Глава 6. Турбулентность в стратифицированных средах

В большинстве случаев реальные геофизические среды являются стратифицированными. Гидросфере, как правило, свойственна устойчивая стратификация, а атмосфере – неустойчивая. Если стратификация устойчива, то она может существовать продолжительное время, препятствуя развитию турбулентности. Неустойчивая стратификация, напротив, провоцирует развитие турбулентности.

В этой главе будет оценен максимально возможный размер вихрей в устойчиво стратифицированной жидкости (масштаб Озмидова), описаны основные подходы к описанию турбулентности в стратифицированной среде в рамках подхода Рейнольдса, получен критерий устойчивости стратифицированного сдвигового течения (градиентное число Ричардсона).

6.1. Влияние плотностной стратификации на турбулентность. Масштаб Озмидова

Будем рассматривать однородную по горизонтали и стратифицированную по вертикали жидкость (газ), находящуюся в поле силы тяжести $\vec{g}$. Направим ось 0z вертикально верх, а оси 0x и 0y – горизонтально. Пусть вертикальное распределение плотности жидкости определяется некоторой функцией $\rho(z)$.

В общем случае сжимаемой жидкости устойчивость стратификации по отношению к бесконечно малым вертикальным смещениям частиц определяется тем, как соотносятся фактический градиент плотности $d\rho/dz$ и адиабатический градиент плотности

$$\left(\frac{d\rho(p(z))}{dz}\right)_s = \left(\frac{d\rho}{dp}\right)_s \frac{dp}{dz} = -\frac{\rho g}{c^2}, \qquad (6.1.1)$$

где $c = \sqrt{(dp/d\rho)_s}$ – скорость звука ($dp/dz = -\rho g$ из уравнения гидростатики). Действительно, если частицу жидкости переместить по вертикали на небольшое расстояние dz, то она попадет в слои с иным давлением, и ее плотность изменится. Перемещение на малое расстояние dz происходит достаточно быстро, так что частица не успевает обменяться теплом с окружающей средой. Следовательно, изменение плотности частицы при изменении давления должно соответствовать адиабатическому закону (6.1.1). Сила плавучести, действующая на смещенную частицу, пропорциональна ускорению силы тяжести g, объему частицы V и разнице плотностей окружающей среды и частицы $\Delta\rho$:

$$F_b = gV\Delta\rho = gV\left[\frac{d\rho}{dz} - \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_s\right]dz = gV\left[\frac{d\rho}{dz} + \frac{\rho g}{c^2}\right]dz.$$

Из формулы видно, что при условии $d\rho/dz + \rho g/c^2 < 0$ знак силы плавучести противоположен знаку смещения, следовательно, сила плавучести будет стремиться вернуть частицу в исходное положение (устойчивая стратификация). При условии $d\rho/dz + \rho g/c^2 > 0$ знаки силы плавучести и смещения совпадают. В этом случае сила плавучести будет способствовать дальнейшему росту смещения частицы (неустойчивая стратификация).

В рассматриваемом нами приближении несжимаемой жидкости скорость звука стремится к бесконечности, следовательно, в соответствии с формулой (6.1.1), адиабатический градиент стремится к нулю. Критерий устойчивости упрощается: при $d\rho/dz < 0$ (легкие слои лежат выше тяжелых слоев) стратификация является устойчивой, а при $d\rho/dz > 0$ – неустойчивой.

Для устойчиво стратифицированной жидкости из простых энергетических соображений можно определить масштаб турбулентности. Для определенности будем говорить о вихрях с горизонтальными осями, так как именно они способны трансформировать стратификационную структуру. Вихри с вертикальными осями, очевидно, не принимают прямого участия в вертикальном обмене.

Если в устойчиво стратифицированной несжимаемой жидкости, характеризуемой вертикальным распределением плотности $\rho(z)$, некоторая ее частичка объема V смещается в вертикальном направлении на расстояние ς, то на нее начинает действовать сила плавучести

$$F(\varsigma) = gV\frac{d\rho}{dz}\varsigma. \tag{6.1.2}$$

В устойчиво стратифицированной жидкости $d\rho/dz < 0$, следовательно, смещение ς и сила F всегда имеют разные знаки, т.е. сила плавучести является возвращающей силой.

Оценим работу, которую совершает сила плавучести при перемещении частицы в вертикальном направлении на расстояние z

$$A(z) = \int_0^z F(\varsigma)d\varsigma = gV\frac{d\rho}{dz}\frac{z^2}{2} \sim gV\frac{d\rho}{dz}z^2. \tag{6.1.3}$$

Полученная величина A имеет отрицательный знак. Это говорит о том, что для перемещения частицы по вертикали следует совершить работу против сил плавучести. Необходимая для этого энергия будет черпаться из кинетической энергии турбулентности. Иными словами, в устойчиво стратифицированной жидкости турбулентность теряет свою энергию на работу против сил плавучести. Причем, в силу того, что каждый вихрь перемещает частицы жидкости на расстояние, равное своему размеру, энергетические потери растут с увеличением масштаба турбулентности.

Для оценки максимально возможного размера вихря в устойчиво стратифицированной среде приравняем удельную кинетическую энергию турбулентности k и работу против сил плавучести $(-A)$, отнесенную к единице массы

$$k = -\frac{A}{V\rho}. \tag{6.1.4}$$

Используя выражения (6.1.3) и (6.1.4), находим

$$k = -\frac{g}{\rho}\frac{d\rho}{dz}z^2 \equiv N^2 z^2, \tag{6.1.5}$$

где $N = \sqrt{-\frac{g}{\rho}\frac{d\rho}{dz}}$ – частота Брента-Вяйсяля (частота плавучести).

Выразив из формулы (6.1.5) величину z, получаем

$$z \equiv L_O = \sqrt{\frac{k}{N^2}}. \tag{6.1.6}$$

Величина L_O именуется **масштабом Озмидова**. Физический смысл этой величины – максимально возможный размер вихрей в устойчиво стратифицированной жидкости.

Иногда для масштаба Озмидова используют формулу, в которую входит не энергия турбулентности, а диссипация турбулентной энергии

$$L_O = \sqrt{\frac{\varepsilon}{N^3}}. \tag{6.1.7}$$

Для перехода от формулы (6.1.6) к формуле (6.1.7) достаточно иметь в виду связь, вытекающую из теории размерности: $\varepsilon \sim kN$.

Устойчивая стратификация всегда способствует более быстрой диссипации кинетической энергии турбулентности. Но в зависимости от масштаба турбулентного движения это влияние может быть различным. На турбулентность с масштабами $L << L_O$, стратификация влияет очень слабо. На турбулентность с масштабами $L <\sim L_O$ стратификация оказывает сильное стабилизирующее влияние. И, наконец, турбулентность с масштабами $L > L_O$ не развивается вовсе.

6.2. Уравнение баланса турбулентной энергии с учетом сил плавучести

В этом разделе мы обобщим вывод уравнения баланса кинетической энергии турбулентности на случай, когда на частицы жидкости действует некоторая массовая сила $\vec{F}$ (F_i). Обобщенное уравнение баланса используем для оценки вклада силы плавучести в изменение энергии турбулентности.

Пусть на частицы жидкости действует сила F_i, которая представима как сумма средней величины и пульсации $F_i = \overline{F_i} + F_i'$. Перепишем уравнения Навье-Стокса (4.3.1) и Рейнольдса (4.4.2) с учетом действия этой силы

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[u_i u_\alpha + \frac{p}{\rho}\delta_{i\alpha} - \frac{\sigma_{i\alpha}}{\rho}\right] = F_i, \tag{6.2.1}$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\overline{u_i}\,\overline{u_\alpha} + \overline{u_i' u_\alpha'} + \frac{\overline{p}}{\rho}\delta_{i\alpha} - \frac{\overline{\sigma_{i\alpha}}}{\rho}\right] = \overline{F_i}. \tag{6.2.2}$$

Вывод уравнения для компонент тензора Рейнольдса будем основывать на соотношении (см. раздел 4.4)

$$\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} - \frac{\partial \overline{u_i}\,\overline{u_j}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial u_i u_j}{\partial t} - \frac{\partial \overline{u_i}\,\overline{u_j}}{\partial t}}, \tag{6.2.3}$$

на методе Фридмана-Келлера

$$\frac{\partial u_i u_j}{\partial t} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial t}, \tag{6.2.4}$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}\,\overline{u_j}}{\partial t} = \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial t} \tag{6.2.5}$$

и на правилах осреднения Рейнольдса (см. раздел 4.1).

Величины $\partial u_i / \partial t$ в (6.2.4) выражаем из уравнения Навье-Стокса (6.2.1), а величины $\partial \overline{u_i} / \partial t$ в (6.2.5) – из уравнения Рейнольдса (6.2.2). Мы здесь, конечно, не будем целиком повторять вывод уравнений, который подробно описан в разделах 4.3 и 4.4. Покажем только те элементы преобразований, которые непосредственно связаны с силой F_i. Все прочие члены уравнений будем обозначать символом «...». С учетом этого обозначения уравнения Навье-Стокса и Рейнольдса принимают следующий вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = F_i + \ldots ,$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} = \overline{F_i} + \ldots .$$

Используя формулу (6.2.4) и уравнение Навье Стокса, получаем

$$\frac{\partial u_i u_j}{\partial t} = u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + u_i \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right) = u_j F_i + u_i F_j + \ldots . \tag{6.2.6}$$

А из формулы (6.2.5) и уравнения Рейнольдса следует

$$\frac{\partial \overline{u_i}\,\overline{u_j}}{\partial t} = \overline{u_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} \right) + \overline{u_i} \left(\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial t} \right) = \overline{u_j}\,\overline{F_i} + \overline{u_i}\,\overline{F_j} + \ldots . \tag{6.2.7}$$

Используя схему (6.2.3) и выражения (6.2.6) и (6.2.7), получаем

$$\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial u_i u_j}{\partial t} - \frac{\partial \overline{u_i}\,\overline{u_j}}{\partial t}} = \overline{u_j F_i + u_i F_j - \overline{u_j}\,\overline{F_i} - \overline{u_i}\,\overline{F_j}} + \ldots . \tag{6.2.8}$$

Преобразуем правую часть формулы (6.2.8) в соответствии с правилами осреднения Рейнольдса.

$$\overline{u_jF_i + u_iF_j - \overline{u}_j\overline{F}_i + \overline{u}_i\overline{F}_j} = \overline{(\overline{u}_j + u_j')(\overline{F}_i + F_i') + (\overline{u}_i + u_i')(\overline{F}_j + F_j') - \overline{u}_j\overline{F}_i - \overline{u}_i\overline{F}_j} =$$

$$= \overline{\overline{u}_j\overline{F}_i + \overline{u}_jF_i' + u_j'\overline{F}_i + u_j'F_i' + \overline{u}_i\overline{F}_j + \overline{u}_iF_j' + u_i'\overline{F}_j + u_i'F_j' - \overline{u}_j\overline{F}_i - \overline{u}_i\overline{F}_j} =$$

$$= \underbrace{\overline{\overline{u}_jF_i'}}_{=0} + \underbrace{\overline{u_j'\overline{F}_i}}_{=0} + \overline{u_j'F_i'} + \underbrace{\overline{\overline{u}_iF_j'}}_{=0} + \underbrace{\overline{u_i'\overline{F}_j}}_{=0} + \overline{u_i'F_j'} = \overline{u_j'F_i'} + \overline{u_i'F_j'}.$$

Видно, что учет действия силы F_i приводит к появлению в правой части уравнения для компонент тензора Рейнольдса (4.4.6) двух дополнительных членов $\rho\overline{u_j'F_i'}$ и $\rho\overline{u_i'F_j'}$

$$\frac{\partial\rho\overline{u_i'u_j'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho\overline{u_i'u_j'}\,\overline{u}_\alpha + \rho\overline{u_i'u_j'u_\alpha'} + \left(\overline{p'u_i'}\,\delta_{j\alpha} + \overline{p'u_j'}\,\delta_{i\alpha}\right) - \left(\overline{u_i'\sigma_{j\alpha}'} + \overline{u_j'\sigma_{i\alpha}'}\right)\right] =$$

$$= \overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)} - \left(\overline{\sigma_{i\alpha}'\frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha}} + \overline{\sigma_{j\alpha}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}}\right) - \left(\rho\overline{u_i'u_\alpha'}\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_\alpha} + \rho\overline{u_j'u_\alpha'}\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_\alpha}\right) +$$

$$+ \rho\overline{u_j'F_i'} + \rho\overline{u_i'F_j'}. \qquad (6.2.9)$$

Далее, действуя по уже обычному сценарию, положим в уравнении (6.2.9) $i = j \equiv \beta$. В итоге приходим к уравнению для средней плотности кинетической энергии пульсационного движения $E_t = \rho\overline{u_\beta'u_\beta'}/2$ с учетом действия внешних сил.

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[E_t\overline{u}_\alpha + \frac{1}{2}\rho\,\overline{u_\beta'u_\beta'u_\alpha'} + \overline{p'u_\alpha'} - \overline{u_\beta'\sigma_{\alpha\beta}'}\right] =$$

$$= -\rho\overline{\varepsilon}_t - \rho\overline{u_\alpha'u_\beta'}\frac{\partial\overline{u}_\beta}{\partial x_\alpha} + \rho\,\overline{u_\beta'F_\beta'}. \qquad (6.2.10)$$

Последний член в правой части (6.2.10) $\rho\,\overline{u_\beta'F_\beta'}$ описывает работу силы F_i по изменению кинетической турбулентности.

Пусть в качестве внешней силы выступает сила плавучести (напомним, что ось 0z направлена вертикально верх, а оси 0x и 0y лежат в горизонтальной плоскости). Тогда вектор силы имеет только одну отличную от нуля компоненту $\vec{F} \equiv (F_1, F_2, F_3) = (0, 0, -\frac{\rho'}{\rho} g)$. Работа силы плавучести на единицу массы в единицу времени определяется следующим выражением:

$$W_\rho \equiv \overline{u'_\beta F'_\beta} = -\frac{g}{\rho} \overline{w' \rho'}. \tag{6.2.11}$$

Заметим, что в случае устойчивой стратификации положительные пульсации вертикальной скорости соответствуют положительным пульсациям плотности, поэтому величина $\overline{w'\rho'}$ принимает положительные значения. Следовательно, сама величина W_ρ оказывается отрицательной (действие силы плавучести в устойчиво стратифицированной жидкости приводит к уменьшению кинетической энергии турбулентности). В случае неустойчивой стратификации ситуация обратная ($\overline{w'\rho'} < 0$, но $W_\rho > 0$): энергии турбулентности увеличивается за счет уменьшения потенциальной энергии стратифицированной жидкости.

Используя гипотезу Буссинеска, введем турбулентный коэффициент обмена массой

$$K_\rho = -\frac{\overline{w'\rho'}}{\frac{d\bar{\rho}}{dz}}. \tag{6.2.12}$$

С учетом (6.2.12) формула (6.2.11) может быть записана следующим образом:

$$W_\rho = \frac{g}{\rho} K_\rho \frac{d\rho}{dz} = \frac{g}{\rho} \frac{K_T}{\sigma_\rho} \frac{d\rho}{dz}, \tag{6.2.13}$$

где $K_т$ – коэффициент турбулентной вязкости, σ_ρ – новый эмпирический коэффициент (см. раздел 5.9).

Формулу (6.2.13) можно, например, применить в $k-\varepsilon$ модели, добавив в правую часть уравнения (5.9.8) член, описывающий затраты энергии на работу против сил плавучести. Продемонстрируем это на примере установившегося плоскопараллельного горизонтального течения стратифицированной жидкости, характеризуемого профилем скорости $\overline{\overline{v}} = \left(\overline{u}(z), 0, 0\right)$ и профилем плотности $\rho(z)$. Стратификацию будем считать устойчивой: $d\rho/dz < 0$. Уравнение баланса турбулентной энергии (5.9.8) в этом случае приобретает следующий вид:

$$\frac{d}{dz}\left(\left[\nu + \frac{K_т}{\sigma_k}\right]\frac{dk}{dz}\right) + K_т\left(\frac{d\overline{u}}{dz}\right)^2 - \varepsilon + \frac{g}{\rho}\frac{K_т}{\sigma_\rho}\frac{d\rho}{dz} = 0. \qquad (6.2.14)$$

Пренебрегая диффузией и диссипацией турбулентной энергии, оставим в уравнении (6.2.14) два главных члена, первый из которых ответственен за генерацию энергии турбулентности сдвиговым течением, а второй – за потери энергии на работу против сил плавучести

$$K_т\left(\frac{d\overline{u}}{dz}\right)^2 + \frac{g}{\rho}\frac{K_т}{\sigma_\rho}\frac{d\rho}{dz} = 0. \qquad (6.2.15)$$

Выражая из (6.2.15) коэффициент σ_ρ, получаем

$$\sigma_\rho \equiv Ri = -\frac{g}{\rho}\frac{d\rho}{dz}\bigg/\left(\frac{d\overline{u}}{dz}\right)^2. \qquad (6.2.16)$$

Безразмерная величина, определяемая формулой (6.2.16), именуется **градиентное число Ричардсона.** Эта величина отражает степень устойчивости стратификации к развитию турбулентности в сдвиговом течении.

В стационарном плоскопараллельном потоке со сдвигом скорости турбулентность развивается при условии $Ri < Ri_c = 0.25$. Теоретическому определению критического значения числа Ричардсона посвящен следующий раздел.

6.3. Задача Майлса об определении критического значения градиентного числа Ричардсона

В этом разделе мы определим критическое значение градиентного числа Ричардсона, следуя классическим работам [Miles, 1961; Howard, 1961].

Будем рассматривать идеальную (невязкую) несжимаемую устойчиво стратифицированную жидкость, текущую в горизонтальном направлении. Задачу рассматриваем в 2D постановке. Ось 0z направим вертикально вверх, ось 0x – вдоль стационарного сдвигового течения. Пусть распределение плотности $\rho_0(z)$ является устойчивым в отсутствии течения (устойчивая стратификация: $d\rho_0 / dz < 0$). Среднее течение будем полагать стационарным. Вектор скорости среднего течения имеет единственную компоненту $U(z)$, которая зависит только от поперечной координаты z.

В такой ситуации невозмущенные поля давления и плотности подчиняются закону гидростатики

$$0 = -\frac{1}{\rho_0}\frac{dp_0}{dz} - g. \qquad (6.3.1)$$

Как это принято в линейной теории устойчивости, в качестве возмущения выберем волну малой амплитуды $F(z)$, которая описывается формулой

$$\eta(x,z,t) = F(z)e^{ik(x-ct)}. \qquad (6.3.2)$$

Волновое число k – действительная величина, но фазовая скорость может быть мнимой $c = c_r + ic_i$. Цель нашего исследования состоит в определении условия, при котором появляется отличная от нуля мнимая часть, – именно в этом случае происходит развитие неустойчивости.

Полный вектор скорости можно представить следующим образом:
$\vec{v} = \left(U(z) + u(x,z,t),\ w(x,z,t)\right)$,
где $u(x,z,t)$ и $w(x,z,t)$ – малые нестационарные возмущения.

Выберем некоторый уровень z_0. При прохождении волнового возмущения (6.3.2) плотность на уровне z_0 изменяется на величину

$$\Delta\rho = -\left(\frac{d\rho_0}{dz}\right)_{z_0} \eta\,, \qquad (6.3.3)$$

Знак минус в формуле (6.3.3) возникает в связи с тем, что при положительном возмущении η на уровень z_0 приходит жидкость с уровня $z_0 - \eta$.

Анализ устойчивости будем основывать на уравнениях Эйлера. Сила плавучести, входящая в правую часть вертикальной компоненты уравнения Эйлера определяется формулой (см. раздел 2.6)

$$F_b = -\frac{\Delta\rho}{\rho_0} g\,.$$

С учетом обозначения, введенного в работе [Miles, 1961]

$$\beta(z) = -\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\,,$$

и формулы (6.3.3) получаем следующее выражение для силы плавучести:

$$F_b = \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\eta g = -\beta\eta g\,. \qquad (6.3.4)$$

Линеаризуем уравнения Эйлера, имея в виду малость величин η, u, w, Δp и $\Delta\rho$, где $\Delta p = p - p_0$, $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ – отклонение давления и плотности от значений p_0 и ρ_0, соответствующих гидростатическому равновесию.

$$\frac{\partial(U+u)}{\partial t}+(U+u)\frac{\partial(U+u)}{\partial x}+w\frac{\partial(U+u)}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0+\Delta\rho}\frac{\partial(p_0+\Delta p)}{\partial x}, \qquad (6.3.5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+(U+u)\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0+\Delta\rho}\frac{\partial(p_0+\Delta p)}{\partial z}-g \qquad (6.3.6)$$

Цепочка элементарных преобразований правой части уравнения (6.3.6) выглядит следующим образом:

$$-\frac{1}{\rho_0+\Delta\rho}\frac{\partial(p_0+\Delta p)}{\partial z}-g=-\frac{1}{\rho_0}\frac{1}{1+\dfrac{\Delta\rho}{\rho_0}}\left(\frac{\partial p_0}{\partial z}+\frac{\partial\Delta p}{\partial z}\right)-g=$$

$$\approx-\frac{1}{\rho_0}\left(1-\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)\left(-g\rho_0+\frac{\partial\Delta p}{\partial z}\right)-g\approx\left(-\frac{1}{\rho_0}+\frac{\Delta\rho}{\rho_0^{\,2}}\right)\left(-g\rho_0+\frac{\partial\Delta p}{\partial z}\right)-g\approx$$

$$\approx-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Delta p}{\partial z}-\frac{\Delta\rho}{\rho_0}g+\frac{\Delta\rho}{\rho_0^{\,2}}\frac{\partial\Delta p}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Delta p}{\partial z}-\beta\eta g+\frac{\Delta\rho}{\rho_0^{\,2}}\frac{\partial\Delta p}{\partial z}.$$

Далее, учитывая стационарность и однородность по горизонтали среднего течения ($\partial U/\partial t=0, \partial U/\partial x=0$) и отбрасывая члены квадратичной малости ($u\,\partial u/\partial x, w\,\partial u/\partial z$ и др.), получаем

$$\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{dU}{dz}\right)+\frac{\partial\Delta p}{\partial x}=0, \qquad (6.3.7)$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial w}{\partial t}+U\frac{\partial w}{\partial x}+\beta g\eta\right)+\frac{\partial\Delta p}{\partial z}=0. \qquad (6.3.8)$$

Систему (6.3.7) и (6.3.8) следует дополнить уравнением неразрывности

$$\frac{\partial(U+u)}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (6.3.9)$$

В невозмущенном состоянии плотность частицы жидкости $\rho_0(z_0)$ однозначно связана с уровнем z_0, на котором эта частица находится. При прохождении возмущения (6.3.2) вертикальная координата частицы станет $z = z_0 + \eta(x, z_0, t)$. Отсюда следует, что изопикническая поверхность (поверхность равной плотности) описывается уравнением $S(x, z, t) \equiv z_0 - z + \eta(x, z_0, t) = 0$. На этой поверхности действует кинематическое граничное условие $dS/dt = 0$, из которого вытекает формула для определения вертикальной компоненты скорости

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U\frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{6.3.10}$$

Учитывая вид возмущения (6.3.2) из (6.3.10) получаем

$$w = ik\eta(U - c). \tag{6.3.11}$$

Горизонтальная компонента скорости, также как и вертикальная компонента, имеет вид волнового возмущения

$$u \sim e^{ik(x-ct)}, \tag{6.3.12}$$

следовательно, можем записать

$$\frac{\partial u}{\partial x} = iku. \tag{6.3.13}$$

Теперь воспользуемся уравнением неразрывности (6.3.9)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{6.3.14}$$

Из (6.3.13) и (6.3.14) с учетом (6.3.11) получаем (нижний индекс «z» здесь и далее обозначает соответствующую частную производную)

$$u = -\frac{1}{ik}\frac{\partial w}{\partial z} = -[\eta(U - c)]_z. \tag{6.3.15}$$

Для дальнейших преобразований нам потребуются следующие две формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} = ik(U - c)u, \tag{6.3.16}$$

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial x} = ik\Delta p \text{ (т.к. } \Delta p \sim e^{ik(x-ct)}\text{)}. \tag{6.3.17}$$

Выполним серию несложных преобразований уравнения (6.3.7) с учетом формул (6.3.15), (6.3.16) и (6.3.17)

$$\rho_0\big(ik(U-c)u + ik\eta(U-c)U_z\big) + ik\Delta p = 0,$$

$$\rho_0(U-c)\big(-[\eta(U-c)]_z + \eta U_z\big) + \Delta p = 0,$$

$$\rho_0(U-c)\big(-\eta_z(U-c) - \eta U_z + \eta U_z\big) + \Delta p = 0.$$

В итоге получаем

$$\Delta p = \rho_0(U-c)^2\eta_z. \qquad (6.3.18)$$

Перед преобразованием уравнения (6.3.8) заметим следующую формулу:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x} = ik(U-c)w. \qquad (6.3.19)$$

С использованием (6.3.19) и (6.3.11) уравнение (6.3.8) приводим к виду

$$\rho_0\big(-k^2(U-c)^2\eta + \beta g\eta\big) + \frac{\partial \Delta p}{\partial z} = 0. \qquad (6.3.20)$$

Подставляя в (6.3.20) выражение для давления (6.3.18), приходим к уравнению

$$[\rho_0(U-c)^2F_z]_z + \rho_0[\beta g - k^2(U-c)^2]F = 0. \qquad (6.3.21)$$

Сделав в (6.3.21) замену переменных, предложенную в статье [Howard 1961]

$$W \equiv U - c, \qquad (6.3.22)$$

$$G = W^{1/2}F, \qquad (6.3.23)$$

получаем следующее итоговое уравнение (индекс «0» у плотности опустим):

$$[\rho W G_z]_z - [0.5(\rho U_z)_z + k^2\rho W + \rho W^{-1}(0.25U_z^2 - g\beta)]\,G = 0. \qquad (6.3.24).$$

Уравнение (6.3.24) следует дополнить граничными условиями. На поверхностях, ограничивающих поток $z = z_1, z_2$, должно выполняться

условие непротекания. В этой связи амплитуда волнового возмущения F, а вместе с ней и функция G, на границе должны обращаться в ноль:
$z = z_1, z_2: \quad G = G^* = 0$.

Далее применим подход, близкий к тому, который был использован при доказательстве теоремы Рэлея о точке перегиба (см. раздел 2.4). Помножим уравнение (6.3.24) на комплексносопряженную величину G^* и интегрируем его по вертикальной координате от z_1 до z_2 с учетом граничных условий. Последовательно проведем эту операцию с каждым из четырех членов уравнения (6.3.24).

$$\int_{z_1}^{z_2} dz[\rho W G_z]_z G^* = \rho W G_z G^* \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} dz\, \rho W |G_z|^2 = -\int_{z_1}^{z_2} dz\, \rho W |G_z|^2, \qquad (6.3.25).$$

$$\int_{z_1}^{z_2} dz\ 0.5(\rho U_z)_z GG^* = \int_{z_1}^{z_2} dz\ 0.5(\rho U_z)_z |G|^2, \qquad (6.3.26)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} dz\, k^2 \rho W G G^* = \int_{z_1}^{z_2} dz\, k^2 \rho W |G|^2, \qquad (6.3.27)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} dz\, \rho W^{-1}(0.25 U_z^2 - g\beta) GG^* = \int_{z_1}^{z_2} dz\, \rho W^{-1}(0.25 U_z^2 - g\beta)|G|^2. \qquad (6.3.28)$$

В результате интегрирования (6.3.24) получаем

$$\int_{z_1}^{z_2} dz \left(\rho W |G_z|^2 + 0.5(\rho U_z)_z |G|^2 + k^2 \rho W |G|^2 + \rho W^{-1}(0.25 U_z^2 - g\beta)|G|^2\right) = 0. \qquad (6.3.29)$$

В общем случае функции W и G, определяемые формулами (6.3.22) и (6.3.23), являются комплекснозначными (напомним, что фазовая скорость c – комплексная величина). Видно, что только второе слагаемое в подынтегральном выражении (6.3.29) является действительной величиной, все прочие слагаемые представляют собой комплексные величины.

Для выделения из уравнения (6.3.29) мнимой части отбросим второе слагаемое (действительную величину), а последнее слагаемое помножим и разделим на комплексносопряженную величину W^*

$$\int_{z_1}^{z_2} dz \left(\rho W |G_z|^2 + k^2 \rho W |G|^2 + \frac{\rho(0.25U_z^2 - g\beta)|G|^2 W^*}{|W|^2} \right) = 0. \tag{6.3.30}$$

Выделяя мнимую часть в (6.3.30), получаем

$$\int_{z_1}^{z_2} dz \, \mathrm{Im}(W) \left(\rho |G_z|^2 + k^2 \rho |G|^2 - \frac{\rho(0.25U_z^2 - g\beta)|G|^2}{|W|^2} \right) = 0. \tag{6.3.31}$$

Для существования ненулевой мнимой части $\mathrm{Im}(W)$ необходимо выполнение следующего условия:

$$0.25U_z^2 - g\beta > 0. \tag{6.3.32}$$

Наличие мнимой части $\mathrm{Im}(W)$ означает, что существует ненулевая мнимая часть $\mathrm{Im}(c)$, что эквивалентно неустойчивости – экспоненциальному росту волнового возмущения (6.3.2).

Преобразуя (6.3.32) к традиционному виду, получаем, что для развития турбулентности в сдвиговом стратифицированном течении необходимо выполнения условия

$$Ri = \frac{g\beta}{U_z^2} < 0.25. \tag{6.3.33}$$

Величина $g\beta$ представляет собой квадрат частоты Брента-Вяйсяля (частоты плавучести)

$$g\beta = N^2 = -\frac{g}{\rho}\frac{d\rho}{dz}. \tag{6.3.34}$$

С учетом (6.3.34) критерий (6.3.33) можно записать в следующем виде:

$$Ri = \frac{N^2}{U_z^2} < 0.25.$$