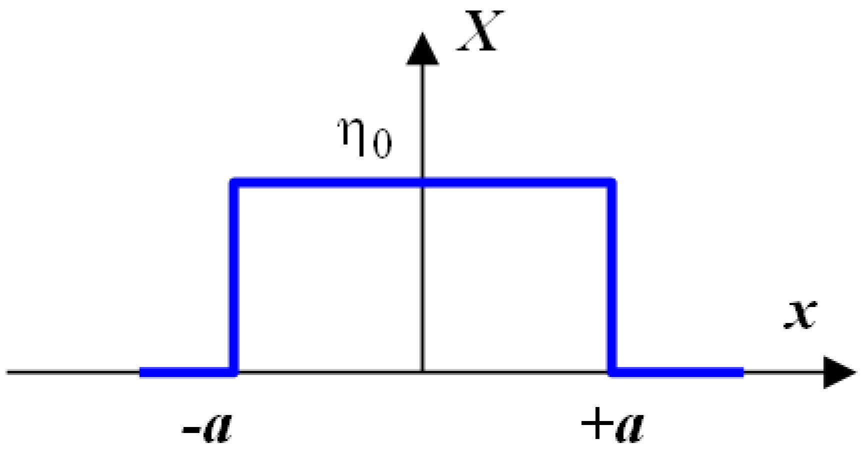
Носов Михаил Александрович

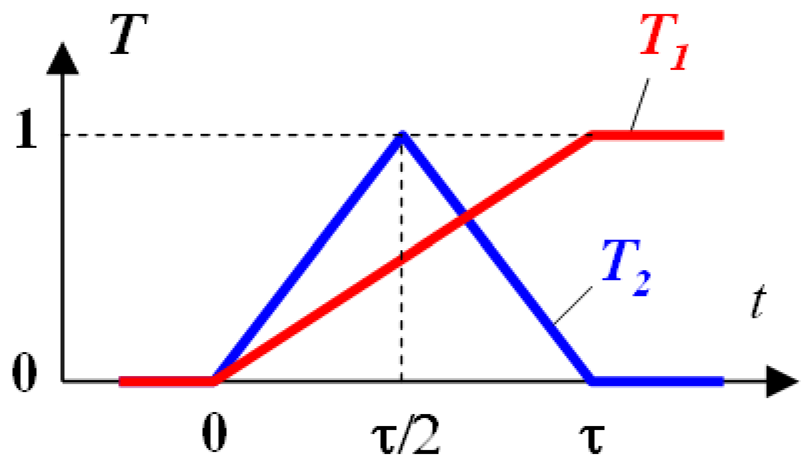
Физика цунами

Межфакультетский учебный курс Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

Лекция №10

Генерация волн поршневой (с остаточным смещением) и мембранной (без остаточного смещения) подвижками



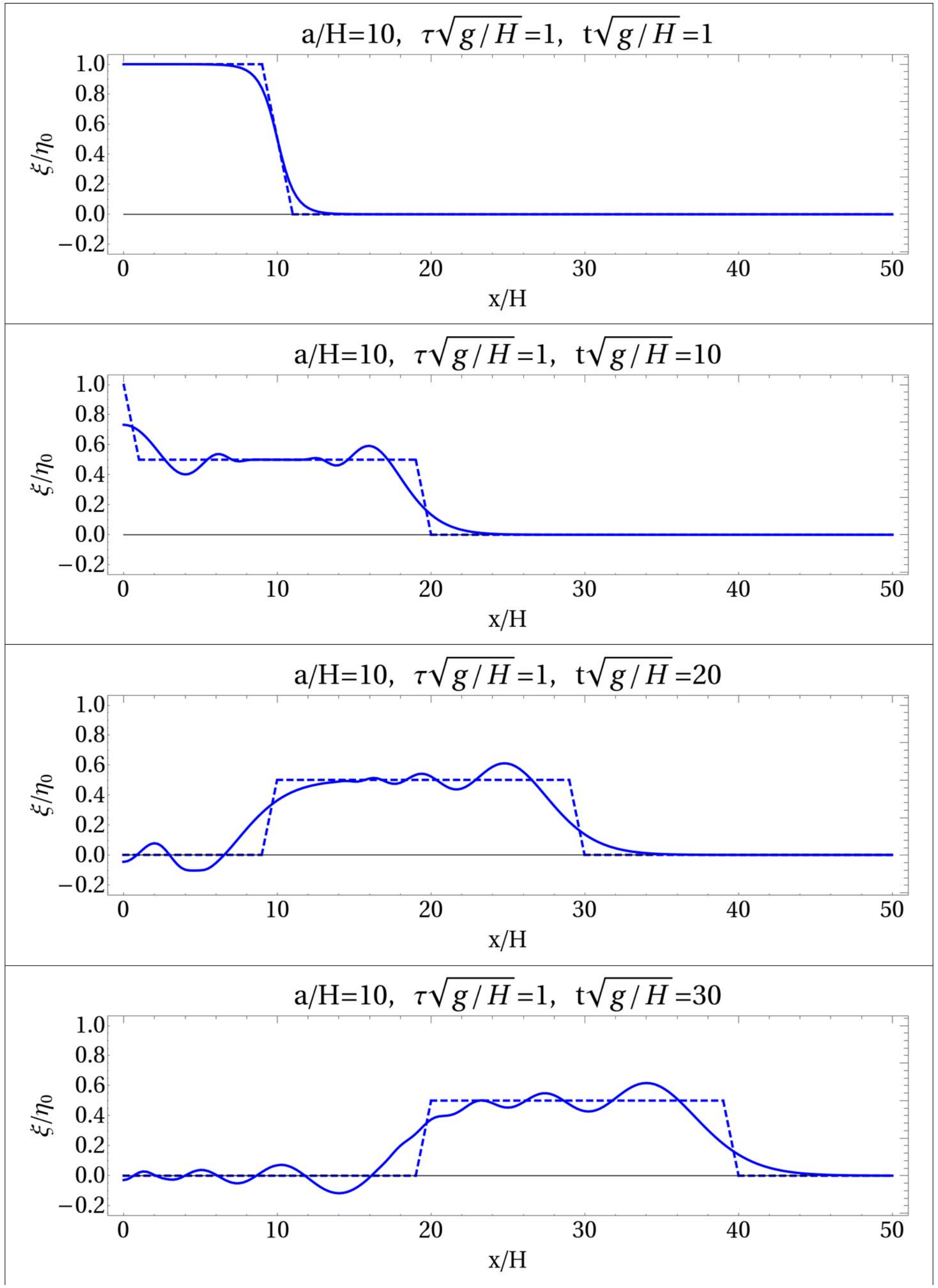


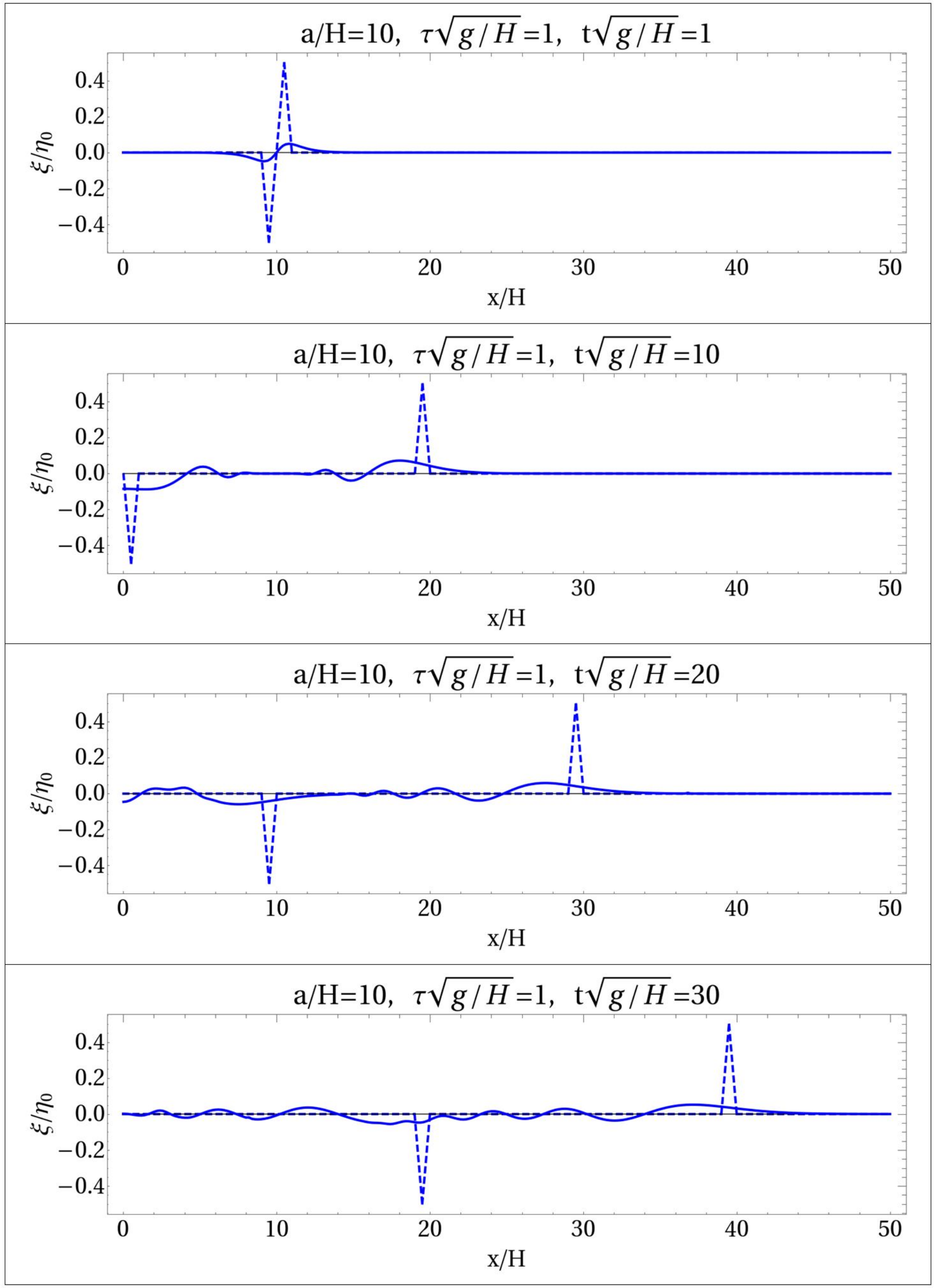
линейная теория длинных волн

линейная потенциальная теория волн

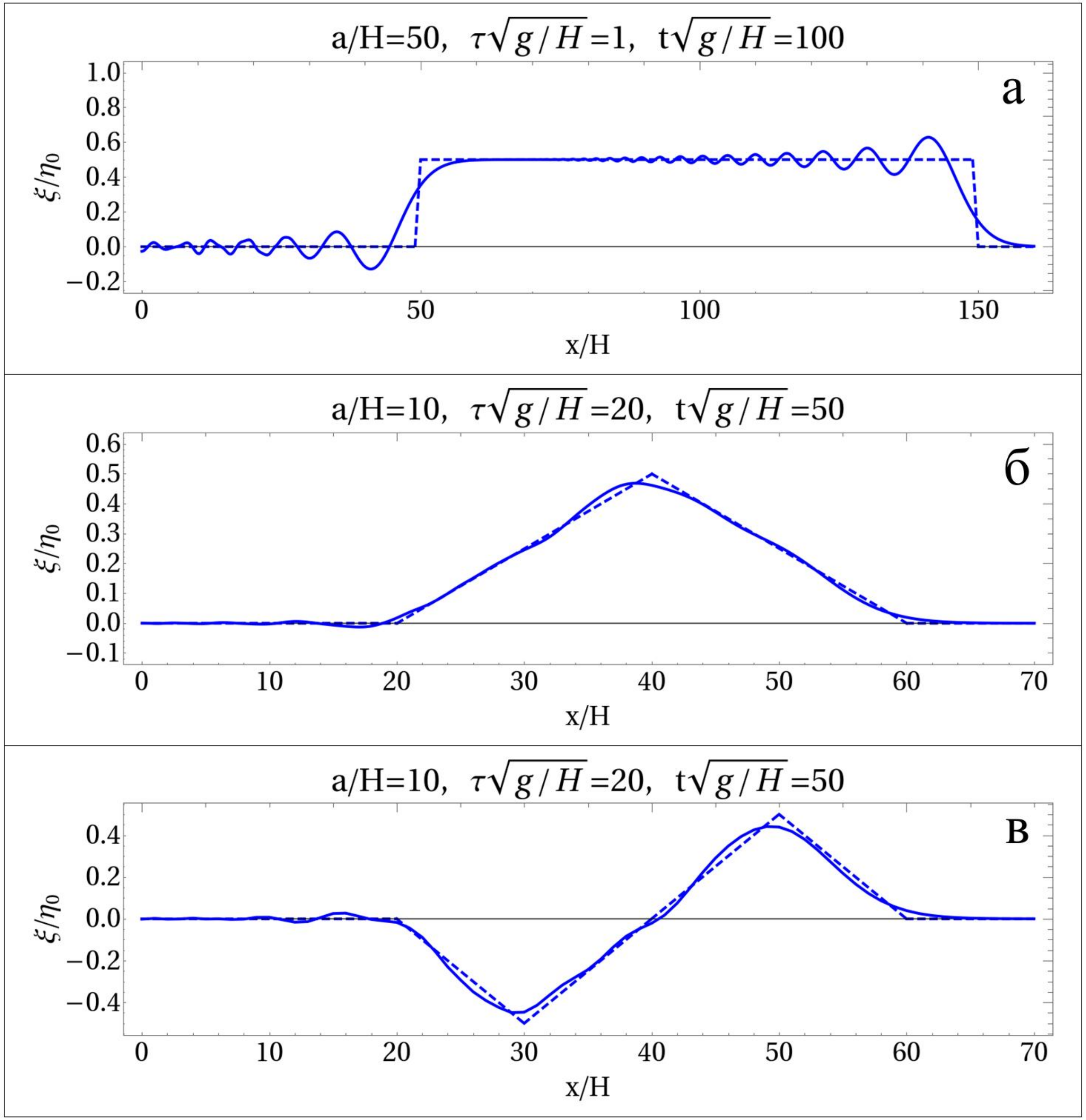
сравнение

с остаточным смещением   без остаточного смещения

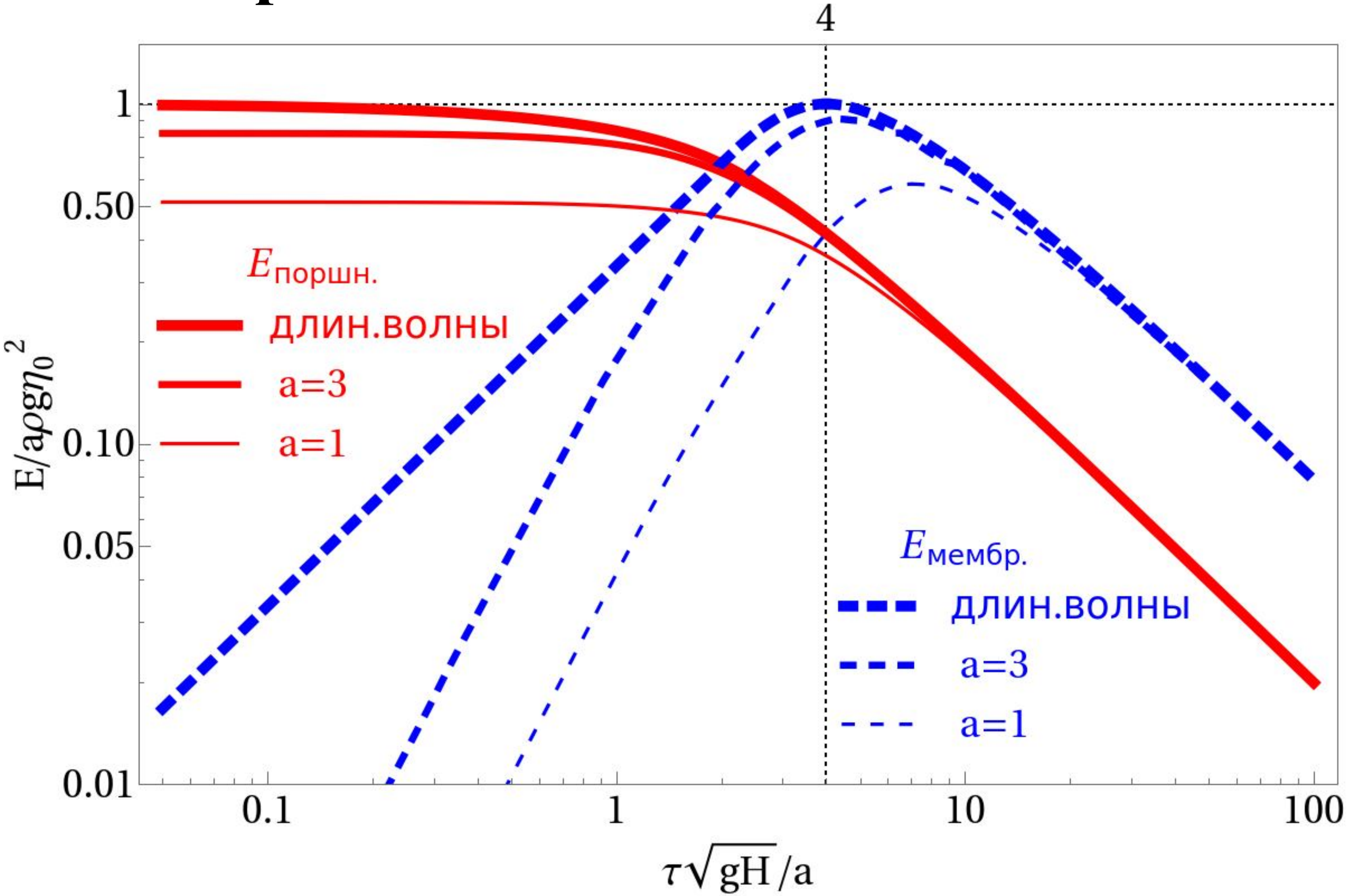




Когда теория длинных волн и потенциальная теория дают близкий результат?



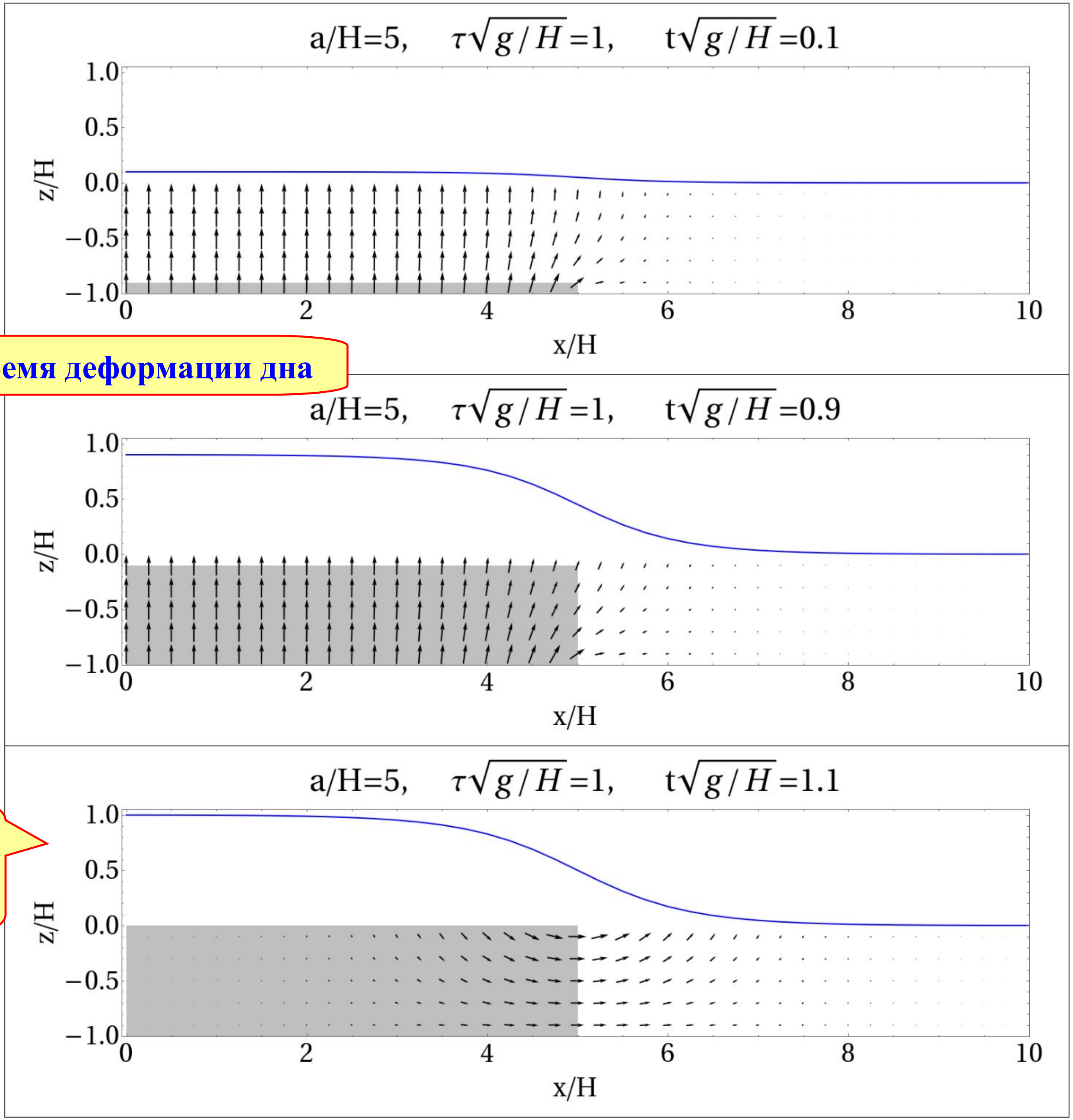
Энергия волн, возбуждаемых поршневой и мембранной подвижками, как функция продолжительности подвижки



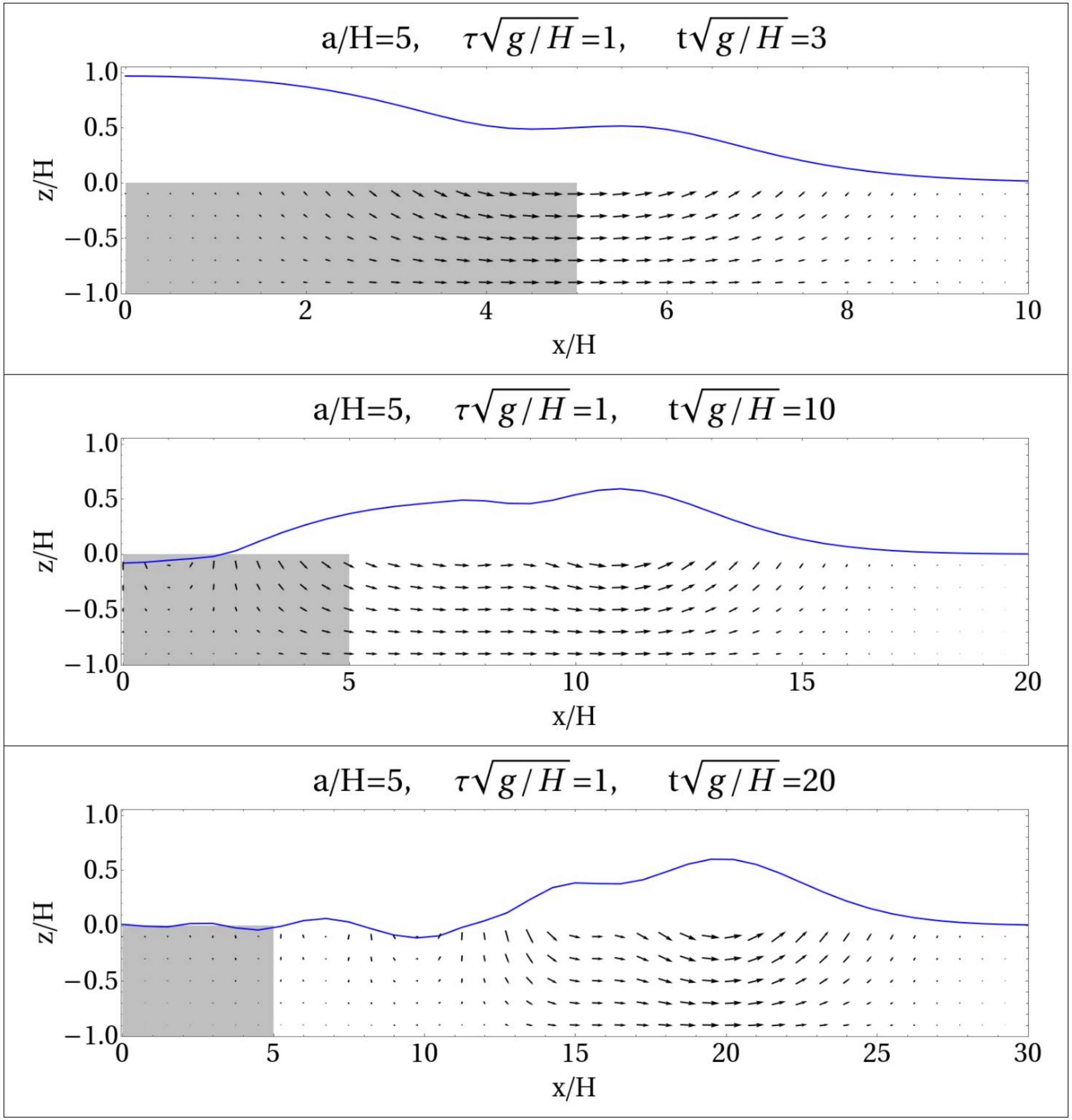
Поле скорости течения вблизи источника

во время деформации дна

после завершения деформации дна

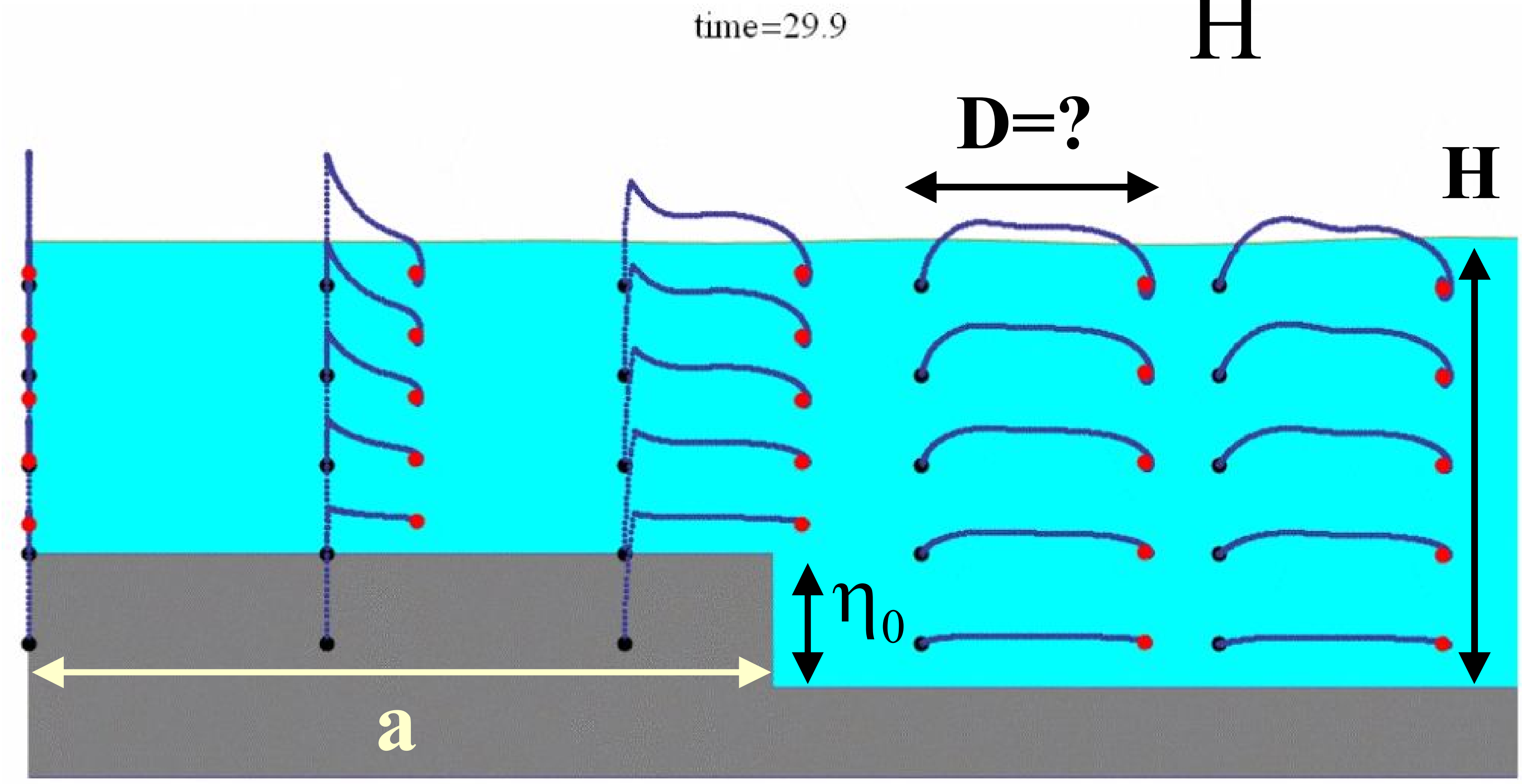


Поле скорости течения вблизи источника



«Остаточное» смещение частиц воды вблизи источника

$$a\eta_0 = HD \quad \Rightarrow \quad D = \frac{a\eta_0}{H}$$

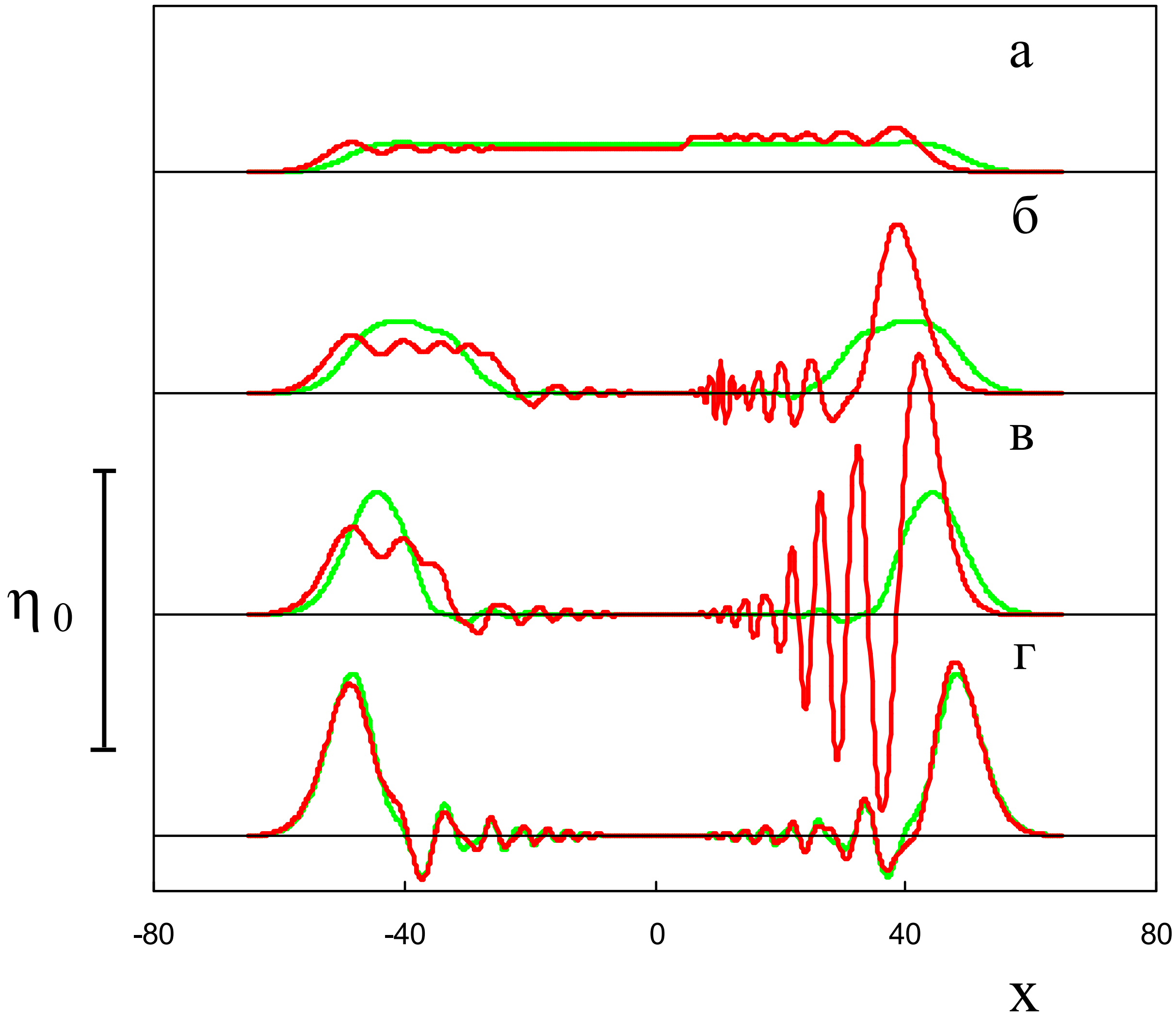


Сравнительный анализ эффективности поршневой — и бегущей — подвижек

Расчет выполнен при t=50, L=10.

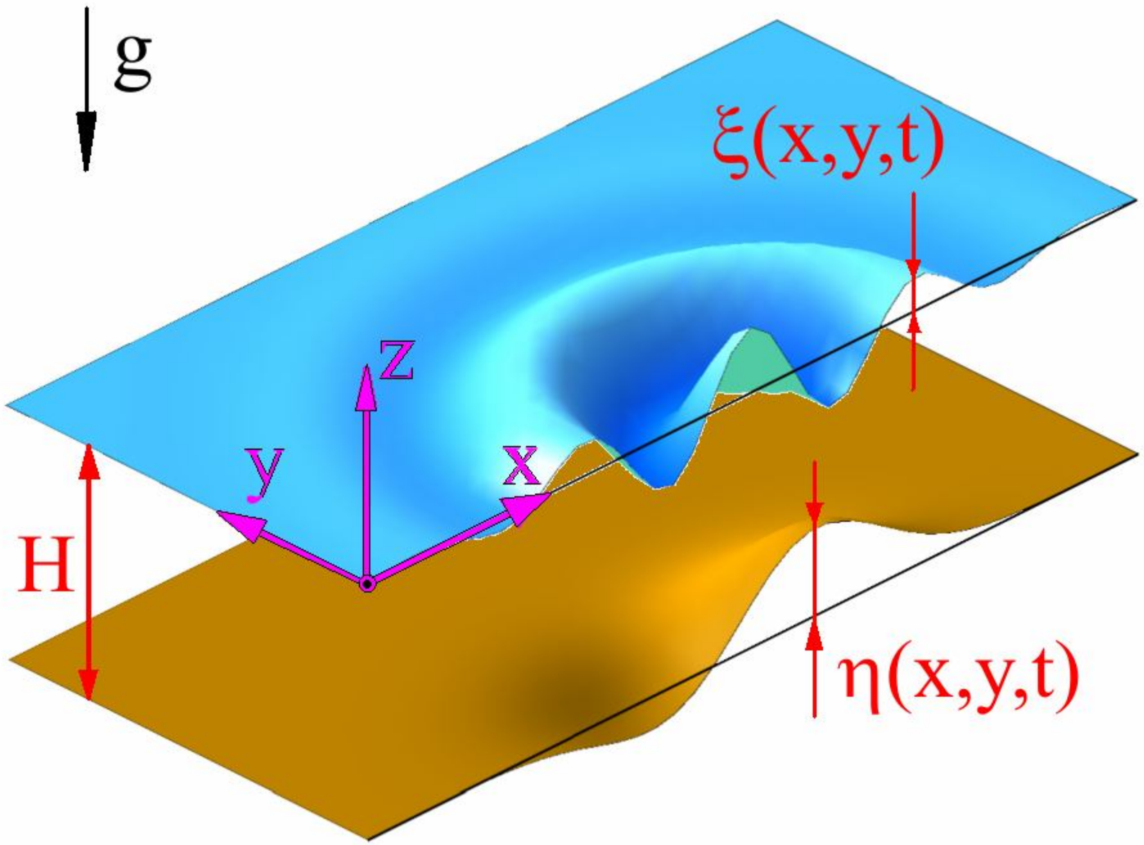
Кривые а-г соответствуют v=0.2, 0.5, 1, 10 или τ=50, 20, 10 и 1.

$$L = v\tau$$



3D задача о генерации цунами деформациями дна (линейная потенциальная теория)

$$H = \text{const}, \quad |\eta| << H$$



ПЕРЕХОД

2D → 3D

не реальные!
т.к. H=const

Позволяет:

1. рассматривать реалистичные задачи;
2. исследовать направленность излучения волн;
3. исследовать закономерности трансформации волн при удалении от источника.

Математическая постановка 3D задачи

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -g\dfrac{\partial F}{\partial z}, \qquad z = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{\partial \eta}{\partial t}, \qquad z = -H
\end{cases}
$$

3D уравнение Лапласа

Граничное условие на свободной поверхности воды

Граничное условие на дне

Скорость движения дна – источник волн

$$
\xi = -\frac{1}{g}\frac{\partial F}{\partial t}\bigg|_{z=0}, \qquad u = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial z}
$$

Аналитическое решение 3D задачи

$$\xi(x,y,t)=\frac{1}{8\pi^3 i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}dp\int_{-\infty}^{+\infty}dm\int_{-\infty}^{+\infty}dn\,\frac{p^2\exp(pt-imx-iny)}{ch(kH)\left[gk\,th(kH)+p^2\right]}H(p,m,n)$$

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{8\pi^3}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}dp\int_{-\infty}^{+\infty}dm\int_{-\infty}^{+\infty}dn\,\frac{m\,p\exp(pt-imx-iny)\,ch(kz)\left[gk-p^2\,th(kz)\right]}{k\,ch(kH)\left[gk\,th(kH)+p^2\right]}H(p,m,n)$$

$$v(x,y,z,t)=\frac{1}{8\pi^3}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}dp\int_{-\infty}^{+\infty}dm\int_{-\infty}^{+\infty}dn\,\frac{n\,p\exp(pt-imx-iny)\,ch(kz)\left[gk-p^2\,th(kz)\right]}{k\,ch(kH)\left[gk\,th(kH)+p^2\right]}H(p,m,n)$$

$$w(x,y,z,t)=-\frac{1}{8\pi^3 i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}dp\int_{-\infty}^{+\infty}dm\int_{-\infty}^{+\infty}dn\,\frac{p\exp(pt-imx-iny)\,ch(kz)\left[gk\,th(kz)-p^2\right]}{ch(kH)\left[gk\,th(kH)+p^2\right]}H(p,m,n)$$

где

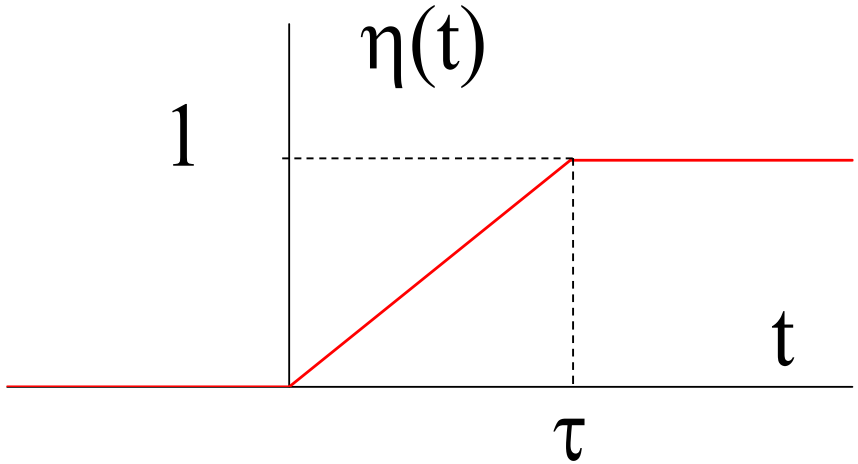
$$H(p,m,n)=\int_{0}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,\exp(-pt+imx+iny)\,\eta(x,y,t)$$

$$k^2=m^2+n^2$$

Динамическая деформация дна – источник волн

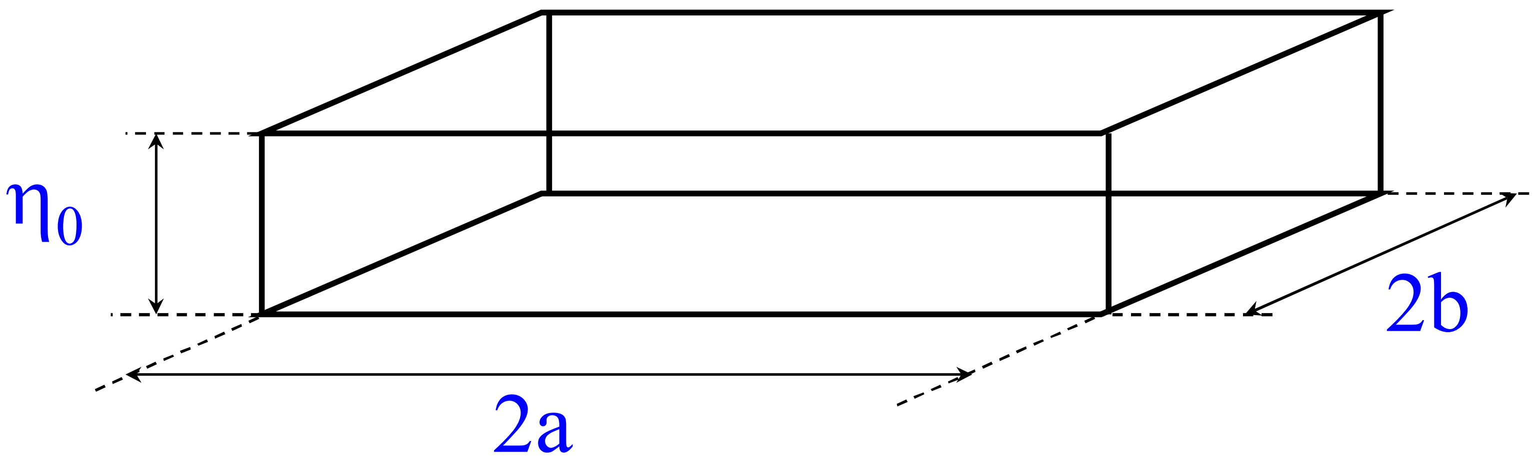
Модельный закон деформации дна

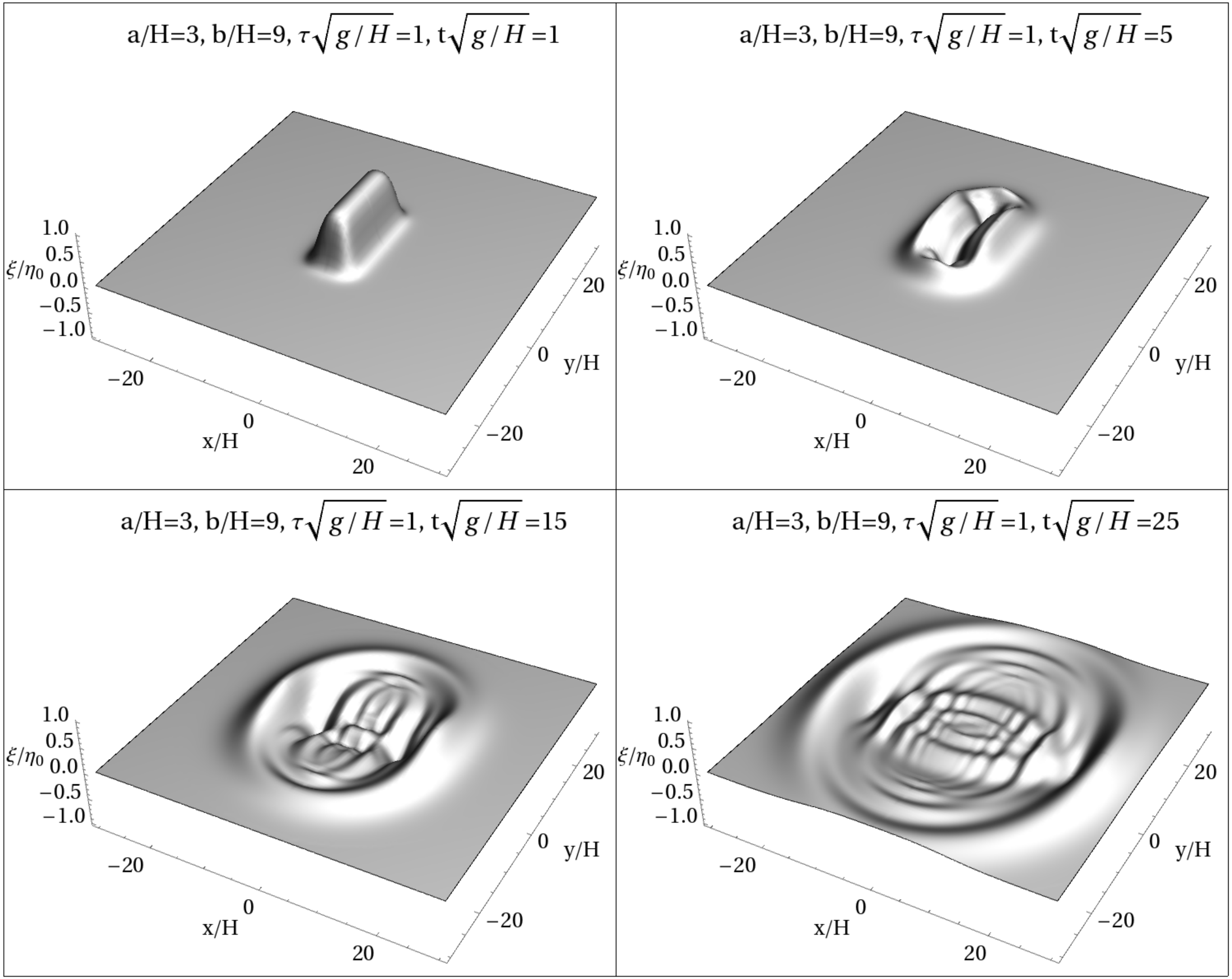
$$\eta(x,y,t) = \eta_s(x,y)\,\eta_t(t)$$



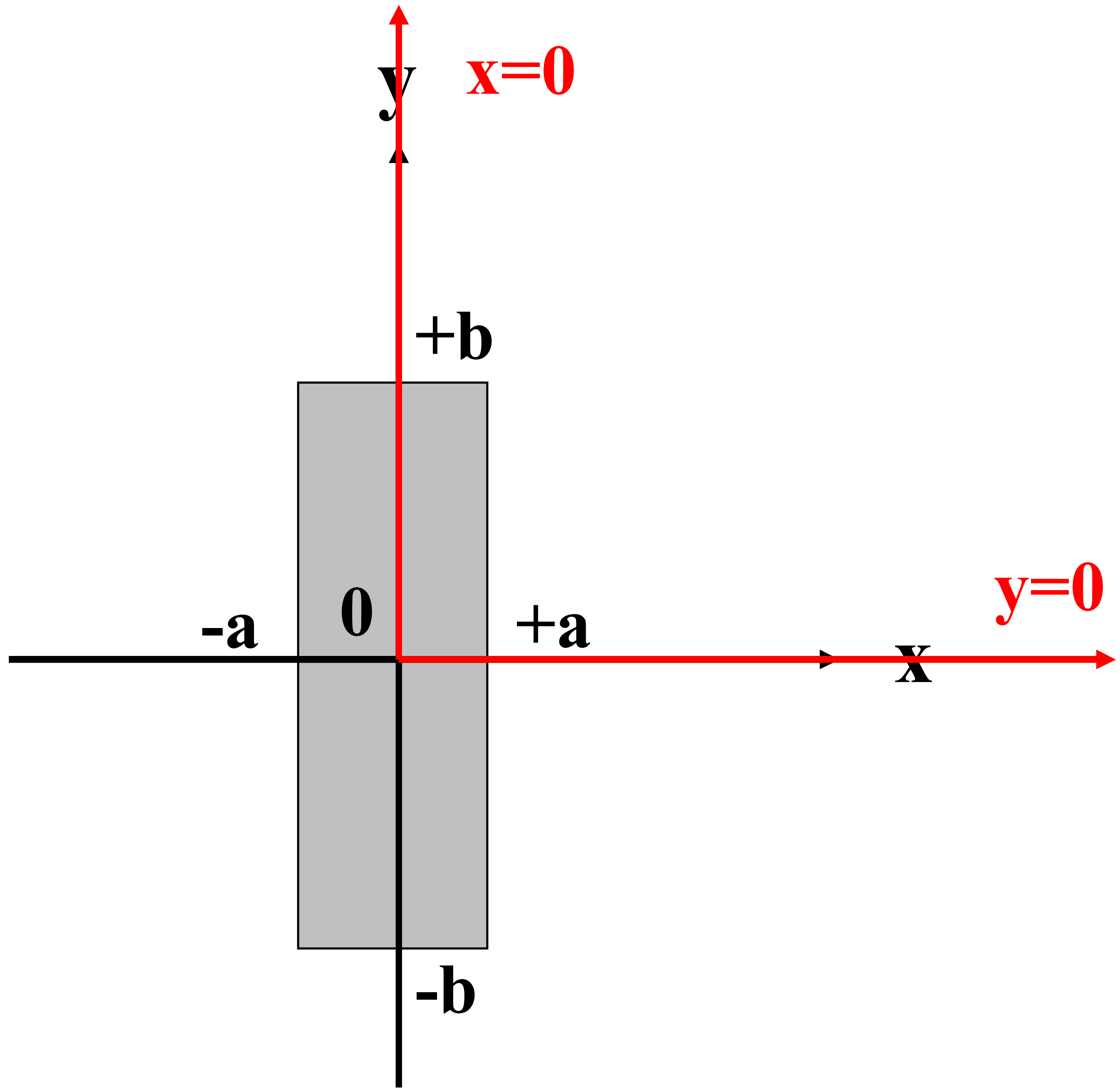
поршневая подвижка (с остаточным смещением)

$$\eta_s(x,y) = \eta_0\left[\theta(x+a) - \theta(x-a)\right] \times \left[\theta(y+b) - \theta(y-b)\right]$$





a/H=3, b/H=9, $\tau\sqrt{g/H}$=1, t$\sqrt{g/H}$=1
a/H=3, b/H=9, $\tau\sqrt{g/H}$=1, t$\sqrt{g/H}$=5
a/H=3, b/H=9, $\tau\sqrt{g/H}$=1, t$\sqrt{g/H}$=15
a/H=3, b/H=9, $\tau\sqrt{g/H}$=1, t$\sqrt{g/H}$=25
ξ/η_0
x/H
y/H

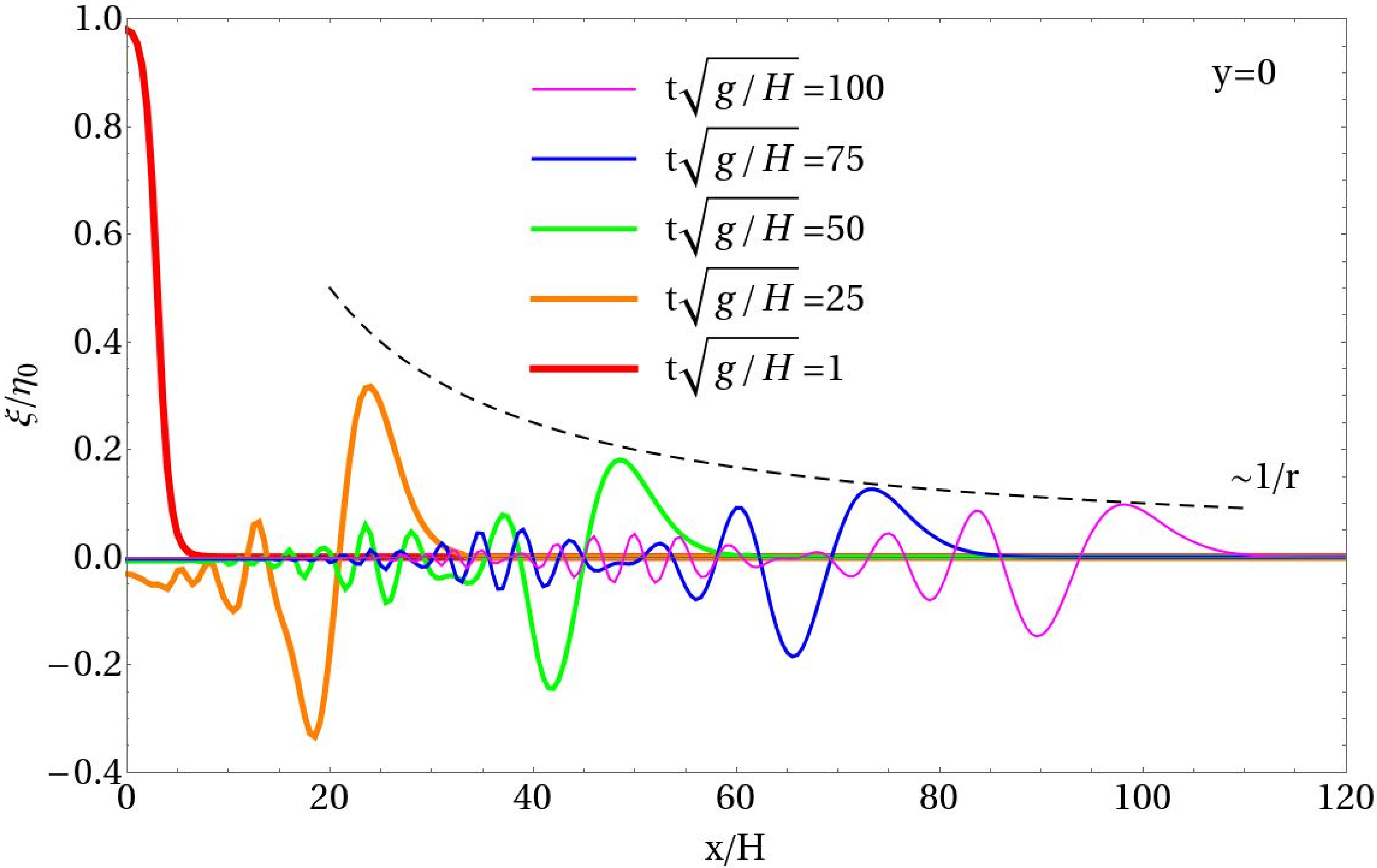


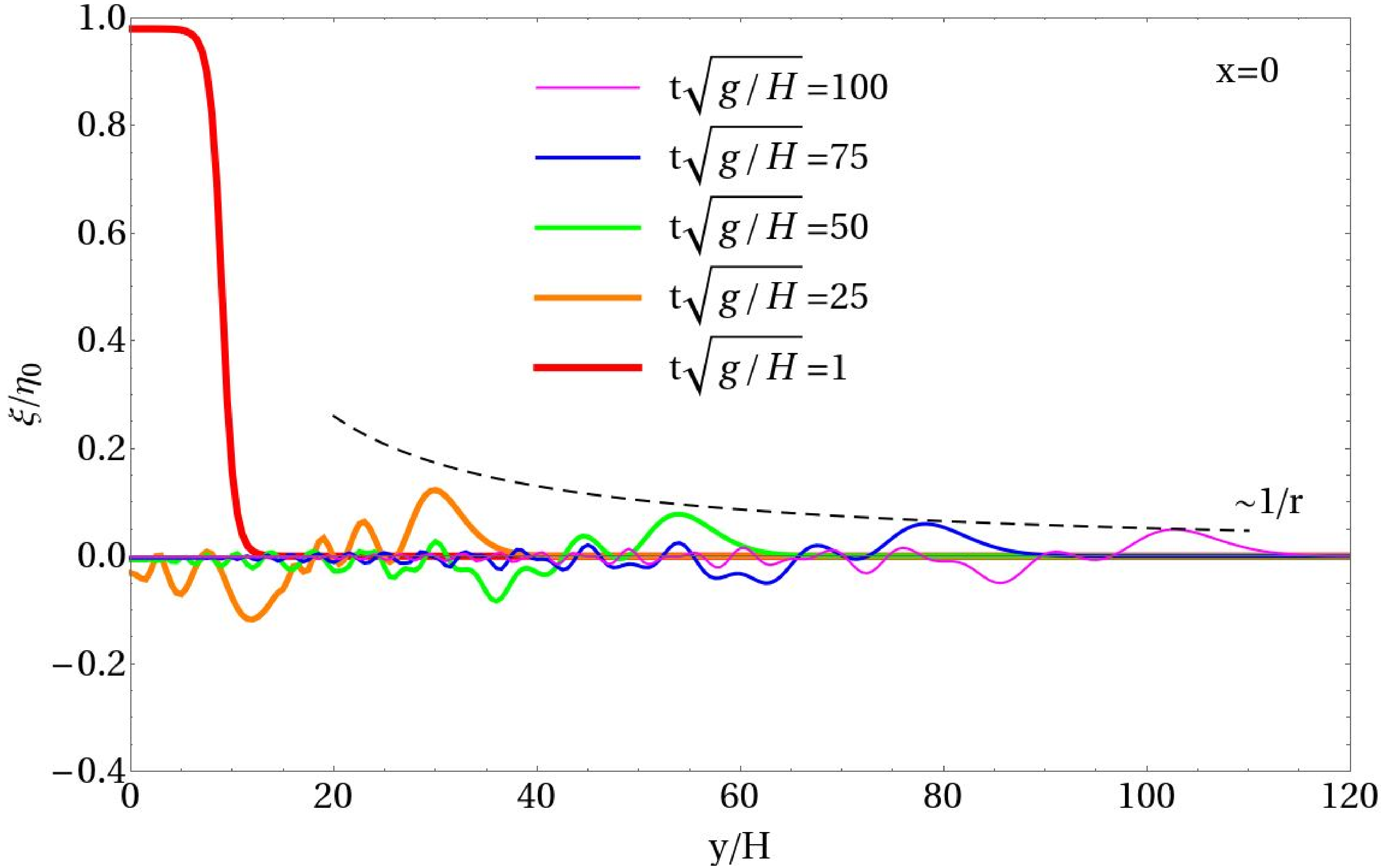
y
x=0
+b
-a
0
+a
y=0
x
-b

1. Возмущение состоит из лидирующей волны и диспергирующего «хвоста»;

2. Лидирующая волна бежит со скоростью длинных волн;

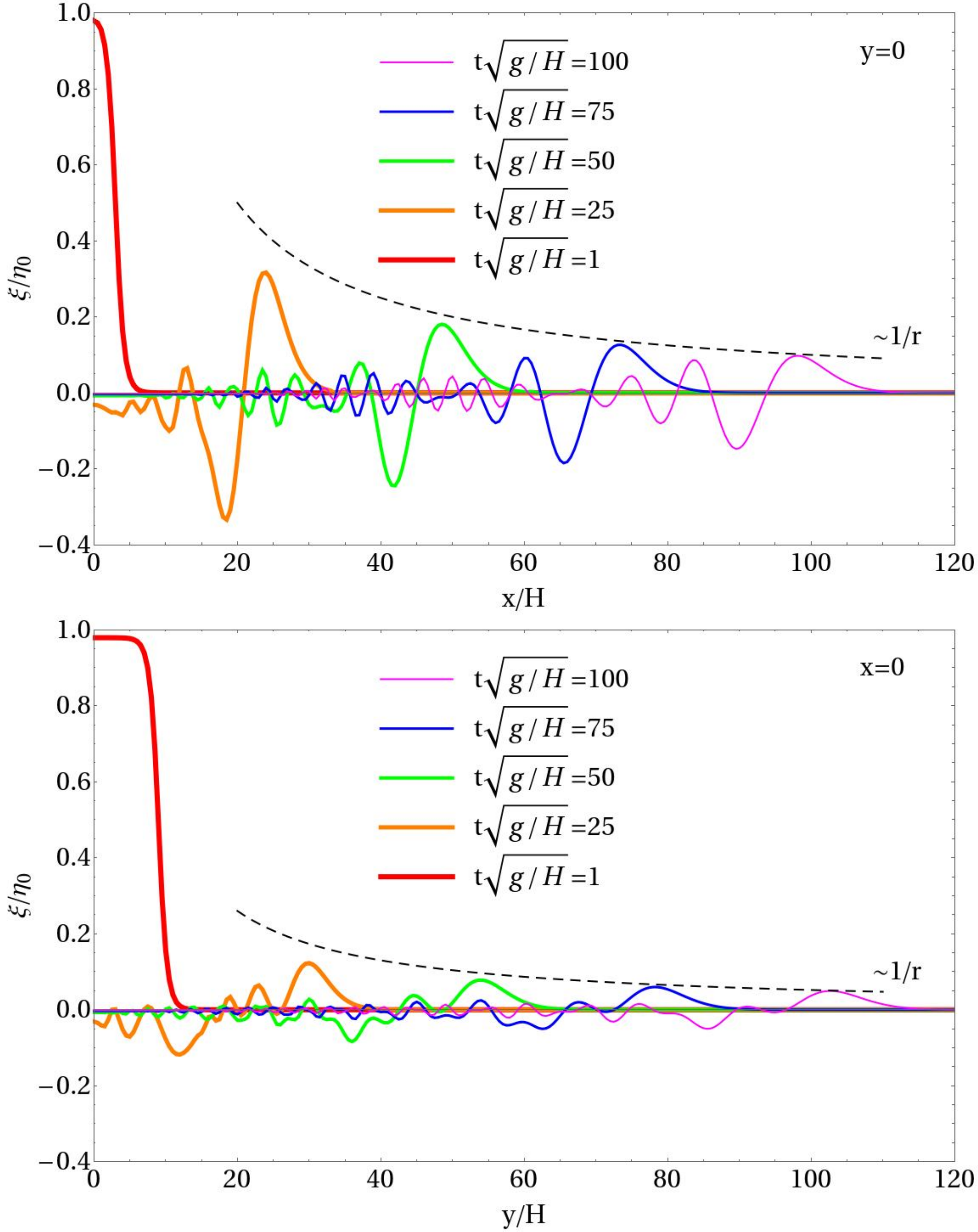
3. Амплитуда волн убывает по закону 1/r, т.е. быстрее чем в теории длинных волн.





1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
0
20
40
60
80
100
120
ξ/η_0
y/H
x=0
$t\sqrt{g/H}=100$
$t\sqrt{g/H}=75$
$t\sqrt{g/H}=50$
$t\sqrt{g/H}=25$
$t\sqrt{g/H}=1$
~1/r

4. Волны с большими амплитудами бегут в направлении короткой оси источника.



Линейная теория длинных волн

$$\lambda >> H$$

$$A << H$$

волны без дисперсии

$$c = \sqrt{gH} \neq f(\lambda)$$

Линейная потенциальная теория волн

$$A << H$$

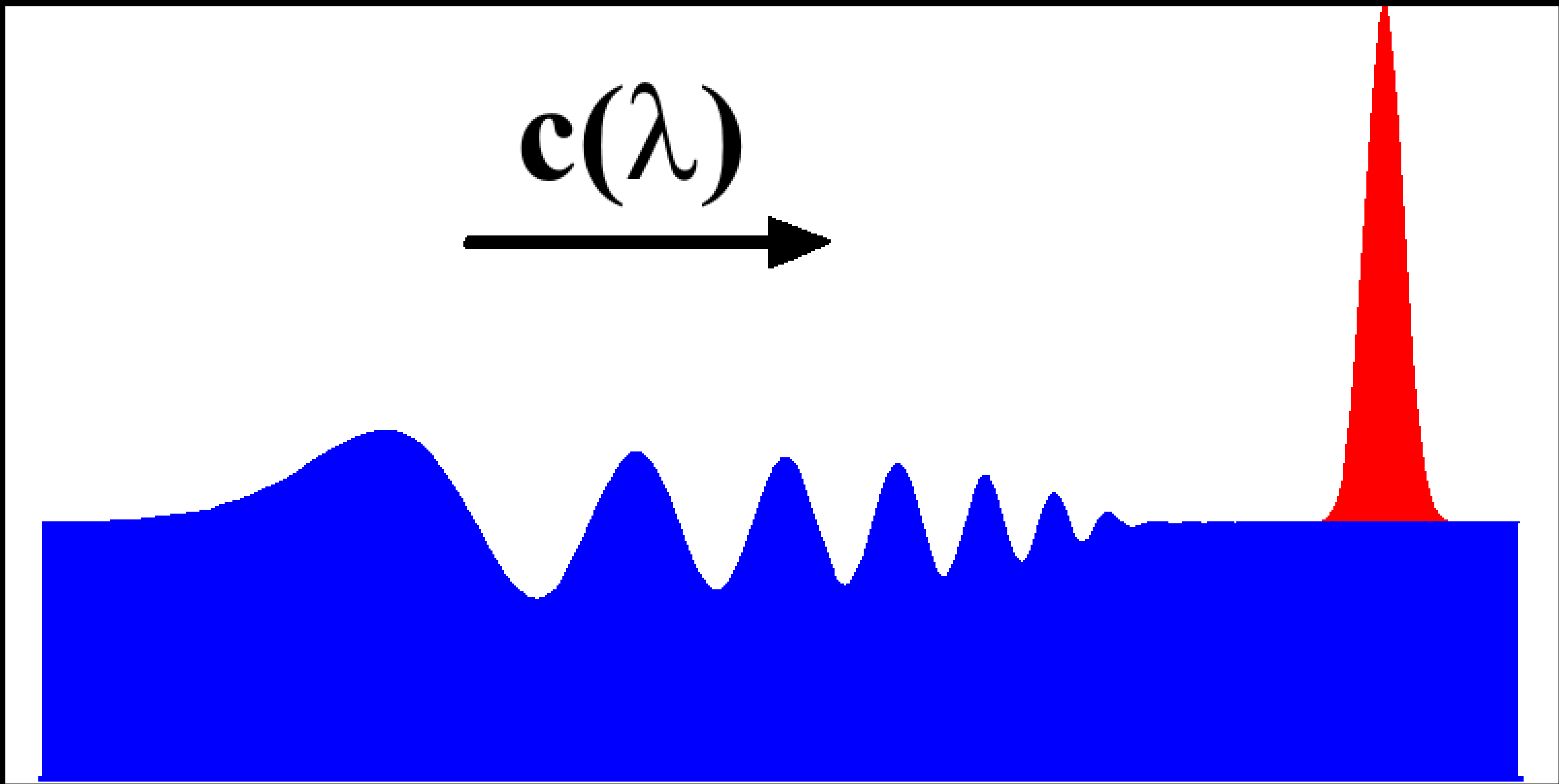
или

$$A << \lambda$$

диспергирующие волны

$$c = f(\lambda)$$

Дисперсионная фокусировка (усиление)



Математическая постановка 2D задачи о линейных гравитационных волнах бесконечно малой амплитуды

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta F = 0$$

$$z = 0: \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$z = -H: \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Общий вид решения уравнения Лапласа

$$F = \left[A \cdot \mathrm{sh}(kz) + B \cdot \mathrm{ch}(kz)\right]\cos(\omega t - k\,x)$$

Решение, удовлетворяющее граничному условию на поверхности

$$F = A\left[\mathrm{sh}(kz) + \frac{gk}{\omega^2}\mathrm{ch}(kz)\right]\cos(\omega t - k\,x)$$

Удовлетворяя граничному усл $\boxed{\mathrm{th}(kH)}$ дне, получаем

$$\mathrm{ch}(kH) - \frac{gk}{\omega^2}\mathrm{sh}(kH) = 0 \qquad \omega^2 = gk\frac{\mathrm{sh}(kH)}{\mathrm{ch}(kH)}$$

Дисперсионное соотношение для гравитационных волн

$$\boxed{\omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kH)}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad c = \lambda / T \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$c = \omega / k$$

циклическая частота

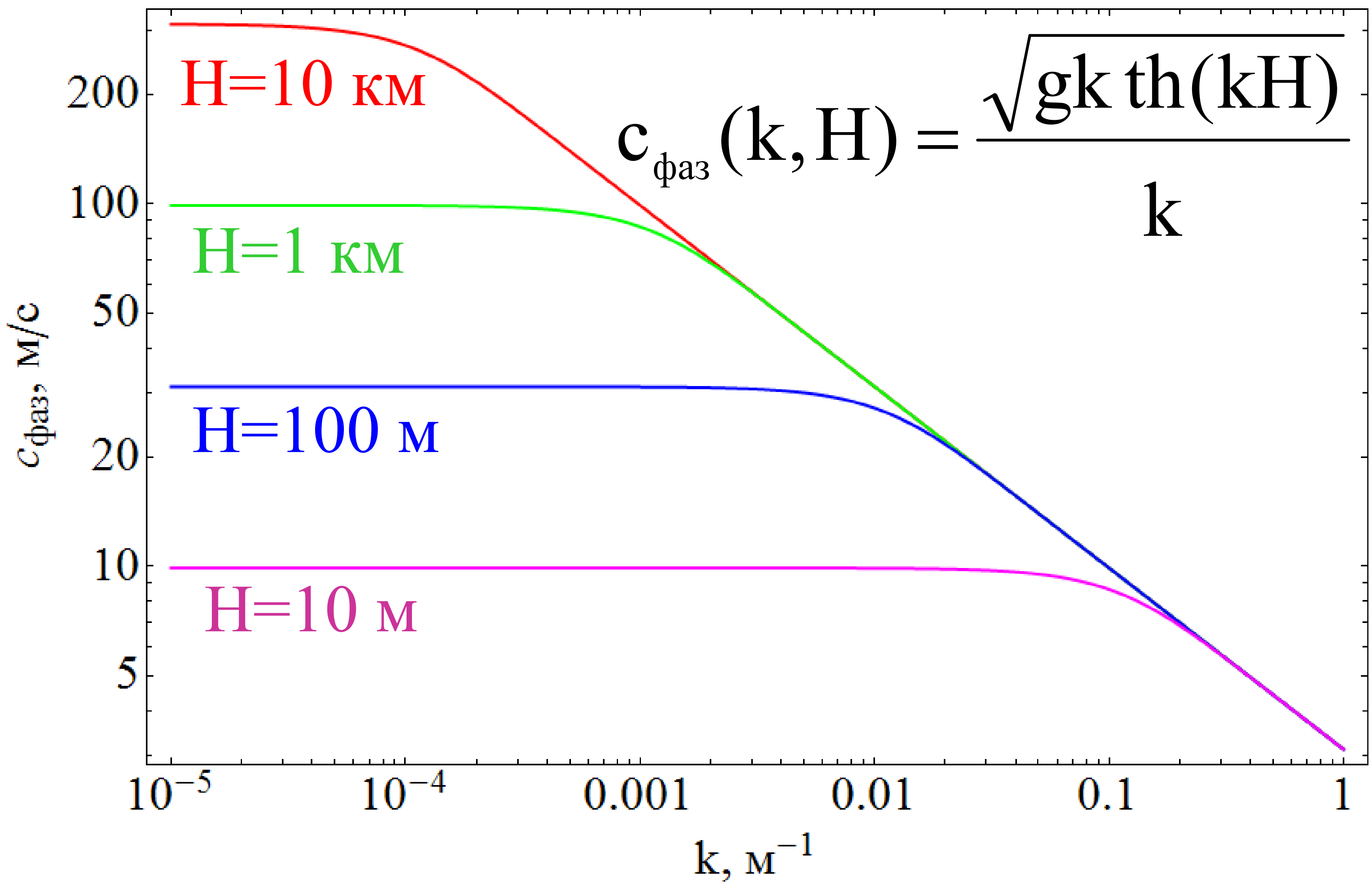
волновое число

Фазовая скорость гравитационных волн

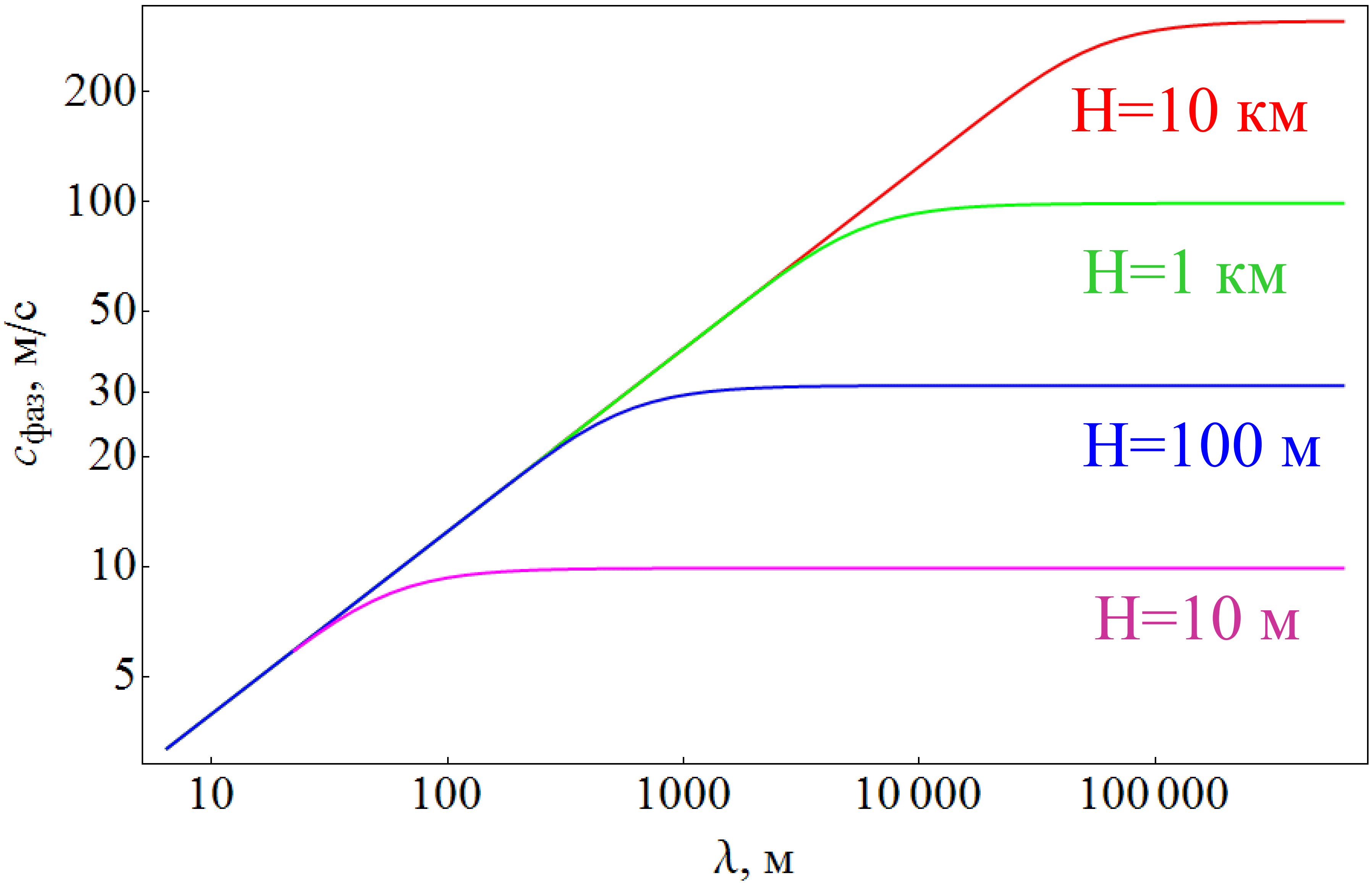
$$c_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{gk\,\mathrm{th}(kH)}}{k}$$

$$\boxed{\omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kH)}$$

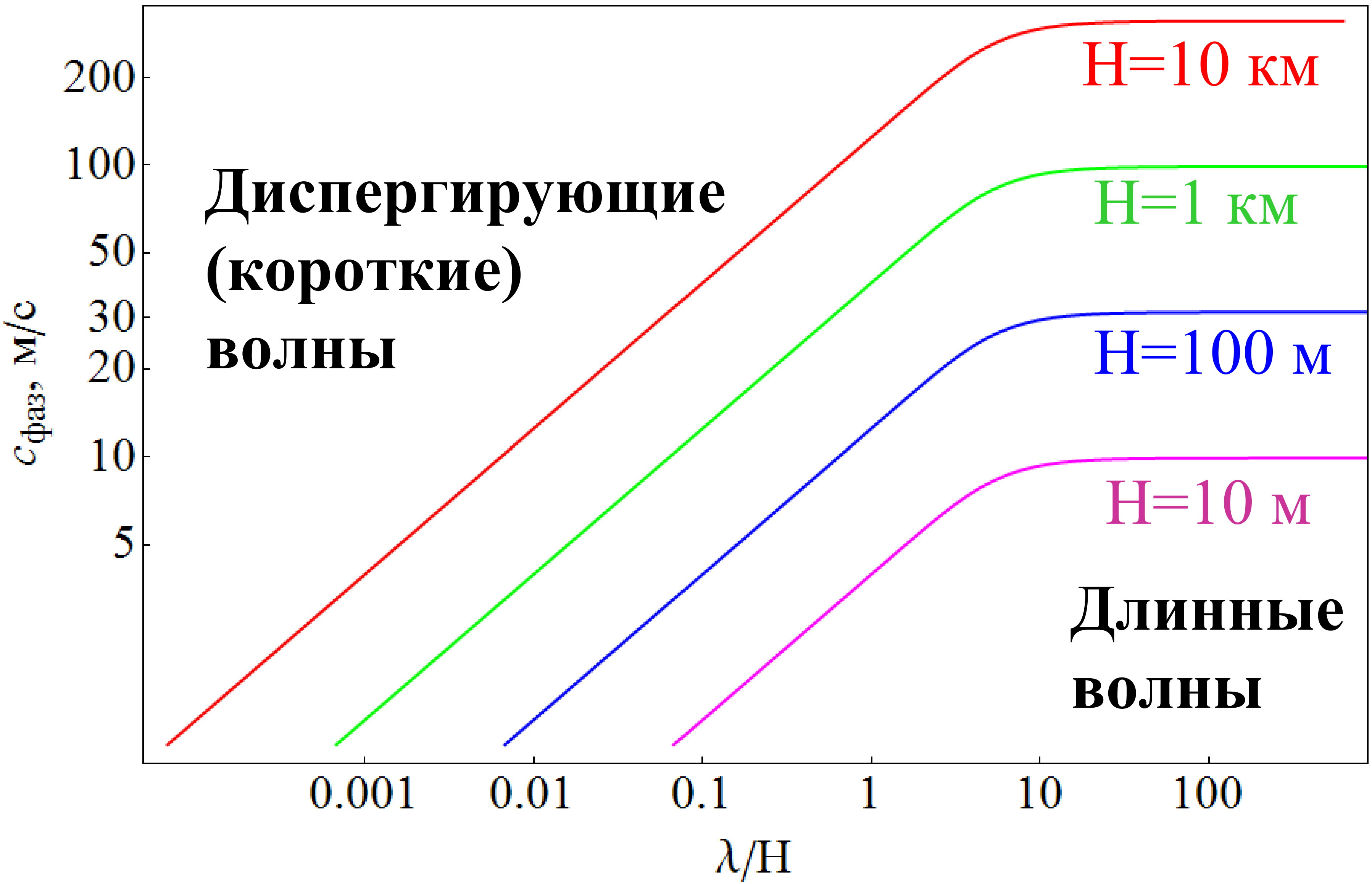
Фазовая скорость как функция волнового числа и глубины



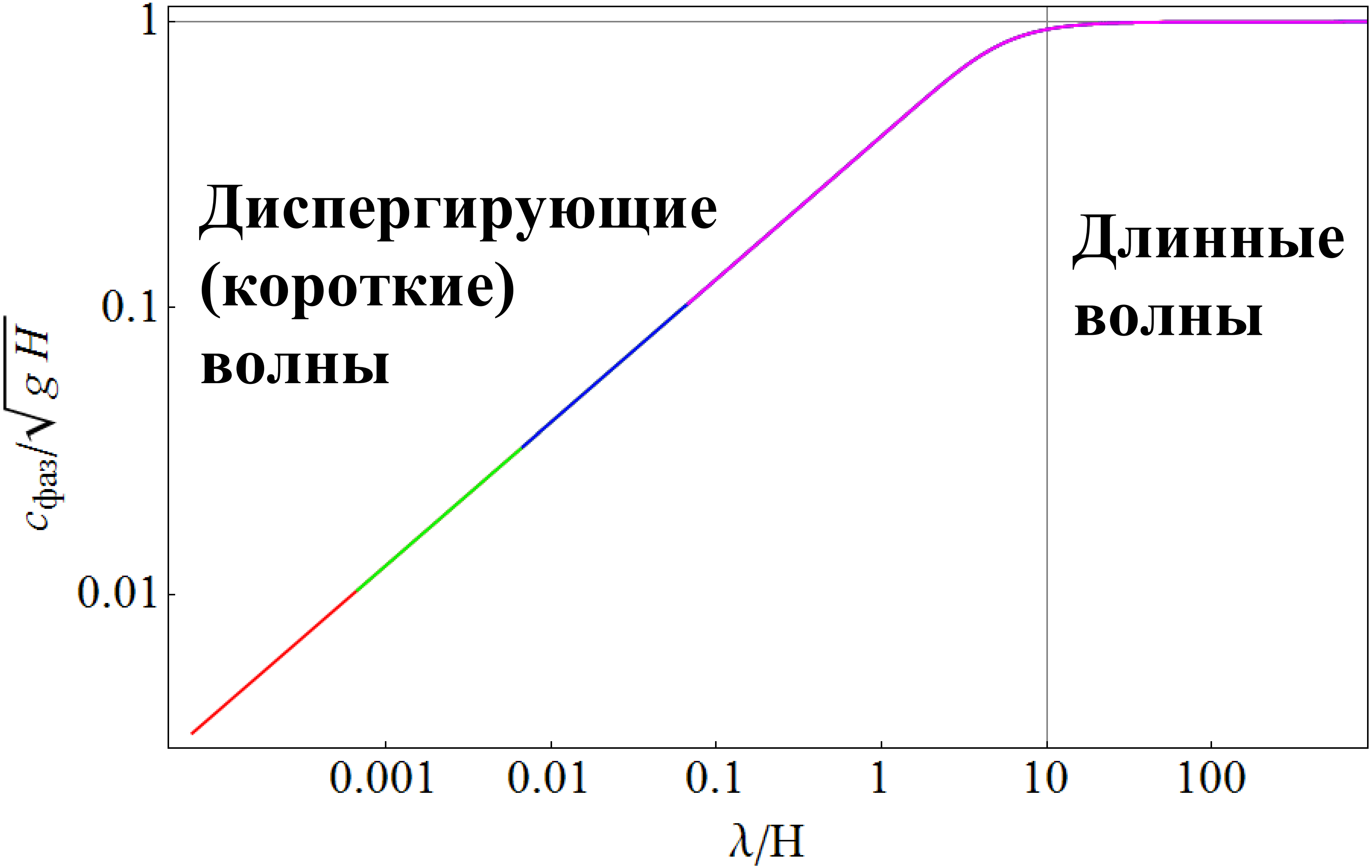
Фазовая скорость как функция длины волны и глубины



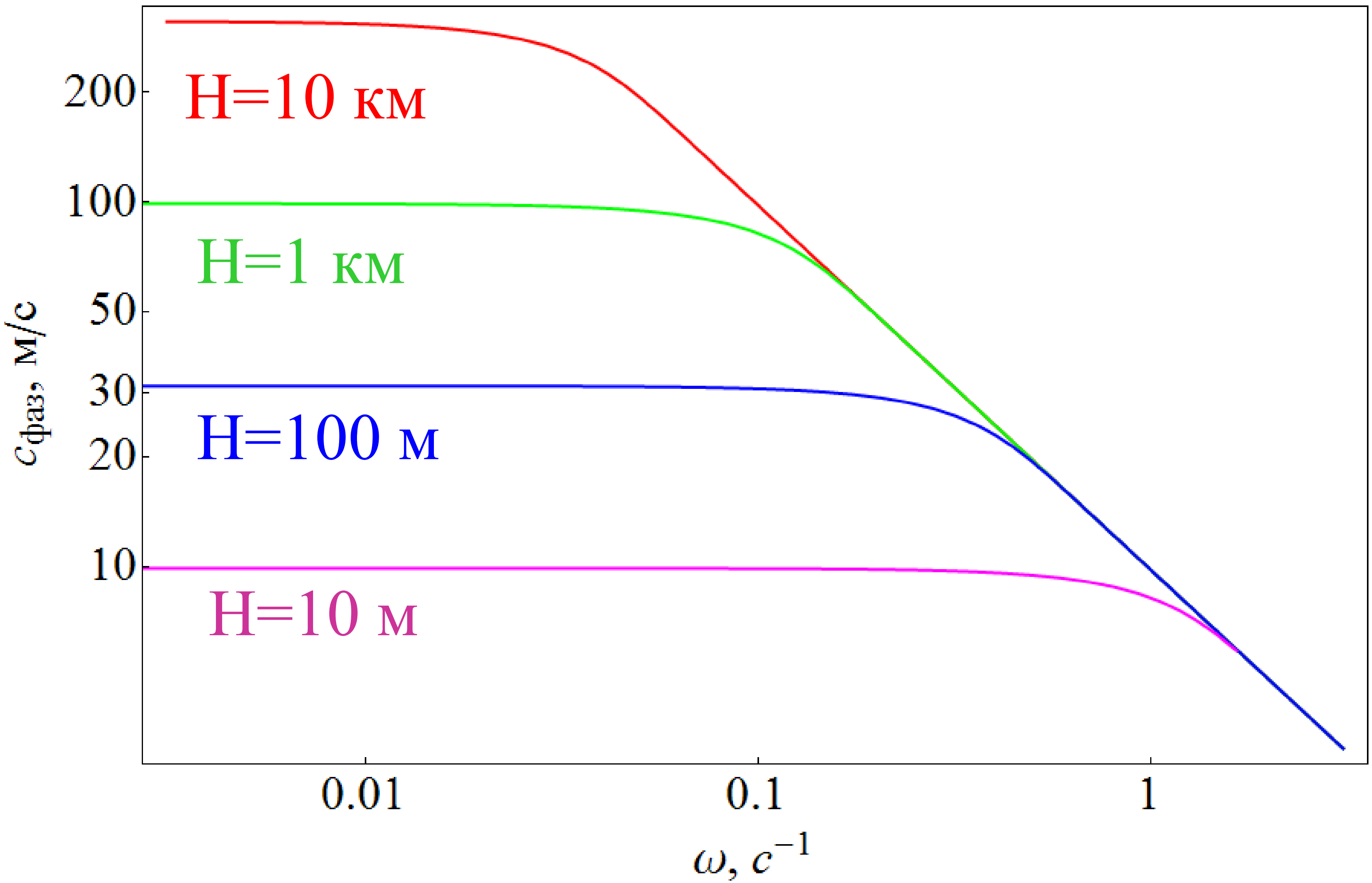
Фазовая скорость как функция отношения длины волны к глубине



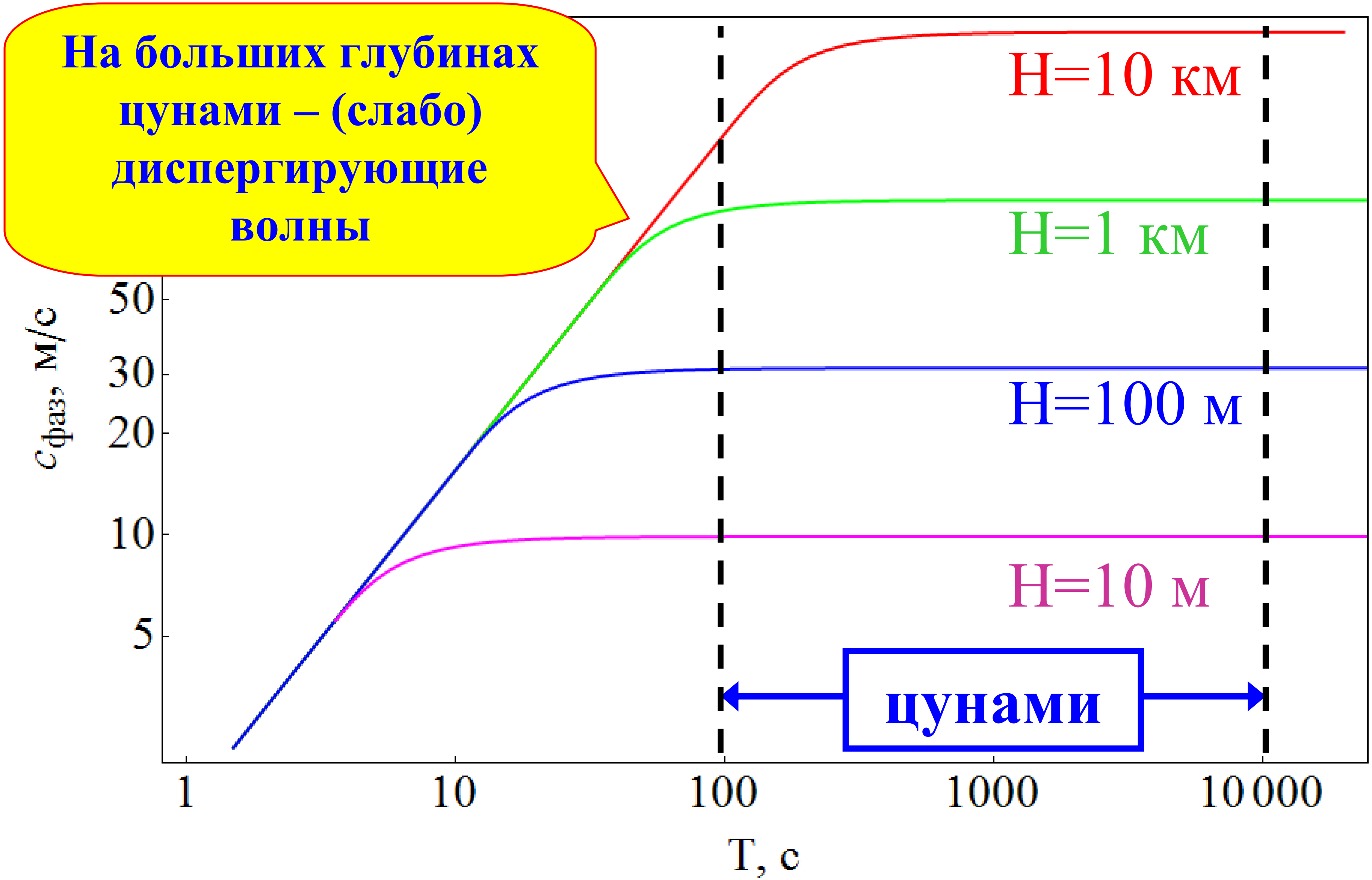
Нормированная фазовая скорость как функция отношения длины волны к глубине



Фазовая скорость как функция циклической частоты и глубины

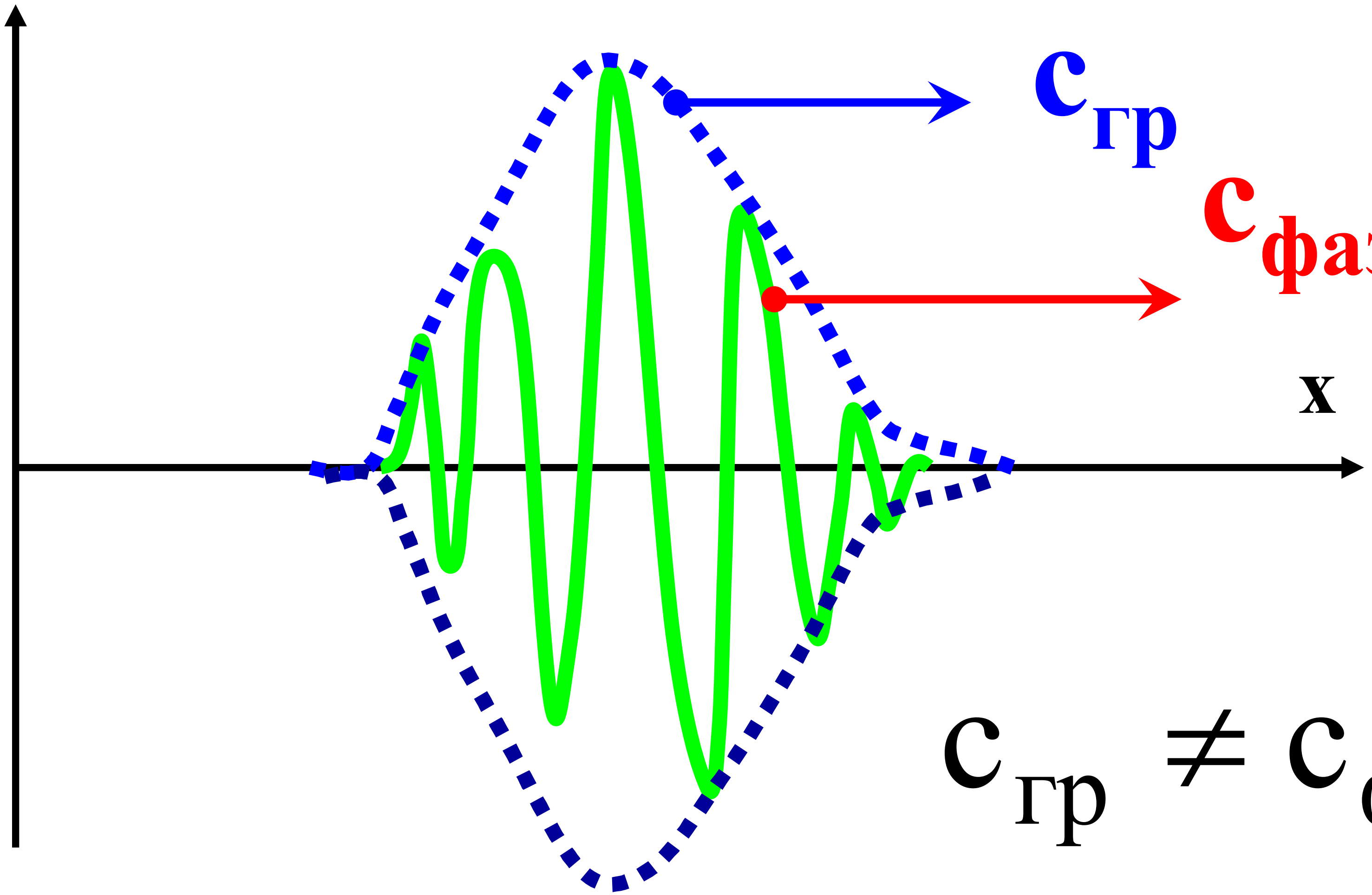


Фазовая скорость как функция периода и глубины



Фазовая и групповая скорости волн

**энергия переносится группами волн,
т.е. с групповой скоростью**

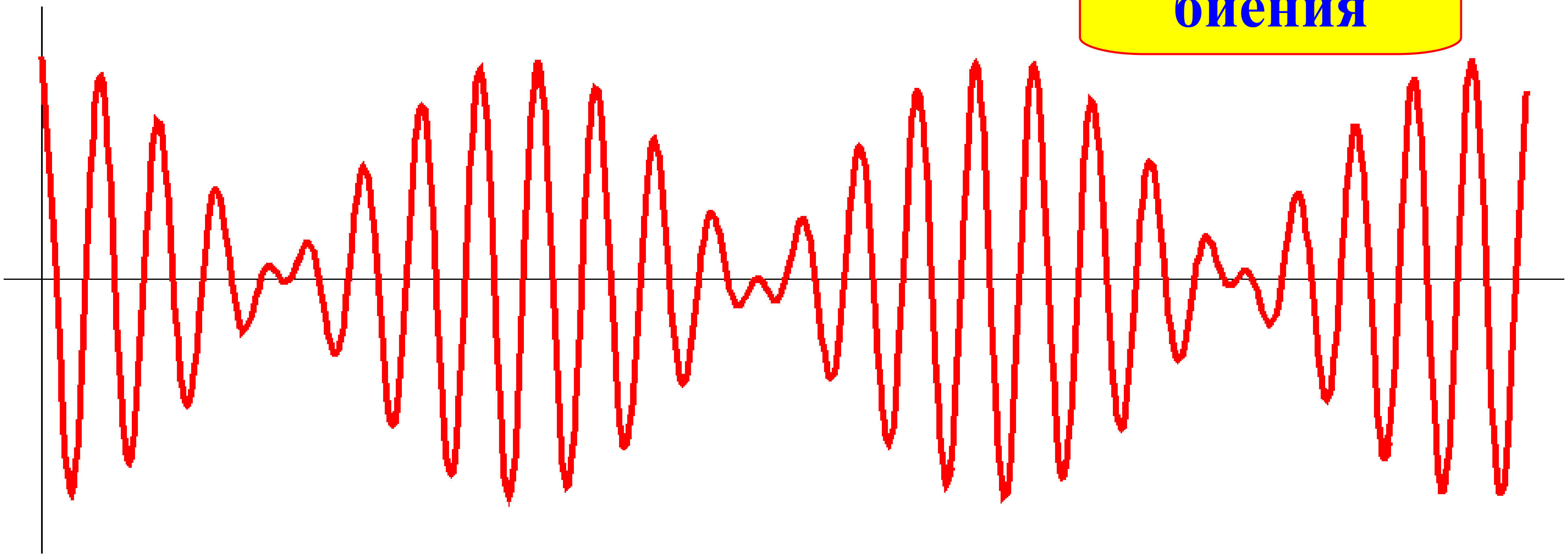


$$c_{гр} \neq c_{фаз}$$

$$\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

биения



$$\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \times$$

$$\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_1} << 1$$

$$\Rightarrow \frac{|k_1 - k_2|}{k_1} << 1$$

$$\times \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) =$$

$$= 2\cos\left(k\left[\underbrace{\frac{\omega}{k}}_{c_{фаз}} t - x\right]\right)\cos\left(\frac{\Delta k}{2}\left[\underbrace{\frac{\Delta\omega}{\Delta k}}_{c_{гр}} t - x\right]\right)$$

$$c_{фаз} = \frac{\omega}{k} \qquad\qquad c_{гр} = \frac{d\omega}{dk}$$

Недиспергирующие волны

$$\omega = c_{фаз} k, \quad c_{фаз} \neq f(k)$$

$$c_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = c_{фаз}$$

Диспергирующие волны

$$c_{гр} \neq c_{фаз}$$

$$c_{фаз} = \frac{\omega}{k} \qquad c_{гр} = \frac{d\omega}{dk}$$

Диспергирующие волны

$$c_{фаз} = \frac{\sqrt{gk\,\mathrm{th}(kH)}}{k}$$

$$c_{гр} = \frac{g\left(kH/\mathrm{ch}^2(kH) + \mathrm{th}(kH)\right)}{2\sqrt{gk\,\mathrm{th}(kH)}}$$

Предельные случаи

$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kH)$$

«Глубокая вода» (kH>>1)

$$\omega^2 = gk$$

$$c_{фаз} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$\omega = \sqrt{g\,k}$$

$$c_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$$

Предельные случаи

$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kH)$$

«Мелкая вода» (kH<<1)

$$\omega^2 = gHk^2 \qquad c_{фаз} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH}$$

$$\omega = \sqrt{gH}\,k \qquad c_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{gH}$$

капиллярные

гравитационные

гравитационно-
капиллярные

длинные