

532.517.4

О ПРИРОДЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. С. Монин

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	97
2. Определение турбулентности	98
3. Различия между турбулентностью и волнами	99
4. Нормальные бифуркации и турбулентность по Ландау	101
5. Течения с нормальными бифуркациями	103
6. Гипотеза о странных аттракторах	109
7. Течения с обратными бифуркациями	112
8. Аттрактор Лоренца и другие примеры	115
9. Обсуждение	119
Цитированная литература	121

1. ВВЕДЕНИЕ

По сложившимся представлениям хаотический случайный вид турбулентных течений жидкостей и газов объясняется тем, что в этих течениях возбуждено очень большое число степеней свободы. Как механические системы, такие течения представляют собою совокупность очень большого количества колеблющихся взаимодействующих осцилляторов. Изображающая такую систему точка в соответствующем фазовом пространстве (имеющем очень большое, но в случае течения в ограниченном объеме все же конечное число измерений) в процессе возникновения турбулентности движется по траектории, асимптотически приближающейся к некоторому предельному циклу, который можно назвать *квазипериодическим аттрактором*: описывающие турбулентные флуктуации функции от времени t здесь оказываются *квазипериодическими*, т. е. имеющими вид $f(\omega_1 t, \dots, \omega_n t)$, где n очень велико, f имеет период 2π по каждому аргументу $\omega_k t$, и частоты ω_k с различными номерами k , вообще говоря, несоизмеримы. Такое представление о развитой турбулентности было предложено еще в 1944 г. Ландау¹ (см. также § 27 книги Ландау и Лифшица²). Оно использовано при изложении данных о возникновении турбулентности в статье Монина и Яглома³ и в § 2 их книги⁴, вышедшей в 1965 г.

Несколько лет назад Рюэлль и Тэкенс⁵ (см. также более позднюю статью Рюэлля⁶) выдвинули гипотезу о существовании в фазовых пространствах течений жидкостей или газов *странных аттракторов*, т. е. множеств, которые отличаются от неподвижных точек и предельных циклов и к которым асимптотически приближаются, в чувствительной зависимости от начальных условий, некоторые фазовые траектории течений. Течения, эволюционирующие на странных аттракторах, которые Рюэлль и Тэкенс и называют турбулентными, не являются квазипериодическими. Описывающие их функции от времени псевдослучайны, они имеют затухающие на бесконечности корреляционные функции и непрерывные частотные спектры; в то же время, по-видимому, число возбужденных

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Успехи физических наук», 1978.

степеней свободы у этих течений может быть и небольшим. Ряд лабораторных и численных экспериментов по возникновению турбулентности в течениях различных типов указывает на возможность того, что псевдослучайные флуктуации с непрерывным частотным спектром образуются при возрастании числа Рейнольдса внезапно, без предварительного развития квазипериодического течения или после появления в течении лишь очень небольшого числа периодических составляющих. Это служит некоторым свидетельством в пользу гипотезы о странных аттракторах. Обзору этих материалов и посвящена настоящая работа.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Турбулентностью целесообразно называть явление, наблюдающееся в очень многих завихренных течениях жидкостей и газов в природе и в технических устройствах и заключающееся в том, что термодинамические и гидродинамические характеристики таких течений (вектор скорости, температура, давление, концентрации примесей, плотность среды, скорость звука, электропроводность, показатель преломления и т. п.) испытывают хаотические флуктуации, создаваемые наличием в этих течениях многочисленных вихрей различных размеров, и вследствие этого изменяются в пространстве и с течением времени весьма нерегулярно, причем у пространственных распределений этих характеристик компонентам Фурье с фиксированными волновыми векторами соответствуют широкие интервалы частот (т. е. однозначные дисперсионные соотношения отсутствуют), а сдвиги по фазе между колебаниями различных характеристик в фиксированных точках пространства хаотически изменяются с частотой таких колебаний.

По этому определению главным признаком турбулентности является хаотический, случайный характер изменений термогидродинамических характеристик течения в пространстве и во времени. Однако не каждое течение такого рода целесообразно называть турбулентным: для ряда целей может быть нужным отличать турбулентные течения от других видов случайных движений жидкостей и газов, обладающих той или иной степенью регулярности. Такими другими видами движений являются, прежде всего, волны, возникающие в жидкости благодаря тому, что при смещениях жидких частиц из их равновесных положений в жидкости развиваются те или иные возвращающие силы: сила давления при акустических колебаниях сжимаемой жидкости, сила тяжести при колебаниях свободной поверхности тяжелой жидкости, сила поверхностного натяжения в капиллярных волнах на свободной поверхности жидкости, архимедова сила плавучести во внутренних гравитационных волнах в стратифицированной жидкости, завихренная часть вертикальной компоненты силы Кориолиса при меридиональных смещениях частиц во вращающемся шаровом слое жидкости и т. п.

Суперпозиция большого количества волн того или иного типа с различными волновыми векторами и случайными амплитудами и фазами может образовывать течение с весьма нерегулярными изменениями в пространстве и во времени, но во многих случаях его в принципе можно отличить от турбулентности по свойствам его элементарных волновых компонент — определенной (скажем, продольной или поперечной) ориентации смещений частиц относительно направления волнового вектора, по определенным сдвигам фаз между колебаниями различных характеристик элементарной волны в фиксированной точке пространства, по однозначно определяемой по волновому вектору (так называемым дисперсионным соотношением) частоте колебаний.

Завихренность течения играет в механике турбулентности определяющую роль, создавая возможность каскадного процесса порождения мелких вихрей более крупными (в случае гидродинамической неустойчивости крупных вихрей) и, как следствие, переноса кинетической энергии по спектру масштабов движений в сторону меньших масштабов (по этой причине попытки вывода уравнений динамики турбулентности из уравнений кинетической теории газов, в которых в низших приближениях появляются только потенциальные случайные флуктуации скорости течения⁷, представляются неудовлетворительными). Поэтому мы определили турбулентность, как случайные флуктуации термогидродинамических характеристик *завихренных* течений, и тем самым сразу же условились отличать ее от каких бы то ни было случайных безвихревых, т. е. *потенциальных* течений (в которых вектор скорости $\mathbf{u} = \nabla\Phi$ есть градиент некоторого скалярного потенциала Φ) и, значит, от всех волн в идеальной жидкости, создаваемых потенциальными силами, в том числе от всех линейных акустических и поверхностных волн и всех нелинейных потенциальных поверхностных волн.

3. РАЗЛИЧИЯ МЕЖДУ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ И ВОЛНАМИ

Реальные волны на поверхности океана вследствие вязкости воды обладают небольшой завихренностью (первого порядка малости относительно крутизны волн в пограничном слое у свободной поверхности, очень тонком при чистой поверхности и значительно более мощном при наличии на поверхности воды мало сжимаемой пленки, и второго порядка малости ниже поверхностного слоя, см. § 3.4 книги Филлипса⁸). Создаваемые случайным полем таких волн флуктуации в верхнем слое океана отличаются от турбулентности как малостью завихренности, так и дисперсионными и фазовыми соотношениями у составляющих их элементарных волновых компонент. Такие флуктуации, индуцированные волнами, когерентны с самими волнами на поверхности океана и при наличии регистраций этих волн могут быть хотя бы приближенно отфильтрованы из записей полных флуктуаций (математическая техника такой фильтрации развита Бениловым и Филюшкиным⁹, см. также статью Бенилова¹⁰ и § 3.8 книги Мошина, Каменковича и Курта¹¹).

Значительно более сложным оказывается вопрос о различии между внутренними волнами в стратифицированном океане и турбулентностью. Эта сложность создается, во-первых, тем, что регистрация внутренних волн отдельно от полных флуктуаций неосуществима. Во-вторых, внутренние волны не потенциальны — они существенно завихрены в вертикальных плоскостях, содержащих направление распространения волны, а в области низких частот, сравнимых с инерционной частотой (т. е. с так называемым параметром Кориолиса $f = 2\Omega \sin \varphi$, где Ω — угловая скорость вращения Земли, а φ — географическая широта места), они завихрены также и в горизонтальных плоскостях. В-третьих, в динамике внутренних волн нередко могут быть существенными нелинейные эффекты, и при этом внутренние волны могут превращаться в турбулентность, как это будет пояснено немного ниже.

Несмотря на эти осложнения, в случае *линейных* внутренних волн вопрос о различии случайного поля таких волн и турбулентности оказывается разрешимым, так как даже случайное поле линейных внутренних волн обладает рядом свойств регулярности, которых турбулентность не имеет. Действительно, статистически однородное по горизонтальным координатам \mathbf{x} и стационарное по времени t случайное поле $\zeta(\mathbf{x}, z, t)$ вертикальных смещений жидких частиц на глубине z в линей-

ных внутренних волнах может быть представлено в виде

$$\zeta(\mathbf{x}, z, t) = \int e^{i(\mathbf{kx} - \omega t)} \zeta(k, z, \omega) dZ(\mathbf{k}, \omega), \quad (1)$$

где \mathbf{k} — горизонтальные волновые векторы, ω — частоты (заключенные в интервале $f \leq \omega \leq N$, где f — упоминавшаяся выше инерционная частота, а N — так называемая частота Вайсяля — Брента, определяемая по формуле $N^2 = g d\rho_*/\rho_* dz$, в которой g — ускорение силы тяжести, а ρ_* — потенциальная плотность среды); $\zeta(k, z, \omega)$ — регулярные (неслучайные) функции от z , удовлетворяющие линейному уравнению внутренних волн и одному из краевых условий на поверхности океана $z = 0$ и его дне $z = H$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \rho_* \frac{d\zeta}{dz} + k^2 \rho_* \frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - f^2} \zeta &= 0, \\ z = 0: (\omega^2 - f^2) \frac{d\zeta}{dz} + gk^2 \zeta &= 0, \quad z = H: \zeta = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя такие $\zeta(k, z, \omega)$ во второе краевое условие, получаем при фиксированном горизонтальном волновом числе k уравнение для ω , имеющее счетное число корней — собственных частот $\omega = \omega_n(k)$ различных мод внутренних волн $n = 1, 2, \dots$. Поэтому случайная спектральная мера $Z(\mathbf{k}, \omega)$ в (1) сосредоточена на дисперсионных поверхностях $\omega = \omega_n(k)$:

$$dZ(\mathbf{k}, \omega) = \sum_n \delta[\omega - \omega_n(k)] d\omega dZ_n(\mathbf{k}). \quad (3)$$

Компоненты скорости u , v , w и флуктуации давления p и плотности ρ в поле линейных внутренних волн представляются формулами вида (1) с заменой $\zeta(k, z, \omega)$ соответственно функциями

$$\begin{aligned} u &= \frac{k_1 \omega - ik_2 f}{k^2} \frac{d\zeta}{dz}, \quad v = \frac{k_2 \omega + ik_1 f}{k^2} \frac{d\zeta}{dz}, \quad w = -i\omega \zeta, \\ p &= \frac{\omega^2 - f^2}{k^2} \rho_0 \frac{d\zeta}{dz}, \quad \rho = \frac{\omega^2 - f^2}{k^2} \frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\rho_0 N^2}{g} \zeta, \end{aligned} \quad (4)$$

где k_1, k_2 — декартовы компоненты волнового вектора, а $\rho_0(z)$ и $c_0(z)$ — невозмущенные плотность и скорость звука.

Таким образом, для выяснения природы измеренных флуктуаций следует, прежде всего, при измеренной функции $\rho_*(z)$ (скажем, аппроксимированной каким-либо удобным аналитическим выражением) найти из (2) собственные частоты $\omega_n(k)$ и соответствующие собственные функции $\zeta_n(k, z) = \zeta[k, z, \omega_n(k)]$, ортонормированные, например, по полной энергии внутренних волн, т. е. удовлетворяющие условию $\zeta_m \circ \zeta_n = \delta_{mn}$, где функциональное скалярное произведение определяется формулой

$$\zeta_m \circ \zeta_n = \frac{\omega_m \omega_n}{\sqrt{\omega_m^2 - f^2} \sqrt{\omega_n^2 - f^2}} \left[g(\rho_0 \zeta_m \zeta_n)_{z=0} + \int_0^H (N^2 - f^2) \zeta_m \zeta_n \rho_* dz \right]. \quad (5)$$

Тогда, например, разложение измеренного поля $\zeta(\mathbf{x}, z, t)$ по функциям $e^{i\mathbf{kx}} \zeta_n(k, z)$ позволяет проверить выполнение дисперсионных соотношений линейных внутренних волн, а разложения измеренных полей по функциям $\exp\{i[\mathbf{kx} - \omega_n(k)t]\}$ позволяют проверить соотношения (4).

Разности фаз колебаний каких-либо двух гидродинамических характеристик a и b в фиксированной точке пространства можно оценить, рассчитав их взаимную корреляционную функцию $B_{ab}(\tau) = \overline{a(t + \tau) b(t)}$

(черточка над буквами здесь и повсюду далее обозначает статистическое среднее значение, т. е. математическое ожидание), представив ее преобразование Фурье (взаимный спектр) в виде $C_{ab}(\omega) - iQ_{ab}(\omega)$ (где C_{ab} — коспектр, Q_{ab} — квадратурный спектр) и, наконец, построив спектр фазового сдвига

$$\varphi_{ab}(\omega) = \text{arctg} \frac{Q_{ab}(\omega)}{C_{ab}(\omega)}.$$

У линейных внутренних волн он должен совпадать с вычисленным по формулам (4) (например, при $\omega \gg f$ колебания u, v, ζ, p, ρ, T сдвинуты по фазе на $\pi/2$ относительно колебаний w), тогда как у турбулентности никаких закономерностей в фазовых сдвигах ожидать не приходится.

В слабо нелинейных внутренних волнах дисперсионные соотношения и фазовые сдвиги оказываются немного размытыми около значений, предсказываемых линейной теорией. В нелинейном случае между внутренними волнами с различными трехмерными волновыми векторами κ_1, κ_2 происходят взаимодействия, во-первых, резонансные, в которых результирующая волна с волновым вектором $\kappa = \kappa_1 \pm \kappa_2$ имеет частоту $\omega(\kappa) = \omega(\kappa_1) \pm \omega(\kappa_2)$, причем типичное время такого взаимодействия имеет порядок $\tau \sim (\kappa_1 w_1)^{-1/2} (\kappa_2 w_2)^{-1/2} \gg N^{-1}$, и, во-вторых, нерезонансные, порождающие так называемые вынужденные моды, т. е. внутренние волны с волновыми векторами $\kappa = \kappa_1 \pm \kappa_2$ и частотами $\omega = \omega(\kappa_1) \pm \omega(\kappa_2)$ не удовлетворяющими дисперсионному соотношению (т. е. $\omega \neq \omega(\kappa)$). При $\tau \gg N^{-1}$ амплитуды вынужденных мод малы, но при $\tau \sim N^{-1}$ они оказываются сравнимыми с амплитудами исходных волн, могут быть большими, и взаимодействия таких вынужденных мод друг с другом и со свободными внутренними волнами будут порождать спектр вихревых колебаний, не удовлетворяющих какому-либо определенному дисперсионному соотношению, т. е. спектр турбулентности. По предложению Миропольского и Филюшкина¹², время взаимодействия можно оценивать формулой $\tau = [k^3 E(k)]^{-1/2}$, где $E(k)$ — спектральная плотность кинетической энергии флуктуаций в единице массы. При $\tau \gg N^{-1}$ можно считать $E(k)$ спектром взаимодействующих внутренних волн, а при $\tau \lesssim N^{-1}$ — спектром турбулентности.

4. НОРМАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ПО ЛАНДАУ

Для понимания природы турбулентности весьма полезными могут оказаться сведения о том, как она возникает. Для обсуждения этой проблемы введем понятия о степенях свободы и о фазовом пространстве течения жидкости, разлагая его на элементарные компоненты, состояния которых характеризуются значениями небольшого числа параметров, и сумма энергий которых равняется энергии течения в целом. Математически это сводится к разложению поля скорости в занимаемом жидкостью объеме по подходящей ортогональной системе функций от точек пространства. Коэффициенты такого разложения будут служить обобщенными координатами течения. Количество таких координат, могущих меняться со временем, будет числом степеней свободы течения. Полной характеристикой мгновенного состояния текущей жидкости будет набор значений всех обобщенных координат, образующий точку в некотором многомерном пространстве, которое называется фазовым пространством течения. Процесс эволюции течения изображается в фазовом пространстве некоторой линией — фазовой траекторией течения; у стационарного течения она состоит из одной точки, у периодического — образует замкнутую линию (цикл).

Рассмотрим процесс возникновения турбулентности в результате потери устойчивости начального ламинарного (стационарного) течения $u_0(x)$ из-за налагающихся на него возмущений. Поле скорости, соответствующее *малому* (инфинитезимальному) возмущению, можно искать, как решение *линеаризованных* уравнений гидродинамики, имеющее вид

$$u'(x, t) = A(t) f_0(x), \quad A(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda = \gamma \pm i\omega_1. \quad (6)$$

При этом оказывается, что при малых числах Рейнольдса $Re = LU/\nu$ (L и U — масштабы длины и скорости, типичные для анализируемого ламинарного течения, ν — кинематический коэффициент молекулярной вязкости), все собственные значения λ линеаризованных уравнений имеют отрицательные вещественные части $\gamma < 0$, так что любые малые возмущения (6) затухают со временем, и, следовательно, ламинарное течение устойчиво по отношению к малым возмущениям. Однако с увеличением Re вещественные части γ у некоторых собственных значений возрастают, и найдется такое *критическое* значение Re_{1cr} числа Рейнольдса, при котором впервые какое-то из собственных значений λ (Re) линеаризованных уравнений пересечет мнимую ось в комплексной плоскости λ , т. е. будет $\gamma(Re_{1cr}) = 0$; соответствующее возмущение (6) не будет ни затухать, ни разрастаться со временем, т. е. будет *нейтральным*. При $Re > Re_{1cr}$ уже будут существовать собственные значения λ с положительными вещественными частями $\gamma > 0$, т. е. разрастающиеся со временем возмущения (6), так что анализируемое ламинарное течение будет неустойчивым по отношению к малым возмущениям.

Для дальнейших суждений о поведении возмущений существенное значение имеет теорема о бифуркации Хопфа¹³, согласно которой при значениях Re в некоторой окрестности Re_{1cr} существует однопараметрическое семейство замкнутых фазовых траекторий течения (Хопф доказал эту теорему для динамических систем довольно общего вида; ее применимость в гидродинамике показана Брушлинской¹⁴, см. также статьи Стэтинджера¹⁵, Рюэлла и Тэкенса⁵, Джозефа и Стэтинджера¹⁶, Чена и Джозефа¹⁷). Сначала мы подробно рассмотрим случай «нормальной бифуркации», когда семейство замкнутых фазовых траекторий существует при $Re > Re_{1cr}$. Тогда они суть предельные циклы, которым соответствуют периодические по времени течения. Переход неустойчивого малого возмущения (6) в периодическое течение описал Ландау¹ (см. также книгу Ландау и Лифшица²). Пока возмущение (6) мало, его амплитуда $A(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma |A|^2, \quad (7)$$

но при конечных $|A|$ правую часть этого уравнения надо дополнить следующими членами ее разложения по степеням A и A^* (где звездочка обозначает комплексно-сопряженную величину). При этом имеющиеся в (6) высокочастотные колебания (с частотой $|\omega_1| \gg \gamma$) целесообразно исключить сглаживанием по времени (по периоду τ из интервала $2\pi/|\omega_1| \ll \tau \ll 1/\gamma$) — тогда члены третьей степени выпадут, а из членов четвертой степени сохранится лишь слагаемое, пропорциональное $|A|^4$, и с этой точностью вместо (7) получим разложение Ландау в виде

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma |A|^2 - \delta |A|^4. \quad (8)$$

Рассмотрим сейчас случай $\delta > 0$ (к противоположному случаю $\delta < 0$ мы возвратимся ниже). В этом случае решение уравнения (8) имеет вид

$$|A(t)| = \frac{A_0^2 A_\infty^2}{A_0^2 + (A_\infty^2 - A_0^2) e^{-2\gamma t}}, \quad A_\infty = \sqrt{\frac{2\gamma}{\delta}}, \quad (9)$$

так что при малом начальном значении A_0 амплитуда $|A(t)|$ сначала возрастает экспоненциально (как $A_0 e^{\gamma t}$, в соответствии с линейной теорией), а затем этот рост замедляется, и при $t \rightarrow \infty$ амплитуда стремится к не зависящему от A_0 конечному значению A_∞ , при малых $\text{Re} - \text{Re}_{1\text{cr}}$ пропорциональному $\sqrt{\text{Re} - \text{Re}_{1\text{cr}}}$ (так как при $\text{Re} \rightarrow \text{Re}_{1\text{cr}}$ имеем $\gamma \sim \sim \text{Re} - \text{Re}_{1\text{cr}}$, и $\delta \neq 0$). Таким образом, при малом $\text{Re} - \text{Re}_{1\text{cr}} > 0$ возмущение (6) стремится с ростом t к периодическому колебанию $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$ с определенной конечной амплитудой и произвольной фазой, определяемой не фиксированными внешними условиями, а случайной начальной фазой возмущения, и потому представляющей собой степень свободы предельного течения.

С ростом Re может быть достигнуто новое критическое значение числа Рейнольдса $\text{Re}_{2\text{cr}}$, при котором произойдет вторая бифуркация — периодическое течение $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$ станет неустойчивым относительно какого-то из возмущений вида $e^{\lambda t} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, t)$, где \mathbf{f}_1 — периодическая функция от t с периодом $2\pi/\omega_1$, а собственное значение λ имеет мнимую часть $\pm i\omega_2$. При небольших $\text{Re} - \text{Re}_{2\text{cr}}$ это возмущение будет возрастать со временем до конечного предела — квазипериодического колебания с двумя периодами $2\pi/\omega_1$, $2\pi/\omega_2$ и двумя степенями свободы (фазами колебаний).

По предположению Ландау при дальнейшем возрастании Re будут происходить все новые и новые нормальные бифуркации, и фазовая траектория течения с ростом t будет приближаться к предельному режиму, которому соответствует квазипериодическое течение $\mathbf{u}[\mathbf{x}, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)]$, имеющее период 2π по каждому из аргументов $\varphi_k(t) = \omega_k t + \alpha_k$. Этот предельный цикл будет занимать в фазовом пространстве область, соответствующую всевозможным наборам начальных фаз $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, и наматывающаяся на него фазовая траектория будет с течением времени проходить практически через все точки этой области (действительно, в моменты времени $t_n = 2\pi n/\omega_1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, в которые фаза $\varphi_1(t)$ принимает значение α_1 , фаза любого другого колебания $\varphi_2(t)$ будет принимать значения $(2\pi n\omega_2/\omega_1) + \alpha_2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, после приведения к интервалу $(0, 2\pi)$ содержащие числа, сколь угодно близкие к любому наперед заданному числу из этого интервала, так как частоты ω_1 и ω_2 , вообще говоря, несоизмеримы). Эргодическое в этом смысле квазипериодическое течение $\mathbf{u}[\mathbf{x}, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)]$ с очень большим числом степеней свободы n , по Ландау, и есть развитая турбулентность (отметим, однако, что временные корреляционные функции скоростей здесь, вообще говоря, не стремятся к нулю на бесконечности). Математический пример такого рода был построен в работе Хопфа¹⁸.

5. ТЕЧЕНИЯ С НОРМАЛЬНЫМИ БИФУРКАЦИЯМИ

Ряд лабораторных и численных экспериментов по возникновению турбулентности в течении Куэтта между вращающимися цилиндрами, конвекции при малых числах Прандтля, пограничном слое около плоской пластинки, зоне перемешивания между течениями с разными скоростями, следе за обтекаемым жидкостью цилиндром и в многослойных моделях атмосферной циркуляции в некоторой мере подтвердил предположения

Ландау о развитии квазипериодического течения, но в этих экспериментах удавалось заметить лишь несколько последовательных бифуркаций, после чего течение практически внезапно становилось весьма нерегулярным во времени (с прерывным частотным спектром), причем спектр

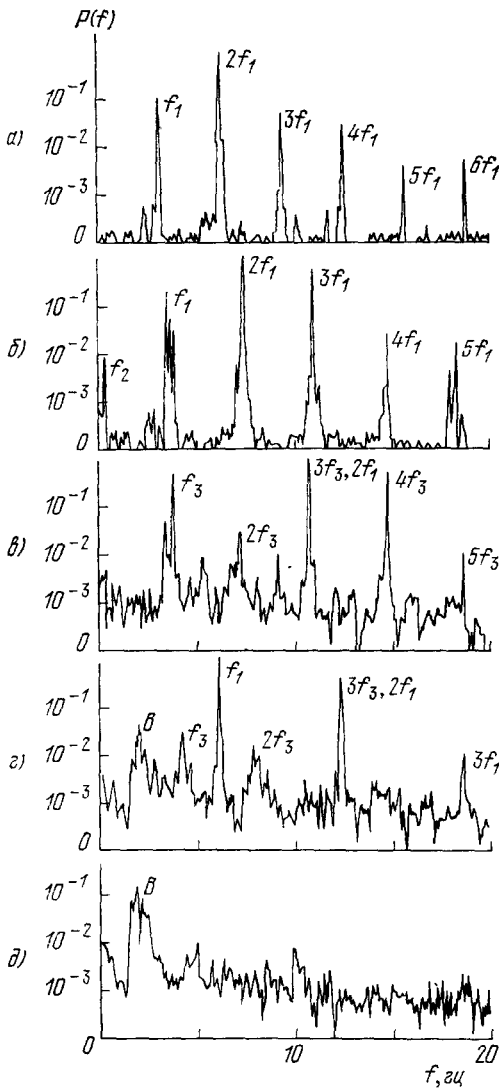


Рис. 1. Спектры радиальной компоненты скорости $P(f)$ ($\text{см}^2 \text{сек}^{-1} \text{гц}^{-1}$) в течении Куэтта между вращающимися цилиндрами при различных числах Рейнольдса ¹⁹.

а) $R^* = \text{Re}/\text{Re}_{\text{cr}} = 0,504$; б) $R^* = 0,595$; в) $R^* = 0,841$; г) $R^* = 0,982$; д) $R^* = 1,022$.

волн расширения — сжатия или изгиба на вихрях Тейлора (четыре волны на окружности) с безразмерной частотой $f_1^* = f_1 \tau = 1,30$ (эта частота и шесть ее гармоник видны в спектре на рис. 1, а на фоне инструментального белого шума). При $R^* = 0,54 \pm 0,01$ возникал второй периодический режим — низкочастотная модуляция трансверсальных

волновых чисел еще оставался дискретным и превращался в непрерывный, по-видимому, только после дальнейшего увеличения числа Рейнольдса.

Ярким примером последовательности бифуркаций служит эволюция течения между коаксиальными вращающимися цилиндрами, наиболее детально промеренная Голубом и Суинни ¹⁹. В их эксперименте измерялась радиальная скорость $u_r(t)$ по середине зазора между внутренним вращающимся цилиндром радиуса $r_1 = 2,224 \text{ см}$ и внешним неподвижным цилиндром с радиусом полости $r_2 = 2,540 \text{ см}$ (измерение производилось оптическим методом — по рассеянию света объемом с диаметром около 5% от ширины зазора, см. статью Голуба и Фрейлиха ²⁰). Скорость вращения внутреннего цилиндра здесь удобно выражать в единицах $R^* = \text{Re}/\text{Re}_{\text{cr}}$, где $\text{Re} = 2\pi r_1 (r_2 - r_1) \nu \tau$, причем τ — период вращения, а $\text{Re}_{\text{cr}} = 2501$ — критическое число Рейнольдса для перехода к неперпериодическому режиму. При $R^* < 0,051$ течение было ламинарным. При $R^* = 0,051$ наблюдался переход к новому стационарному течению (вида (6) с $\omega_1 = 0$ — такое явление называется сменой устойчивости) — тороидальным вихрям Тейлора с длиной волны вдоль оси цилиндра, равной $0,79 \text{ см}$.

При $R^* = 0,064$ наблюдалась бифуркация, приводившая к образованию первого периодического режима — стоячих или бегущих трансверсальных

волн с частотой f_2 (см. спектр на рис. 1, б), убывающей при дальнейшем росте R^* до нуля при значении $R^* = 0,78 \pm 0,04$ (с одновременным ростом уже не инструментального, а реального непрерывного спектра). Здесь возникал третий периодический режим с безразмерной частотой $f_3^* = f_3 \tau = 0,87 (2f_1^*/3)$ (см. спектр на рис. 1, в).

Непосредственно перед переходом к неперидическому режиму ($R^* = 0,982$, рис. 1, г) дискретные пики на спектре еще содержали 90% энергии колебаний, и корреляционная функция флуктуаций $u_r(t)$ имела периодический незатухающий вид. Сразу же после перехода ($R^* = 1,022$, рис. 1, д) дискретные пики исчезали, оставляя непрерывный спектр с широким максимумом B (который был заметным еще до перехода), содержащим 60% энергии, и корреляционная функция становилась затухающей. Бифуркация при $R^* = 1$ была резкой, обратимой и безгистерезисной в пределах разрешающей способности эксперимента $\delta R^* = 0,01$, т. е. $\delta Re = 25$ (хотя, конечно, возможность ступенчатости точек бифуркации в этом интервале на оси Re еще и не исключается).

Аналогичная последовательность нормальных бифуркаций наблюдалась в экспериментах Уиллиса и Дирдорфа²¹ по возникновению конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости или газа с малым числом Прандтля $Pr = \nu/\chi$, где χ — кинематический коэффициент молекулярной теплопроводности (в этих экспериментах брался воздух с $Pr = 0,71$; упомянем также эксперименты Кришнамурти^{22, 23} с воздухом и ртутью, Россби²⁴ со ртутью, Алерса²⁵ с классическим жидким гелием с $Pr = 0,86$ и Моллера и Ристе²⁶ с жидким кристаллом). Известно (см. § 2.7 книги⁴), что центробежные силы в криволинейном течении с убыванием скорости вращения при удалении от центра кривизны и архимедовы силы при конвекции действуют на течение аналогичным (дестабилизирующим) образом.

При возникновении конвекции, как и в течении между вращающимися цилиндрами, сначала происходит смена устойчивости — при некотором значении Ra_{1cr} числа Рэлея $Ra = \alpha g H^3 \delta T / \nu \chi$ (α — коэффициент термического расширения среды, H — толщина слоя, δT — разность температур на его нижней и верхней границах) из покоя возникает новое стационарное течение, имеющее форму либо аналогичных тороидальным вихрям Тейлора периодических по горизонтали двумерных роликов (если изменения материальных свойств среды α , ν , χ с высотой в пределах толщины слоя — главным образом с температурой — пренебрежимо малы, см. работу Уайтхеда²⁷), либо шестиугольных ячеек Бенара (при наличии температурной зависимости материальных свойств, см. работы Шлютера, Лорца и Буссе²⁸ и Буссе²⁹). Мы остановимся здесь на устойчивости двумерных роликов, приняв направления их осей за ось y и описав их функцию тока ψ и отклонение температуры от линейного профиля θ в плоскости (x, z) тремя модами (Буссе³⁰ доказал, что в случае инфинитезимальных возмущений амплитуды других мод суть малые более высокого порядка; это верно, в частности, при малом Pr), которые удобно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{\pi} \left(1 + \frac{k_1^2}{\pi^2}\right)^{-1} \kappa^{-1} \psi &= X \sqrt{2} \sin \frac{k_1 x}{H} \sin \frac{\pi z}{H}, \\ \frac{k_1^2}{\pi^6} \left(1 + \frac{k_1^2}{\pi^2}\right)^{-3} \frac{g \alpha H^3}{\nu \chi} \theta &= Y \sqrt{2} \cos \frac{k_1 x}{H} \sin \frac{\pi z}{H} - Z \sin \frac{2\pi z}{H} \end{aligned} \quad (10)$$

(такие моды соответствуют случаю, когда обе границы слоя — свободные поверхности, но это ограничение, по-видимому, несущественно, см. например, статью Пальма, Эллингсена и Гьевика³¹). В экспериментах с воздухом²¹ установлено, что при Ra_{2cr} приблизительно втрое больше, чем

Re_{1cr} , возникают поперечные осцилляции роликов — стоячие или бегущие вдоль их осей волны (находящиеся приблизительно в фазе и с относительно постоянными амплитудами повсюду, кроме окрестностей границ, т. е. мало чувствительные к граничным условиям). Расчет этих осцилляций в рамках линейной теории выполнен в работе Буссе³⁰, а в рамках нелинейной теории — в работе Маклафина и Мартина³² (содержащей также общее обсуждение гипотезы о странных аттракторах). В последней работе рассчитано, во-первых, восьмимодовое движение, содержащее нестационарные ролики (10) и одну гармонику вдоль оси y , для которого аналитически определено значение Re_{2cr} , и построено разложение Ландау (8), причем показано, что в нем $\delta > 0$, т. е. имеет место случай нормальной бифуркации.

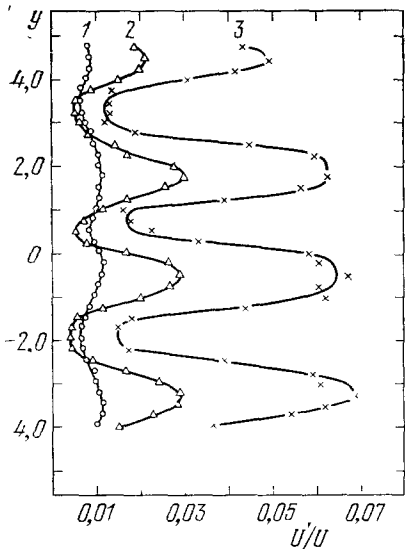


Рис. 2. Нарастание вниз по течению пульсаций продольной скорости во вторичной волне в пограничном слое над плоской пластинкой³².

1 — $x = 7,6$ см; 2 — $x = 15,2$ см; 3 — $x = 19$ см.

Во-вторых, в работе³² рассчитано, на этот раз уже численно, 39-модовое движение, содержащее нестационарные ролики (10) и четыре гармоники вдоль оси y с параметрами, близкими к характеристикам экспериментов с жидким гелием Алерса²⁵. Создающую конвекцию разность температур здесь удобно выражать в единицах $R^* = (k_1^2/\pi^6) \times [1 + (k_1^2/\pi^2)]^{-3} Ra$, при расчетах полагалось $k_2/\pi = 0,1$, $k_1/\pi = 0,072$ и $Pr = 1$; здесь $Re_{2cr}^* \approx 1,25$. Расчет при $R^* = 1,4$ дал периодический, а при $R^* = 1,45$ слегка неперіодический режим, при $R^* = 1,5$ и $1,55$ — опять периодический режим (вследствие исчезновения среднего движения, внесившего вклад в рост возмущений с высокими волновыми числами), а при $R^* = 1,6$ — резко неперіодический режим (Алерс наблюдал переход к нему при $R^* = 2,18$). При исключении же четвертой гармоники расчеты при $R^* = 1,6$; 2 и даже 20 дали периодические режимы.

Похожая последовательность бифуркаций наблюдалась и при возникновении турбулентности в пограничных слоях, например, в экспериментах Клебанова, Тидстрема и Сарджента³³ по обтеканию гладкой плоской пластинки. В этом случае число Рейнольдса растет вдоль оси x вниз по течению, так что, создав при помощи вибратора на фиксированном расстоянии x_{1cr} от передней кромки пластинки (отвечающем значению Re_{1cr}) нейтральное возмущение — распространяющуюся вдоль течения двумерную волну Толмиена — Шлихтинга, экспериментаторы наблюдали последовательные бифуркации на различных расстояниях от вибратора.

Двумерная волна сначала нарастала вниз по течению. Затем при некотором значении Re_{2cr} на нее налагалась вторичная трехмерная волна с периодическими вариациями по поперечному направлению y , создававшимися продольными вихрями с осями вдоль течения, которые осуществляли резкое перераспределение интенсивности продольных пульсаций u' по направлению y . Эта вторичная волна имела групповую скорость по x , близкую к фазовой скорости первичной волны. Она чрезвычайно быстро нарастала вниз по течению (рис. 2) и становилась нелинейной. Последнее приводило, во-первых, к пространственно-временному фоку-

сированию вторичного волнового пакета на гребне первичной волны и, во-вторых, к исчезновению во вторичной волне участков с положительными аномалиями продольной скорости $u' > 0$ и оставлению только участков с отрицательными аномалиями — импульсов $u' < 0$ (теоретическое объяснение этих эффектов нелинейности дал Ландауль ³⁴). Сначала наблюдался один импульс на цикл колебаний вибратора, ниже по течению — два, и т. д. (об этом см. также наблюдения Коважного, Комоды и Васудевы ³⁵), и, по-видимому, после режима с четырьмя импульсами на цикл возникала турбулентность.

Мелкомасштабные формы течения, приводящие к возникновению турбулентности в пограничном слое около гладкой твердой стенки, удалось обнаружить при помощи тонких методов визуализации течений

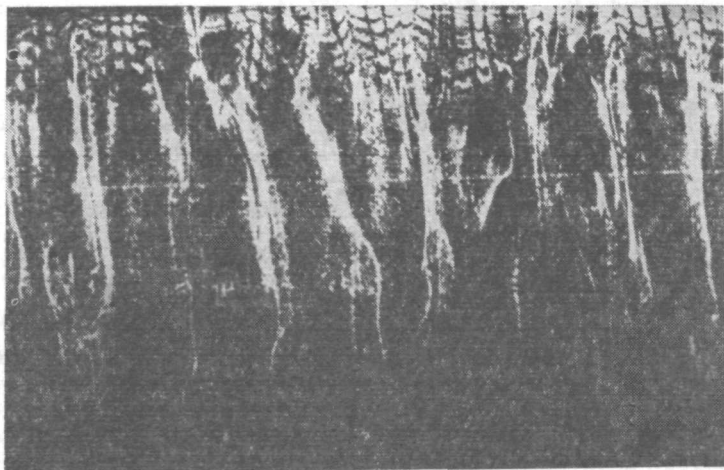


Рис. 3. Поле водородных пузырьков (вид сверху) в пограничном слое около плоской пластинки, генерируемых поперечной нитью (верхняя кромка фотографии, течение сверху вниз), на высоте $z^+ = 4,5$ ³⁹.

воды — цепочек микронных водородных пузырьков, периодически генерируемых электрическим напряжением на платиновой нити, и микроинъекций краски (Клайн с соавторами ³⁶⁻⁴⁴; см. также опыты Корино и Бродки ⁴⁵ с визуализацией течения трихлорэтилена в стеклянной трубе с помощью микронных взвешенных частиц окиси магния).

Установлено, что на высотах порядка $z^+ = 2,5-10$ (индексом плюс обозначаются длины, измеренные в единицах ν/u_* , где u_* — «скорость трения» на стенке) в вязком подслое под действием упомянутых выше продольных вихрей в ложбинах поперечных волн (минимумах продольной скорости) образуются ручейки замедленной жидкости шириной $\delta y^+ = 10-30$ с поперечным расстоянием между ними порядка $\Delta y^+ \sim 100$, которые движутся по течению, медленно всплывая под действием продольных вихрей (см. на рис. 3 пример поля водородных пузырьков, генерируемых горизонтальной поперечной нитью на высоте $z^+ = 4,5$). Такой ручеек ведет себя как миниатюрный пограничный слой и под действием отрицательного градиента давления, создаваемого проплывающим над ним вихрем с поперечной осью (о котором см. ниже), отрывается и проникает вверх в быстрее текущую жидкость, создавая на мгновенном профиле скорости искривление с точкой перегиба (см. на рис. 4 пример генерированных вертикальной нитью пузырьковых изохрон). После этого

на ручейке на высотах $z^+ = 8 - 12$ возникают колебания, и вскоре его конец «взрывается» (преимущественно на высотах $z^+ = 10-30$ и на расстояниях от точки отрыва $\delta x^+ = 1000-1500$), создавая крайне нерегулярное мелкомасштабное движение. Частота «взрывов» на единицу ширины течения равна $F = (u_*^3 / \nu^2) F^+$, где $2\pi F^+ \Delta y^+ \sim 0,06$. Установлено ⁴¹, что во «взрывах» осуществляется практически вся продукция турбулентной энергии — $\overline{u'w' d\bar{u}/dz}$.

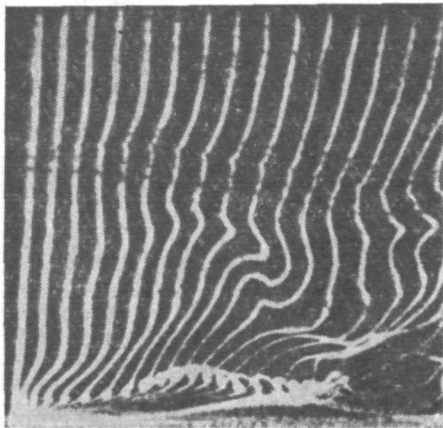


Рис. 4. Пузырьковые изохроны (т. е. линии постоянного времени; вид сбоку) в пограничном слое около плоской пластинки, генерируемые вертикальной нитью (левая кромка фотографии, течение слева направо) ⁴¹.

градиент давления и приводит к его отрыву (рис. 6, б, в) и к образованию новой «подковы». Наложение двух «подков» друг на друга приводит к их объединению в один более крупный вихрь, но гораздо чаще вихревые линии не объединяются, а пересекаются, создавая «взрывы» и распадаясь на вихри меньших размеров — так происходят и «стохастизация», и перенос энергии турбулентности по спектру масштабов.

Последовательность бифуркаций наблюдалась при возрастании числа Рейнольдса также в экспериментах Микседа ⁴⁶⁻⁴⁷, введившего (при помощи громкоговорителя) колебания фиксированной частоты в зону между течениями воздуха с разными скоростями (от двух вентиляторов) и обнаружившего последовательное появление новых дискретных частот, а затем и непрерывного спектра. Аналогичные явления наблюдаются и в следе за обтекаемым жидкостью цилиндром (см. например, их описание в гл. 41 книги Фейнмана, Лейтона и Сэндса ⁴⁸): при $Re \sim 10$ происходит смена устойчивости, и за цилиндром образуется пара стационарных вихрей; при $Re > 40$ они начинают поочередно отрываться от цилиндра, замещаясь новыми вихрями, и уплывать вниз по течению, образуя вихревую цепочку Кармана; при $Re > 100$ вихри заменяются быстро турбулизирующимися областями поочередно отрывающихся пограничных слоев; при $Re > 10^5$ пограничные слои турбулизируются еще до отрыва, точка отрыва продвигается вниз по течению, турбулентный след сужается,

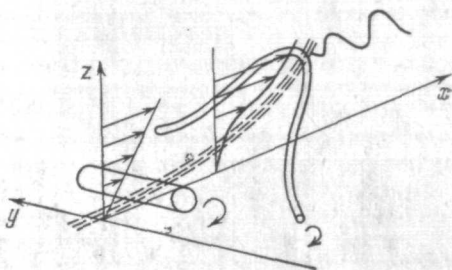


Рис. 5. Образование подковообразного вихря ⁴⁴.

и сопротивление падает (кризис сопротивления); при $Re \sim 10^6$ турбулентный след расширяется, и сопротивление растет; наконец, при $Re \sim 10^7$ след начинает колебаться как целое. Укажем, наконец, численные эксперименты Лоренца⁴⁹ с двухслойной двенадцатимодовой моделью

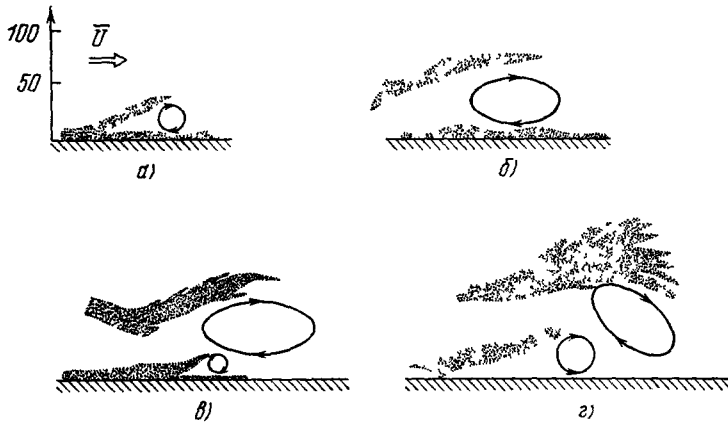


Рис. 6. Эволюция двух последовательных ручейков замедленной жидкости⁴⁴.

а) Отрыв первого ручейка; б) начало взаимодействия со вторым ручейком, в) отрыв второго ручейка, г) «взрыв».

общей циркуляции земной атмосферы, в которых при двух и трех степенях свободы получалось периодическое движение соответственно с двумя и тремя периодами, а при четырех степенях свободы — непериодическое псевдослучайное движение.

6. ГИПОТЕЗА О СТРАННЫХ АТТРАКТОРАХ

Уравнения гидродинамики математически сложны, и с их помощью пока что удалось получить лишь очень немного конкретных выводов о характере фазовых траекторий вязкой жидкости, описывающих эволюцию ее состояний во времени при тех или иных числах Рейнольдса (один из имеющихся важных результатов содержится в упоминавшейся выше работе Брушлинской¹⁴). В то же время существенные указания об имеющихся возможностях удастся извлечь из рассмотрения фазовых траекторий динамических систем того или иного общего вида (см. например, обзор Смейла⁵⁰ и книгу Нитецки⁵¹). Для гидродинамики могут представить интерес даже динамические системы с фазовыми пространствами M малого числа измерений, так как фазовые траектории жидкости после небольшого числа нормальных бифуркаций лежат в конечномерных подпространствах фазового пространства.

Для суждений о характере фазовых траекторий динамической системы весьма полезным оказывается понятие о *неблуждающей* фазовой точке — такой, что любая ее окрестность пересекается с некоторой фазовой траекторией по крайней мере дважды. Простейшими частными случаями являются *неподвижные* точки, соответствующие стационарным решениям уравнений динамики, и *периодические* точки, лежащие на замкнутых траекториях и соответствующие решениям, периодическим по времени. неподвижная точка x преобразования f фазового пространства M за фиксированное время t называется *гиперболической*, если ограниченный линейный оператор Df , служащий дифференциалом преобразования f в этой точке (отображающий подпространство T_x , касательное к пространству M

в точке x , на касательное подпространство $T_{f(x)}$ в точке $f(x)$, является гиперболическим, т. е. его спектр не пересекается с единичной окружностью; периодическая точка преобразования f называется гиперболической, если она является гиперболической неподвижной точкой некоторой степени преобразования f . Устойчивым многообразием неподвижной гиперболической точки x называется множество точек p фазового пространства, для которых последовательность $f^m(p)$ итераций преобразования f сходится к x при $m \rightarrow \infty$; неустойчивым многообразием точки x относительно f называется устойчивое многообразие относительно f^{-1} . Точки пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий, отличающиеся от самой точки x , называются гомоклиническими точками (с такими точками впервые встретился в задаче трех тел Пуанкаре).

Купка и Смейл доказали (см. ⁵¹), что динамические системы (на гладком компактном многообразии), у которых все периодические точки — гиперболические, типичны в том смысле, что они образуют в пространстве всех возможных динамических систем так называемое бэрсовское подмножество, представимое в виде счетного пересечения открытых всюду плотных множеств (заметим, впрочем, что это определение типичности имеет, возможно, лишь условный характер, так как множество нетипичных систем может иметь ненулевую меру). Динамические системы, у которых множество неблуждающих точек состоит лишь из конечного числа неподвижных точек и замкнутых траекторий, причем все периодические точки — гиперболические (и отвечающие любым двум таким точкам устойчивое и неустойчивое многообразия трансверсальны), называются системами Морса — Смейла. Пейкото доказал, что такие свойства типичны для динамических систем, фазовым пространством которых служит окружность. Однако для динамических систем с фазовыми пространствами большего числа измерений эти свойства оказываются нетипичными. У преобразования f за фиксированное время t здесь возможно наличие бесконечного числа периодических точек, причем множество Ω неблуждающих точек может содержать канторов дисконтинуум (т. е. нигде не плотное замкнутое множество без изолированных точек).

Модель такой системы получается, если в качестве точек фазового пространства взять все двусторонние последовательности $\{\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots\}$ из n элементов $a = 1, 2, \dots, n$ (открытые множества будут состоять из последовательностей с фиксированными элементами на конечном числе мест). Такое фазовое пространство является канторовым дисконтинуумом: оно может быть приведено во взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное соответствие с множеством чисел из отрезка $[0,1]$, троичные разложения которых не содержат единиц. В качестве преобразования f возьмем так называемый «сдвиг Бернулли» $a_h \rightarrow a_{h-1}$. Периодическими точками этого преобразования будут последовательности, состоящие из повторяющихся блоков конечной длины. Они всюду плотны в фазовом пространстве, так что Ω совпадает со всем пространством и, значит, является канторовым дисконтинуумом. Смейл доказал, что в широком классе типичных динамических систем каждая гомоклиническая точка принадлежит некоторому замкнутому инвариантному относительно преобразования f подмножеству Λ множества неблуждающих точек Ω , являющемуся канторовым дисконтинуумом, причем на Λ некоторая степень f^m преобразования f топологически эквивалентна сдвигу Бернулли.

Для проблем, рассматриваемых в настоящей статье, особый интерес представляют случаи, когда канторовы подмножества Λ множества неблуждающих точек Ω являются аттракторами, т. е. имеют окрестности, появляющиеся в которых фазовые траектории асимптотически прибли-

жаются к Λ ; аттракторы, отличающиеся от неподвижных точек и замкнутых траекторий, называют *странными*. Точных доказательств наличия странных аттракторов в фазовых пространствах течений вязких жидкостей или газов получить пока не удастся, но эту гипотезу можно признать правдоподобной, если наличие странных аттракторов вообще *типично* для динамических систем. Наиболее общим результатом в этом направлении в настоящее время⁵¹ является теорема Роббина, по которой всякая динамическая система (на компактном многообразии M без края) *структурно устойчива* (это значит, что такие системы образуют открытое множество в пространстве всех возможных динамических систем), если осуществляемые ею преобразования f фазового пространства M удовлетворяют «аксиоме А», т. е. для каждого f множество неблуждающих точек $\Omega(f)$ *гиперболично*, и множество периодических точек плотно в Ω (и если, кроме того, каждое устойчивое многообразие трансверсально пересекается с каждым неустойчивым многообразием). Множество Λ называется здесь *гиперболическим*, если на нем совокупность $T_\Lambda(M)$ касательных подпространств T_x непрерывно и инвариантно относительно Df разлагается на сумму множества E^s , сжимаемого оператором Df , и множества E^u , растягиваемого этим оператором (конечное гиперболическое множество — это просто конечный набор гиперболических точек; канторово множество в модели со сдвигом Бернулли гиперболично).

Рассмотрим теперь ситуацию, в которой все обобщенные координаты динамической системы ω являются квазипериодическими функциями от времени с m фиксированными несоизмеримыми периодами; тогда фазовые траектории системы ω оказываются лежащими в некотором m -мерном торе T^m в фазовом пространстве, а сама система может быть изображена как постоянное векторное поле на этом торе. Рюэлль и Тэкенс⁵ доказали, что при $m \geq 3$ в каждом множестве динамических систем, получаемых из ω малыми возмущениями (т. е. в каждой малой окрестности ω , причем понятию «малая окрестность» дается, конечно, точное определение), существует открытое подмножество динамических систем, не являющихся системами Морса — Смейла, а именно, при $m = 3$ — таких систем на $T^3 = T^2 \times T^1$, что индуцируемые ими преобразования двумерного тора T^2 имеют множества неблуждающих точек, содержащие канторово множество, а при $m \geq 4$ — систем, содержащих в своих фазовых пространствах странные аттракторы.

В частности, при $m = 4$ в каждой малой окрестности ω имеется открытое подмножество динамических систем ω' со странными аттракторами следующего типа. Пусть Σ — трехмерное подмножество в T^4 , трансверсально пересекаемое фазовыми траекториями системы ω' . Определим отображение $P(x)$ подмножества Σ в себя (называемое *отображением последования Пуанкаре*) как точку следующего пересечения с Σ фазовой траектории, выходящей из точки x этого подмножества. Тогда можно взять системы ω' , у которых $P(x)$ отображает внутренность U погруженного в Σ двумерного тора на себя так, что $P(U)$ есть внутренность вложенного в U тора с одной петлей, показанного на рис. 7. Круг S , являющийся сечением тела U , при этом преобразуется в два кружка

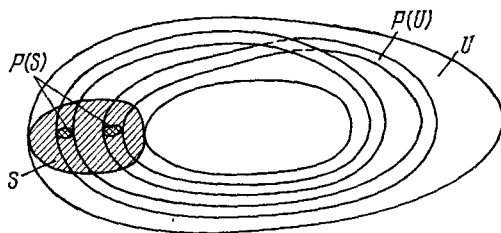


Рис. 7. Отображение последования $P(U)$ внутренности U двумерного тора на себя, порождающее странный аттрактор.

$P(S)$ внутри S . Следующая итерация $P^2(S)$ даст по два кружочка внутри кружков $P(S)$ и т. д. Пересечение всех итераций $P^n(S)$ даст канторово множество точек в S , так что пересечение всех итераций $P^n(U)$ есть канторово множество линий (так называемый одномерный соленоид Вильямса), сама же динамическая система ω' здесь имеет в своем четырехмерном фазовом пространстве странный аттрактор, являющийся локально канторовым множеством двумерных поверхностей.

Теорема Рюэлля и Тэкенса показывает, что появление странных аттракторов в фазовых пространствах динамических систем после нескольких нормальных бифуркаций (если не считать смен устойчивости, то уже после четырех или даже трех) должно быть типичным явлением (в том смысле, который указан в формулировке теоремы). Обладают ли течения жидкостей и газов такими типичными свойствами, еще предстоит выяснить как аналитически, учитывая конкретный вид уравнений гидродинамики, так и экспериментально, прослеживая за последовательными бифуркациями при потере устойчивости ламинарных течений.

7. ТЕЧЕНИЯ С ОБРАТНЫМИ БИФУРКАЦИЯМИ

Возвратимся теперь к рассуждениям гл. 4 и рассмотрим случай «обратной бифуркации», в котором предсказываемое теоремой о бифуркации Хопфа¹³ однопараметрическое семейство замкнутых фазовых траекторий появляется еще при $\text{Re} < \text{Re}_{1\text{cr}}$. В этом случае в разложении Ландау (8) для сглаженного квадрата амплитуды $|A|^2$ возмущения поля скорости течения $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = A(t) \mathbf{f}_0(\mathbf{x})$ коэффициент δ при втором слагаемом должен быть отрицательным (случай $\delta < 0$, рассмотрение которого в гл. 4 было отложено), а коэффициент $\gamma \sim \text{Re} - \text{Re}_{1\text{cr}}$ будет отрицательным при $\text{Re} < \text{Re}_{1\text{cr}}$ и положительным при $\text{Re} > \text{Re}_{1\text{cr}}$. Уравнение (8) здесь оказывается пригодным для исследования поведения возмущений \mathbf{u}' в области $\text{Re} < \text{Re}_{1\text{cr}}$, в которой оно принимает вид

$$\frac{d|A|^2}{dt} = -2|\gamma||A|^2 + |\delta||A|^4. \quad (11)$$

Отсюда видно, что при $\text{Re} < \text{Re}_{1\text{cr}}$ существующий в фазовом пространстве предельный цикл неустойчив, так как, во-первых, фазовые траектории, лежащие внутри него, наматываются на неподвижную точку (или, иначе говоря, возмущения с малыми амплитудами $|A| < A_1 = \sqrt{2|\gamma|/|\delta|}$ затухают со временем), и, во-вторых, фазовые траектории, лежащие вне этого предельного цикла, сматываются с него и уходят в другие области фазового пространства (т. е. возмущения с конечными амплитудами $|A| > A_1$ нарастают со временем, так что при $\text{Re}_{1\text{cr}} > \text{Re} > \text{Re}_{\text{д cr}} = \text{Re}_{1\text{cr}} - \alpha^2|A|^2$ движение оказывается неустойчивым по отношению к конечным возмущениям с амплитудами $|A| > A_1$).

При возрастании $\text{Re} < \text{Re}_{1\text{cr}}$ предельный цикл сжимается, и после перехода Re через значение $\text{Re}_{1\text{cr}}$ он исчезает. При $\text{Re} > \text{Re}_{1\text{cr}}$ уравнение (8) (с коэффициентами $\gamma > 0$, $\delta < 0$) имеет решение

$$|A(t)|^2 = \frac{A_0^2 A_1^2}{(A_0^2 + A_1^2) e^{-2\gamma t} - A_0^2}, \quad A_1 = \sqrt{\frac{2\gamma}{|\delta|}}, \quad (12)$$

обращающееся в бесконечность за конечное время $t = (1/2\gamma) \ln [1 + (A_1^2/A_0^2)]$, но ясно, что еще раньше уравнение (8) перестает быть пригодным и должно быть дополнено следующими членами разложения Ландау. Имеющиеся примеры показывают, что в случаях обратной бифур-

кадии движения при $Re > Re_{1cr}$, по-видимому, быстро приобретают непериодический характер — возможно, что в фазовых пространствах течений здесь имеются странные аттракторы, на которые и наматываются фазовые траектории.

Одним из наиболее хорошо изученных примеров течений вязкой жидкости с обратной бифуркацией является, пожалуй, плоскопараллельное течение в канале (см. обзоры в § 2.9 американского издания книги Монина и Яглома⁵² и в статье Стюарта⁵³).

Линейная теория здесь предсказывает для ламинарного течения (так называемого плоского течения Пуазейля, имеющего параболический профиль скорости) область неустойчивости $\gamma > 0$ в плоскости чисел Рейнольдса Re и безразмерных продольных волновых чисел возмущений k , очерченную сплошной линией на рис. 8; отметим, что при возрастании Re обе ветви этой «нейтральной кривой» асимптотически приближаются к оси абсцисс $k=0$. Наименьшее критическое число Рейнольдса (расчитанное по максимальной

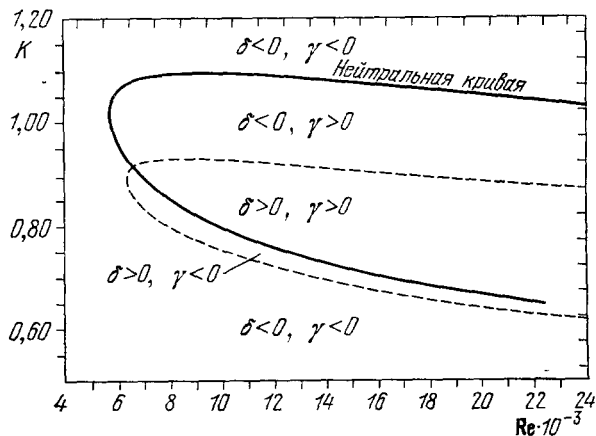


Рис. 8. Области неустойчивости плоского течения Пуазейля.

Сплошная линия очерчивает область неустойчивости бесконечно малых возмущений ($\gamma > 0$), штриховая — область $\delta > 0$ ⁵⁴.

скорости и по полуширине канала) на этой кривой имеет значение около 5800. В то же время и давние экспериментальные данные Дэвиса и Уайта⁵⁵, и новые данные Тилмана, упомянутые Стюартом⁵³, свидетельствуют о возникновении турбулентности в плоском течении Пуазейля при значительно меньших значениях $Re \sim 1000-2500$, что заставляет подозревать существование обратной бифуркации и неустойчивости по отношению к возмущениям с конечной амплитудой.

И действительно, расчеты ряда авторов, процитированные в упомянутых выше обзорах^{52, 53}, предсказали отрицательный знак у коэффициента δ в разложении Ландау (8) и, значит, неустойчивость по отношению к конечным возмущениям при значениях $Re > Re_{cr, min} \approx 2500-2900$ в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными. Точнее, в работах Пекериса и Школлера⁵⁴ и Рейнольдса и Поттера⁵⁶ значения δ были рассчитаны при разных k и Re . «Нейтральная кривая» $\delta(k, Re) = 0$ по первой из этих работ показана штриховой линией на рис. 8; она и «нейтральная кривая» $\gamma(k, Re) = 0$ линейной теории устойчивости делят плоскость (k, Re) на четыре области с разными комбинациями знаков коэффициентов γ и δ . Аналогичные результаты были получены Рейнольдсом и Поттером⁵⁶ и для комбинированного плоского течения Пуазейля — Куэтта с профилем скорости $U(y) = (4-a)y - (4-2a)y^2$, $0 \leq y \leq 1$ (где $a = 0$ для течения Пуазейля и $a = 2$ для течения Куэтта).

Любопытно, что течение Пуазейля в круглой трубе (с параболическим профилем скорости) и плоское течение Куэтта (с линейным профилем скорости) ведут себя по отношению к возмущениям совершенно по-другому; они, по-видимому, устойчивы относительно любых инфинитесимальных возмущений (т. е. $Re_{1cr} = \infty$), так что в них не может быть

нормальных бифуркаций. Но экспериментальные данные показывают, что эти течения неустойчивы по отношению к конечным возмущениям; для них, по-видимому, в трехмерном пространстве (k, Re, A) существуют «нейтральные поверхности», ограничивающие области неустойчивости. Для плоского течения Куэтта такую поверхность приближенно рассчитывали Кувабара⁵⁷ и Эллинтсен, Гьевик и Пальм⁵⁸, а для течения Пуазейля в круглой трубе — Дэви и Нгуен⁵⁹. Заметим, однако, что при наличии на оси трубы стержня или струны (на поверхности которой скорость течения должна быть равной нулю) у течения в такой «коаксиальной трубе» в плоскости (k, Re) вновь появляется и область линейной неустойчивости, и область обратной бифуркации.

Другим интересным примером системы с обратной бифуркацией является идеализированная трехмодовая роликовая конвекция в слое жидкости с *большим* числом Прандтля, описываемая формулами (10). Если пренебречь взаимодействиями со всеми другими модами, то из уравнений гидродинамики в приближении Буссинеска получаются следующие уравнения для безразмерных амплитуд X, Y, Z этих трех мод:

$$\left. \begin{aligned} X' &= -\sigma X + \sigma Y, \\ Y' &= rX - Y - XZ, \\ Z' &= -bZ + XY, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где штрих означает производную по безразмерному времени $\pi^2 H^{-2} \times \times [1 + (k_1^2/\pi^2)] \chi t$, $\sigma = \text{Pr}$, $b = 4 [1 + (k_1^2/\pi^2)]^{-1}$ и $r = \text{Ra}/\text{Ra}_{\text{кр}}$, причем $\text{Ra}_{\text{кр}} = \pi^4 (k_1/\pi)^{-2} [1 + (k_1^2/\pi^2)]^3$. Наименьшее $\text{Ra}_{\text{кр}}$ получается при $k_1 = \pi/\sqrt{2}$ и равняется $(27/4) \pi^4 \approx 657,5$, как это установил еще Рэлей; получающееся при этом значение $b = 8/3$ будет приниматься ниже при анализе решений уравнений (13). Более общие уравнения для конечно-модовой двумерной конвекции, урезанные по рецепту, предложенному Лоренцом⁶⁰, были выведены и численно интегрировались Залцманом⁶¹, причем в некоторых случаях оказывалось, что все неизвестные функции, кроме X, Y, Z , с ростом времени стремятся к нулю, а величины X, Y, Z изменяются со временем непериодически. Это, по-видимому, и побудило Лоренца⁶² заняться специальным исследованием уравнений (13), причем он обнаружил у них удивительные свойства, которые мы будем рассматривать в следующем параграфе.

Фазовым пространством системы (13) является трехмерное пространство (X, Y, Z) . При замене Z на $Z_1 = Z - r - \sigma$ уравнения (13) становятся *системой гидродинамического типа*⁶³; вследствие этих уравнений сумма $X^2 + Y^2 + Z_1^2$, достигая достаточно больших значений, должна убывать со временем. Следовательно, все фазовые траектории при больших временах остаются в некоторой ограниченной области. Более того, их дивергенция $(\partial X'/\partial X) + (\partial Y'/\partial Y) + (\partial Z'/\partial Z)$ имеет постоянное отрицательное значение $-(\sigma + b + 1)$, так что каждый малый фазовый объем уменьшается со временем, и все траектории стремятся в некоторое подмножество нулевого объема. При $r < 1$ система (13) имеет одну неподвижную точку $O = (0, 0, 0)$, и эта точка устойчива (является аттрактором). При $r > 1$ эта неподвижная точка становится неустойчивой, и появляются еще две неподвижные точки $C = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ и $C' = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$, равноправные, так как при преобразовании $(X, Y, Z) \rightarrow (-X, -Y, Z)$ система (13) не изменяется. При $\sigma < b + 1$ точки C и C' устойчивы, если же $\sigma > b + 1$, то при $1 < r < r_{\text{кр}} = \sigma(\sigma + b + 3)(\sigma - b - 1)^{-1}$ они устойчивы, а при $r > r_{\text{кр}}$ становятся неустойчивыми. Этот последний случай будет представлять для нас специальный интерес.

Заметим, правда, что при больших числах Прандтля $\sigma > b + 1$ и Рэлея $r > r_{cr}$ трехмодовая система (13) уже не соответствует никакой реальной конвекции. Эксперименты Уиллиса и Дирдорфа²¹ с силиконовым маслом ($\sigma = 57$) и Кришнамурти^{22, 23} с водой ($\sigma = 6,7$) и другими жидкостями с большими числами Прандтля показали, что нестационарность здесь проявляется не в движениях в роликах (10), а в возникновении конвективных струек, вырастающих из термического пограничного слоя у нижней границы жидкости. Теряя при указанных значениях параметров гидродинамический смысл, система (13) все же остается интересной для физики: она отличается лишь масштабами измерения переменных X , Y , t и началом отсчета Z от уравнений, описывающих генерацию колебаний в оптическом квантовом генераторе (см. например, статью Хакена⁶⁴).

Согласно линейной теории, при $r = r_{cr}$ оказываются возможными нейтральные (не разрастающиеся и не затухающие, т. е. чисто периодические) инфинитезимальные возмущения стационарного движения в роликах (10), описываемого фазовой точкой C , причем их частоты ω_{cr} определяются формулой $\omega_{cr}^2 = 2b\sigma(\sigma + 1)(\sigma - b - 1)^{-1}$; для координаты X такое нейтральное возмущение можно записать в виде $\delta X = A \cos \omega_{cr} t$. При значениях r немного меньше r_{cr} к возмущению такого вида прибавляется малая нелинейная поправка с главным членом порядка A^2 , содержащим неперIODическое слагаемое и гармонику с частотой $2\omega_{cr}$, причем A становится медленной функцией от времени. Маклафлин и Мартин³² построили с точностью нулевого порядка относительно $\sqrt{r - 1} - \sqrt{r_{cr} - 1}$ уравнение Ландау (8) для квадрата амплитуды возмущения $|A|^2$. С точностью порядка σ^{-1} для его коэффициентов получились значения $\gamma = (b/2\sqrt{\sigma}) [\sqrt{r - 1} - \sqrt{r_{cr} - 1}]$, $\delta = -37/72\sigma$, что и доказывает наличие здесь обратной бифуркации.

8. АТТРАКТОР ЛОРЕНЦА И ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ

Лоренц⁶² интегрировал уравнения (13) численно при $b = 8/3$ и $\sigma = 10$ (при этом $r_{cr} = 470/19 \approx 24,74$), приняв для r слегка сверхкритическое значение $r = 28$. Оказалось, что каждая траектория рано или поздно приходит в окрестность одной из неподвижных точек C или C' , описывает вокруг нее несколько раскручивающихся петель и, отойдя от нее на достаточно большое расстояние, переходит в окрестность второй из этих точек и т. д., причем последовательность этих переходов имеет нерегулярный вид и чувствительно зависит от начальных данных (см. на рис. 9 пример такой траектории, любезно предоставленный нам М. И. Рабиновичем, осуществившим интегрирование уравнений (13) на аналоговой вычислительной машине). Лоренц заподозрил, что все эти траектории заполняют двумерную бесконечнолистную поверхность, пересечение которой с некоторой прямой есть канторово множество точек (поскольку фазовые траектории не могут пересекаться, то кажется, что для наличия подобного аттрактора фазовое пространство должно иметь не менее трех измерений; однако, Плыкин⁶⁵ построил пример структурно-устойчивого преобразования f двумерного фазового пространства, множество неблуждающих точек которого состоит из одномерного солениода Вильямса и четырех неподвижных точек).

Ланфорд, результаты которого изложены в недавней статье Рюэлла⁶⁶, методами численного интегрирования уравнений (13) рассчитал ряд итераций отображения Пуанкаре $P(M)$ плоскости $Z = 27$, в которой лежат

неподвижные точки C и C' — см. заимствованный из статьи ⁶⁶ рис. 10. Итерации $P^n(M_0)$ одной из точек этой плоскости лежат на дугах Γ и Γ' ;

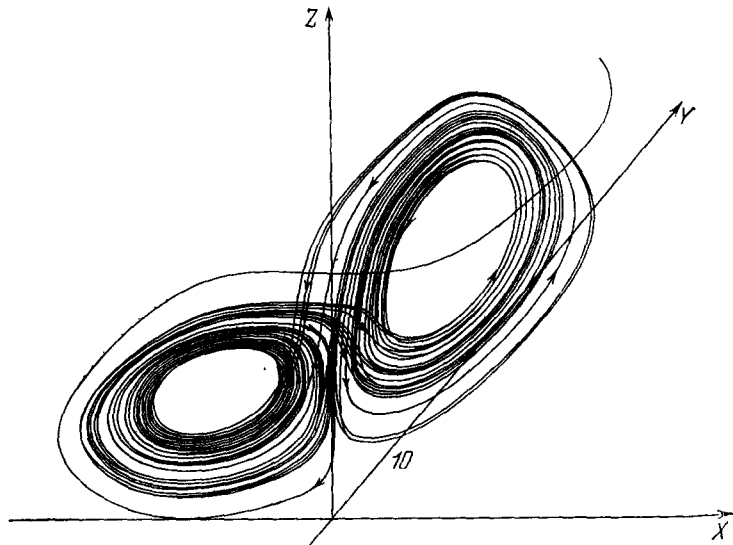


Рис. 9. Пример траектории системы (13), полученный М. И. Рабиновичем при помощи электрического интегратора.

пересекающая их линия Σ состоит из точек, не возвращающихся на плоскость $Z=27$ (траектории, проходящие через точки из Σ , уходят в неподвижную точку O — они образуют двумерное устойчивое многообразие этой точки). При одной итерации дуга Γ преобразуется следующим образом: дуга AB растягивается в AB' , а BB' переходит в Γ' ; точка B с той же стороны от Σ , что и C , переходит, в B' , с другой стороны — в B'' (точки B' и B'' принадлежат одномерным неустойчивым многообразиям точки O — так называемым сепаратрисам). Аналогично преобразуется дуга Γ' .

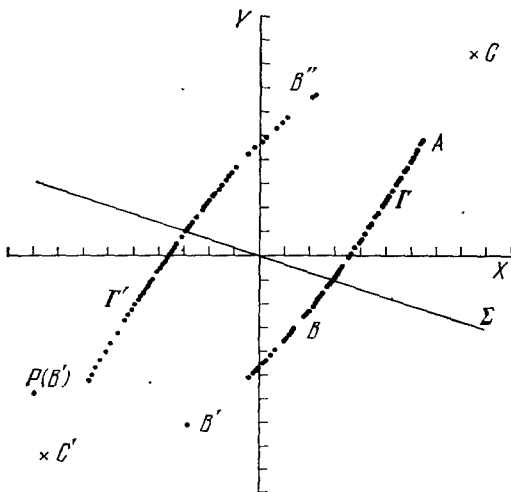


Рис. 10. Итерации отображения Пуанкаре плоскости $Z = 27$ по расчетам Ланфорда (из статьи Рюэлля) ⁶⁶.

Осуществляемые системой (13) преобразования фазового пространства содержат сжатие в одном направлении и растяжение в другом (гиперболичность), что и приводит к чувствительной зависимости от начальных данных; однако, Рюэлли ⁶⁶ отмечает, что полной гиперболичностью в смысле «аксиомы А» система (13) все же, по-видимому, не обладает, так как требуемая этой аксиомой равномерность гиперболичности, судя по имеющимся расчетам, нарушается способностью траекторий подходить сколь угодно близко к O и задерживаться там на произвольно долгое время.

Хенон и Помо ⁶⁷ интегрировали уравнения (13) на аналоговой вычислительной машине, полагая $b = 8/3$ и $\sigma = 10$ и меняя r от 28 до значений свыше 200; при $r \approx 220$ они обнаружили бифуркацию, приводящую к замене странного аттрактора на предельный цикл, и численно изучили формирование аттрактора итерациями отображения Пуанкаре плоскости $Z = \text{const}$, предложив для последнего аналитическую модель $P = CB$ (возможно, и не адекватную уравнениям (13)), где

$$\left. \begin{aligned} BX &= 2X, & BY &= \frac{Y}{2} & \text{при } 0 \leq X < \frac{1}{2}, \\ BX &= 2X - 1, & BY &= \frac{Y+1}{2} & \text{при } \frac{1}{2} \leq X \leq 1, \\ CX &= X, \\ CY &= \frac{1}{8} + \frac{Y}{2} & & & \text{при } 0 \leq Y < \frac{1}{2}, \\ CY &= \frac{3}{8} + \frac{Y}{2} & & & \text{при } \frac{1}{2} \leq Y \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Такое модельное отображение P имеет странный аттрактор, состоящий из отрезков $0 < X < 1$, $Y = (1/8) \sum_0^{\infty} \alpha_n / 4^n$, где α_n — случайные последовательности чисел 1 и 5. Кроме того, в этой работе (см. также статью Хенона ⁶⁸) предложена и другая модель отображения Пуанкаре, состоящая из квадратичного искривления $X_1 = X$, $Y_1 = Y + 1 - aX^2$, сжатия вдоль оси абсцисс $X_2 = bX_1$, $Y_2 = Y_1$ и переориентировки осей $X_3 = Y_2$, $Y_3 = X_2$, что в итоге дает «преобразование Кремены»

$$X_{n+1} = Y_n + 1 - aX_n^2, \quad Y_{n+1} = bX_n, \quad (15)$$

имеющее постоянный якобиан ($-b$) и являющееся каноническим видом квадратичных преобразований с постоянным якобианом. Численное осуществление $n = 5 \cdot 10^6$ итераций преобразования (15) одной из точек (X, Y) при $a = 1,4$ и $b = 0,3$ позволило вырисовать с рядом деталей странный аттрактор в плоскости (X, Y) , состоящий из множества линий, по всей видимости, канторовской структуры.

Опираясь на результаты численного интегрирования и на сведения из общей теории динамических систем, Афраймович, Быков и Шильников ⁶⁹ указывают следующую последовательность бифуркаций для системы (13) при $b = 8/3$ и $\sigma = 10$:

1) При $1 \leq r < r_1 \approx 13,92$ имеются три неподвижные точки O, C, C' , причем O — седло, имеющее двумерное устойчивое многообразие W (состоящее из траекторий, входящих в O) и два одномерных неустойчивых многообразия — сепаратрисы G и G' (выходящие из O траектории, стремящиеся при $t \rightarrow \infty$, соответственно, к C и C').

2) При $r = r_1$ сепаратрисы становятся двояко-асимптотическими к седлу O , из их петель рождаются седловые периодические движения L и L' , и одновременно появляется одномерное инвариантное множество Ω_1 канторовской структуры (включая счетное множество седловых периодических движений), которое, однако, не является аттрактором. Эта картина сохраняется при $r_1 < r < r_2 \approx 24,06$, причем здесь $G \rightarrow C'$, $G' \rightarrow C$ ($t \rightarrow \infty$).

3) При $r = r_2$ сепаратрисы G, G' стремятся при $t \rightarrow \infty$ уже не к C', C , а к замкнутым траекториям L', L , и на месте Ω_1 возникает двумерное инвариантное множество — аттрактор Лоренца Ω_2 , область притяжения которого ограничивают устойчивые многообразия периодических движений L, L' (так что возбуждение стохастичности является жестким). При

$r_2 < r < r_3 \approx 24,74$ оно, как и точки C, C' , устойчиво (и включает O, G, G' , а потому не является структурно устойчивым), причем периодические движения в нем всюду плотны (их исчезновение при изменении r возможно лишь путем влипания в петли сепаратрис), и на нем имеет место экспоненциальное разбегание траекторий; множество Ω_2 не гиперболично.

4) При $r = r_3$ периодические движения L, L' стягиваются в точки C, C' , и последние теряют устойчивость, так что при $r_3 < r < r_4 \approx 220$ единственным устойчивым предельным множеством является аттрактор Лоренца.

5) При уменьшении r от r_4 до r_2 фазовая точка остается в аттракторе Лоренца, при $r = r_2$ он теряет устойчивость, и при $r < r_2$ фазовая точка покидает его окрестность и стремится к C или C' — гистерезис такого рода типичен для систем с обратной бифуркацией.

Странные аттракторы, аналогичные рассмотренному здесь, имеются, по-видимому, в фазовых пространствах целого ряда модельных динамических систем, описываемых простыми системами уравнений (см., например, работы Рабиновича с соавторами ⁷⁰⁻⁷²). В примере Пиковского и Рабиновича ⁷² стохастичность удалось доказать строго. Этим примером является автогенератор с отрицательной проводимостью и туннельным диодом, описываемый в безразмерных переменных уравнениями

$$\left. \begin{aligned} X' &= Y - \delta Z, \\ Y' &= -X + 2\gamma Y + \alpha Z, \\ \mu Z' &= X - f(Z), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где $\mu \ll 1$, и $f(Z) = Z - Z^3$ или имеет аналогичный вид. При $\mu \rightarrow 0$ фазовое пространство системы вырождается в две полуплоскости $Z = -1, X < -1$ и $Z = 1, X > -1$ с переходами траекторий с одной из них на другую лишь на полупрямых $S^- (X = -1, Z = -1, Y > -\delta)$ и $S^+ (X = 1, Z = 1, Y < \delta)$. Исследование движения сводится к анализу отображения Пуанкаре множества $S = S^- + S^+$, которое определяется как $P_1(S) = e^{2\pi\alpha} S$ для траекторий, лежащих только на одной полуплоскости, и $P_2(S) = 2\delta - \omega (\text{ctg } \tau + \kappa), S = (\omega/\sin \tau) e^{-\kappa\tau}$ для траекторий, переходящих на другую полуплоскость (где $\omega = \sqrt{1 - \gamma^2}$ и $\kappa = \gamma/\omega$). Для фиксированной точки из S итерации отображения Пуанкаре образуют последовательность $P_1^{m_1} P_2^{n_1} \times P_1^{m_2} P_2^{n_2} \dots$, где m_i, n_i — целые числа; для траекторий, в которых все n_i четные, в фазовом пространстве существуют два симметричных аттрактора, для остальных траекторий — один аттрактор. Поскольку $|\partial P/\partial S| > 1$, у отображения Пуанкаре нет устойчивых неподвижных точек. Более того, оно удовлетворяет условиям эргодичности (установленным Косякиным и Сандлером ⁷³), так что аттракторы здесь не содержат устойчивых неподвижных точек и предельных циклов и являются эргодическими.

Ряд систем гидродинамического типа, модельных систем уравнений из релятивистской космологии и газовой динамики, а также уравнений теории возмущений вполне интегрируемых систем, решения которых допускают сепаратрисную аппроксимацию и проявляют стохастические свойства, изучен в серии работ Богоявленского и Новикова ⁷⁴⁻⁷⁶. Укажем, наконец, на квазислучайные обращения полярности магнитного поля в двухдисковом динамо Булларда, в котором безразмерные токи x_1, x_2 и скорости вращения дисков y_1, y_2 описываются уравнениями

$$x_1' = -\mu_1 x_1 + x_2 y_1, \quad x_2' = -\mu_2 x_2 + x_1 y_2, \quad y_1' = y_2' = 1 - x_1 x_2 \quad (17)$$

(см., например, гл. 10 книги ⁷⁷).

9. ОБСУЖДЕНИЕ

а) Всего десять лет тому назад молчаливо предполагалось, что аттракторами для фазовых траекторий динамических систем могут быть лишь неподвижные точки и замкнутые или квазипериодические орбиты. Нерегулярность («стохастичность») поведения таких систем могла создаваться либо введением случайности в их начальные данные, либо наложением на них случайных внешних воздействий, либо, наконец, повышенной сложностью предельной орбиты, соответствующей возбуждению очень большого числа степеней свободы системы.

Открытие странных аттракторов заставляет отказаться от этих интуитивных предположений, чрезмерно упрощающих действительность. При этом оказывается, что сложность структуры некоторых странных аттракторов, далеко не заполняющих фазового пространства (имеющих меньшую размерность) и содержащих в каких-то своих сечениях канторовы дисконтинуумы, отнюдь не означает того, что они являются патологиями (уродливыми исключениями). Наоборот, доказано, что наличие таких странных аттракторов есть явление *типичное*, при некотором четко определенном смысле этого прилагательного. Таким образом, теперь установлено, что большинство динамических систем способно порождать псевдослучайные функции от времени без введения случайности в начальные данные или наложения случайных внешних воздействий и без возбуждения очень большого числа степеней свободы.

Однако сейчас еще неизвестно, обладают ли такими свойствами какие-либо течения жидкостей или газов.

б) В противоположность предложению Рюэлля и Тэкенса⁶, представляется, что течение жидкости или газа, эволюционирующее на странном аттракторе (если таковой имеется), называть турбулентным еще нельзя: определение турбулентности (п. 2) включает требование, чтобы термогидродинамические характеристики течения нерегулярно изменялись *в пространстве*, т. е. описывались бы большим количеством пространственных мод (или, эмпирически, имели бы непрерывные пространственные спектры).

При наложении турбулентности на сильное осредненное течение мелкомасштабные участки пространственных спектров на линиях тока оказываются подобными соответствующим участкам частотных спектров флуктуаций в фиксированных точках этих линий тока (гипотеза «замороженной турбулентности» Тейлора), так что течение с непрерывными частотными спектрами и дискретным (маломодовым) пространственным спектром еще не является турбулентностью. С этой точки зрения эволюционирующая на аттракторе Лоренца роликовая конвекция в жидкости с большим числом Прандтля, обладающая весьма регулярной и простой трехмодовой пространственной структурой (10), турбулентностью, конечно, не является, как и другие упоминавшиеся выше течения с маломодовой пространственной структурой. Таким образом, от турбулентного аттрактора требуется многомерность, и представление о турбулентности как системе с очень большим числом возбужденных степеней свободы следует оставить в силе.

Тогда остается в силе и задача о развитии во времени пространственного спектра турбулентности или, другими словами, о последовательности бифуркаций, повышающих размерность турбулентного аттрактора. В рамках гипотезы о странных аттракторах эта задача еще не рассматривалась. Экспериментальных данных здесь почти не имеется. Упомянем в этой связи лишь сведения из гл. 5 о «взрывах» при пересечениях подковообразных

вихрей в пограничном слое около гладкой плоской пластинки, приводящих к образованию крайне нерегулярного мелкомасштабного движения, в которых осуществляется практически вся продукция турбулентной энергии в этом течении.

в) Экспериментальные свидетельства в пользу гипотезы Рюэлля и Тэкенса о попадании на странный аттрактор с четырехмерного тора (после четырех нормальных бифуркаций) представляются весьма нечеткими. В экспериментах Голуба и Суинни по эволюции течения Куэтта между вращающимися цилиндрами непериодическое движение появлялось, по-видимому, действительно после четвертой бифуркации (если не считать смены устойчивости), но переход на этот режим происходил не с четырехмерного и даже не с трехмерного тора, а с замкнутой орбиты на двумерном торе. Представляется важным подчеркнуть, что реальный (не инструментальный) непрерывный спектр здесь появлялся и затем постепенно нарастал уже после второй бифуркации, а четвертая бифуркация проявлялась скорее в исчезновении дискретных спектральных линий, чем в появлении непрерывного спектра (см. рис. 1).

В численных экспериментах Маклафлина и Мартина по эволюции роликовой конвекции в жидкости с малым числом Прандтля существенно непериодическое движение возникало действительно после четырехпериодического движения, но не сразу, а в качестве новой бифуркации после значительного увеличения числа Рэлея. В экспериментах Клебанова, Тидстрёма и Сарджента по эволюции течения в пограничном слое около плоской пластинки турбулентность возникала, по-видимому, после шестой бифуркации (после появления на вторичной трехмерной волне четырех нелинейных импульсов Ландаля на цикл колебаний вибратора). При эволюции следа за обтекаемым жидкостью цилиндром турбулентность впервые возникает после второй бифуркации (не считая смены устойчивости), в быстро турбулизирующихся областях поочередно отрывающихся от цилиндра пограничных слоев; дальнейшая эволюция этого течения мало похожа на последовательность нормальных бифуркаций.

Заметим, что экспериментально отличить внезапное появление непериодического движения с непрерывным спектром от резкого сгущения последовательности точек бифуркации на оси Re , конечно, невозможно; это осуществимо лишь в пределах разрешающей способности эксперимента по Re (которая, например, в экспериментах Голуба и Суинни равнялась $\delta Re = 25$). Кроме того, возможность эмпирической проверки свойственного странному аттрактору экспоненциального затухания корреляционных функций и его отсутствия в случае квазипериодического аттрактора ограничена из-за конечного времени измерений и из-за их дискретности. Наконец, еще одна возможность эмпирического различия движений на квазипериодическом и на странном аттракторе — чувствительная зависимость от начальных данных при попадании на маломодовый странный аттрактор — может стереться после большого числа бифуркаций, повышавших размерность аттрактора.

г) Наиболее близкий к гидродинамике пример странного аттрактора, впервые изученный Лоренцом, во-первых, как уже отмечалось, не соответствует никакому реальному течению; во-вторых, вследствие своей маломодовости не имеет прямого отношения к турбулентности; в-третьих, изучен только численно (причем, в частности, была обнаружена оригинальная особенность системы (13), непохожая по поведению турбулентности — бифуркация при очень больших Re , приводящая к замене странного аттрактора на предельный цикл); в-четвертых, согласно Рюэллю, по-видимому, не вполне гиперболический, что несколько снижает ценность

этого уникального примера с точки зрения общей теории динамических систем.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Н. И. Солнцевой за труд по оформлению рукописи этой статьи.

Институт океанологии АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, ДАН СССР 44, 339 (1944).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1953.
3. А. С. Монин, А. М. Яглом, ПМТФ, № 5, 3 (1962).
4. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. 1, М., «Наука», 1965.
5. D. Ruelle, F. Takens, Comm. Math. Phys. 20, 167 (1971).
6. D. Ruelle, Lect. Notes Phys. 12, 292 (1975).
7. В. В. Струминский, в кн. Турбулентные течения, М., «Наука», 1974, с. 19.
8. О. Филлипс, Динамика верхнего слоя океана, М., «Мир», 1969.
9. А. Ю. Бенилов, Б. Н. Филюшкин, Изв. АН СССР, сер. «Физ. атмосферы и океана» 6, 810 (1970).
10. А. Ю. Бенилов, в кн. Исследования океанической турбулентности, М., «Наука», с. 49, 1973.
11. А. С. Монин, В. М. Каменкович, В. Г. Корт, Изменчивость Мирового океана, М., Гидрометиздат, 1974.
12. Ю. З. Миропольский, Б. Н. Филюшкин, Изв. АН СССР, сер. «Физ. атмосферы и океана» 7, 778 (1971).
13. E. Hopf, Ber. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. und Phys. Kl., 94, 1 (1942).
14. Н. Н. Брушлинская, ДАН СССР 162, 731 (1965).
15. D. H. Sattinger, Arch. Rat. Mech. Anal. 41, 66 (1971).
16. D. D. Joseph, D. H. Sattinger, ibid. 45, 79 (1972).
17. T. S. Chen, D. D. Joseph, J. Fluid Mech. 58, 337 (1973).
18. E. Hopf, Comm. Pure and Appl. Math. 1, 303 (1948).
19. J. P. Gollub, H. L. Swinney, Phys. Rev. Lett. 35, 927 (1975).
20. J. P. Gollub, M. H. Freilich, ibid. 33, 1465 (1974).
21. G. E. Willis, J. W. Deardorff, J. Fluid Mech. 44, 661 (1970).
22. R. Krishnamurti, ibid. 42, 309.
23. R. Krishnamurti, ibid. 60, 285 (1973).
24. H. T. Rossby, ibid. 36, 309 (1969).
25. G. Ahlers, Phys. Rev. Lett. 33, 1185 (1974).
26. H. B. Moller, T. Riste, ibid. 34, 996 (1975).
27. J. A. Whitehead, Am. Sci. 59, 444 (1971).
28. A. Schlüter, D. Lortz, F. Busse, J. Fluid Mech. 23, 129 (1965).
29. F. H. Busse, ibid. 30, 625 (1967).
30. F. H. Busse, ibid. 52, 97 (1972).
31. E. Palm, T. Ellingsen, B. Gjevik, ibid. 30, 651 (1967).
32. J. B. McLaughlin, P. C. Martin, Phys. Rev. A12, 186 (1975).
33. P. S. Klebanoff, K. D. Tidstrom, L. M. Sargent, J. Fluid Mech. 12, 1 (1962).
34. M. T. Landahl, ibid. 56, 775 (1972).
35. L. S. G. Kovasznay, H. S. Komoda, B. R. Vasudeva, in: Proc., 1962, Conference of Heat Transfer and Sluid Mechanics Institute, v. 1, Stanford, Univ. Press, 1962.
36. R. W. Runstadler, S. J. Kline, W. C. Reynolds, Stanford Univ. Rept., 1963.
37. F. A. Schraub, S. J. Kline, Stanford Univ. Rept. MD-12 (1965).
38. F. A. Schraub, S. J. Kline, J. Henry, R. W. Runstadler, A. Littell, Trans. ASME, D87, 429 (1965).
39. S. J. Kline, W. C. Reynolds, F. A. Schraub, R. W. Runstadler, J. Fluid Mech. 30, 741 (1967).
40. H. T. Kim, S. J. Kline, W. C. Reynolds, Stanford Univ. Rept. MD-20 (1968).
41. H. T. Kim, S. J. Kline, W. C. Reynolds, J. Fluid Mech. 50, 133 (1971).
42. G. R. Offen, S. J. Kline, Stanford Univ. Rept. MD-31 (1973).
43. G. R. Offen, S. J. Kline, J. Fluid Mech. 62, 223 (1974).
44. G. R. Offen, S. J. Kline, ibid. 70, 209 (1975).
45. E. R. Corino, R. S. Brodkey, ibid. 37, 1 (1969).

46. R. W. Miksad, *ibid.* 59, 1 (1973).
47. R. W. Miksad, *ibid.* 56, 695 (1972).
48. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, вып. 7, М., «Мир», 1966.
49. E. N. Lorenz, in: *Proc. of Intern. Symposium on Numerical Weather Prediction*, Tokyo, 1962, p. 629.
50. С. Смейл, УМН 25 (1), 113 (1970).
51. Э. Нитедки, Введение в дифференциальную динамику, М., «Мир», 1975.
52. A. S. Monin, A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, v. 1, MIT Press, 1971.
53. J. T. Stuart, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 3, 347 (1971).
54. C. L. Pekeris, B. Shkoller, *J. Fluid Mech.* 29, 31 (1967).
55. S. J. Davies, C. M. White, *Proc. Roy. Soc. A* 119, 92 (1928).
56. W. C. Reynolds, M. Potter, *J. Fluid Mech.* 27, 465 (1967).
57. S. Kuwabara, *Phys. Fluids* 10, S115 (1967).
58. T. Ellingsen, B. Gjevik, E. Palm, *J. Fluid Mech.* 40, 97 (1970).
59. A. Daveu, H. P. F. Nguyen, *ibid.* 45, 4, 701 (1971).
60. E. N. Lorenz, *Tellus* 12, 243 (1960).
61. B. Saltzman, *J. Atmos. Sci.* 19, 329 (1962).
62. E. N. Lorenz, *ibid.* 20, 130 (1963).
63. Ф. В. Должанский, В. И. Кляцкин, А. М. Обухов, М. А. Чусов, *Нелинейные системы гидродинамического типа*, М., «Наука», 1974.
64. H.aken, *Phys. Lett. A* 53, 77 (1975).
65. Р. В. Плыкин, *Мат. сб.* 94 (136), 243 (1974).
66. D. Ruelle, *Lect. Notes Math.* 565, 146 (1976).
67. М. Непон, Y. Pomeau, *ibid.*, p. 29.
68. М. Непон, *Comm. Math. Phys.* 50, 69 (1976).
69. В. С. Афраймович, В. В. Быков, Л. П. Шильников, *ДАН СССР* (1977).
70. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, *ЖЭТФ* 71, 558 (1976).
71. В. И. Дубровин, В. Р. Коган, М. И. Рабинович, *Письма ЖЭТФ* (1977).
72. А. С. Пиковский, М. И. Рабинович, *ДАН СССР* (1977).
73. А. А. Косякин, Е. А. Сандлер, *Изв. вузов, сер. «Математика»*, № 3, 32 (1972).
74. О. И. Богоявленский, С. П. Новиков, УМН 31, 33 (1976).
75. О. И. Богоявленский, *ЖЭТФ* 70, 361 (1976).
76. О. И. Богоявленский, *ДАН СССР* 232, 1289 (1977).
77. А. С. Монин, *Вращение Земли и климат*, М., Гидрометиздат, 1972.