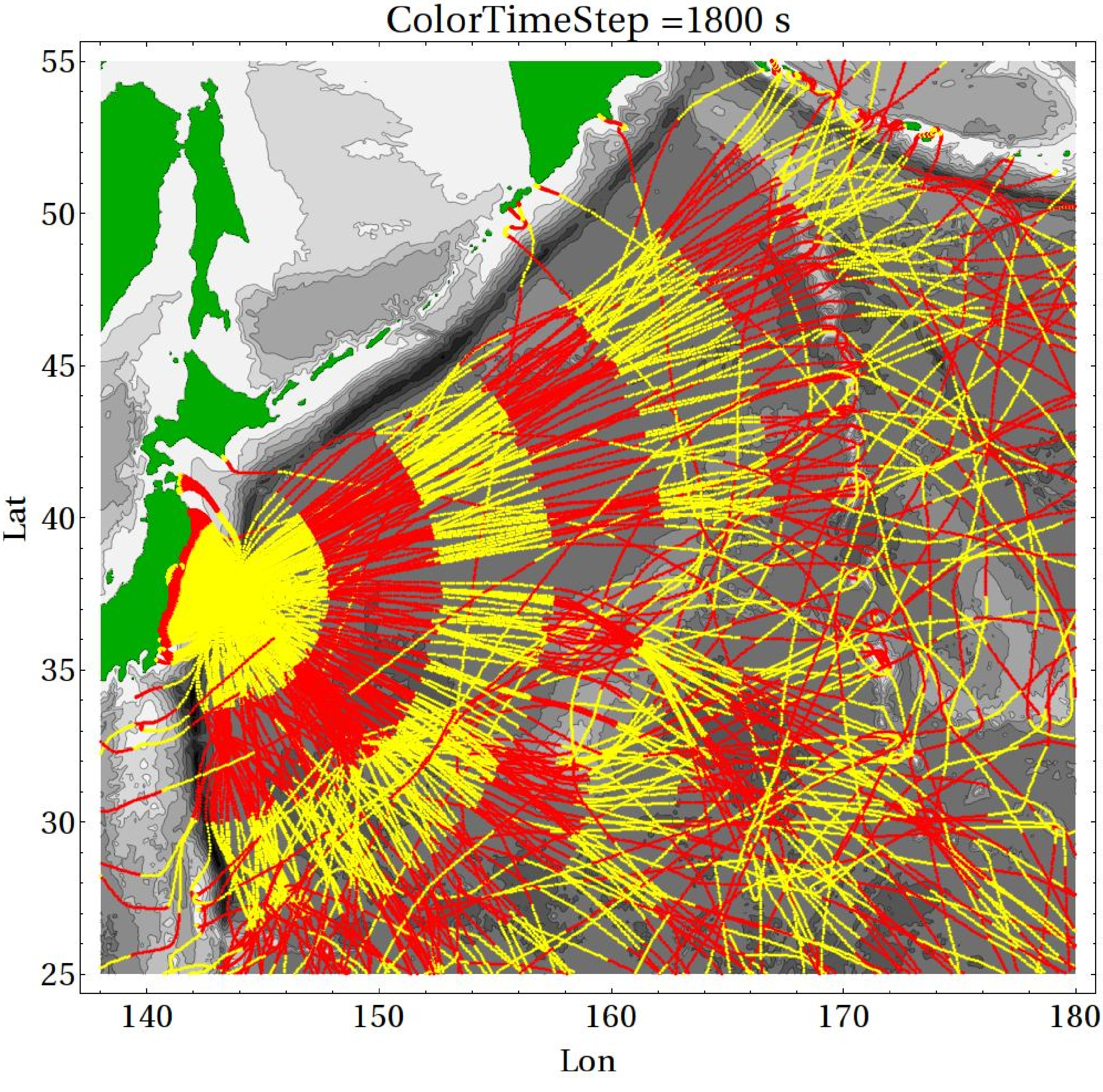
Ход волновых лучей вблизи подводного хребта

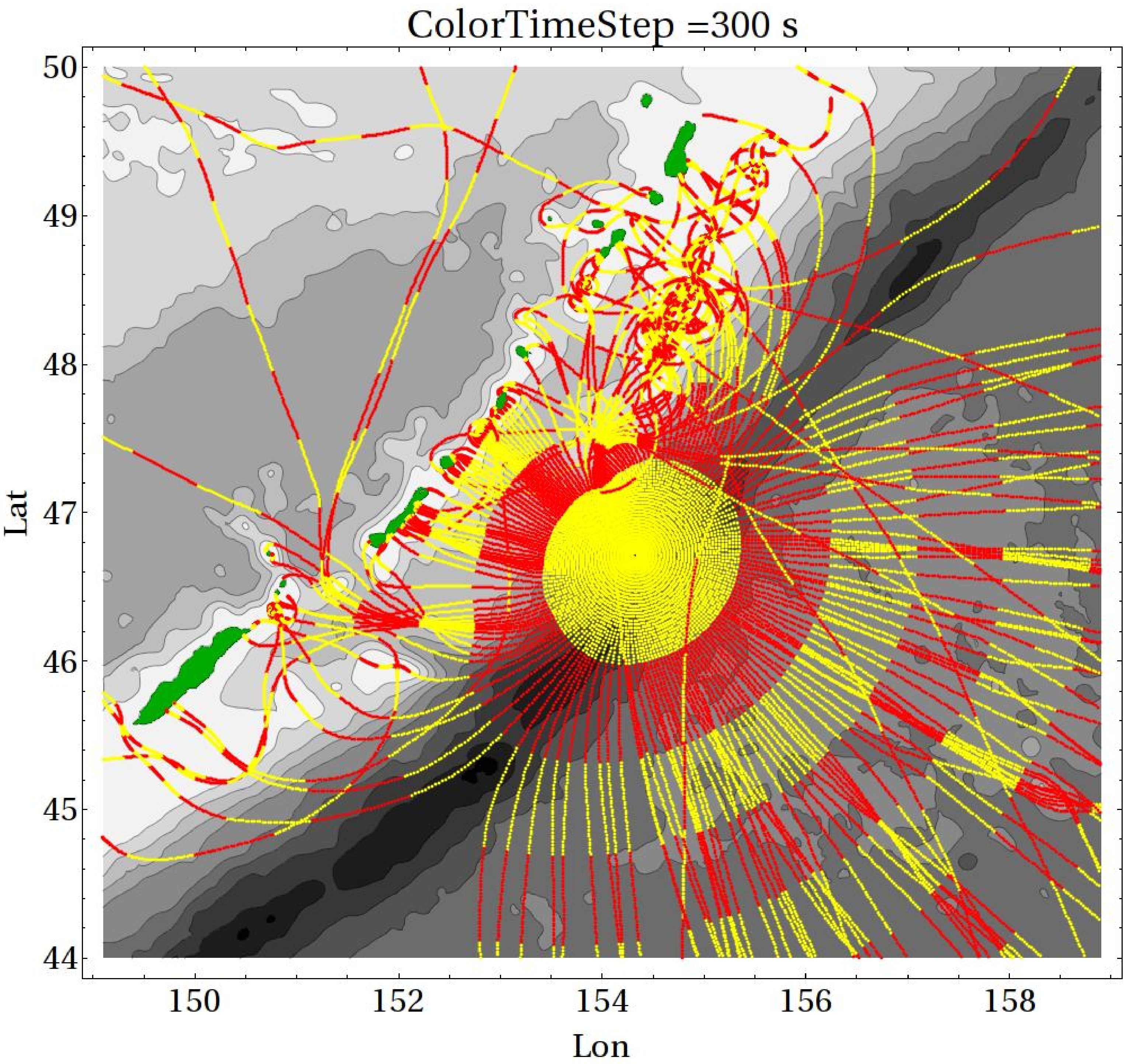


Ход волновых лучей вблизи подводного хребта



Тохоку 11.03.2011




ColorTimeStep =300 s
50
49
48
47
46
45
44
Lat
150
152
154
156
158
Lon

Захват длинных волн шельфом (Babi Island, the 1992 Flores tsunami)

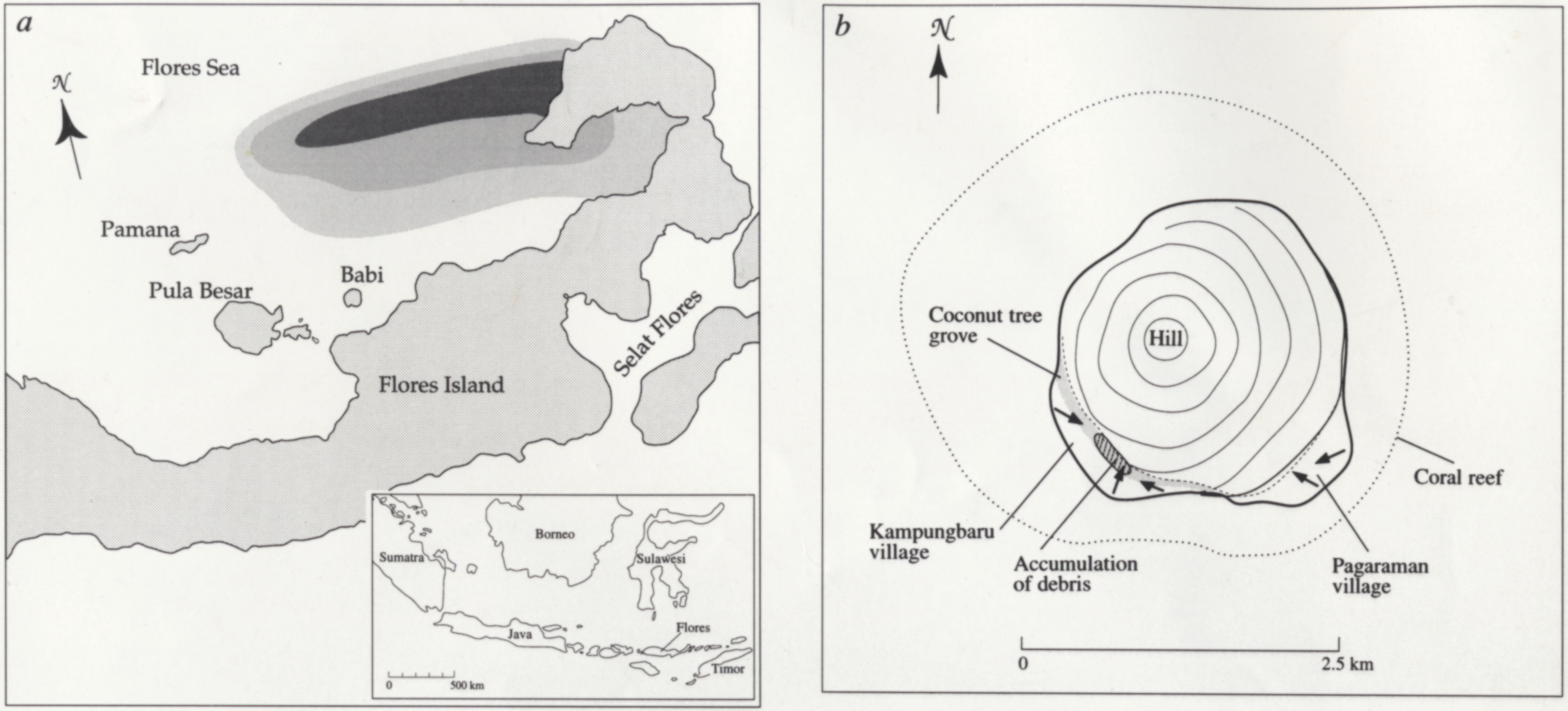


FIG. 1 *a*, Babi Island is located ~5 km offshore from Flores Island, Indonesia. Although detailed sea bottom sounding data are not available, the underwater slope from the island is steep: the 100-m-deep contour around the island is very close to the shore, one sounding in the narrow gap between Babi and Flores is 241 m deep, and the 860-m sounding point in the Flores Sea is 10 km from the island. The shaded areas in the Flores Sea, which represent 3-m, 2-m and 1-m contours, respectively, are estimated vertical tectonic displacement of sea floor where tsunamis were generated[10]. *b*, Details of Babi Island. Near the middle of the south shore, there is a small tidal flat which separates Kampungbaru village (on the west side) from Pagaraman village (on the east side). Both villages were completely destroyed by the tsunamis. The tsunami run-up directions, indicated by solid arrow marks, were estimated from the directions of tree falls and debris accumulations (based on field notes taken by H.Y. and F. Imamura during the survey in 1992–93). The maximum tsunami run-up heights are 5.6 m in Pagaraman and 7.1 m in Kampungbaru, respectively.

from H.Yeh et al, 1994

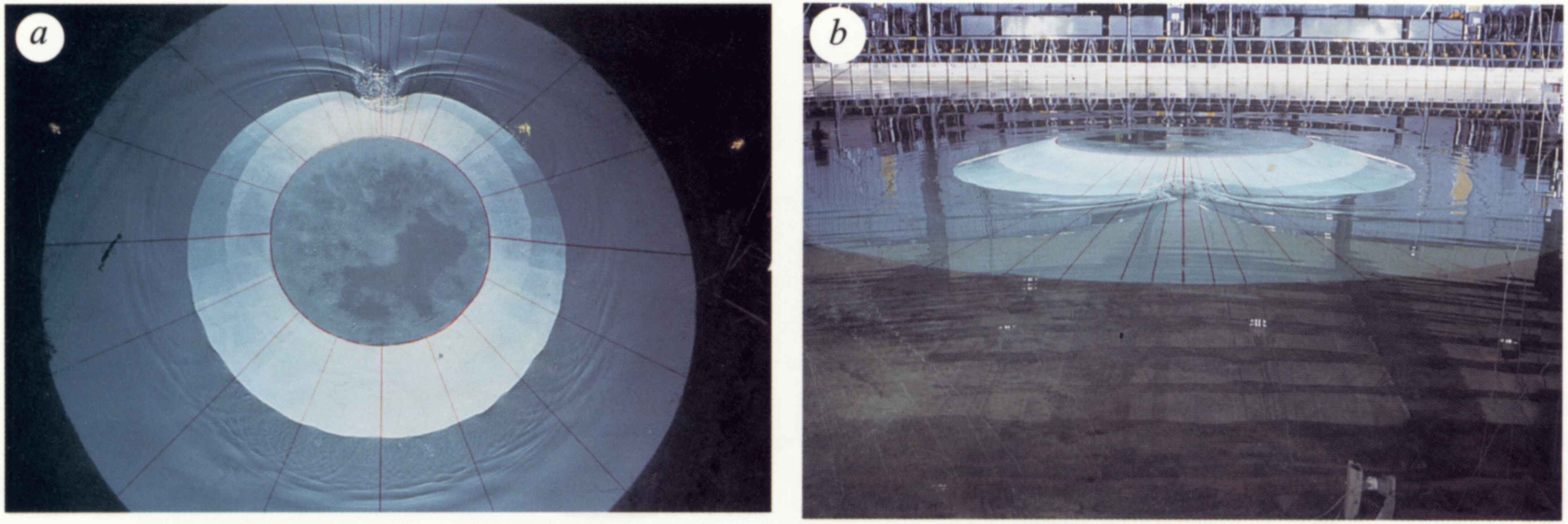
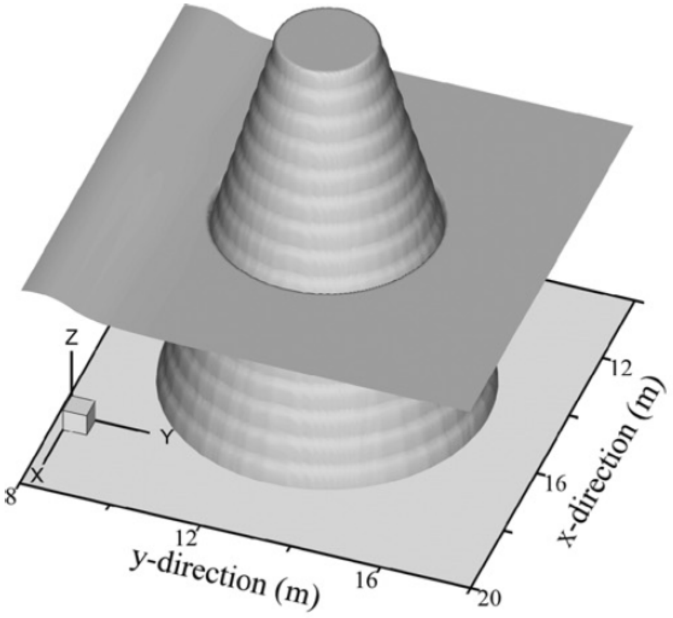
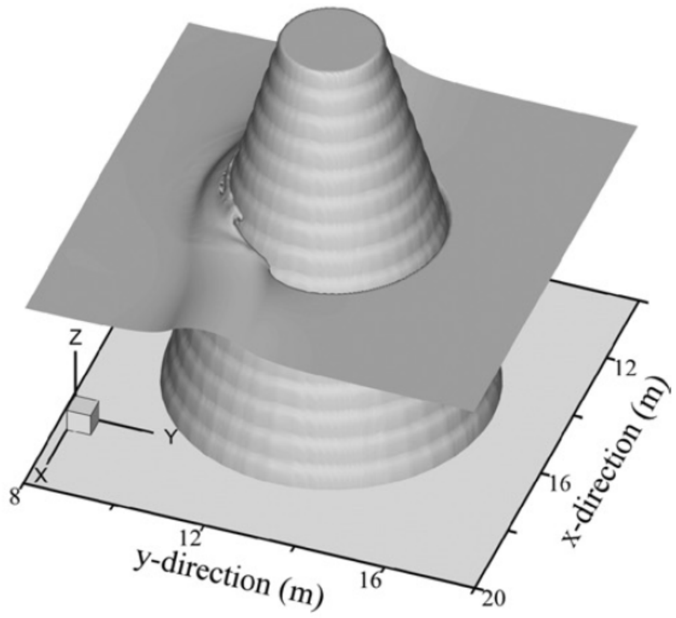


FIG. 3 Views of wave run-up onto the rear side of the cone-shaped island in the laboratory model. *a*, Top view; the wave struck the island from the bottom of the photograph. *b*, Wave paddles are visible beyond the island. To generate a solitary wave in a precisely controlled manner, the hydraulic powered electro-servo system was used to set the vertical paddles in motion in the horizontal direction.

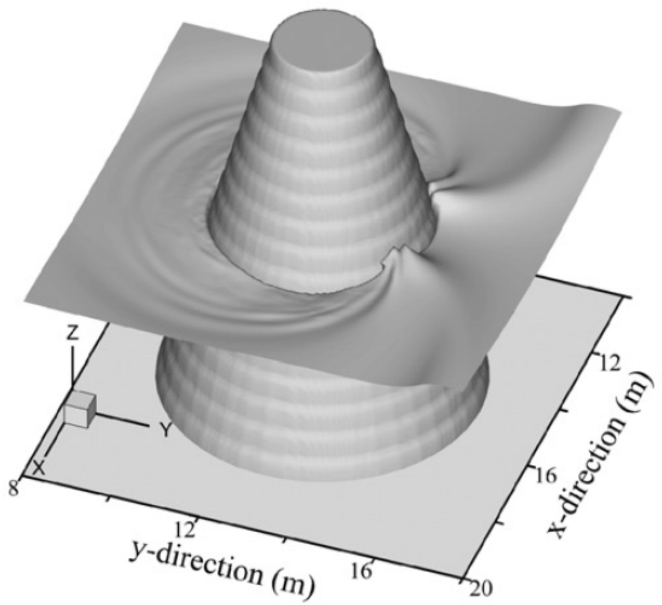
from H.Yeh et al, 1994



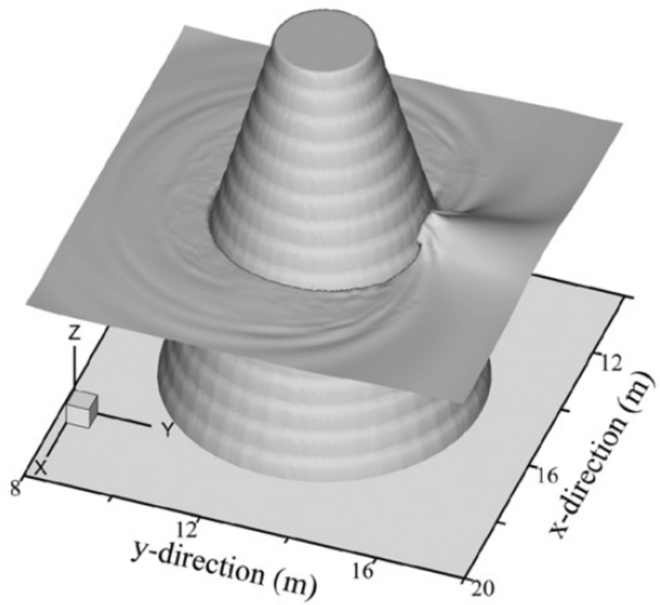
(a) t = 7.0 sec



(b) t = 9.0 sec



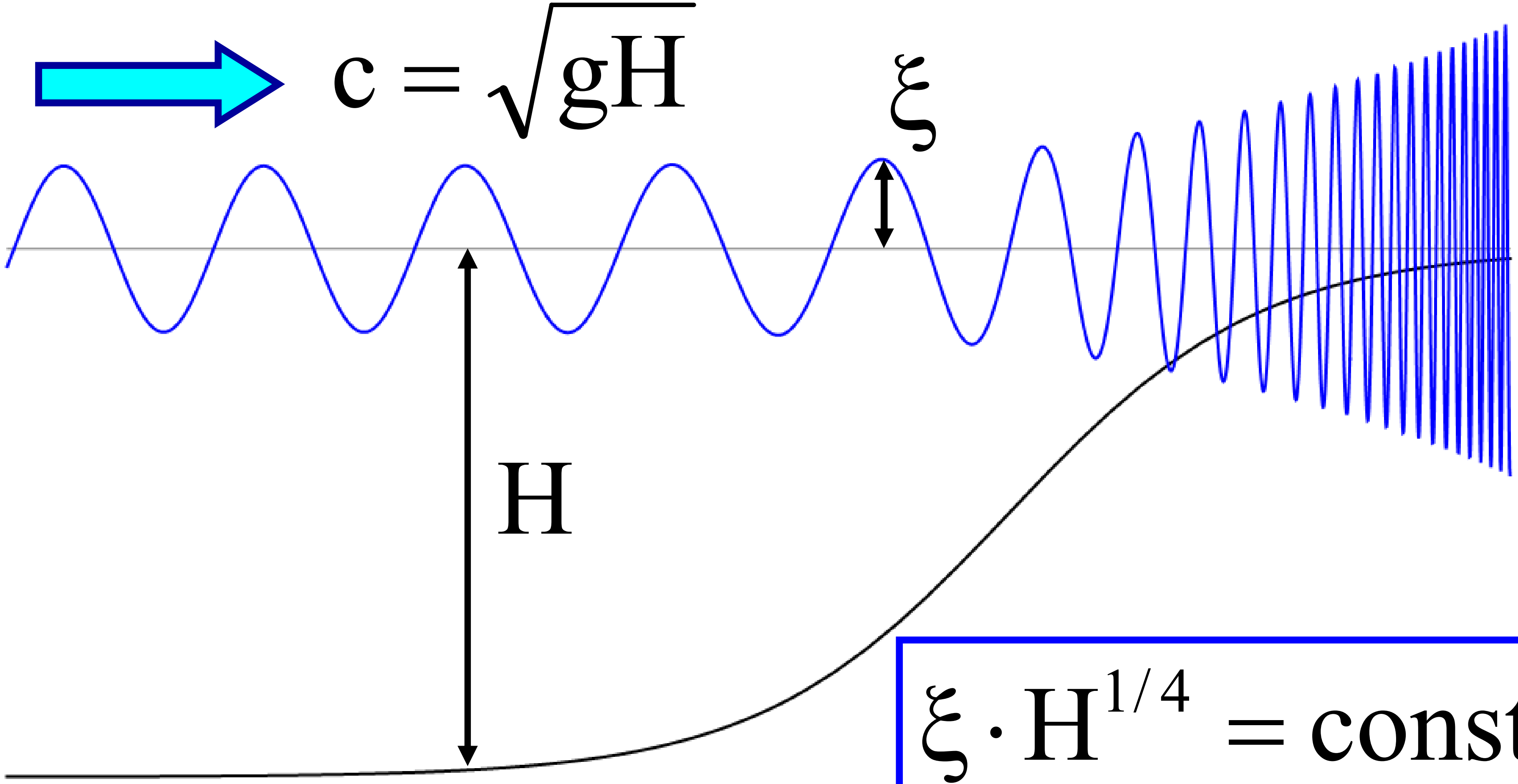
(c) t = 12.0 sec



(d) t = 13.0 sec

Закон Грина (закон "1/4")

$$W \sim \xi^2 \qquad Q \sim \xi^2 c \sim \xi^2 \sqrt{H} = \text{const}$$



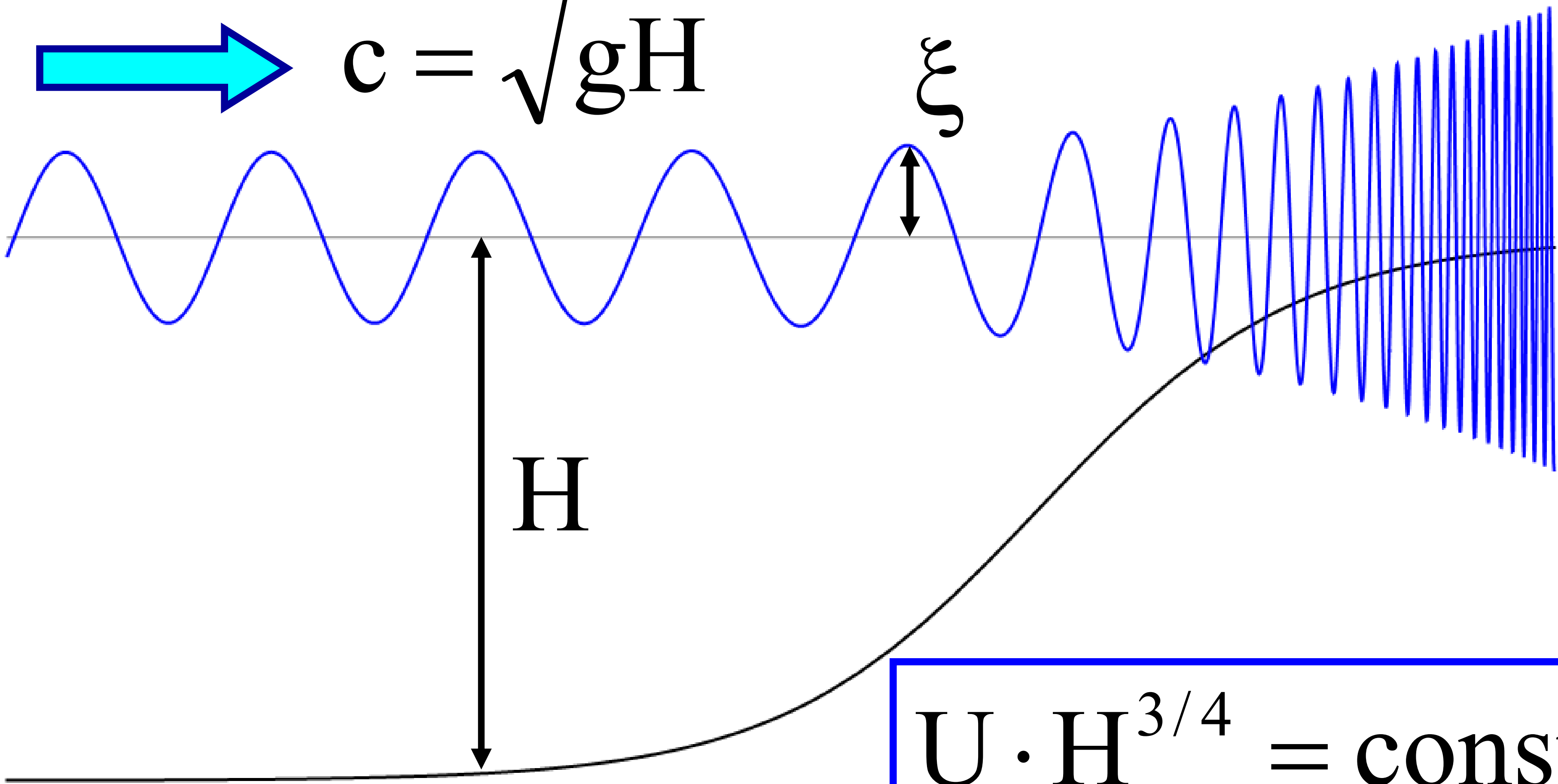
$$\boxed{\xi \cdot H^{1/4} = \text{const}}$$

Закон для скорости течения (закон «3/4")

$$W \sim U^2 H$$

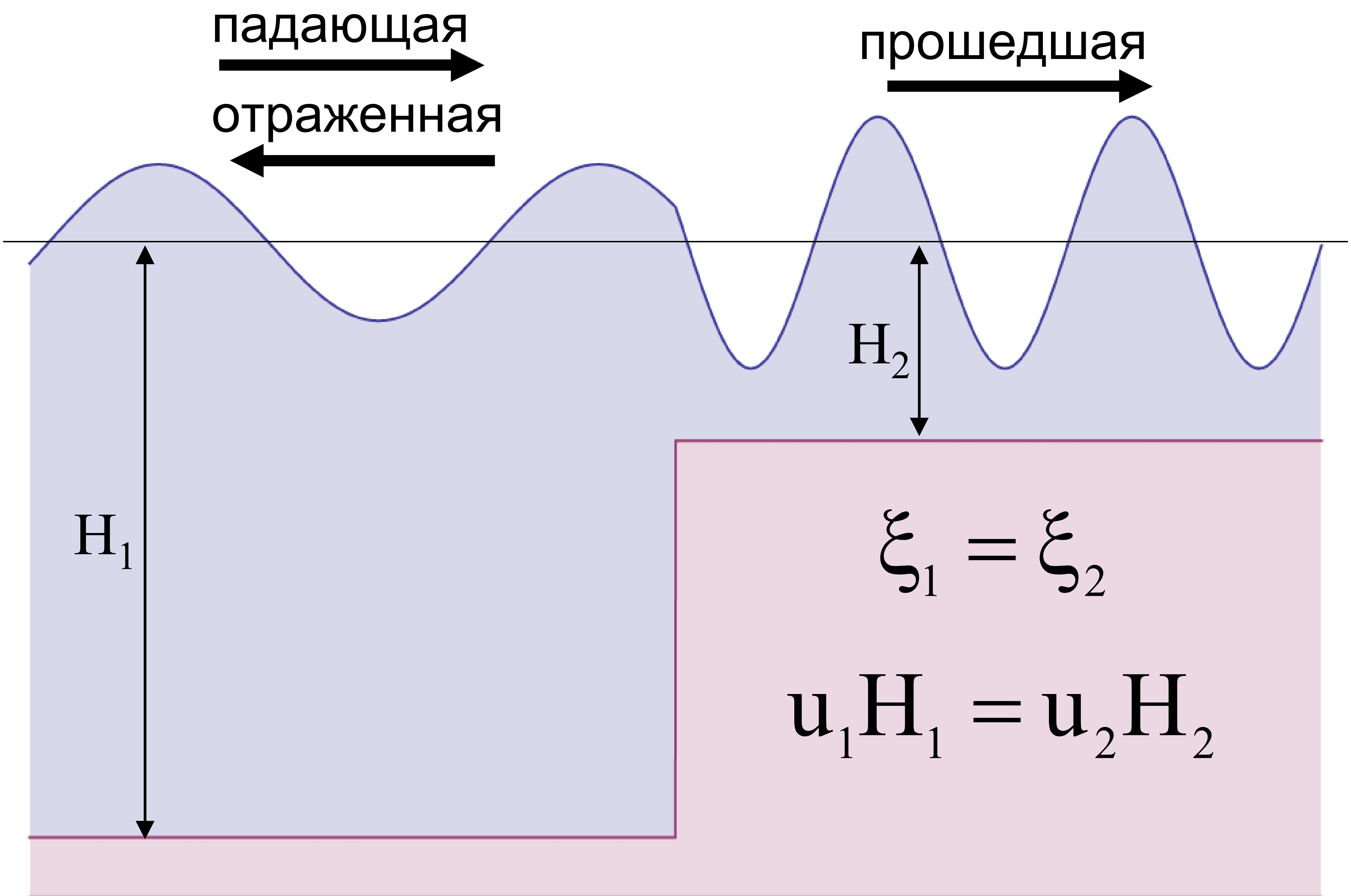
$$Q \sim U^2 H c \sim U^2 H^{3/2} = \mathrm{const}$$

$$c = \sqrt{gH}$$



$$\boxed{U \cdot H^{3/4} = \mathrm{const}}$$

Взаимодействие волны со ступенькой



$$\xi_1 = \xi_2$$

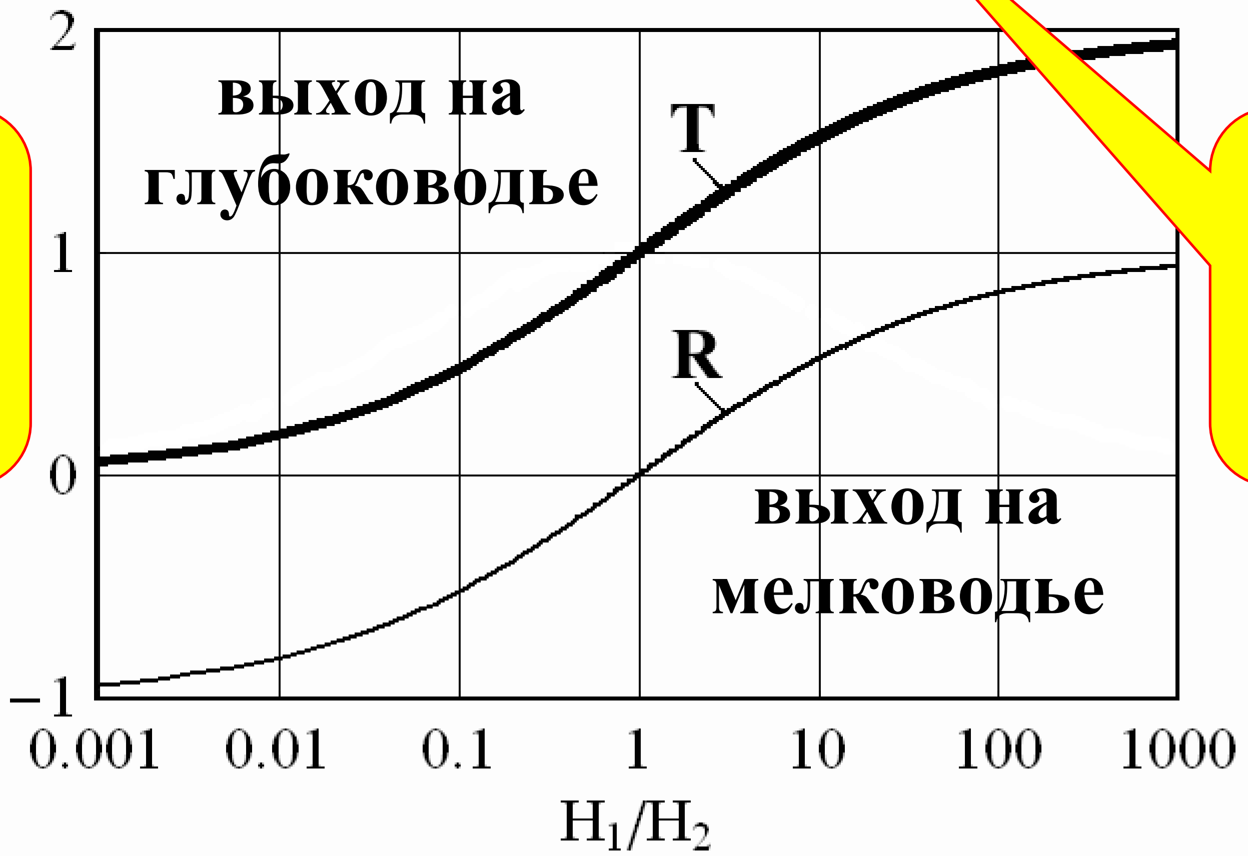
$$u_1 H_1 = u_2 H_2$$

Амплитудные коэффициенты отражения и прохождения при падении волны на ступеньку

$$R = \frac{\sqrt{H_1 / H_2} - 1}{\sqrt{H_1 / H_2} + 1}$$

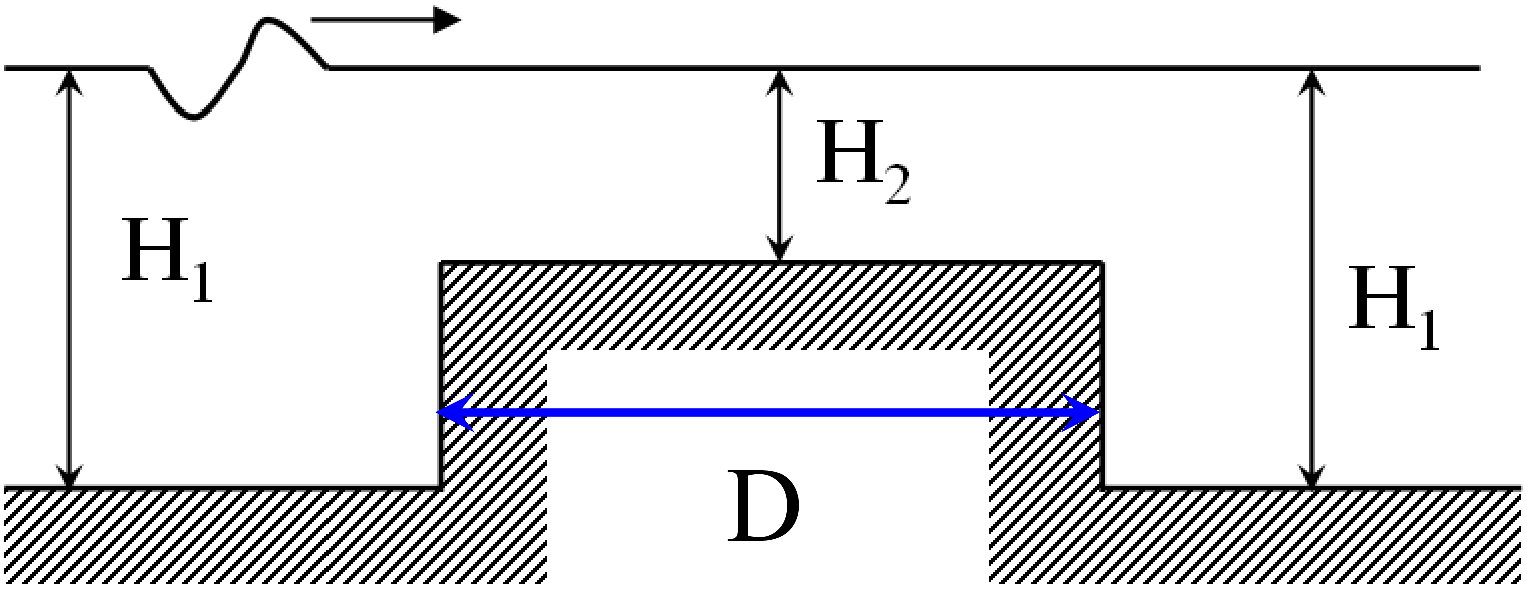
$$T = \frac{2\sqrt{H_1 / H_2}}{\sqrt{H_1 / H_2} + 1}$$

отношение амплитуд отраженной и падающей волн



отношение амплитуд прошедшей и падающей волн

Взаимодействие волны с прямоугольным препятствием



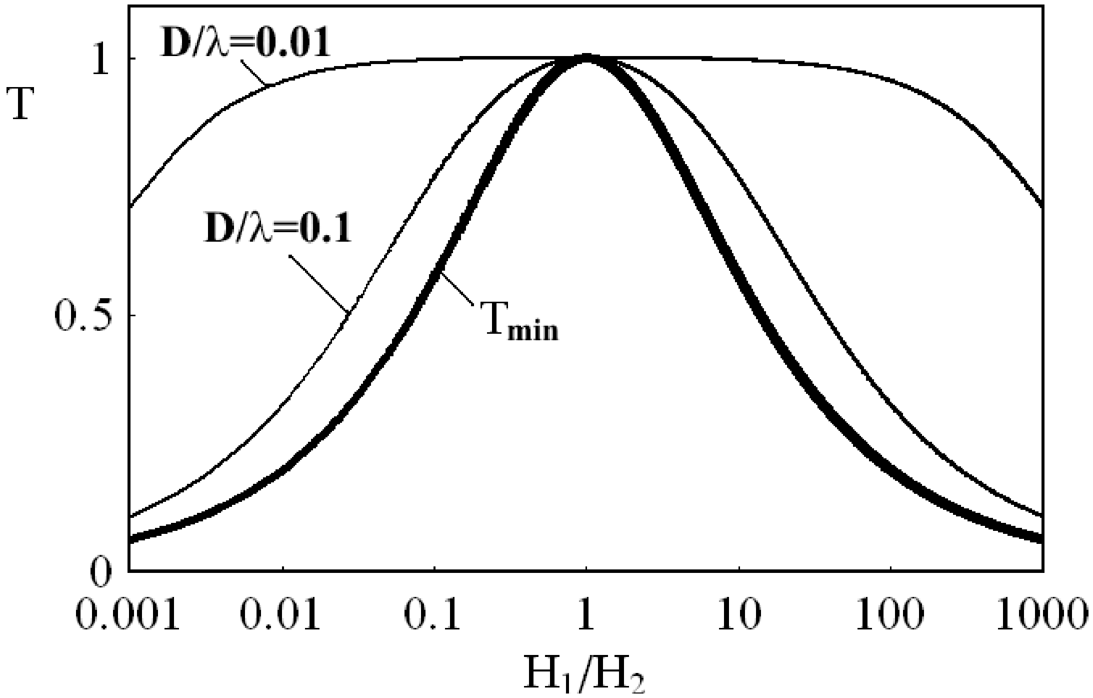
Амплитудный коэффициент прохождения при взаимодействии волны с препятствием

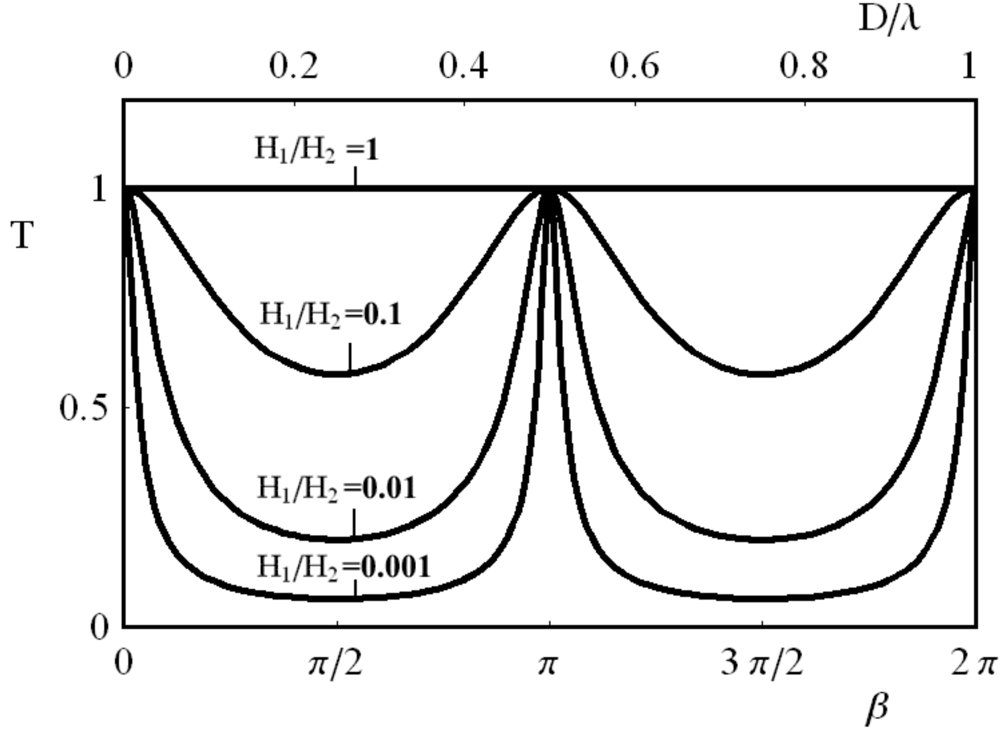
$$T = \frac{T_{min}}{\sqrt{T_{min}^{\;2} \cos^2\beta + \sin^2\beta}}$$

$$T_{min} = \frac{2\sqrt{H_1 / H_2}}{1 + H_1 / H_2}$$

$\beta = k_2 D$ - разница фаз между границами препятствия

k_2 - волновое число над препятствием


D/λ=0.01
D/λ=0.1
T_{min}
T
1
0.5
0
0.001
0.01
0.1
1
10
100
1000
H_1/H_2


D/λ
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
H_1/H_2 =1
H_1/H_2=0.1
H_1/H_2=0.01
H_1/H_2=0.001
T
1
0.5
0
0
π/2
π
3 π/2
2 π
β

Амплитудный коэффициент прохождения при взаимодействии волны с мелкомасштабным препятствием

$$\alpha = \frac{H_1 - H_2}{H_1} \qquad \beta = k_2 D = \frac{2\pi}{\lambda} D$$

при условии

$\alpha << 1$ и $\beta << 1$

$$T \approx 1 - \frac{(\alpha\beta)^2}{8}$$

уменьшение коэффициента прохождения пропорционально квадрату площади препятствия

Амплитудный коэффициент прохождения при взаимодействии волны с мелкомасштабным препятствием

$$\alpha = \frac{H_1 - H_2}{H_1} \qquad \beta = k_2 D = \frac{2\pi}{\lambda} D$$

при условии

$$\alpha \ll 1 \text{ и } \beta \ll 1$$

$$\boxed{H_1 = 4500 \text{ м}} \quad \boxed{H_2 = 4000 \text{ м}} \quad \boxed{D = 5 \text{ км}} \quad \boxed{\lambda = 100 \text{ км}}$$

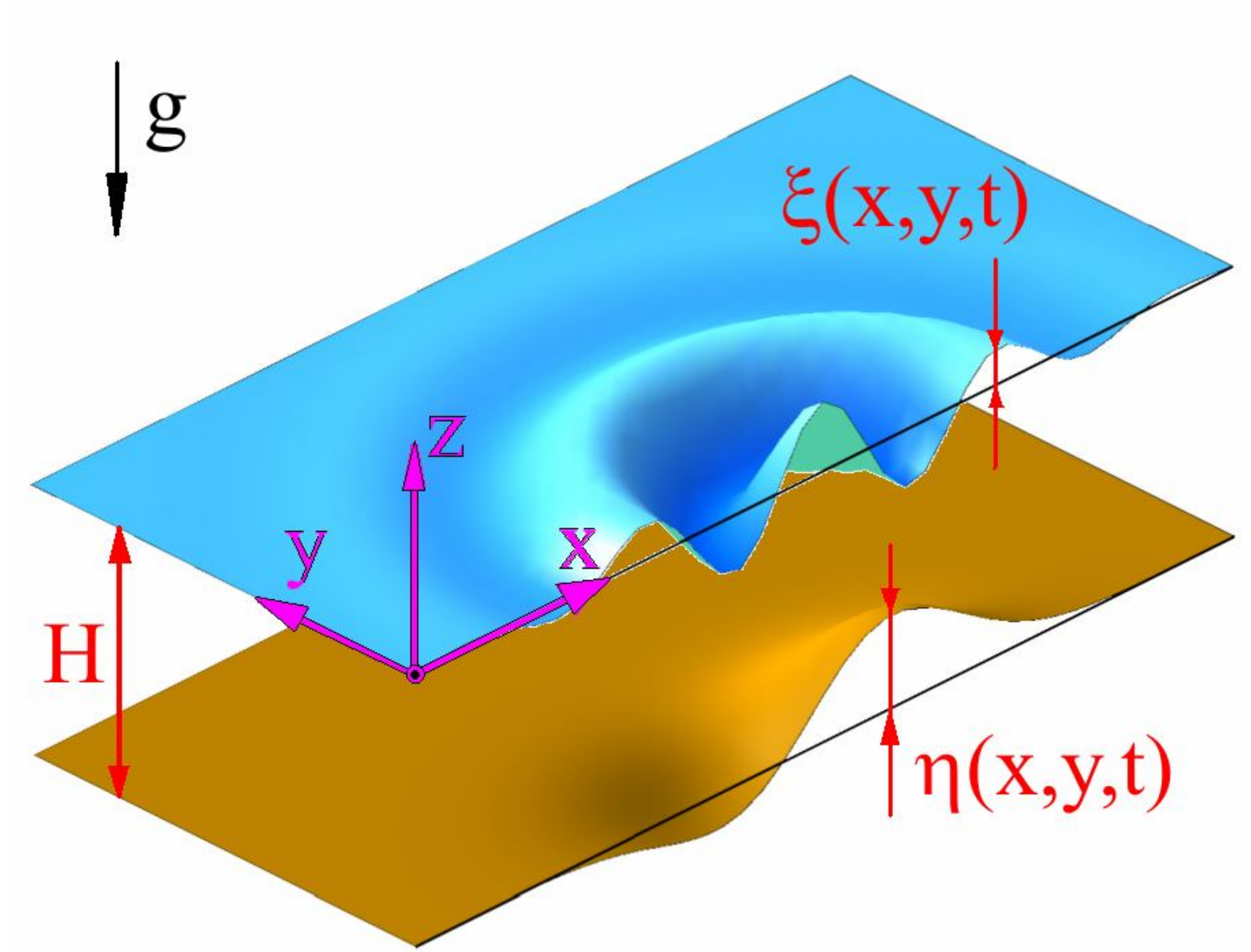
$$T \approx 1 - \frac{(\alpha\beta)^2}{8} \approx 0.99985$$

Базовые закономерности генерации волн цунами при сейсмических движениях дна

Линейная теория длинных волн
или
теория “мелкой воды”
($\lambda >> H$)

Генерация цунами движениями дна: базовые закономерности

$$H = \text{const}, \quad |\eta| << H$$



$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \Bigg| \int_{-H}^{\xi} dz$$

$$|\xi| << H$$

$$(H+\cancel{\xi})\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+w(\xi)-w(-H)=0$$

$$H\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial \xi}{\partial t}=\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$w_b$$

подвижное дно

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}$$

$$H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \qquad \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -g \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} = -g \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$

$$H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t}\right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Неоднородное волновое уравнение

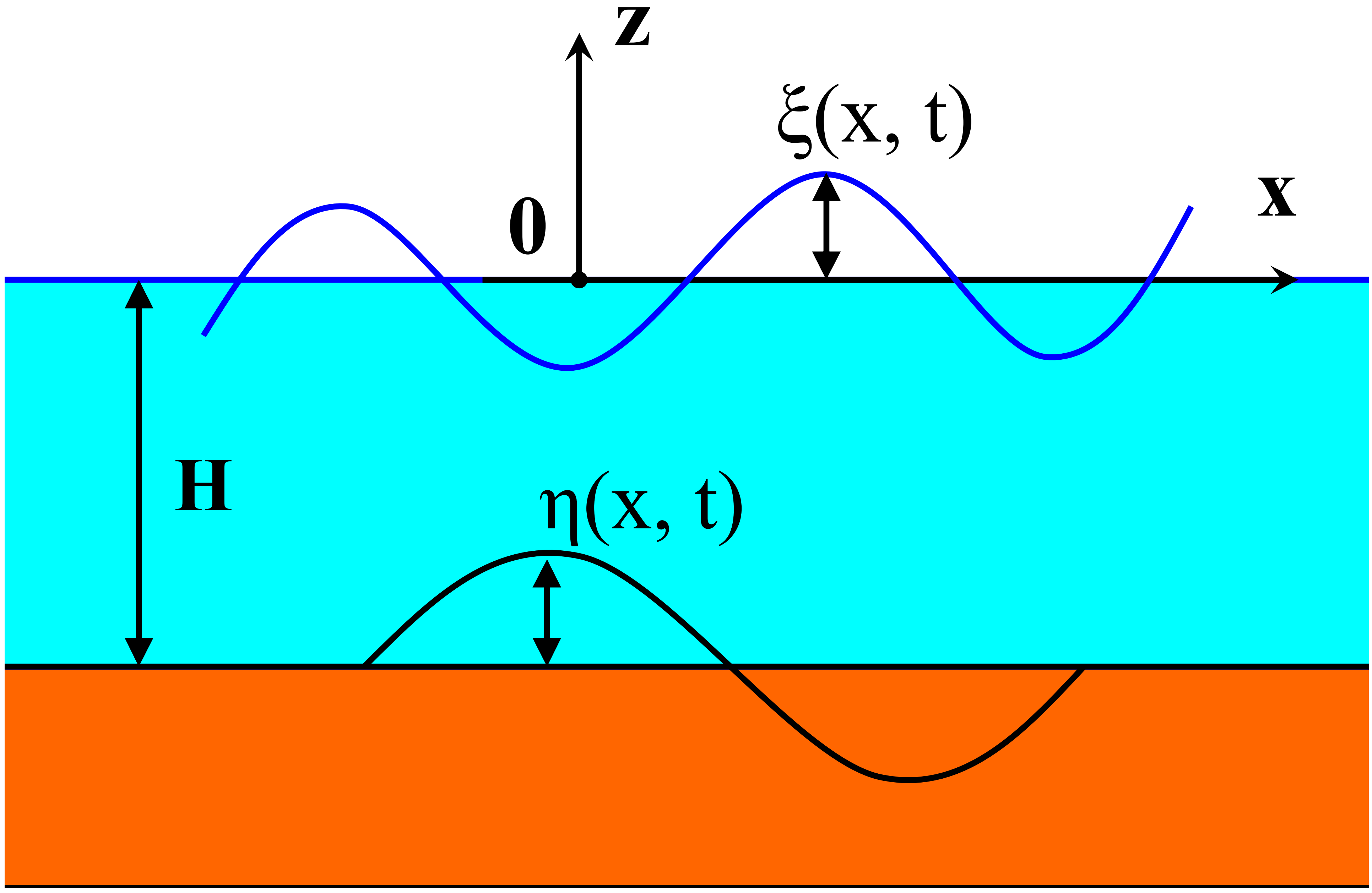
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

источник волн – движения дна

$$c = \sqrt{gH}$$

скорость длинных волн

Постановка 1D задачи о генерации цунами



Неоднородное 1D волновое уравнение

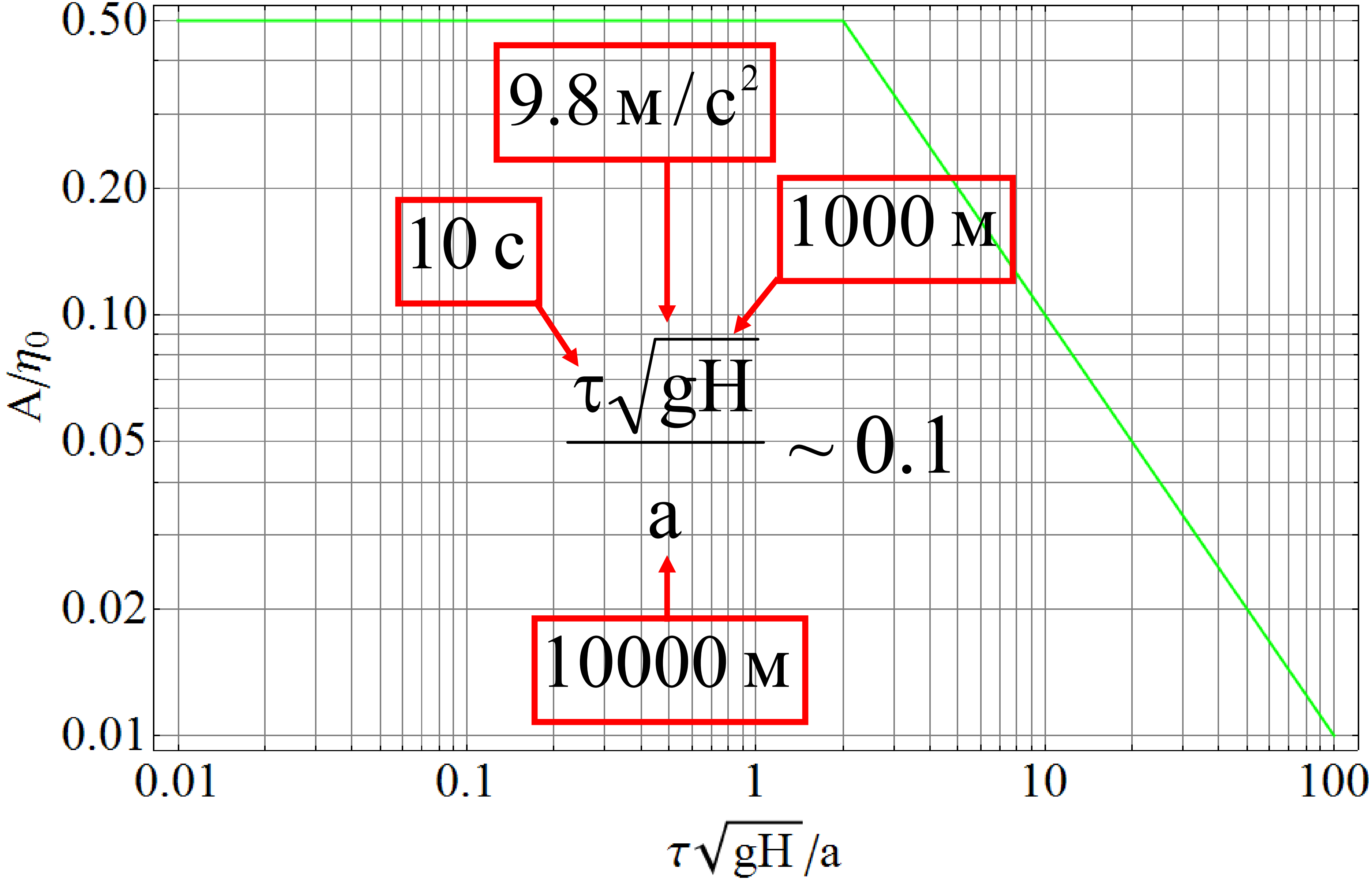
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \equiv \Phi(x,t)$$

Аналитическое решение:

$$\text{при н.у. } t = 0: \quad \xi = 0, \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

$$\xi(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\hat{t})}^{x+c(t-\hat{t})} \Phi(\hat{x},\hat{t})\, d\hat{x}\, d\hat{t}$$

Амплитуда волн, образованных поршневой и мембранной подвижками как функция продолжительности подвижки



Энергия волн, образованных поршневой и мембранной подвижками как функция продолжительности подвижки