Носов Михаил Александрович

Физика цунами

Межфакультетский учебный курс Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

Лекция №9

Базовые закономерности генерации волн цунами при сейсмических движениях дна

Линейная теория длинных волн
или
теория “мелкой воды”
($\lambda >> H$)

Бегущая подвижка

$$\boxed{\eta(x,t) = f(x - vt)}$$

$$\boxed{\xi(x,t) = A_0\, f(x - vt)}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Амплитуда и знак (!) возмущения на поверхности воды определяются соотношением скоростей «v» и «c»

$$v^2 A_0 f'' - c^2 A_0 f'' = v^2 f''$$

$$A_0 = \frac{v^2}{v^2 - c^2}$$

$$\xi(x,t) = \frac{v^2}{v^2 - c^2} f(x - vt)$$

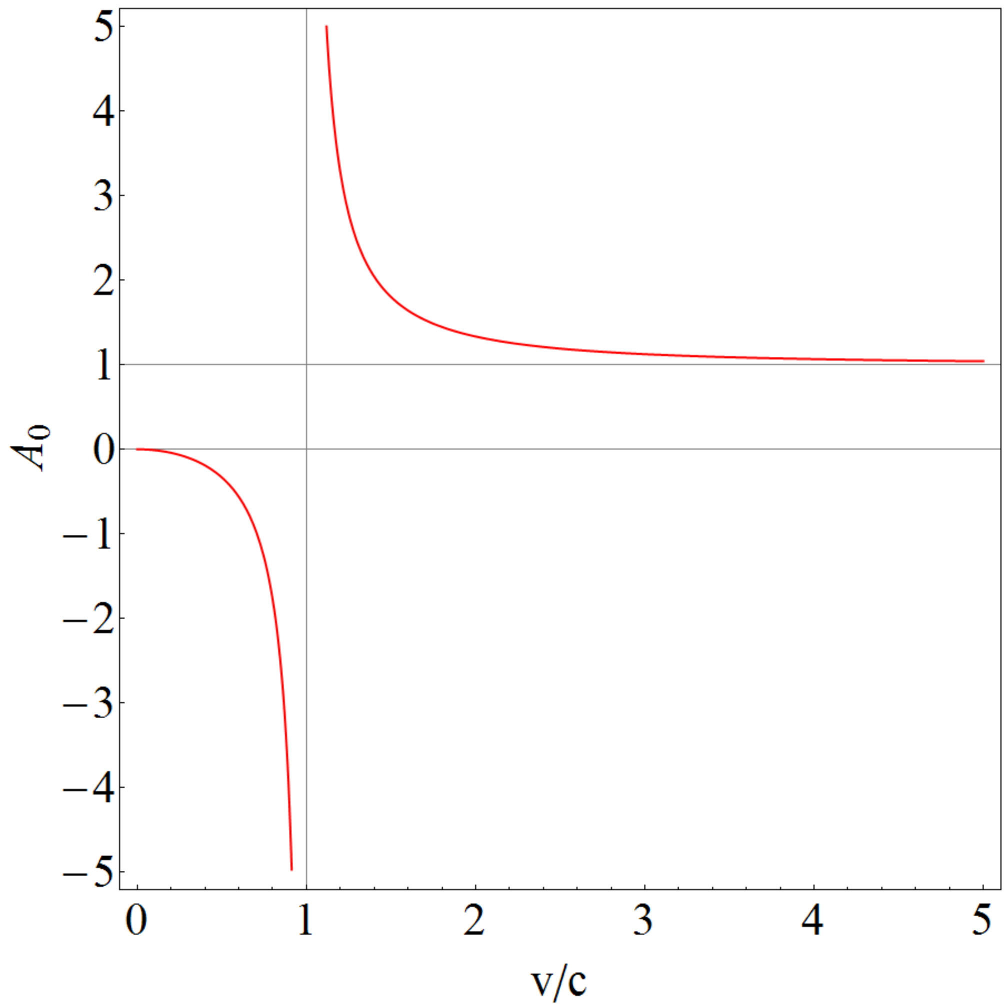
$$c = \sqrt{gH}$$

Вынужденное возмущение, создаваемой бегущей подвижкой

$$\xi(x,t) = A_0\eta(x - v\cdot t)$$

$$A_0 = \frac{v^2}{v^2 - c^2} = $$

$$= \frac{(v/c)^2}{(v/c)^2 - 1}$$



Генерация волн неоднородностями атмосферного давления (метеоцунами)

$$p(x,y,z,t) = p_{атм}(x,y,t) + \rho g \xi(x,y,t) - \rho g z$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{атм}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{атм}}{\partial y}$$

$$(u, v) \neq f(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{атм}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{атм}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}$$

$$H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -g\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p_{\text{атм}}}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} = -g\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p_{\text{атм}}}{\partial y^2}$$

$$H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t}\right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - gH\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) = \frac{H}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p_{атм}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{атм}}{\partial y^2}\right)$$

источник волн – вариации атмосферного давления

источник волн – движения дна

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - gH\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

Генерация волн бегущими неоднородностями атмосферного давления (1D)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{H}{\rho} \frac{\partial^2 p_{атм}}{\partial x^2}$$

$$c = \sqrt{gH}$$

$$\boxed{p_{атм}(x, t) = f(x - vt)}$$

$$\boxed{p_{атм}(x,t) = f(x - vt)} \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{H}{\rho} \frac{\partial^2 p_{атм}}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\xi(x,t) = A_0\, f(x - vt)}$$

$$v^2 A_0 f'' - c^2 A_0 f'' = \frac{H}{\rho} f'' \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{H/\rho}{v^2 - c^2}$$

$$\xi(x,t) = \frac{H/\rho}{v^2 - c^2} f(x - vt)$$

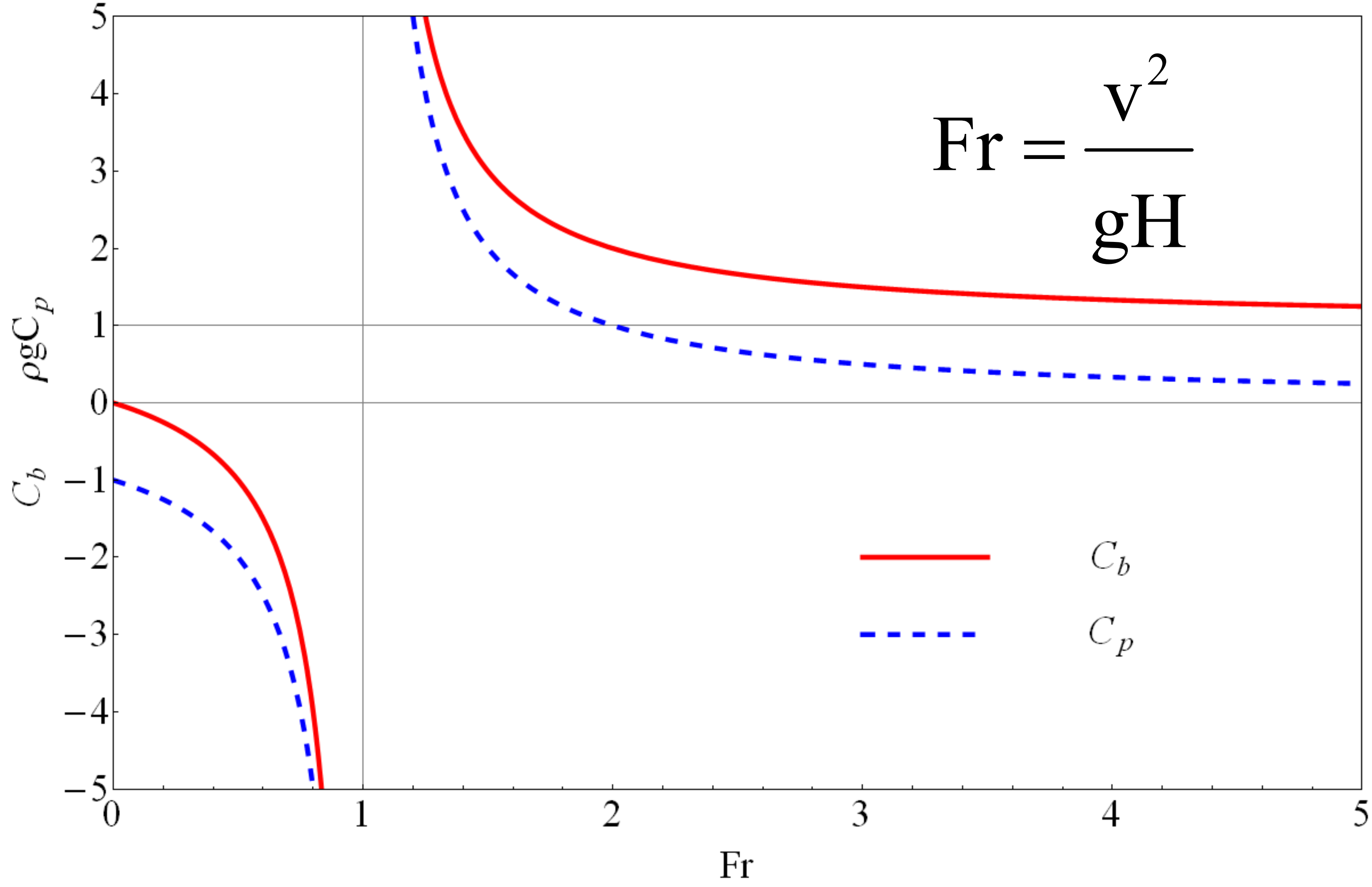
Амплитуда и знак (!) возмущения на поверхности воды определяются соотношением скоростей «v» и «c»

дно

$$A_0 = \frac{v^2}{v^2 - c^2} = \frac{Fr}{Fr - 1}$$

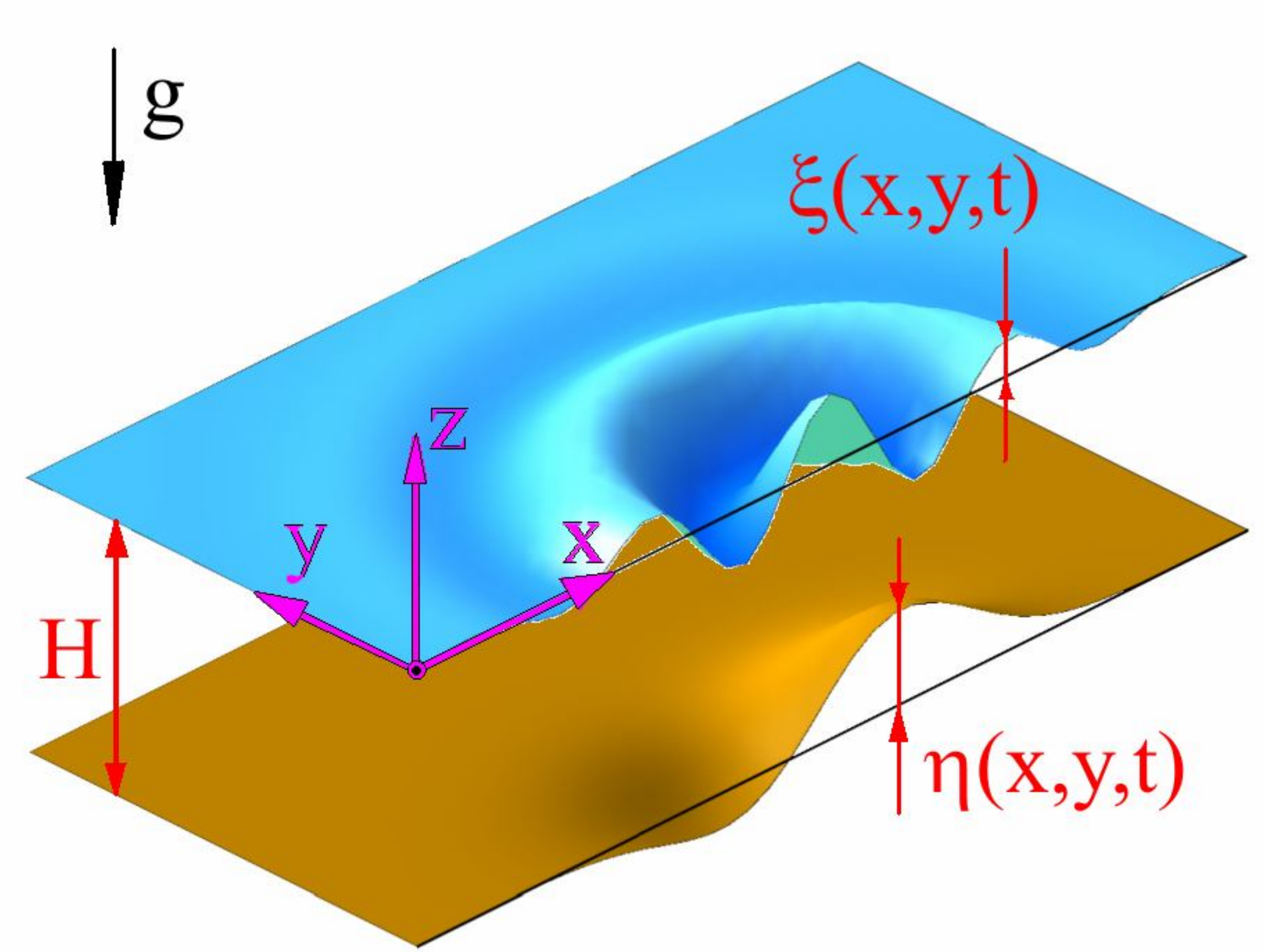
атмосфера

$$A_0 = \frac{H/\rho}{v^2 - c^2} = \frac{1}{\rho g(Fr - 1)}$$



Генерация цунами движениями дна: базовые закономерности (2D)

$$H = \text{const}, \quad |\eta| << H$$



Неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \equiv \Phi(x, y, t)$$

Аналитическое решение:

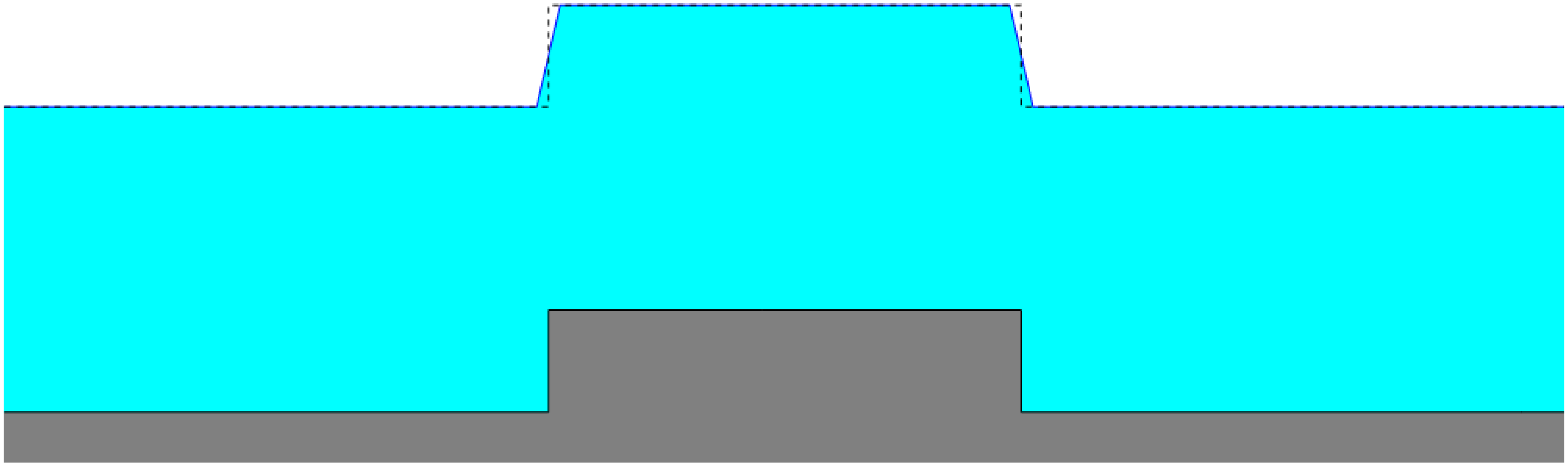
при н.у. $t = 0: \quad \xi = 0, \partial\xi / \partial t = 0$

$$\xi(x,t) = \frac{1}{2\pi c}\int_0^t \iint\limits_{\rho \le c(t-\hat{t})} \frac{\Phi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})\, d\hat{x}\, d\hat{y}\, d\hat{t}}{\sqrt{c^2(t-\hat{t})^2 - \rho^2}}$$

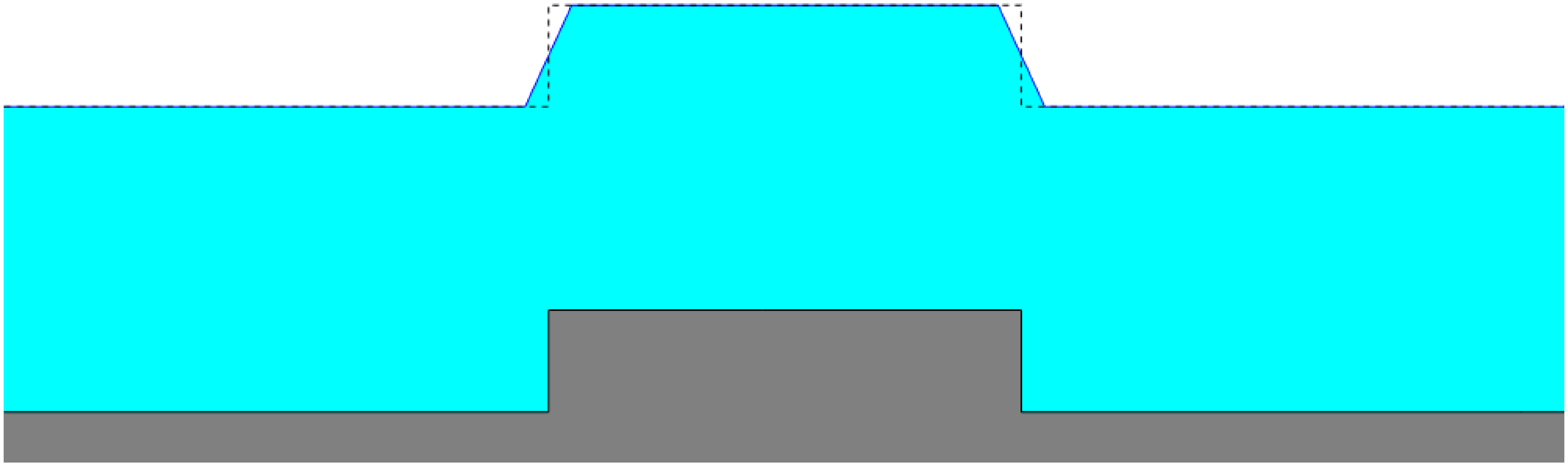
$$\rho^2 = (x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2$$

Перенос деформации дна на поверхность воды

H=4000 m, a=20000 m, τ=5 s, time=5 s



H=4000 m, a=20000 m, τ=10 s, time=10 s



Однородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \equiv 0$$

начальное возвышение

Аналитическое решение:

при н.у. $t = 0: \quad \xi = \xi_0(x, y), \partial\xi / \partial t = 0$

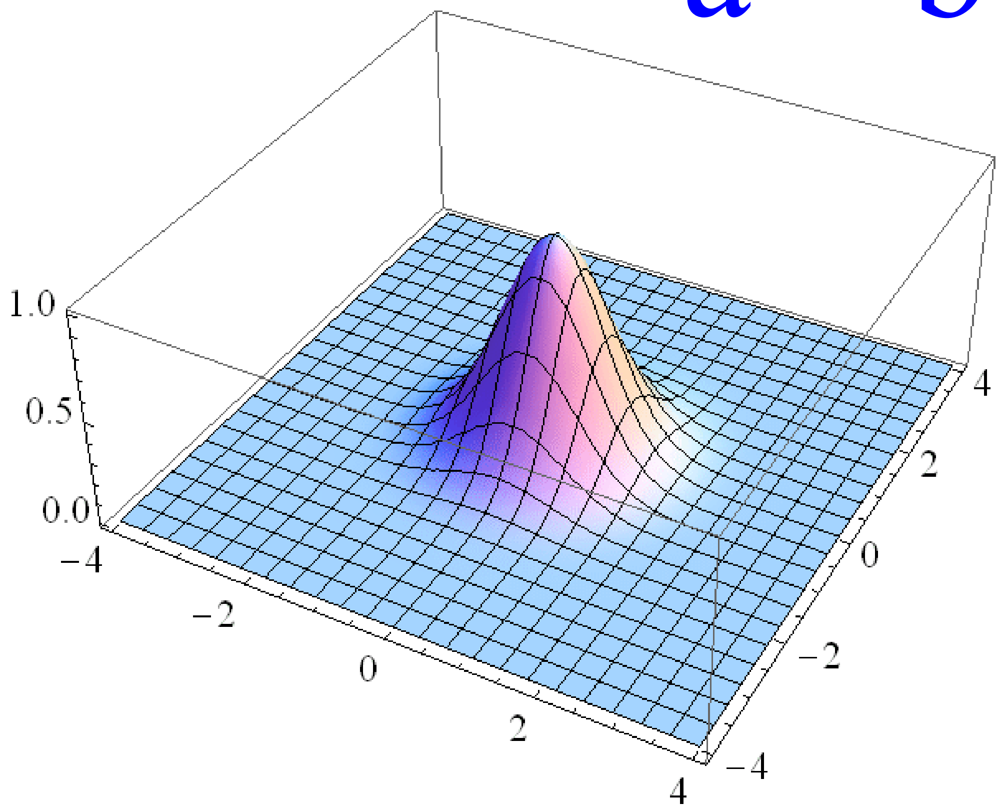
$$\xi(x,t) = \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\rho \le ct}\frac{\xi_0(\hat{x},\hat{y})d\hat{x}d\hat{y}}{\sqrt{c^2t^2 - \rho^2}}$$

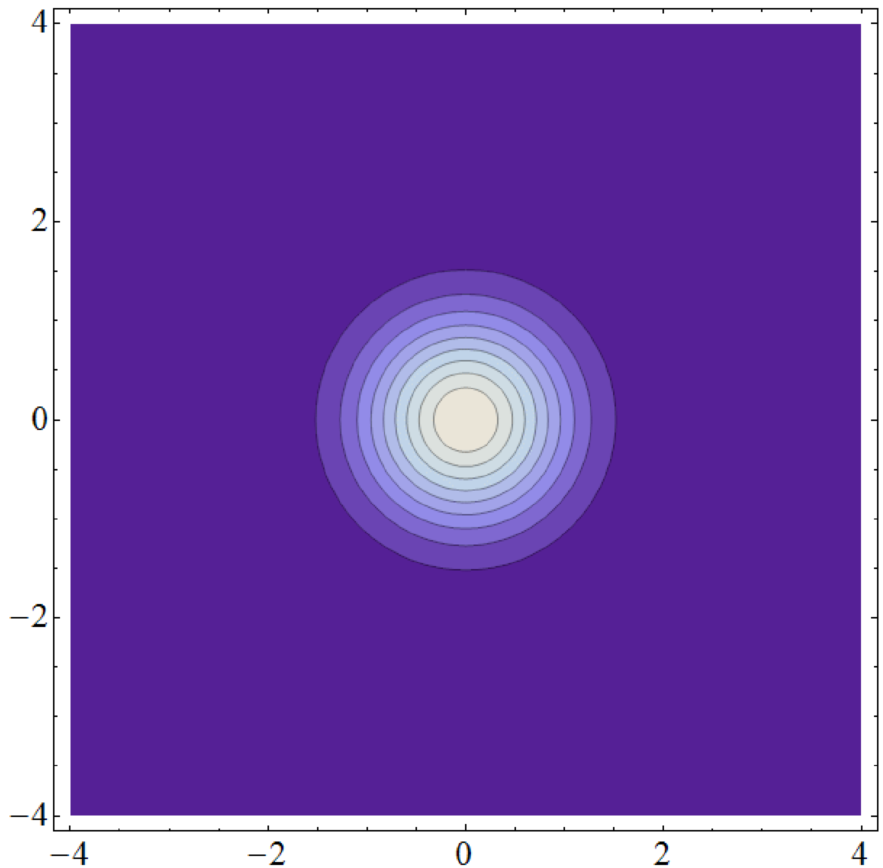
$$\rho^2 = (x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2$$

Выбор формы начального возвышения

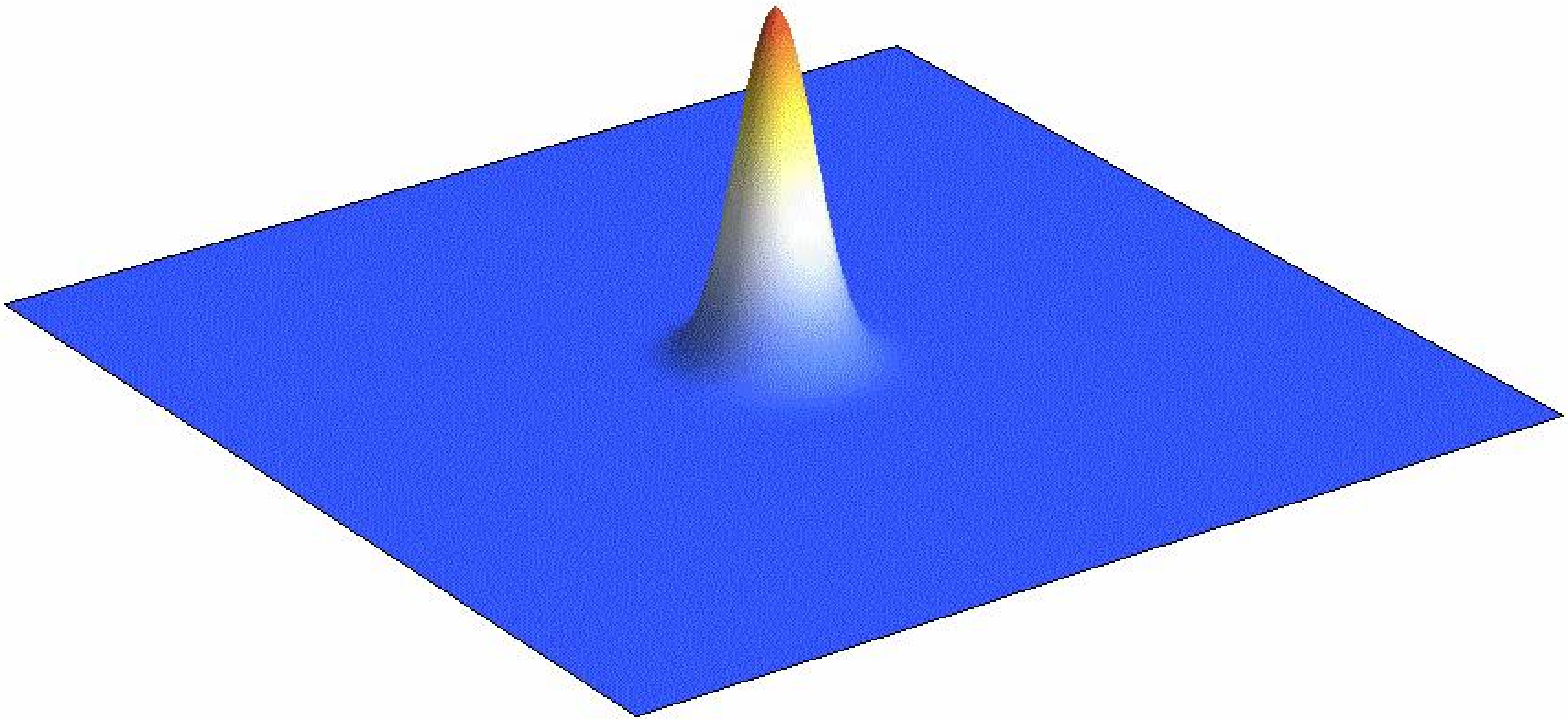
$$\xi_0(x, y) = \exp\left[-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right]$$

$$a = b$$

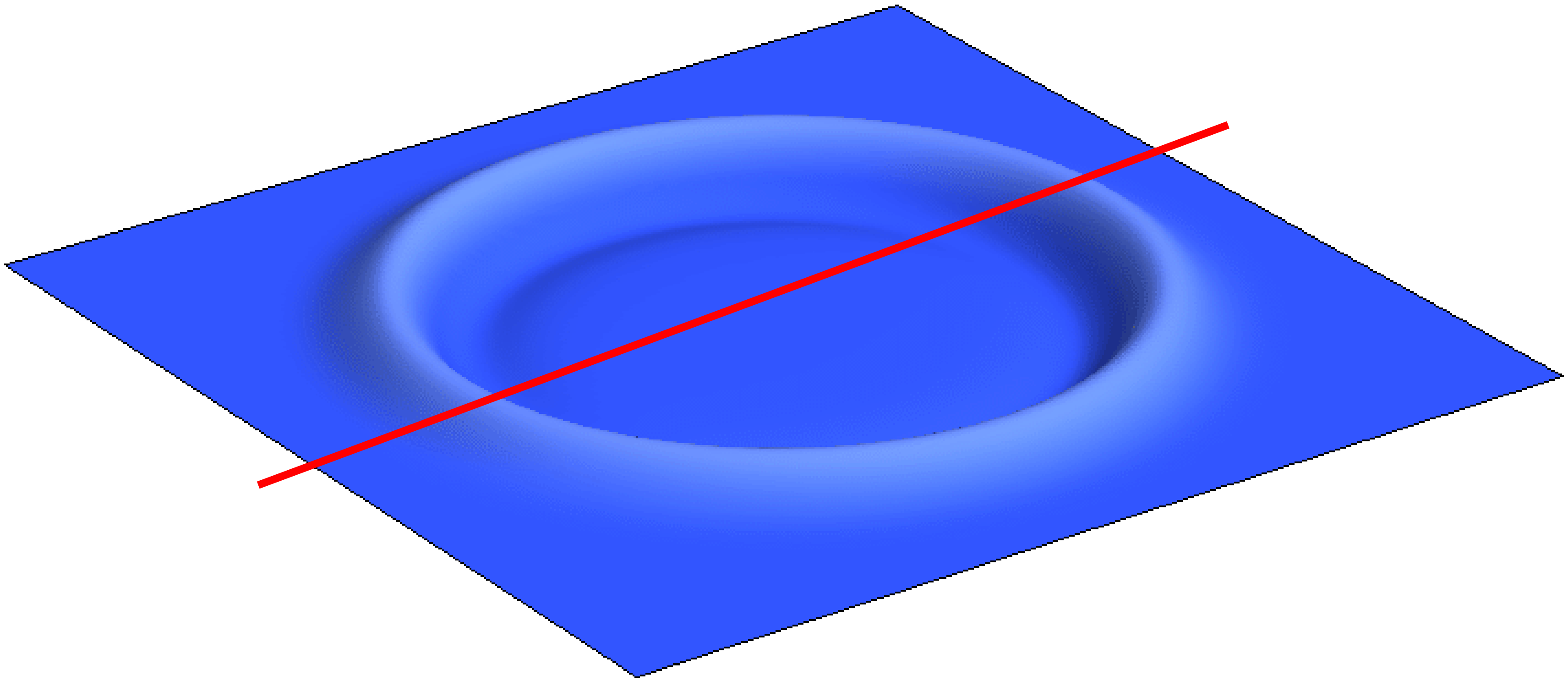




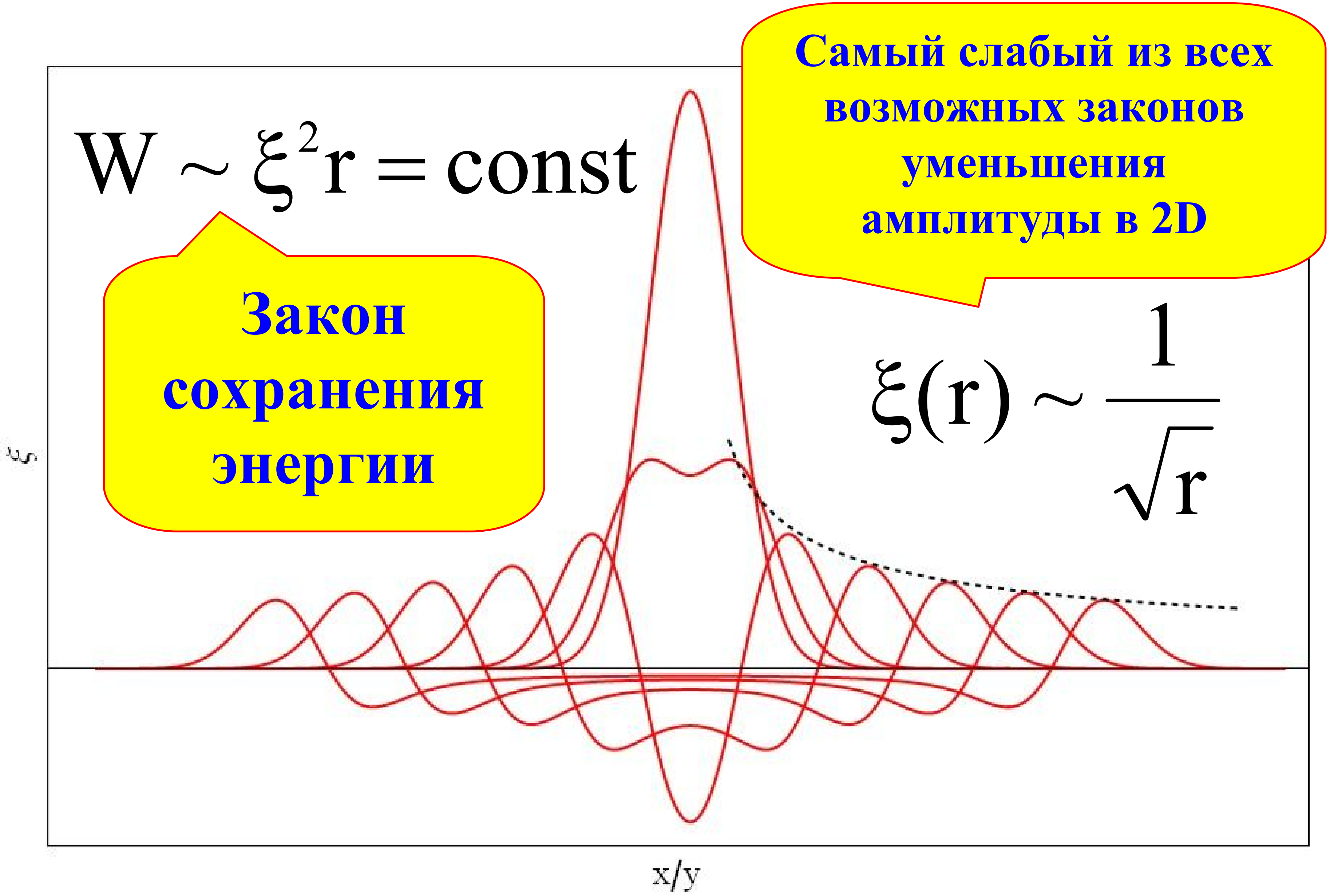
a/b=1,   time=000 s



a/b=1,   time=500 s



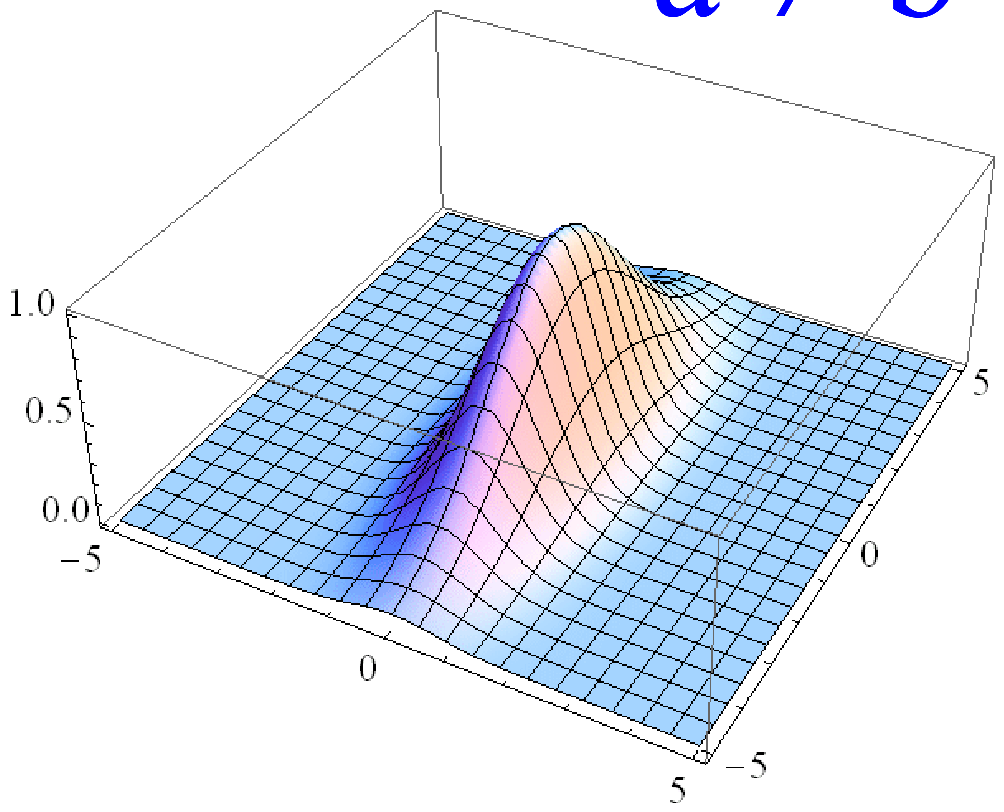
Профили волн в последовательные моменты времени (0, 50, 100, 200, 300, 400 и 500 с)

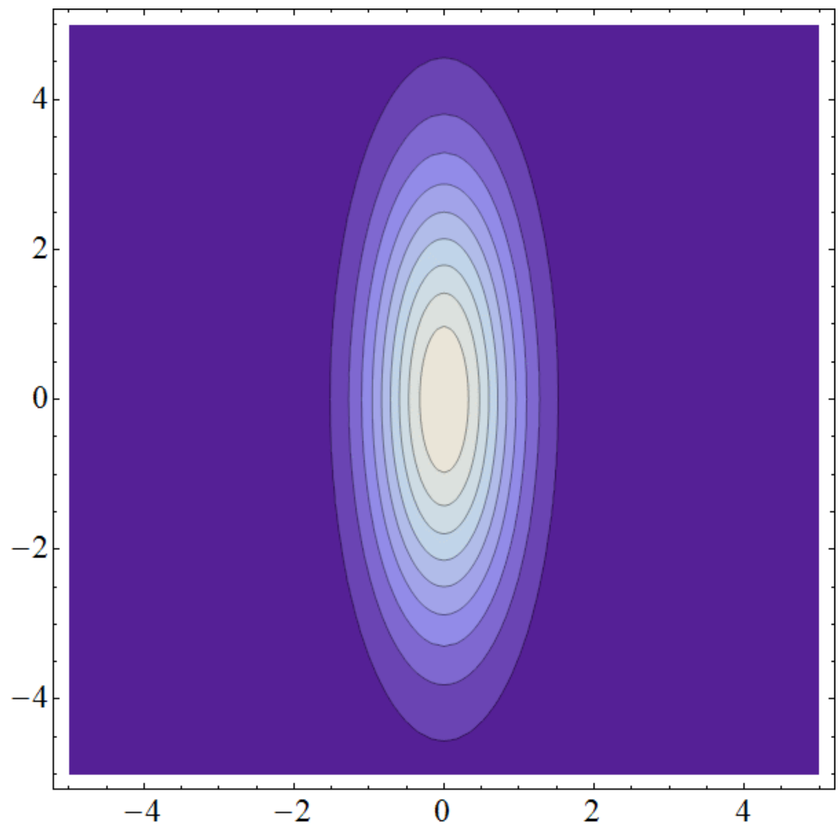


Направленность излучения волн асимметричными очагами

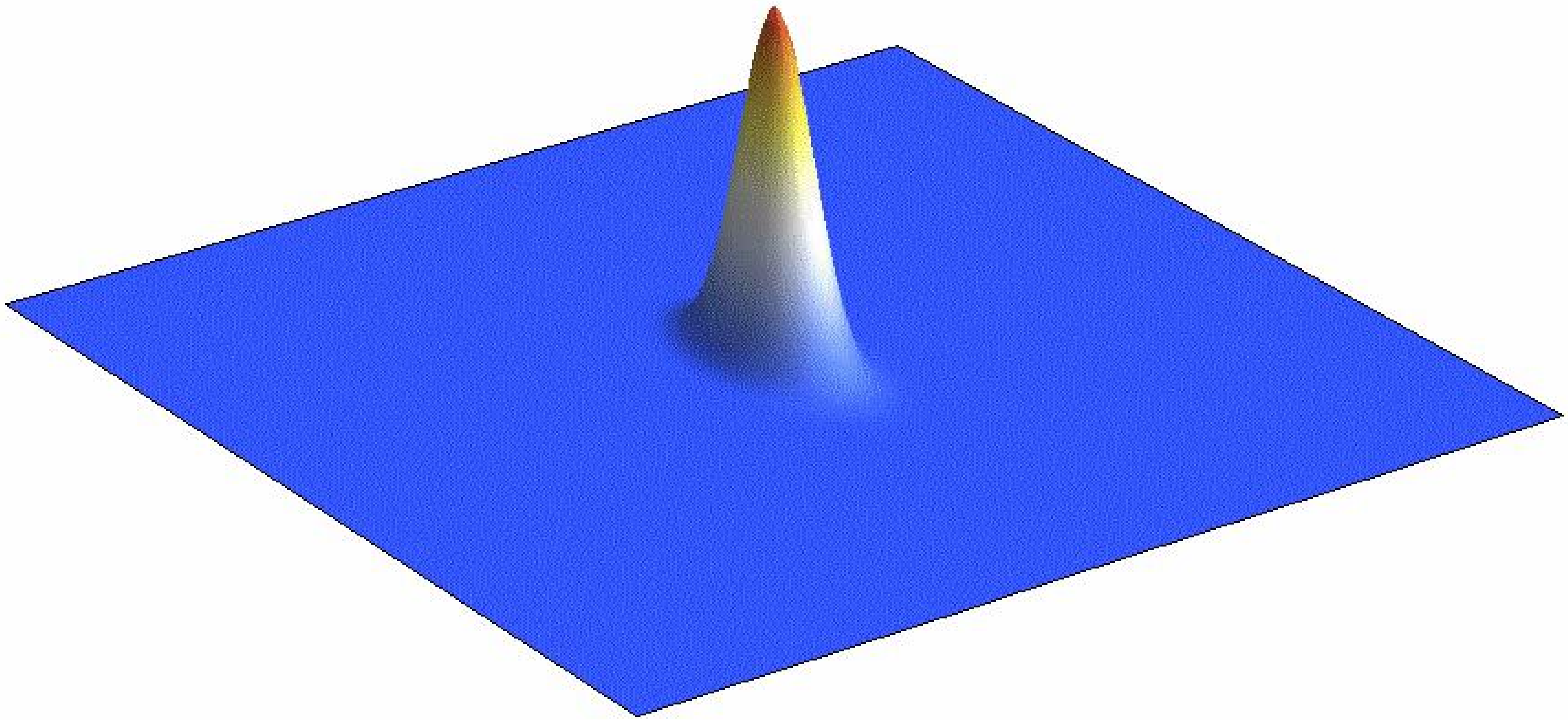
$$\xi_0(x,y) = \exp\left[-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right]$$

$$a \neq b$$

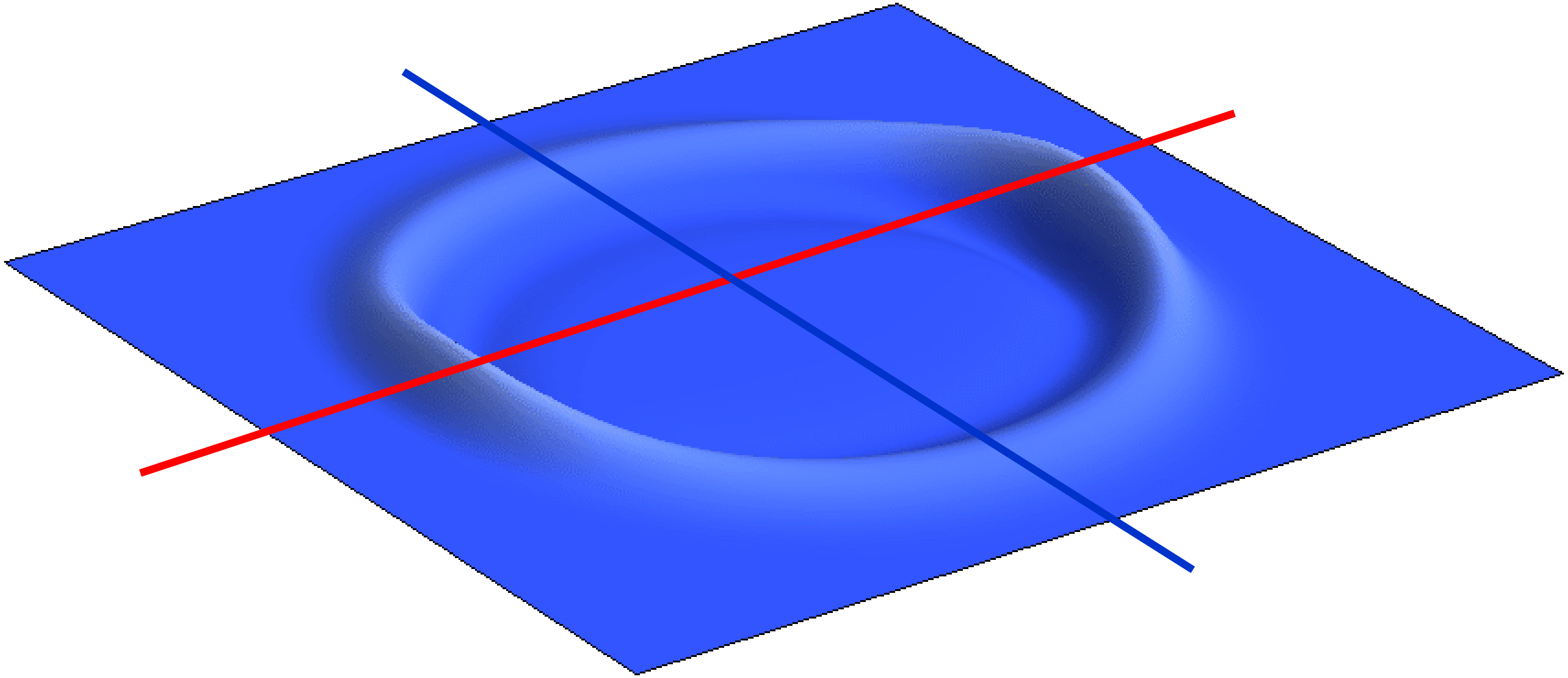




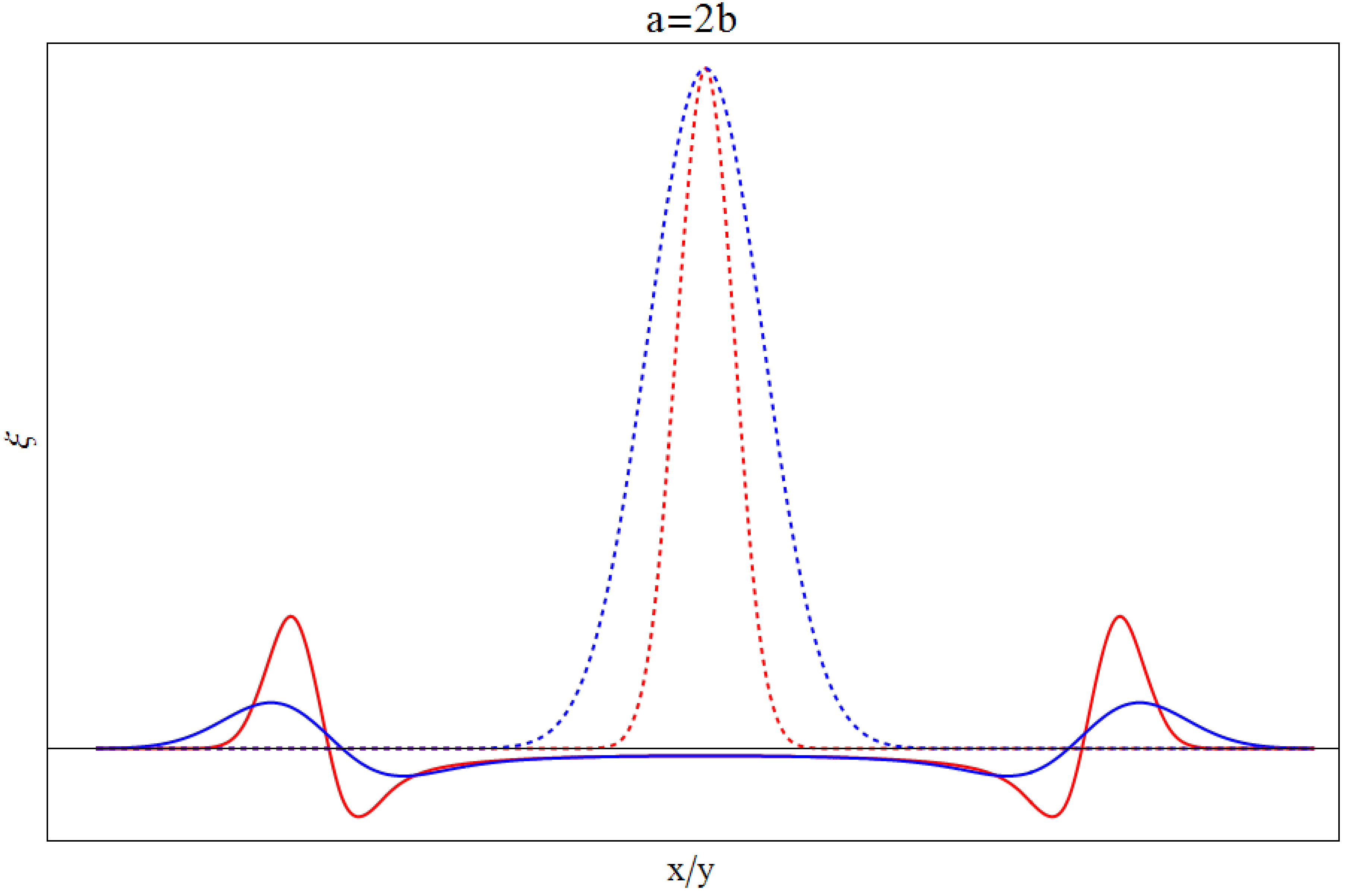
a/b=2,   time=000 s



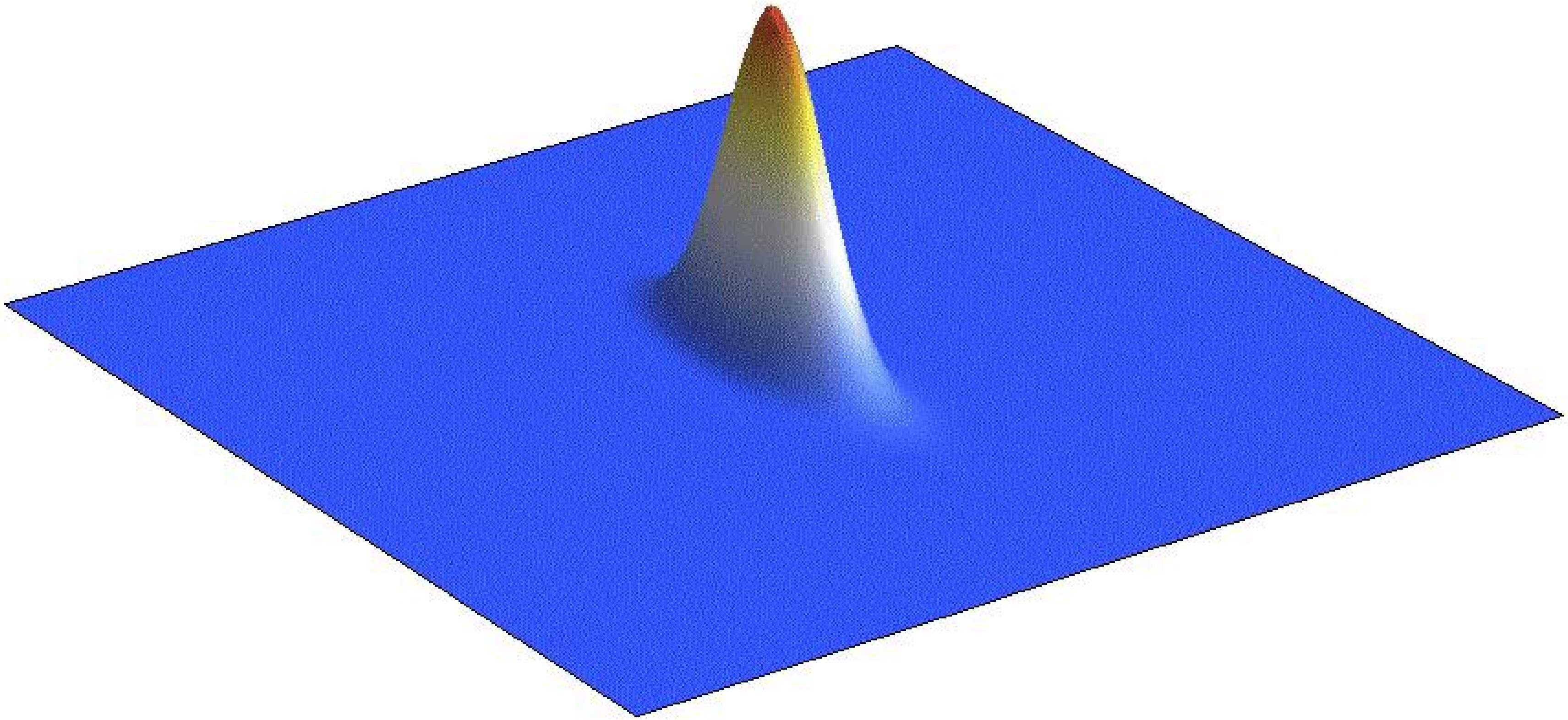
a/b=2,   time=500 s



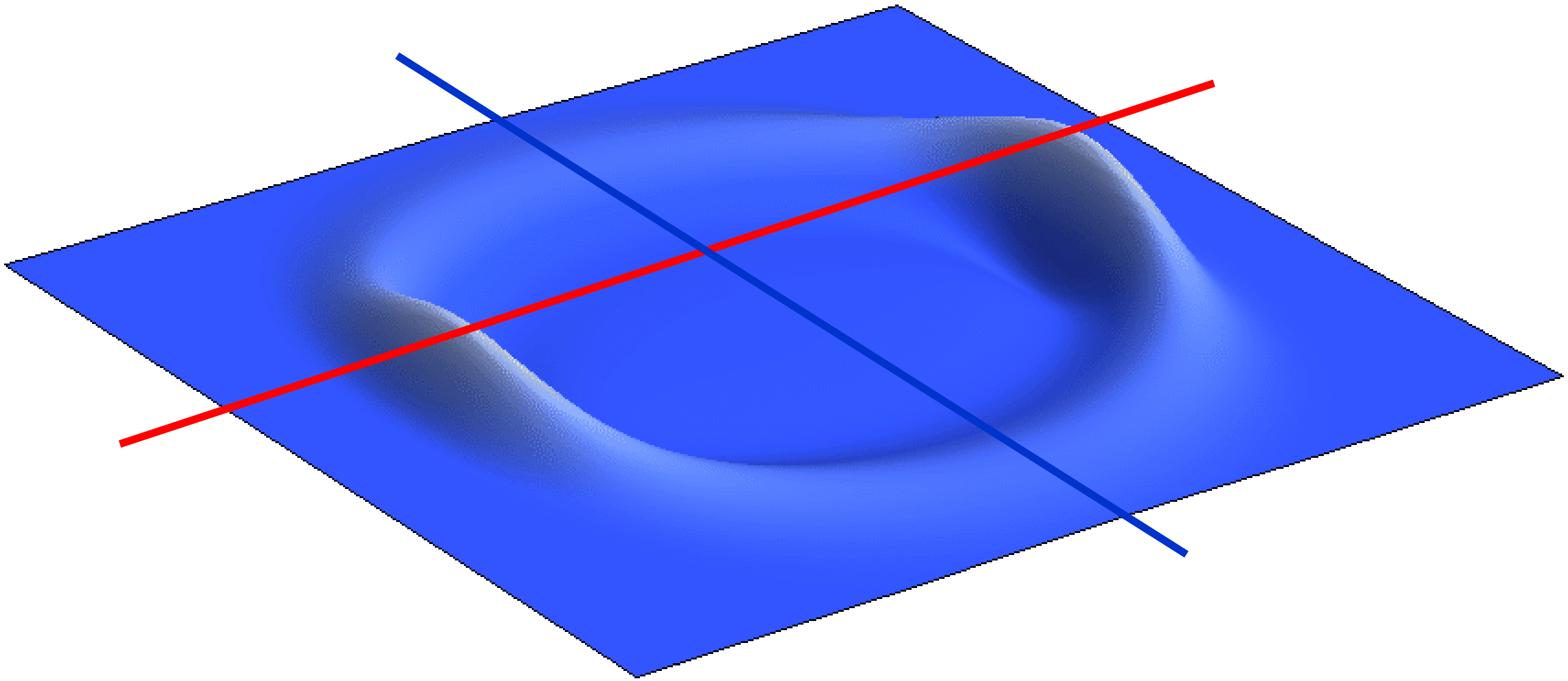
Профили волн вдоль осей 0x и 0y в моменты времени 0 и 500 с



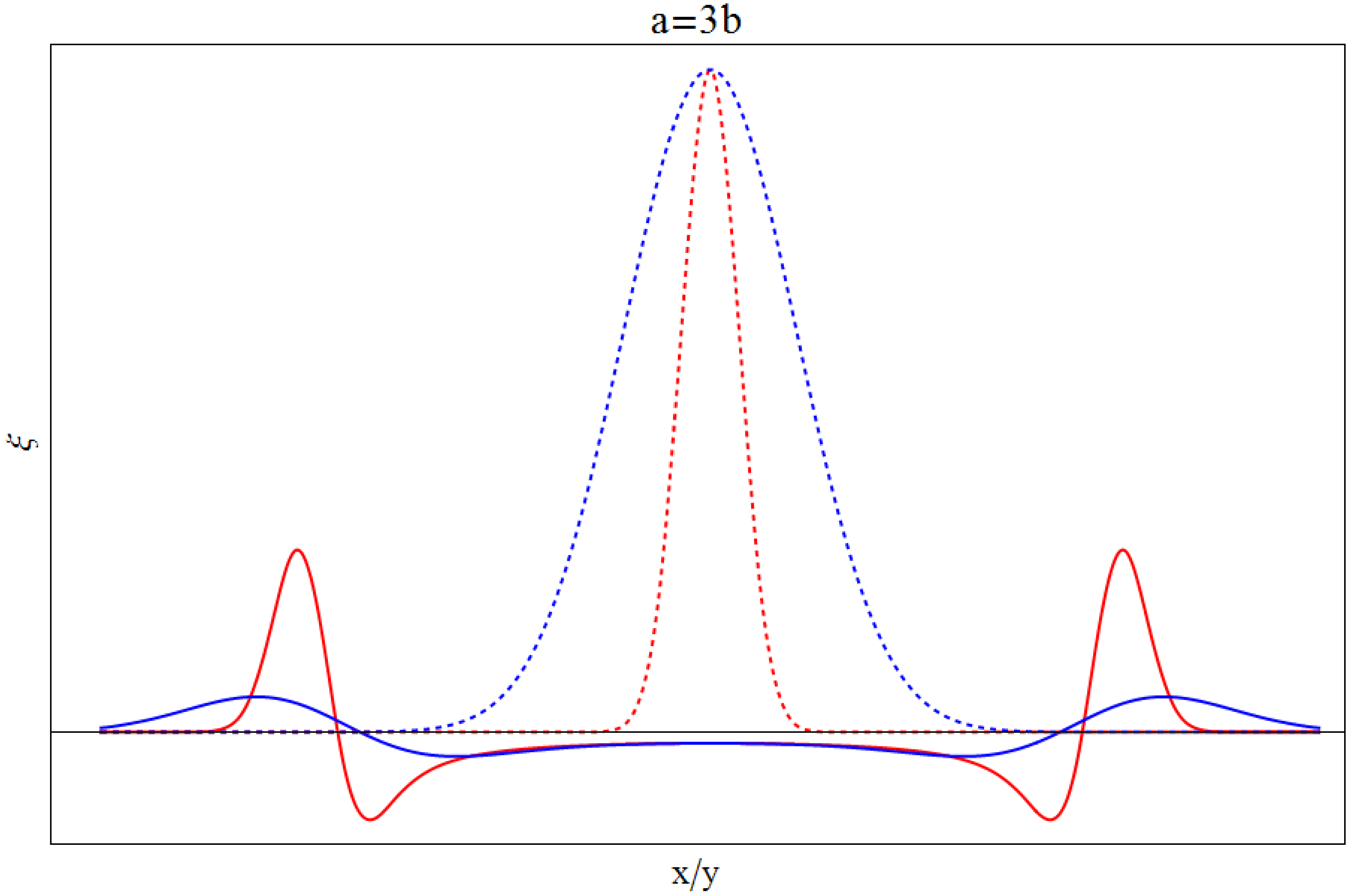
a/b=3,   time=000 s



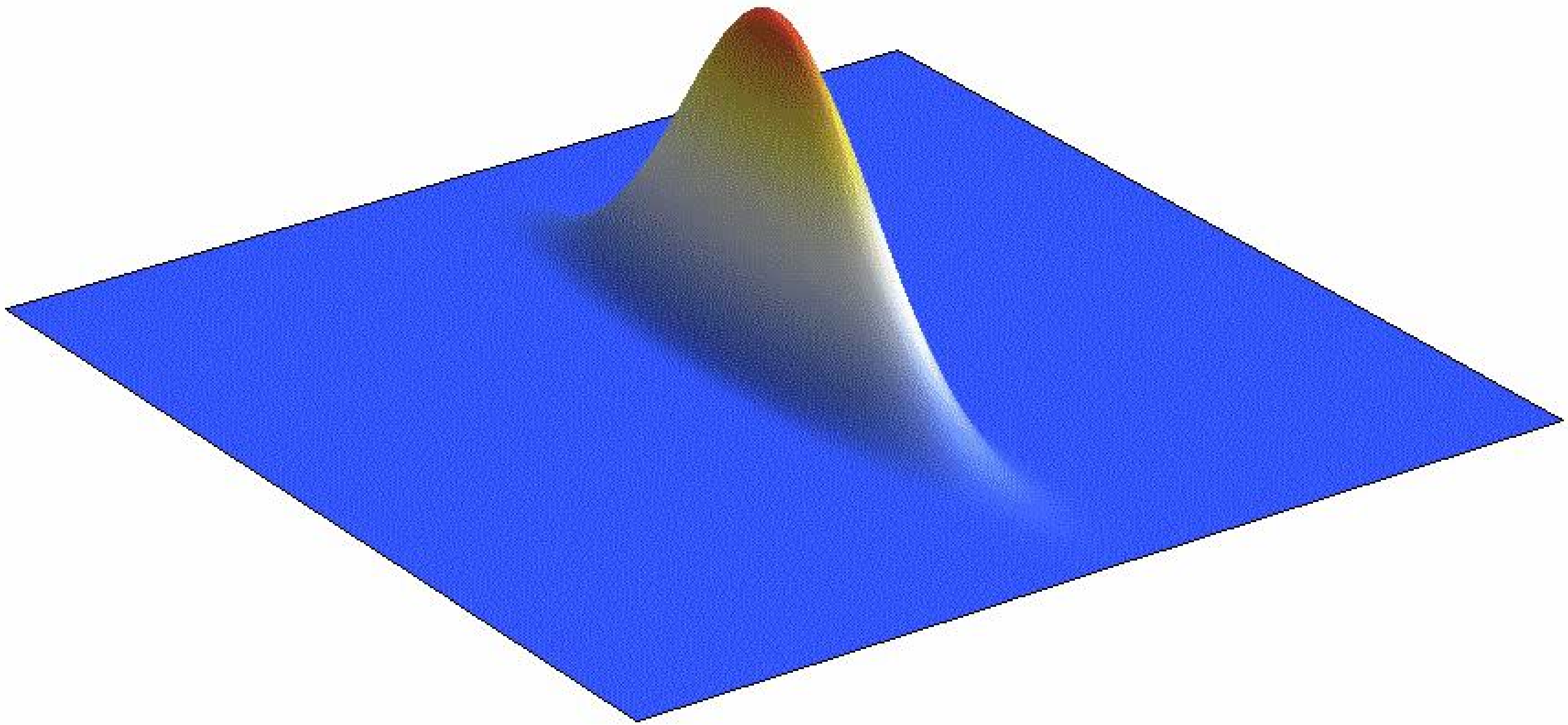
a/b=3,   time=500 s



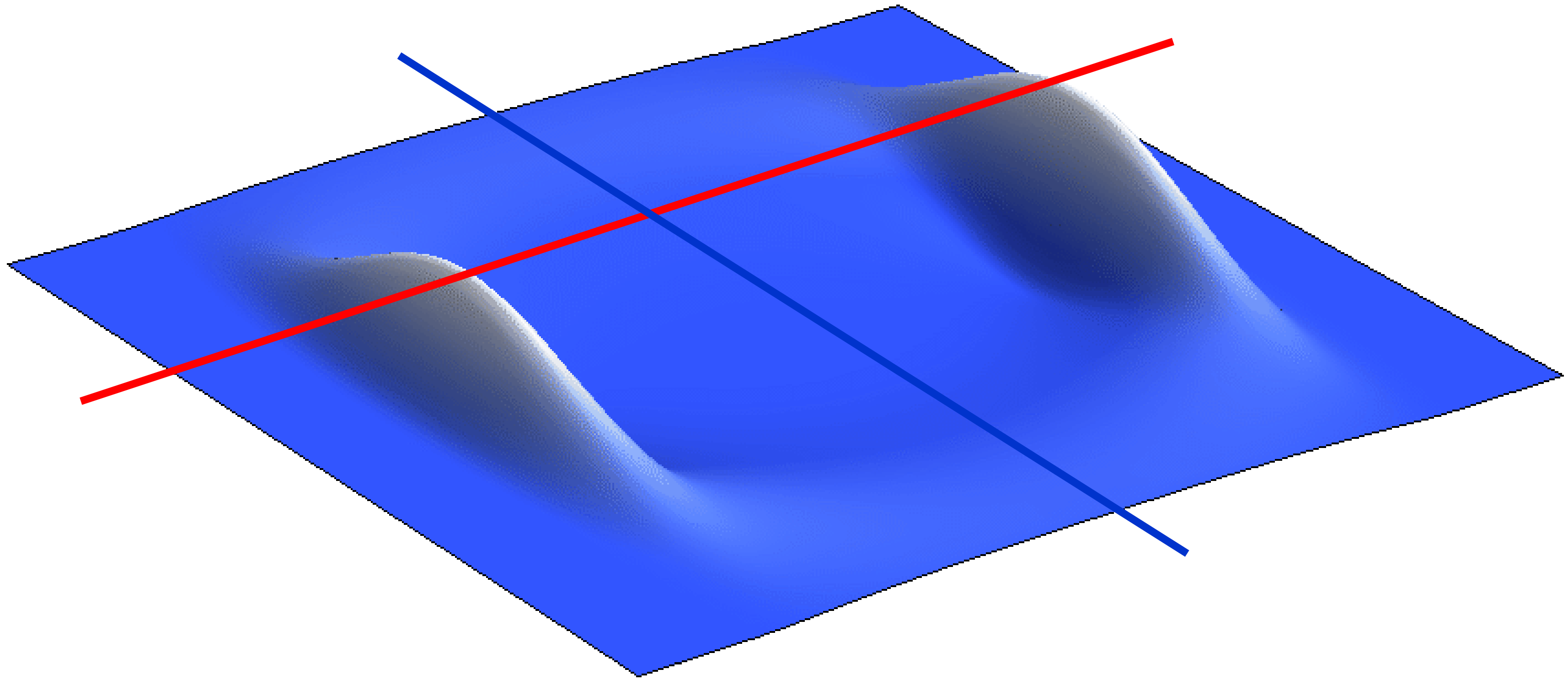
Профили волн вдоль осей 0x и 0y в моменты времени 0 и 500 с



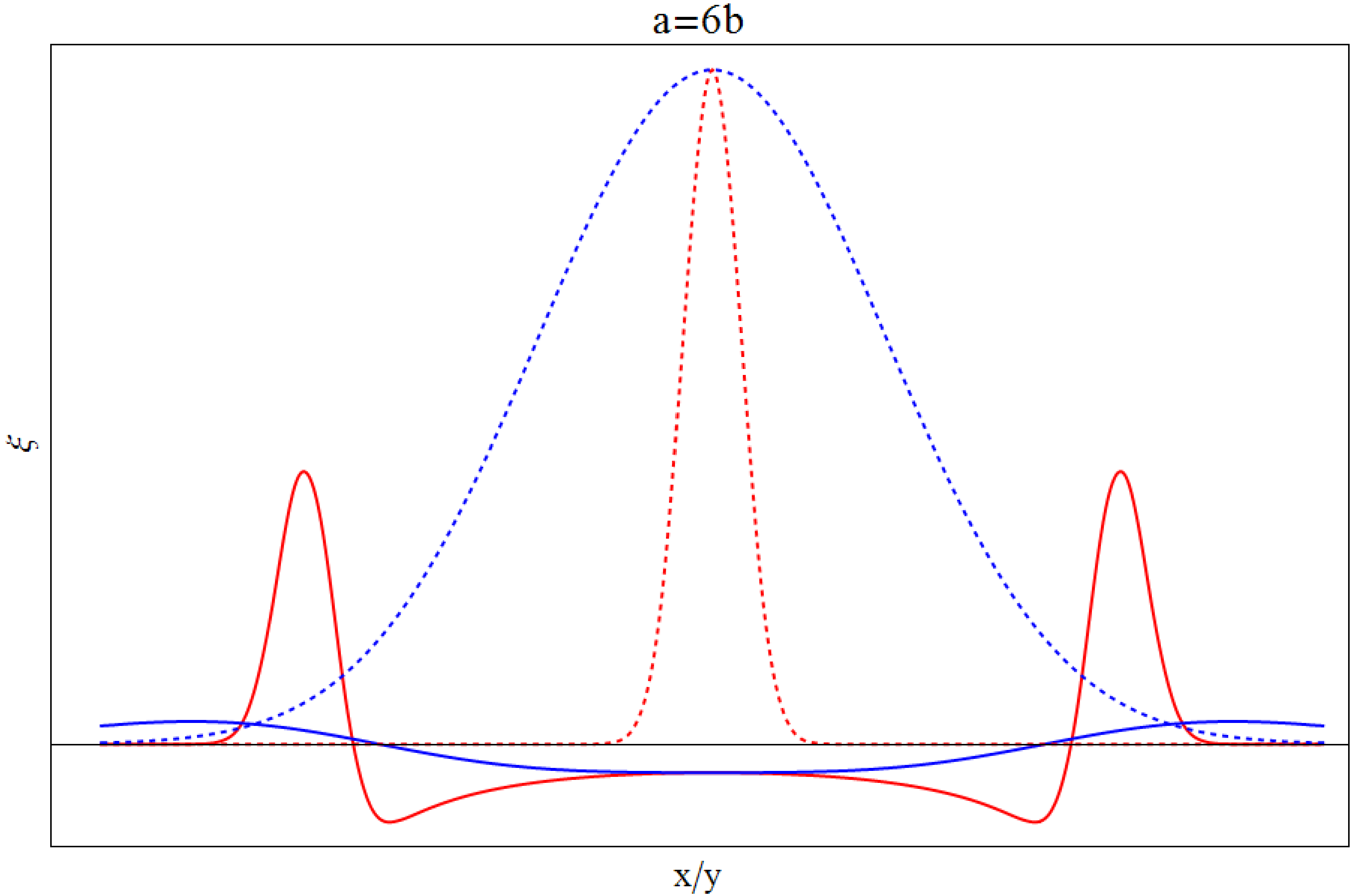
a/b=6,   time=000 s

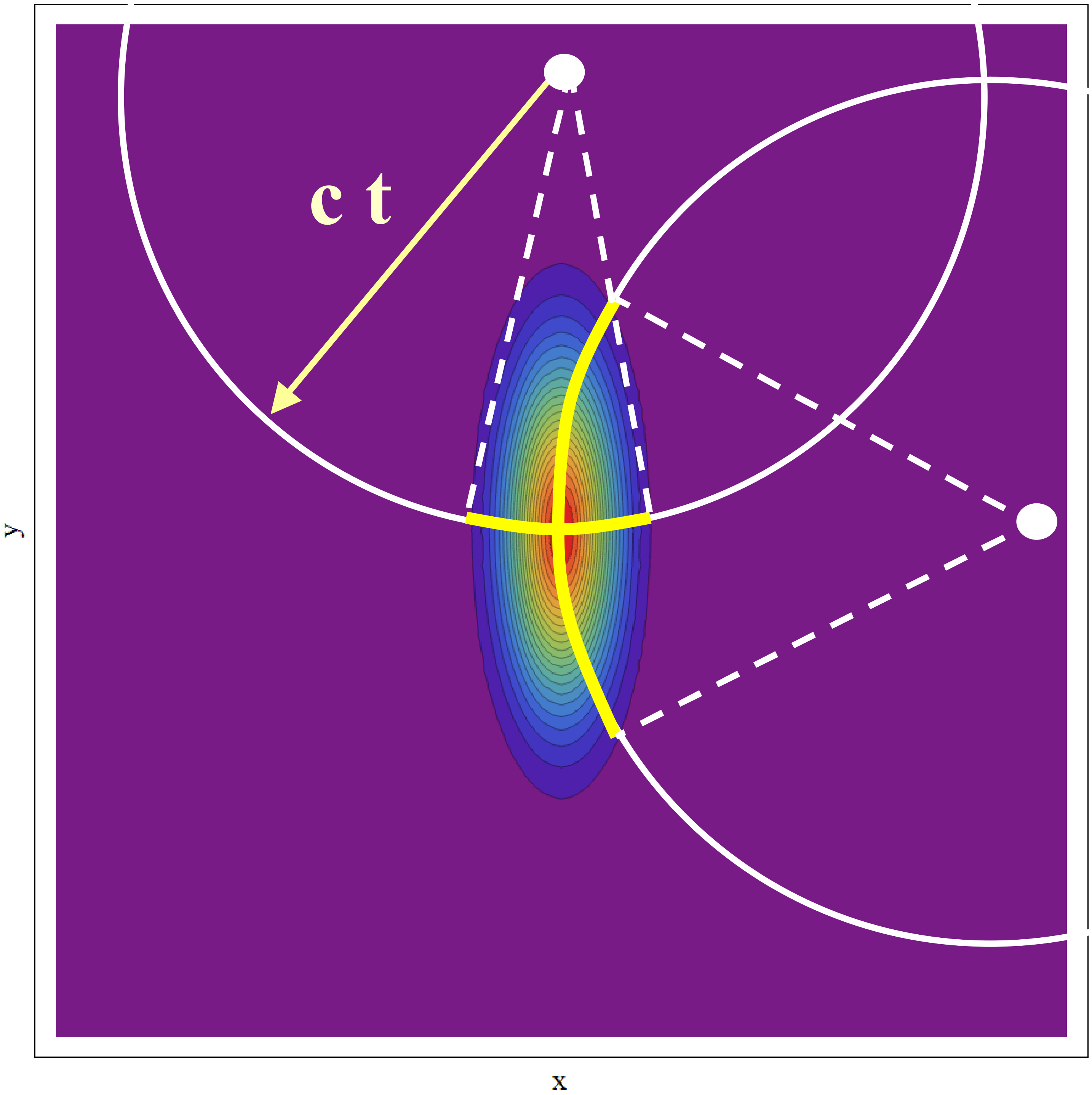


a/b=6,   time=500 s

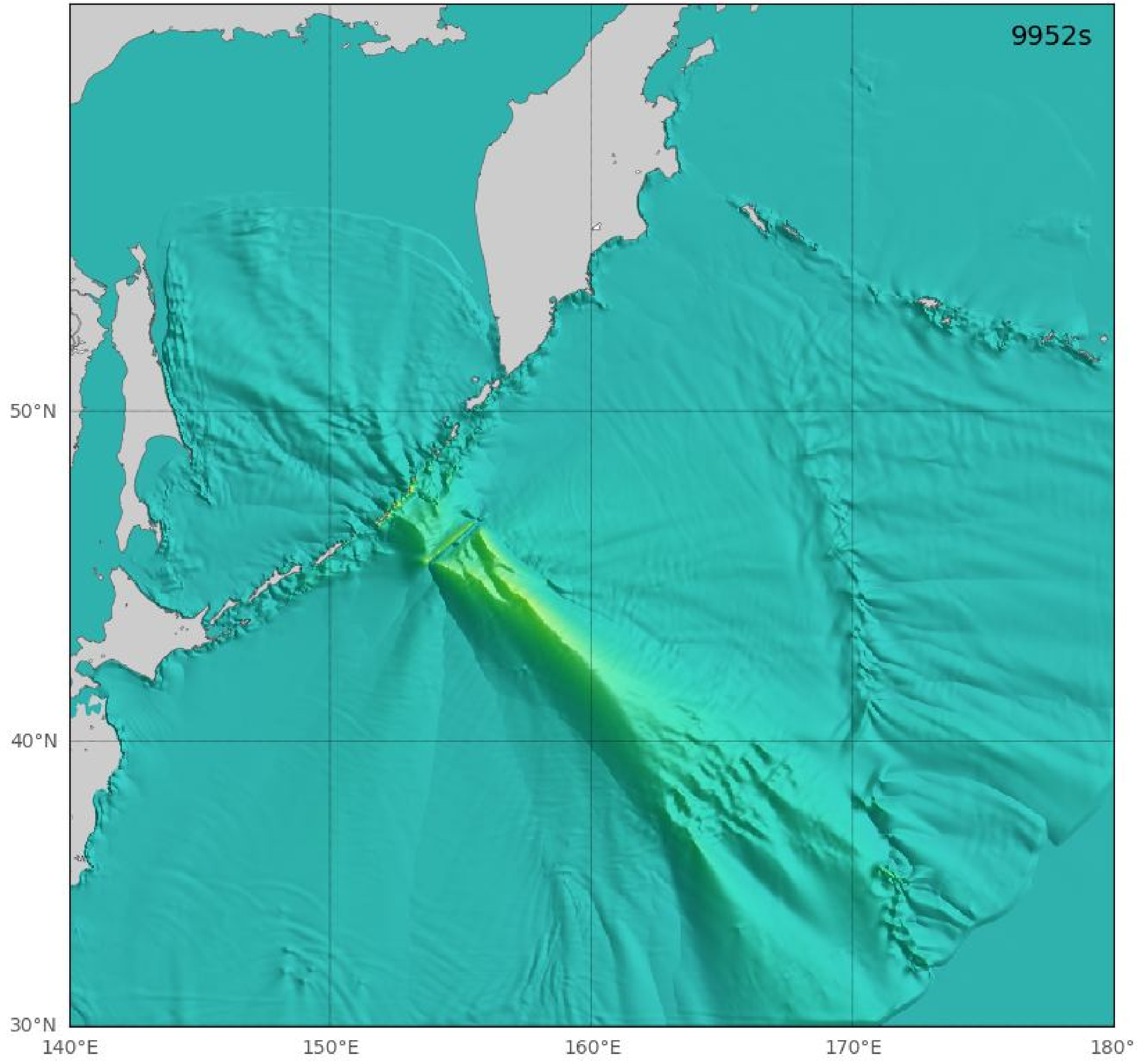


Профили волн вдоль осей 0x и 0y в моменты времени 0 и 500 с

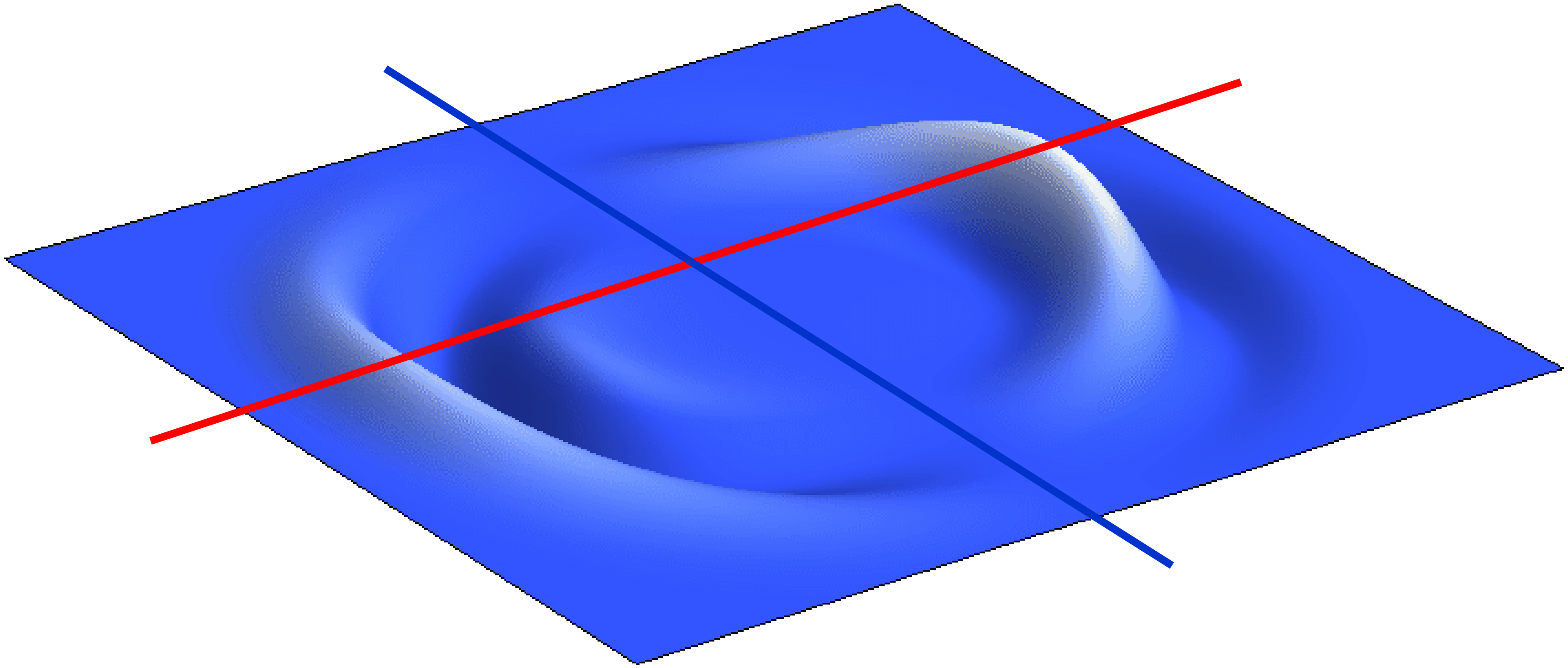



c t
y
x

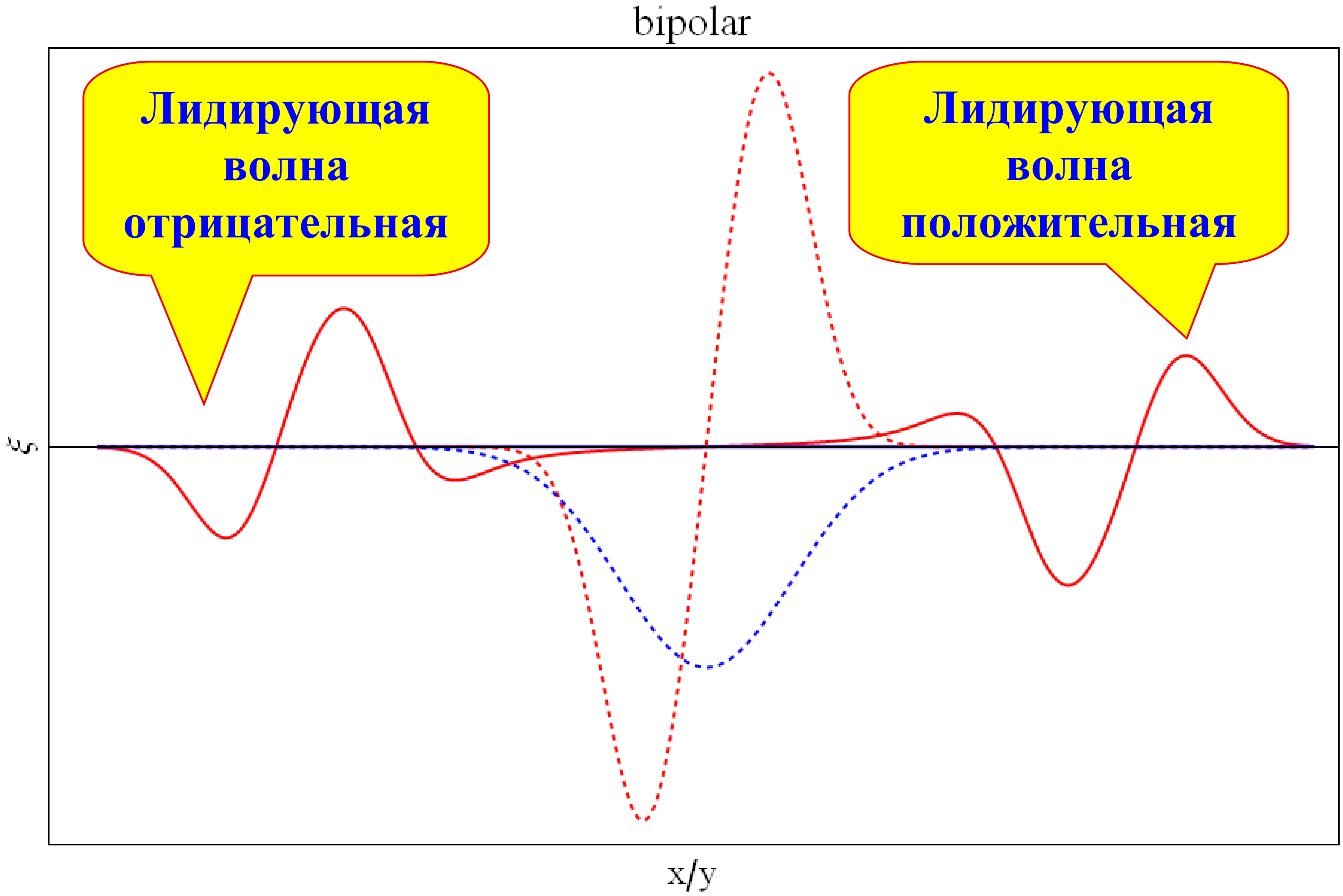
Распределение максимальных амплитуд Симуширского цунами 15.11.2006



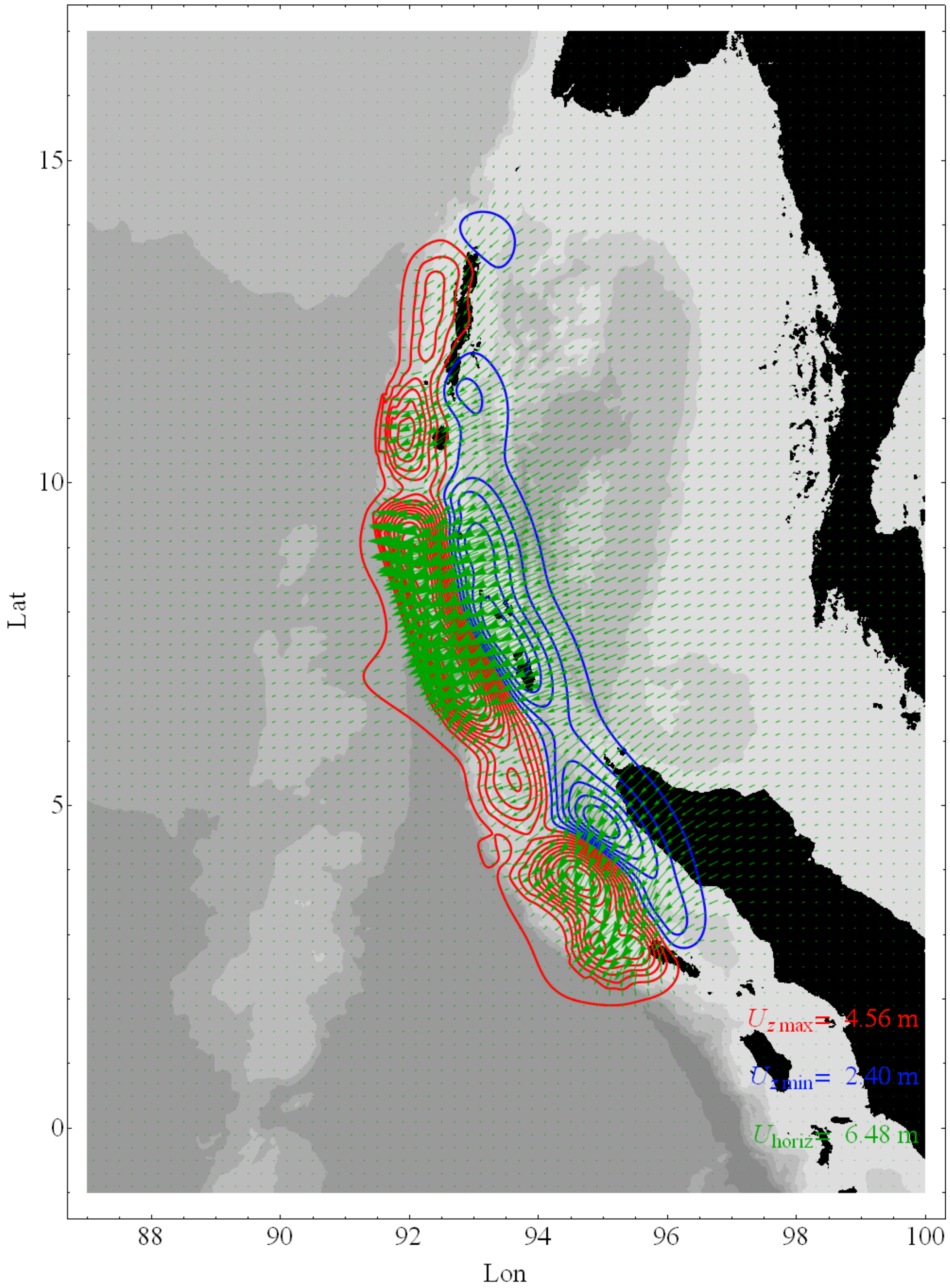
bipolar, a/b=2,   time=500 s



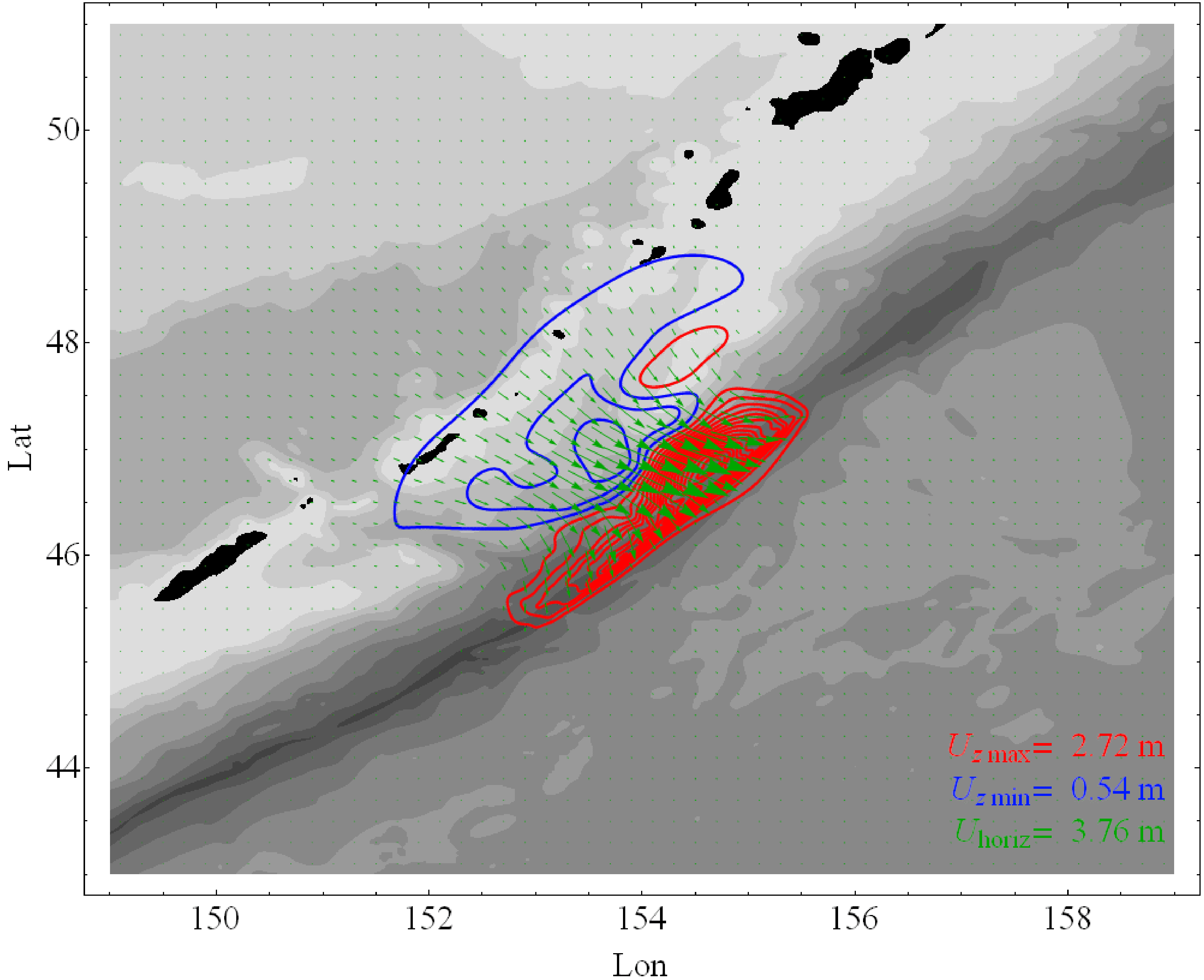
Полярность волны определяется полярностью деформации дна в ближайшей к точке наблюдения области очага цунами



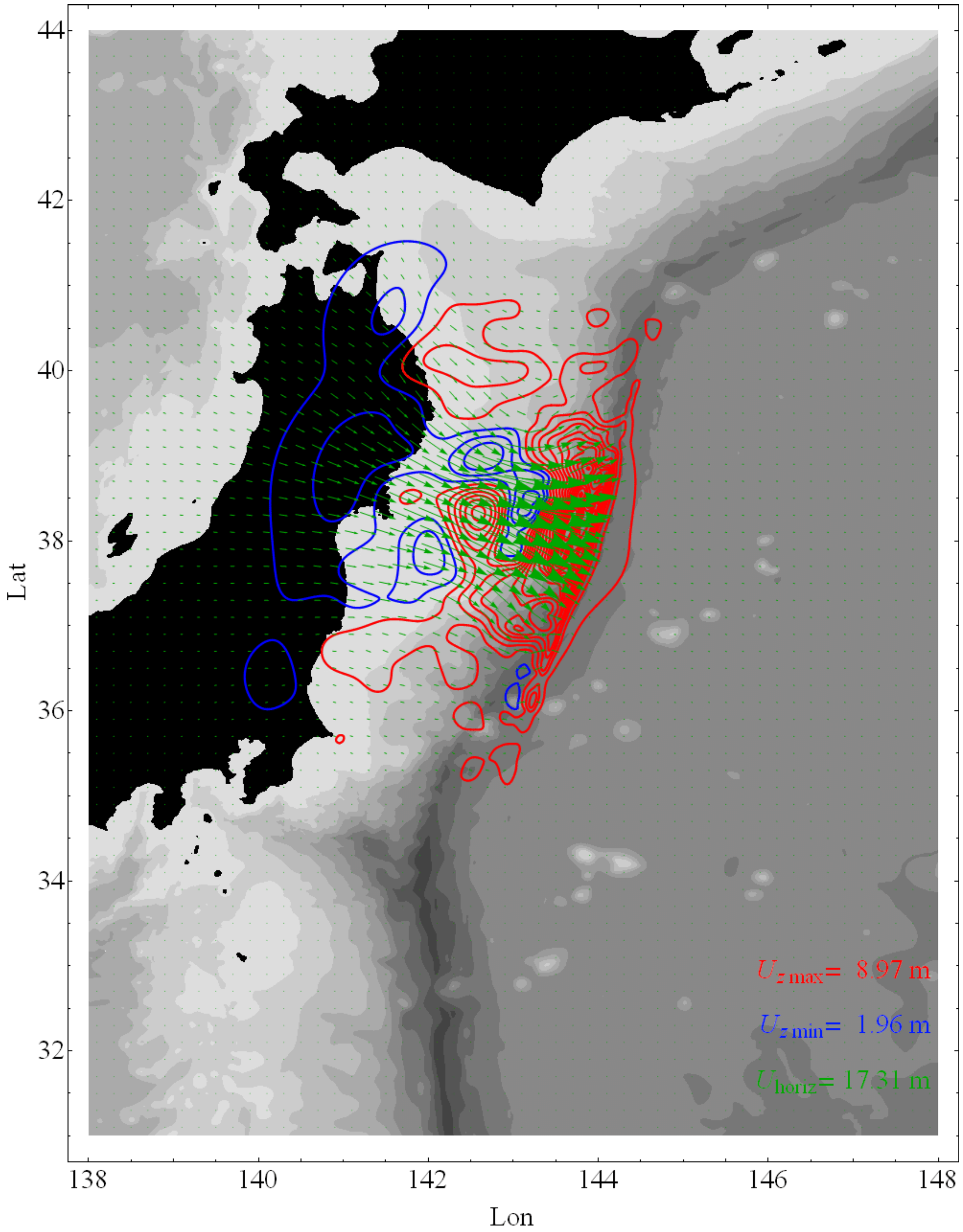
Суматра, 26.12.2004



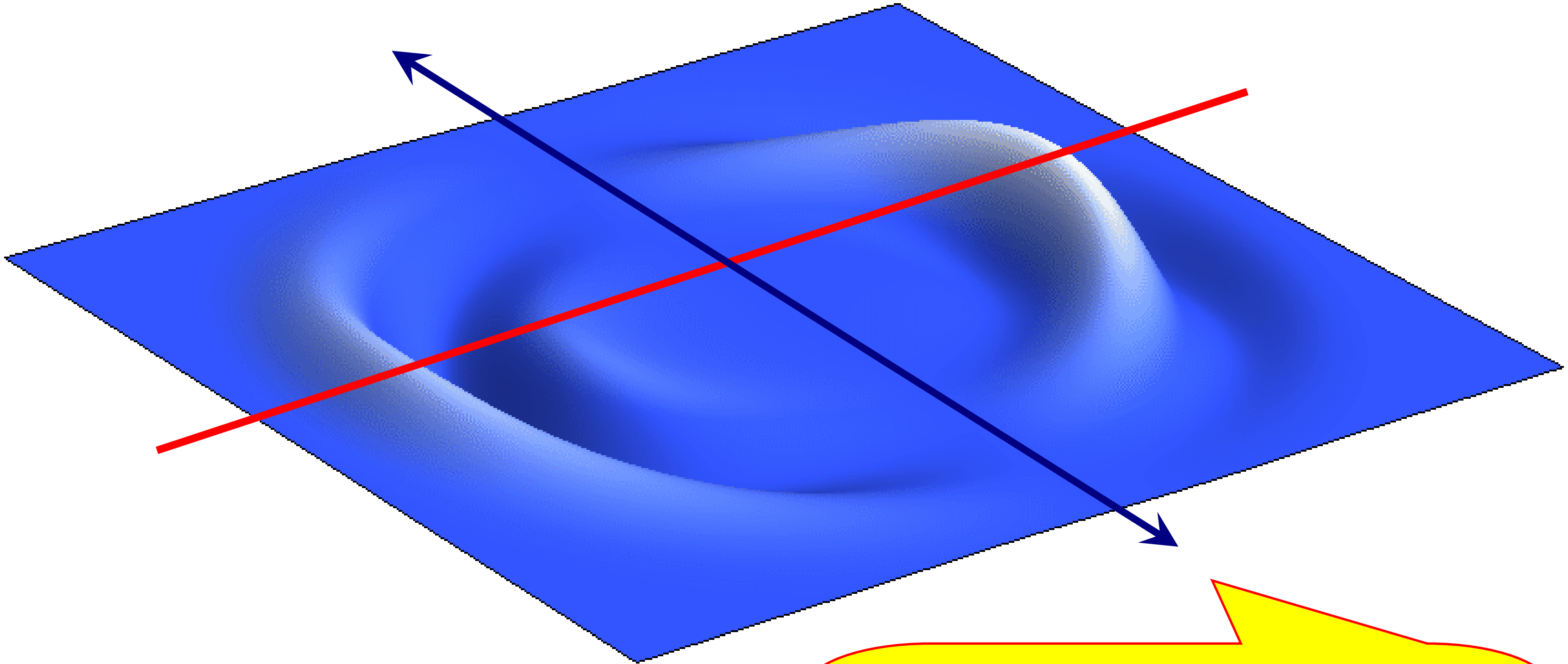
Центральные Курилы (Симушир), 15.11.2006



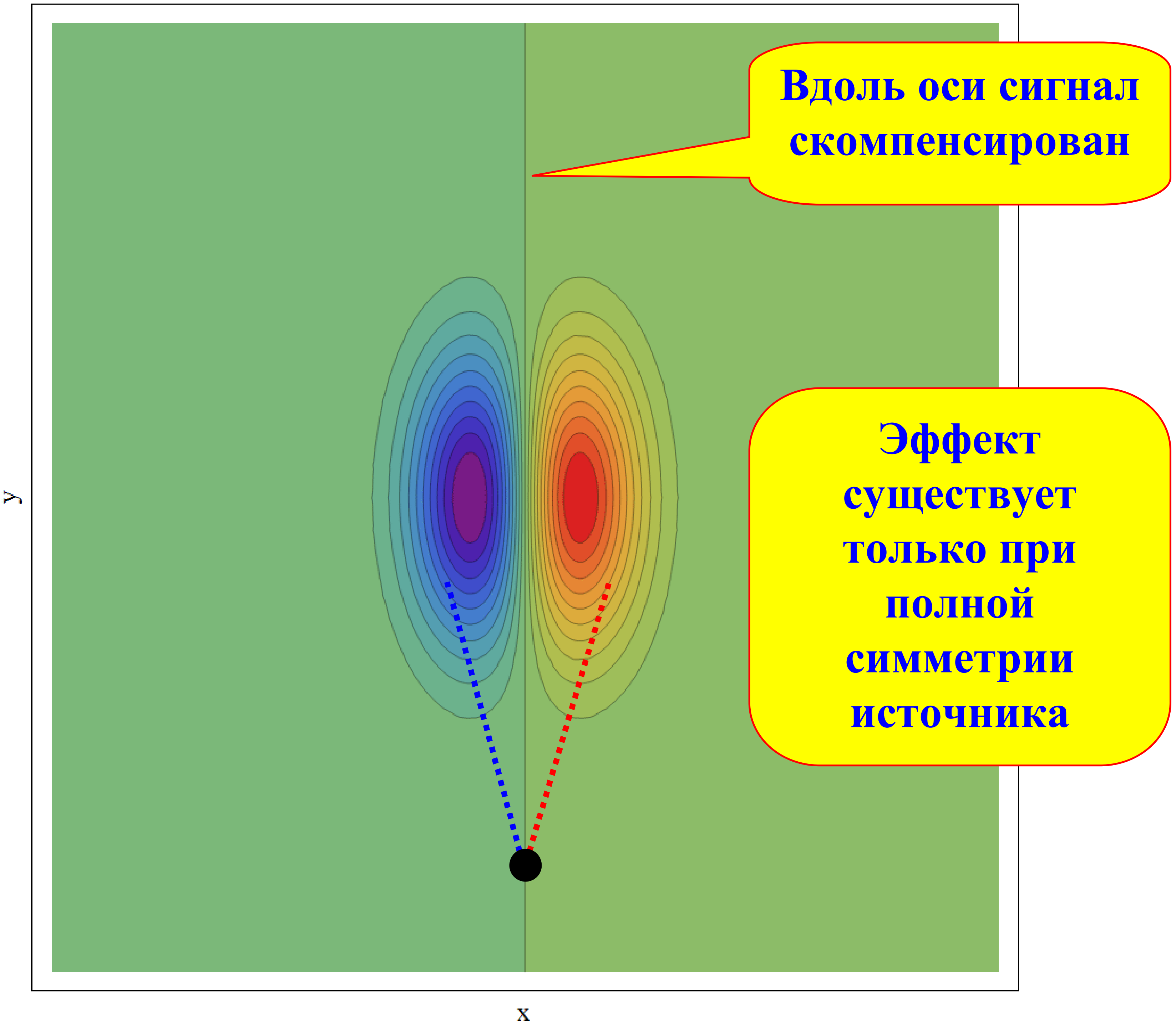
Япония (Тохоку), 11.03.2011



bipolar, a/b=2,   time=500 s



Волна не излучается направлении оси источника


Вдоль оси сигнал скомпенсирован
Эффект существует только при полной симметрии источника
y
x

Линейная теория длинных волн или “мелкой воды”

$$|\xi| << H$$

$$H << \lambda$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

$$c = \sqrt{gH}$$

Линейная потенциальная теория волн

$$|\xi| << \lambda$$

$$H \qquad \lambda$$

произвольное соотношение

или

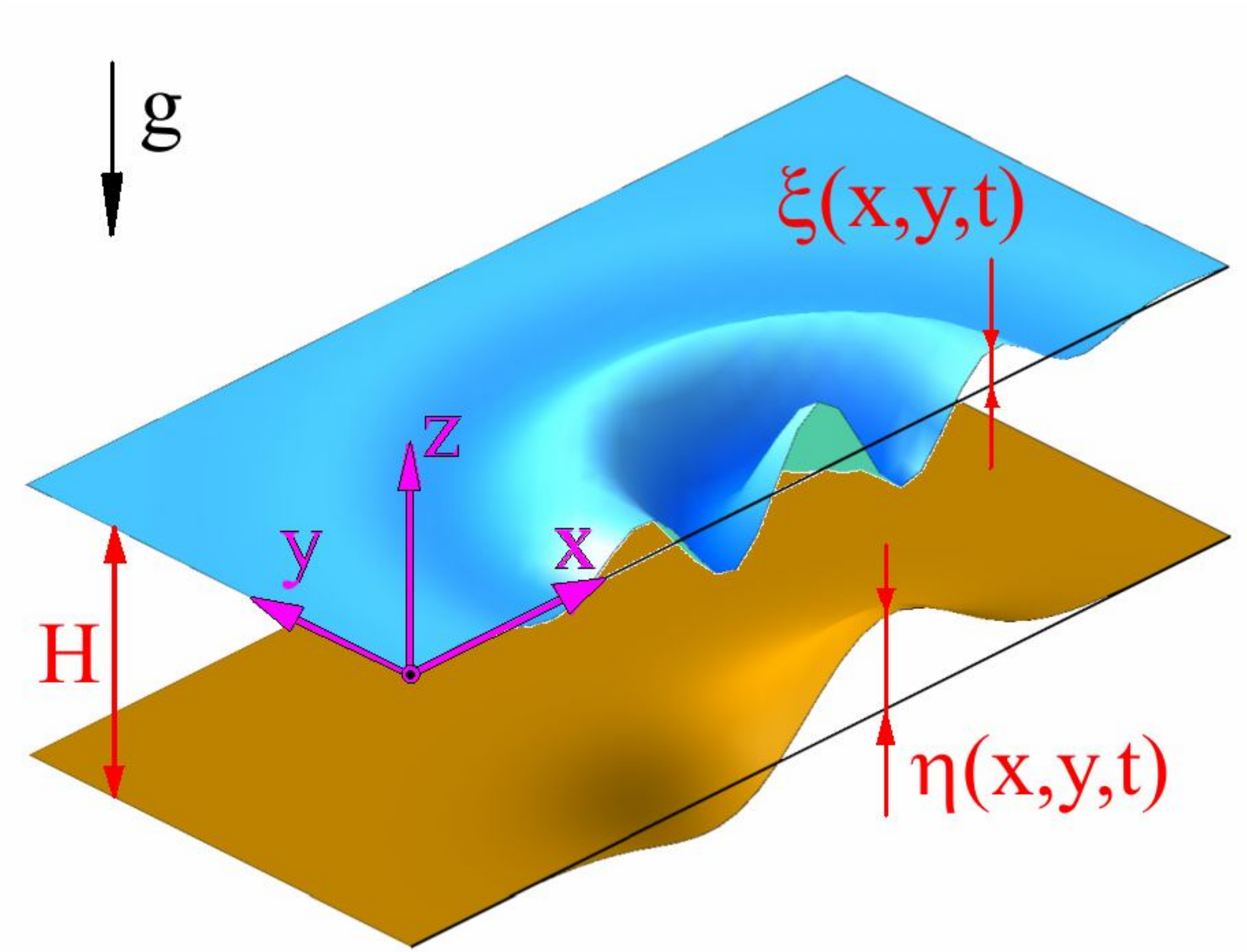
Потенциальная теория волн бесконечно малой амплитуды

Основные физические предположения:

- идеальная (невязкая) жидкость;
- несжимаемая жидкость;
- линейное приближение (волны малой амплитуды);
- пренебрежем вращением Земли.

Генерация цунами движениями дна: базовые закономерности (2D & 3D)

$$H = \text{const}, \quad |\eta| << H$$



Система уравнений для описания линейных гравитационных волн

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\dfrac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \\ \operatorname{div}\left(\vec{v}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} \equiv \left(u, v, w\right)$$

Граничные условия:

$$p\big|_{z=0} = p_{атм}$$

$$w\big|_{z=-H} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\vec{v} = \vec{\nabla} F$$

потенциал скорости течения

$$\vec{v} \equiv (u, v, w)$$

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial F}{\partial z}$$

Математическая постановка 2D задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -g \dfrac{\partial F}{\partial z}, \quad z = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{\partial \eta}{\partial t}, \quad z = -H \end{cases}$$

2D уравнение Лапласа

Граничное условие на свободной поверхности воды

Граничное условие на дне

Скорость движения дна – источник волн

$$\xi = -\frac{1}{g} \frac{\partial F}{\partial t}\bigg|_{z=0}, \qquad u = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad w = \frac{\partial F}{\partial z}$$

Аналитическое решение 2D задачи

$$\xi = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{p^2 \exp(pt - ikx)}{\mathrm{ch}(kH)\left[gk\,\mathrm{th}(kH) + p^2\right]} H(p,k)$$

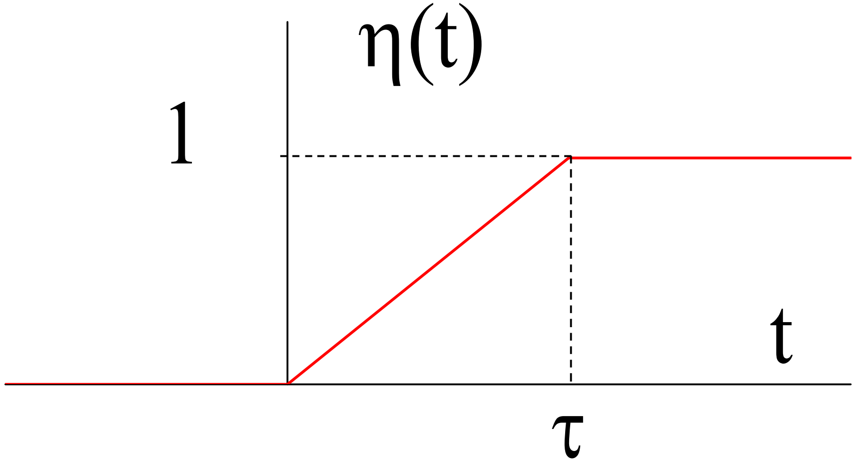
$$u = \frac{1}{4\pi^2}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{p\exp(pt - ikx)\,\mathrm{ch}(kz)\left[gk - p^2\,\mathrm{th}(kz)\right]}{\mathrm{ch}(kH)\left[gk\,\mathrm{th}(kH) + p^2\right]} H(p,k)$$

$$w = -\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{p\exp(pt - ikx)\,\mathrm{ch}(kz)\left[gk\,\mathrm{th}(kz) - p^2\right]}{\mathrm{ch}(kH)\left[gk\,\mathrm{th}(kH) + p^2\right]} H(p,k)$$

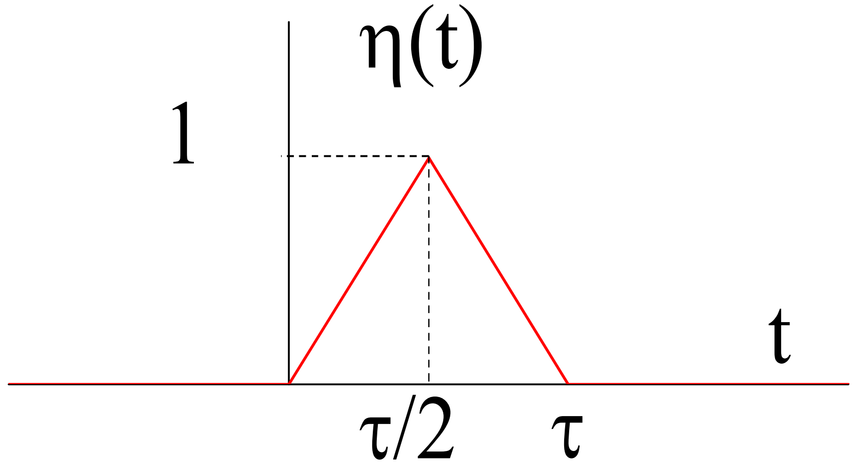
где

$$H(p,k) = \int_{0}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \exp(-pt + ikx)\,\eta(x,t)$$

$$\eta(x,t) = \eta_s(x)\,\eta_t(t)$$



«поршневая» подвижка дна (с остаточным смещением)



«мембранная» подвижка дна (без остаточного смещения)