

ГЛАВА 1 ВОЗМУЩЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПОТОКА**§1 ЛАМИНАРНОЕ И ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ**

Известно, что медленное течение жидкости является плавным, представляет собой движение параллельными слоями. Такое течение принято называть ламинарным. Но если увеличивать скорость течения, происходит внезапный переход к другой форме течения – турбулентной, когда жидкость течет столь сложным образом, что иногда создается впечатление, что это движение хаотично. В 80-х годах XIX века Осборн Рейнольдс предпринял систематическое изучение перехода от ламинарной формы течения к турбулентной. Рейнольдс наблюдал в серии экспериментов ламинарно-турбулентный переход при течении жидкости в круглых каналах разных диаметров, варьируя напор и вязкость жидкости. Он установил следующую закономерность: существует критическое значение числа Рейнольдса (отношение скорости потока к произведению кинематической вязкости жидкости на характерный линейный размер) при котором происходит ламинарно-турбулентный переход. Такой переход происходит не только при течении в трубе (канале). Можно сказать, что он характерен почти для всех течений вязкой жидкости. В частности, обтекание жидкостью крыла, профиля корабля, подводной лодки, тела рыбы или птицы также характеризуется ламинарно-турбулентным переходом.

Почему происходит ламинарно-турбулентный переход течения жидкости? Ответ на него был сформулирован почти одновременно Рейнольдсом и лордом Рэлеем: переход к турбулентности наступает вследствие неустойчивости течения жидкости к возмущениям. При малых скоростях (малых числах Рейнольдса) возникающие возмущения не имеют шансов на длительное существование, они гаснут со временем и система приходит в свое первоначальное состояние. При больших числах Рейнольдса, наоборот, появившись, возмущения могут нарастать со временем, либо существовать неизменными.

Начнем с невазкого подхода, предложенного Рэлеем [1]. Суть его заключается в том, чтобы описывать поведение во времени возникающих в потоке возмущений, не учитывая действия на возмущения вязкости. Вязкость, с одной стороны, представляет собой эффект малый, с другой - все самые интересные явления в теории гидродинамической устойчивости - рост возмущений, возникновение неустойчивости - происходят при больших числах Рейнольдса, что эквивалентно малой вязкости. Во всяком случае, такой подход представляется в качестве первого шага разумным.

Пусть имеется возможность как-то измерять отклонение одного решения от другого, какая-то мера этого отклонения. Устойчивость означает, что каково бы ни было $\epsilon > 0$, всегда можно найти такое $\delta > 0$, что если начальные условия изменить не более, чем на δ , то решение в любой момент времени изменится не более, чем на ϵ , то есть это есть устойчивость по возмущениям начальных данных. Пусть мы перешли к линеаризованной системе уравнений (оставили лишь те члены уравнений, которые содержат малые величины в степени не выше первой). Для линейной системы понятие устойчивости обычно другое. Здесь неустойчивые решения неограниченно растут, а устойчивые остаются ограниченными одной константой для всех моментов времени. Допустим, что мы показали неустойчивость некоторого решения в линейном приближении. Решение

неограниченно растет, то есть становится сколь угодно большим, с какого бы малого значения мы его не начинали.

Как в таком случае должно вести себя решение нелинейных уравнений? Когда решение еще мало, оно довольно хорошо следует за решением линейной системы, по самому смыслу линейной аппроксимации. Но когда оно становится достаточно большим, линейное приближение перестает действовать. Как правило, в таких случаях решение за счет нелинейных членов уравнения остается ограниченным (это бывает следствием, например, ограниченности общей энергии в системе) и доходит до некоторого конечного предела. Пусть теперь мы взяли в начальный момент меньшие по значению начальные условия. Пока действует линейное приближение, решение растет пропорционально той же величине, что и в предыдущем случае. Теперь оно позже выйдет из зоны действия линейного приближения, но для таких же значений амплитуды, что и прежде. В конечном итоге оно, хотя и позже, подойдет к тем же предельным значениям, которые окажутся, таким образом, независимыми от начальных условий. Если начальные условия стремятся к нулю, то решение для каждого момента времени стремится к нулю, но неравномерно относительно всех моментов времени, то есть, нет устойчивости по Ляпунову. Итак, если доказана неустойчивость в линейном приближении, то есть неустойчивость и в точном смысле.

Пусть основное (невозмущенное) движение жидкости определяется полем скорости $u(x, y, z, t)$. В потоке жидкости существуют возмущения скорости:

$$u(x, y, z, t) + u'(x, y, z, t) \quad (1.1)$$

Осредненная во времени величина возмущений отлична от нуля:

$$\langle u'(x, y, z) \rangle \neq 0 \quad (1.2)$$

Решаем линейную задачу на устойчивость основного движения жидкости к малым возмущениям. Основное течение и возмущения должны удовлетворять уравнениям движения, неразрывности и граничным условиям. Рассмотрим течение идеальной жидкости (без вязкости) в вертикальной плоскости (x, z) . Движение описывается уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} - g\rho \end{aligned} \quad (1.3)$$

Предполагаем, что жидкость является несжимаемой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Пусть основное стационарное течение, устойчивость которого исследуется, направлено по оси Ox и его скорость зависит только от вертикальной координаты $U(z)$. Скорость возмущенного течения можно записать:

$$\begin{aligned} u &= U(z) + u' \\ w &= w' \end{aligned} \quad (1.5)$$

Остальные переменные имеют основную стационарную составляющую и возмущение:

$$\begin{aligned} p &= \bar{p}(z) + p' \\ \rho &= \bar{\rho}(z) + \rho' \end{aligned} \quad (1.6)$$

Опускаем произведения малых величин – получаем линеаризованные уравнения:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial U}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \bar{\rho} \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} \right) &= - \frac{\partial p'}{\partial z} - g \rho' \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + U \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Вводим функцию тока и вертикальный градиент плотности β :

$$u' = - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w' = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \beta = - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dz} \quad (1.9)$$

Если применить к правой и левой части уравнений (1.7) операцию rot, то класс решений будет сужен, зато система уравнений может быть существенно упрощена. Учитывая уравнения (1.8) получаем основное уравнение:

$$- \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\Delta \psi - \beta \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \left(\frac{d^2 U}{dz^2} - \beta \frac{dU}{dz} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = g \beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (1.10)$$

Если коэффициенты полученного уравнения движения не зависят от координаты x и времени t , то пространственные переменные разделяются, и возмущения можно искать в виде нормальных волн:

$$\psi(x, z, t) = \psi(z) e^{i\alpha(x - \sigma t)} \quad (1.11)$$

где α – волновое число в направлении оси x , σ – фазовая скорость волны.

Рассмотрим устойчивость течения невязкой жидкости с линейным вертикальным профилем скорости. Ньютон установил, что такой профиль скорости характерен для узкого слоя жидкости, прилегающего к твердой стенке. Формируется линейный профиль скорости с нулевым значением на стенке благодаря вязкости. В идеальной жидкости такой профиль можно сконструировать, если поставить несколько горизонтальных трубочек одну над другой и задать скорость вытекающих струек по линейному закону. Изучение устойчивости такого течения является очень важной задачей, так как многочисленные эксперименты, проведенные в 20 веке, убедительно показали, что возмущения, меняющие форму основного течения, формируются вблизи твердых границ.

Пусть жидкость заполняет полупространство $z > 0$, плотность постоянна во все время движения, а скорость растет линейно с координатой z : $U = kz$.

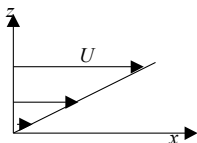


Рис. 1.1 Вертикальный профиль скорости течения, характерный для узкого слоя у твердой стенки

Уравнение движения можно записать в этом случае:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + kz \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta \psi = 0 \quad (1.12)$$

Подставляя решение в виде нормальных волн (1.10) в (1.12) получаем уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha kz \right) (\psi_{zz} - \alpha^2 \psi) = 0 \quad (1.13)$$

Запишем начальные и граничные условия:

$$\psi(z, 0) = \psi_0(z), \quad \psi(0, t) = 0, \quad \psi(z, t) \text{ ограничена при } z \rightarrow \infty \quad (1.14)$$

Полученное уравнение (1.13) интегрируем по t :

$$\psi_{zz} - \alpha^2 \psi = e^{i\alpha kzt} f(z) \quad (1.15)$$

Произвольная функция $f(z)$ определяется начальным условием:

$$f(z) = (\psi_0)_{zz} - \alpha^2 \psi_0 \quad (1.16)$$

Осталось решить дифференциальное уравнение второго порядка по z при заданных краевых условиях. Решение находим методом вариации произвольного постоянного:

$$\psi = - \int_z^{\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-i\alpha k\zeta} f(\zeta) \text{sh}[\alpha(z-\zeta)] d\zeta + C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z} \quad (1.17)$$

Нужно сделать какие-либо предположения о начальных условиях $\psi_0(z)$, чтобы этот интеграл сходился. Например, можно предположить, что эти начальные условия отличны от нуля лишь в конечной области изменения z . Константы C_1 и C_2 должны быть найдены из условия ограниченности на бесконечности и обращения в нуль при $z=0$.

$$\psi = - \frac{1}{\alpha} \int_z^{\infty} e^{-i\alpha k\zeta} f(\zeta) \text{sh}[\alpha(z-\zeta)] d\zeta - \frac{1}{\alpha} \int_z^{\infty} e^{-i\alpha k\zeta} f(\zeta) \text{sh}[\alpha\zeta] e^{-\alpha z} d\zeta \quad (1.18)$$

Можно показать, что это выражение ограничено при $t \rightarrow \infty$ и не превосходит величины:

$$\frac{1}{\alpha} \int_z^{\infty} |f(\zeta)| \text{sh} \alpha |z-\zeta| d\zeta + \frac{1}{\alpha} \int_z^{\infty} |f(\zeta)| \text{sh}(\alpha\zeta) e^{-\alpha z} d\zeta \quad (1.19)$$

Малые возмущения остаются все время ограниченными по своей амплитуде. Отсюда следует вывод: движение однородной жидкости при линейном вертикальном профиле скорости устойчиво к бесконечно малым возмущениям.

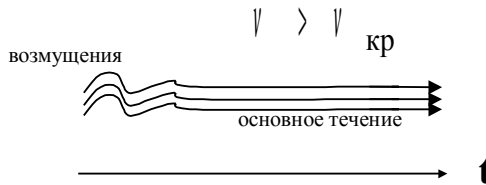
Задача решалась для случая, когда скорость основного течения не меняется вдоль направления движения. Эксперименты, проведенные на кафедре физики

моря и вод суши физического факультета МГУ при выполнении условия равномерности ($\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| < 0.001 \text{ c}^{-1}$), убедительно показали, что в этом случае возмущения у гладкой стенки не развиваются даже при числах Рейнольдса порядка 10^5 .

§2. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ [2]

Экспериментальное исследование потоков воды, начиная с работ Рейнольдса показало, что существуют критические параметры течения, при которых одна форма движения меняется на другую. Теория устойчивости это часть математической физики, позволяющая получить критические значения параметров, разделяющие различные формы движения жидкости. Теория устойчивости приводит к определенным утверждениям о *решениях* уравнений. Важно, чтобы эти уравнения действительно описывали наблюдаемые течения жидкости. Будем исследовать уравнения типа Навье-Стокса.

Если фиксированы область течения, граничные условия, и внешние силы, то решения уравнений будут определяться вязкостью и начальными условиями. Течения, удовлетворяющие уравнениям типа Навье-Стокса обладают важным свойством: если вязкость жидкости больше критической, то все решения монотонно стремятся к единственному решению, соответствующему основному течению, а энергия любого возмущения начинает затухать, начиная с начального момента времени.



Для жидкостей с меньшей вязкостью можно найти возмущения, которые в начальный момент возрастают. Затем в зависимости от условий они могут затухать или сохраняться. Критическое значение вязкости, отделяющее возрастающие возмущения от монотонно затухающих, называется первой критической вязкостью энергетической теории.



Устойчивость основного течения зависит от поведения решения за длительный интервал времени. В большинстве случаев существует вторая критическая вязкость $V_{кр2} \leq V_{кр1}$. Если $V > V_{кр2}$ - основное течение устойчиво, так как нет возмущений (вне зависимости от их амплитуды), которые могли бы существовать достаточно долго. Если $V < V_{кр2}$ основное течение передает устойчивость более сложному (или множеству течений). При дальнейшем уменьшении вязкости, новое течение может в свою очередь терять устойчивость и

переходить в еще более сложное. Все увеличивающуюся сложность движения часто называют «турбулентностью».

Вид нового течения определяется параметрами задачи и возмущениями. Это могут быть синусоидальные колебания, цилиндрические вихри, воронкообразные вихри, тороидальные течения и пр. Отсюда следует, что одной из главных целей теории устойчивости должно быть правильное описание процесса, согласно которому по мере убывания вязкости одни решения теряют устойчивость и переходят в другие.

К настоящему времени понята только часть этих процессов, остальные же относятся к области гипотез. Полная математическая теория немыслима в ситуации, когда даже качественно процессы поняты только частично. В связи с этим, в исследованиях по гидродинамической теории устойчивости следует сосредоточить внимание на конкретных задачах, для которых можно *найти решения, и сопоставить* эти решения с *экспериментальными данными*.

Проблема устойчивости представляет собой нелинейную задачу, и ее линейный анализ следует понимать только как аппроксимацию истинной проблемы. Когда нелинейный анализ истинной проблемы ограничивается линейной теорией малых возмущений, то такой анализ называется *локальным*. В *глобальном* анализе размер возмущений или не ограничен, или менее ограничен.

В глобальной теории важную роль играют энергетические методы. Они приводят к вариационной задаче для первой критической вязкости энергетической теории устойчивости, то есть определяют критерий, который является достаточным для глобальной устойчивости основного течения.

Отправной точкой для обобщенного энергетического анализа являются функционалы, выведенные из уравнений Навье–Стокса и сначала определенные на решениях этих уравнений, а затем обобщенные на более широкий класс полей, которые кинематически допустимы в качестве начальных полей скорости. Такие функционалы ограничены в этом более широком классе полей, а получающиеся в результате математическая задача состоит в нахождении оптимальной границы.

Энергетический анализ приводит к глобальным утверждениям об устойчивости, которые имеют форму критериев, достаточных для устойчивости. Пример: *стационарное течение устойчиво относительно произвольных возмущений при значениях вязкости, больших критического значения*. Энергетическая теория ничего не говорит о неустойчивости. Когда вязкость жидкости больше критической, энергия любого возмущения затухает в любой момент времени. Когда вязкость меньше критической, энергия критического возмущения в течении некоторого времени будет возрастать. Но эта энергия может в конечном итоге затухнуть. Критерий энергетической теории не гарантирует потери устойчивости.

Принцип линейной устойчивости (теорема об условной устойчивости Ляпунова) гласит, что при задании мягких условий (есть ограничения на амплитуду начальных возмущений) критическое значение вязкости может быть установлено на основе линеаризованных уравнений для возмущений основного установившегося или периодического по времени решения уравнений Навье–Стокса. Критерии линейной теории могут дать только достаточное условие потери устойчивости. Течение, устойчивое по линейной теории, может в

действительности оказаться неустойчивым относительно возмущений конечной величины. Линейная и энергетическая теории дополняют друг друга.

§3 ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Вязкая жидкость приводится в движение внешними силами или движением границы $S(t)$ замкнутого объема $V(t)$. Поле скорости $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ определяется начально-краевой задачей для уравнения Навье-Стокса.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} - \nu \nabla^2 \mathbf{U} + \nabla P - \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0 \\ \rho_0 P &\text{— давление} \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) &\text{— внешняя сила, отнесенная к единице массы} \\ \rho_0 &\text{— постоянная плотность} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Граничные и начальные условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{U}_S(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S(t), \quad t \geq 0 \\ \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V(0) \\ \operatorname{div} \mathbf{U}_0 &= 0 \quad \mathbf{x} \in V(0) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Решение обозначим $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \nu, \mathbf{U}_0)$. Будем изучать устойчивость при изменении $\mathbf{U}_0(\mathbf{x})$ и ν . Рассмотрим другое движение:

$$(\mathbf{U}^a, P^a) = (\mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}_0), P(\mathbf{x}, t, \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}_0)), \quad (1.22)$$

которое удовлетворяет той же задаче для фиксированного значения вязкости, но отличается от решения $(\mathbf{U}(\mathbf{x}, t, \mathbf{U}_0), P(\mathbf{x}, t, \mathbf{U}_0))$ в начальный момент времени $\mathbf{U}^a(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0, \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}_0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$. Если решения сливаются с течением времени, то основное движение устойчиво, в противном случае наблюдается неустойчивость. Начально-краевая задача, определяющая эволюцию возмущений $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{U}^a - \mathbf{U}, P^a - P)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla p &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad \mathbf{u}|_S = 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Чтобы придать определенный смысл слову «устойчивость», введем понятие средней энергии возмущений (угловые скобки осреднение по объему):

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle. \quad \text{Будем называть нулевое решение устойчивым}$$

относительно возмущений начальных условий, если $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t)/E(0) = 0$. Если существует некоторая положительная величина δ , такая, что нулевое решение устойчиво, когда $E(0) < \delta$, то говорят, что нулевое решение условно устойчиво.

Монотонная глобальная устойчивость: если $\nu > \nu_E(\nu)$, то решение глобально монотонно устойчиво. Если $\nu < \nu_E(\nu)$, то существуют возмущения, для которых $dE/dt > 0$ при $t=0$.

Глобальная устойчивость: Если $\nu > \nu_G$, то решение глобально устойчиво; если $\nu \leq \nu_G$, то нулевое решение неустойчиво, хотя может быть условно устойчивым.

Условная устойчивость: $\nu_L < \nu \leq \nu_G$

$$\begin{aligned} & \left\langle |U(x,t, U_0) - U(x,t, U_0 + u_0)|^2 \right\rangle \rightarrow 0 \\ & \text{при } t \rightarrow \infty, \text{ когда } \left\langle |u_0|^2 \right\rangle < 2\delta \end{aligned} \tag{1.24}$$

ν_L - наименьшее критическое значение вязкости линейной теории - предел линейной теории устойчивости, полученный для б.м. возмущений.

Пример критерия устойчивости: основное течение устойчиво относительно возмущений, удовлетворяющих критерию $E(0) < \delta(\nu)$.

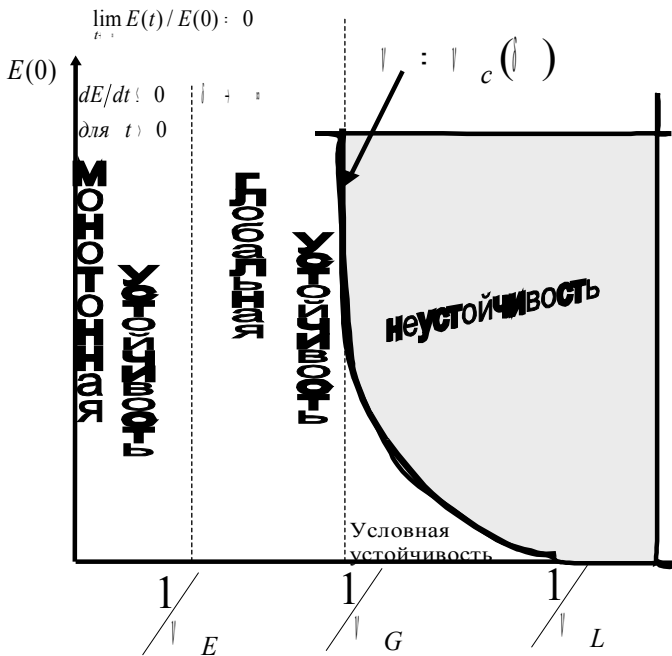


Рис.1.2 Определение устойчивости основного течения к возмущениям [1.2]

Течение $U(x, t, \nu, U_0)$ называется абсолютно устойчивым, если оно устойчиво при $\nu > 0$. Критическая вязкость для абсолютно устойчивых течений равна нулю.

§4 ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА

При исследовании устойчивости в качестве характерного параметра традиционно используется не вязкость, а число Рейнольдса. - безразмерный параметр, составленный следующим образом: $Re = \frac{Ul}{\nu}$, где U и l - постоянные

величины с размерностью соответственно скорости и длины, ν - кинематическая вязкость. Это число названо в честь Осборна Рейнольдса, чьи основополагающие эксперименты (1883) по переходу к турбулентности в круглых трубах показали, что переход происходит при критических значениях Re . Рейнольдс получил одинаковые значения критического числа, (определенного по радиусу трубы и по средней скорости ламинарного движения), в трубах разного диаметра при различных значениях скорости и вязкости жидкости.

Знаменитое исследование устойчивости течения в трубе, проведенное Осборном Рейнольдсом в 1883 г., было документировано не фотографиями, а рисунками. Однако в Манчестерском университете сохранилась сама экспериментальная установка. Воспользовавшись ею столетием позже, Йоханнесен и Лоу сделали приводимую ниже серию фотографий (рис. 1.3).

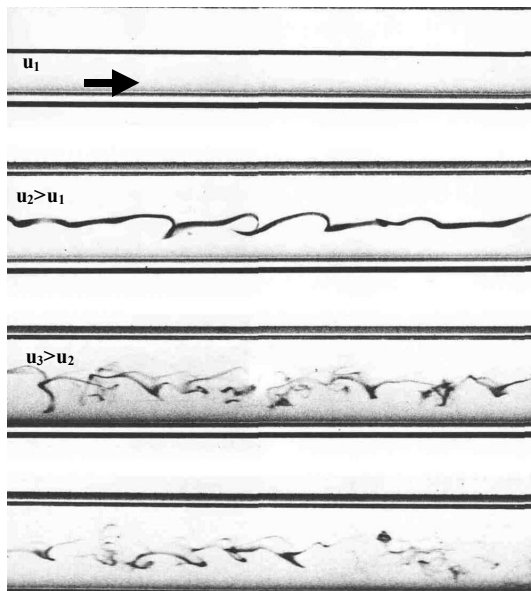


Рис. 1.3 Течение жидкости в трубе на установке Рейнольдса

На первом снимке струйка подкрашенной воды, вводимая в ламинарный поток во входной части, имеющей колоколообразную форму, остается невозмущенной по всей длине стеклянной трубки. На втором снимке, когда скорость возросла, уже виден переход; хотя возмущения затухают вниз по потоку (глобальная устойчивость). На двух последних снимках показано вполне развитое турбулентное течение. Из-за уличного движения в современном Манчестере

критическое число Рейнольдса оказалось ниже значения 13000, которое получил сам Рейнольдс. Как позже выяснилось, переход от ламинарной формы к турбулентной происходит не только при течении в трубе (канале). Можно сказать, что он характерен почти для всех течений вязкой жидкости. В частности, обтекание жидкостью крыла, профиля корабля или подводной лодки, тела рыбы или птицы также характеризуется ламинарно-турбулентным переходом, причем число Рейнольдса сохраняет вид, только теперь вместо диаметра трубы нужно в нее подставить характерный размер обтекаемого тела L .

Появление числа Рейнольдса является прямым следствием безразмерной формулировки начальной-краевой задачи системы уравнений Навье-Стокса. Такая постановка позволяет изучать устойчивость системы «подобных» течений при помощи одного-единственного расчета.

$$\{t, \mathbf{x}, \mathbf{U}, P\} \rightarrow \{t', \mathbf{x}', \mathbf{U}', P'\} = \{t/U, \mathbf{x}/L, \mathbf{U}/U, P/U^2\}. \quad (1.25)$$

В новых переменных задачу для системы уравнений Навье-Стокса можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t'} + \mathbf{U}' \cdot \nabla \mathbf{U}' - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{U}' + \nabla P' &= 0 \\ \text{div} \mathbf{U}' &= 0 \\ \mathbf{U}'(\mathbf{x}', t) &= \mathbf{U}'_s(\mathbf{x}', t), \quad \mathbf{x}' \in S \\ \mathbf{U}'(\mathbf{x}', 0) &= \mathbf{U}'_0(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}' \in V'(0) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Все понятия теории устойчивости, которые мы ввели ранее, можно сформулировать в безразмерных переменных. Преимущество введения числа Рейнольдса состоит в том, что значение $\text{Re}=\text{Re}_c$ является критическим не только для одного течения, но и для целого семейства течений с различными граничными условиями, различными объемами и различной вязкостью при единственном требовании, чтобы для этих течений число Рейнольдса было одним и тем же.

§5 ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Если $\nu < \nu_G$, основное течение неустойчиво относительно некоторых возмущений, хотя и может быть устойчиво (условно) относительно малых возмущений. Для $\nu \leq \nu_G$ может существовать более одного решения неизменной формы. Желательно узнать количество таких решений, зависимость их от параметров, их механические свойства и свойства устойчивости. Частично справиться с этой исключительно трудной задачей позволяет теория бифуркаций. Это нелинейная теория движений с малыми конечными амплитудами прослеживает поведение тех решений неизменной формы, которые ответвляются от основного течения, когда основное течение теряет устойчивость относительно б.м. возмущений. В круг проблем входит также условная устойчивость ответвляющегося течения. Отправная точка теории бифуркации - линейная теория устойчивости; она дает достаточные условия неустойчивости течения.

Бифуркация (ветвление) решений по определению является процессом, который непрерывен по параметру, представляющему собой меру амплитуды ϵ

ответвляющегося решения. Ответвляющиеся решения могут существовать только в том случае, когда вязкость ν и амплитуда ϵ лежат на бифуркационной кривой $\nu(\epsilon)$, где $\nu(0)$ - критическое значение вязкости, полученное из линейного анализа (для возмущений бесконечно малой амплитуды).

В теории бифуркации показывается, что ответвляющееся решение, амплитуда которого растет с уменьшением «числа Рейнольдса» $\frac{d(1/\nu)}{d\epsilon} < 0$ неустойчиво независимо от того, мало ϵ или нет. В противном случае решение может быть устойчиво, и соответствующее течение может наблюдаться в эксперименте.

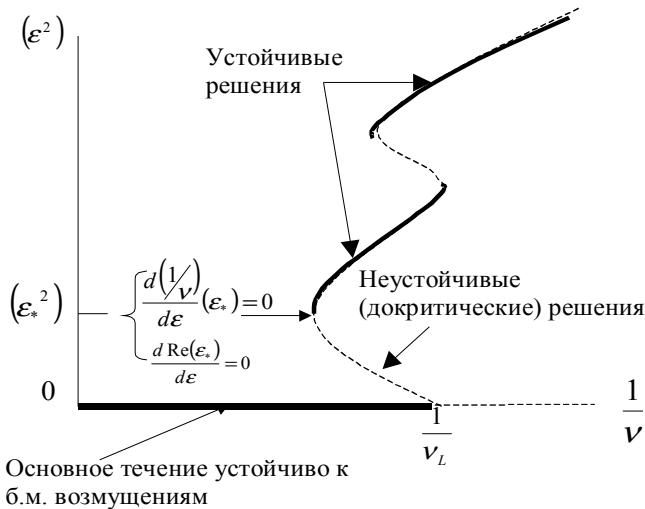


Рис. 1.4 Зависимость квадрата амплитуды возмущений от числа Рейнольдса для ответвляющихся решений задачи

Если $\nu(\epsilon) > \nu(0)$, то ответвляющееся решение будет существовать при тех значениях вязкости, при которых б.м. возмущения основного течения затухают. Такая бифуркация, «противоречащая» линейной теории, называется *докритической*. Возможная альтернативная бифуркация называется *закритической*.

Все *докритические* ответвляющиеся решения являются неустойчивыми и соответствующие течения в природе не наблюдаются (пока их амплитуда оказывается меньше критической). Наблюдать в природе непрерывную докритическую бифуркацию нельзя. Вместо этого происходит разрывный процесс, в котором возмущение, уходя из области притяжения основного решения, проскакивает к устойчивому решению со значительно большей амплитудой. Это решение может отличаться от критических собственных функций линейной задачи.

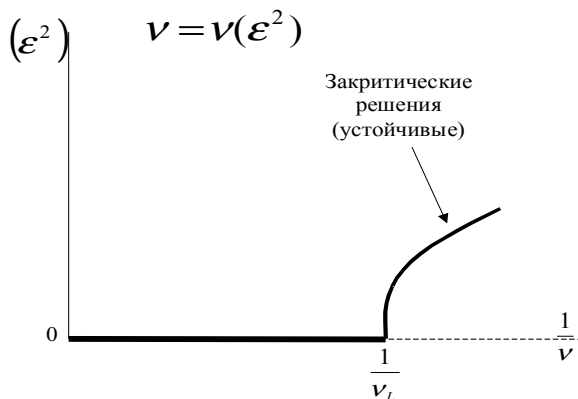


Рис. 1.5 Закритические бифуркации

Закритические ответвляющиеся решения могут быть устойчивы, что обеспечивает непрерывную бифуркацию. При малых амплитудах эти устойчивые ответвляющиеся решения совпадают с теми, которые дает линейная теория.

Для течений в трубах и каналах имеет место докритическая бифуркация и линейная теория устойчивости не описывает физически разумных решений. В некоторых задачах конвекции бифуркация ламинарного течения является закритической, и линейная теория хорошо согласуется с экспериментом. Исследование бифуркаций позволяет отделить докритические ответвляющиеся течения от закритических. Первый тип течений является неустойчивым, а второй устойчивым. Это наводит на мысль, что возникновение турбулентности можно рассматривать как:

(I) непрерывный процесс перехода от одного течения к другому, который включает повторяющиеся потери устойчивости и бифуркации закритических решений при уменьшении v ;

(II) разрывный процесс перехода от одного течения к другому, который включает неустойчивости и при котором решения «проскакивают» через докритические ответвляющиеся решения к другим решениям с большей амплитудой.

Непрерывный процесс (I) можно описать следующим образом. Сначала при $v > v_L$ существует стационарное основное течение. При $v = v_L$ это течение теряет устойчивость и заменяется вторичным, более сложным течением, которое устойчиво при $v < v_L$ и стремится к нулю при $(v - v_L) \rightarrow 0$. (переход постепенный без скачка). Вторичное течение теряет устойчивость во второй точке ветвления $v_2 > v_L$ и закритически ответвляется третье, еще более сложное течение и т.д. Переход везде непрерывен, поскольку в точке бифуркации нет резких изменений течения.

Докритические бифуркации не могут приводить к непрерывному переходу от одного течения к другому, так как ответвляющееся течение неустойчиво с самого начала. Произвольное начальное возмущение, убегаящее из области притяжения основного течения, «проскакивает» через неустойчивое ответвляющееся течение к некоторому течению или множеству течений с большей амплитудой. В этом

случае будет наблюдаться резкое изменение течения, когда v достигает значения v_G .

§6 ТЕЧЕНИЕ В КОЛЬЦЕВОЙ ТРУБЕ

Рассмотрим течение Пуазейля в кольцевой трубе с внутренним диаметром a и внешним диаметром b . Такая задача решалась при условии, что параметры течения не меняются вдоль оси трубы. На рисунке приведены критических значений Re_L и

Re_E как функции $\eta = \frac{a}{b}$.

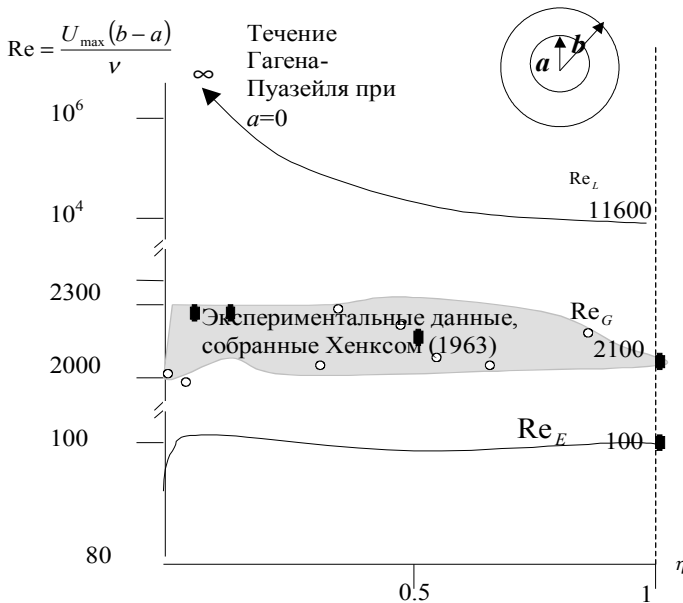


Рис. 1.6 Критические значения числа Рейнольдса, полученные по линейной (Re_L) и энергетической (Re_E) теории. Кружки – эксперимент [3]

По данным эксперимента нижняя часть бифуркационной кривой соответствует $Re_G=2000$. Является ли эта величина минимальной? Это зависит от того, какие возмущения наблюдались в эксперименте: их форма и амплитуда. Для ответа на этот вопрос в экспериментах часто используются специальные генераторы возмущений, позволяющие придавать различную форму возмущениям. Это могут быть плоские и трехмерные синусоидальные колебания, вихри различной формы и т.д.

Верхняя граница заштрихованной области лежит ниже графика зависимости $Re_L(\eta)$, полученной при решении линейной задачи. Таким образом, наблюдаемый в экспериментах переход ламинарного течения в турбулентное является всегда докритическим. Он происходит при значениях числа Рейнольдса меньших, чем критические значения линейной задачи.

Вычисления показывают, что Re_L монотонно растет с уменьшением внутреннего диаметра трубы от минимального значения 11600 до бесконечности для $a=0$ (течения Гагена-Пуазейля в круглой трубе). Это значит, что течение в круглой трубе (как и в канале) устойчиво к б.м. возмущениям для каких угодно больших чисел Рейнольдса. Однако следует учесть, что такое решение получено, при условии, что параметры потока не меняются вдоль оси трубы, т.е. скорость в трубе или канале не меняется в направлении течения.

Если бы можно было в эксперименте обеспечить реальные бесконечно малые возмущения, то верхняя граница заштрихованной области приблизилась бы к теоретической кривой Re_L . Такие попытки делались неоднократно, что позволило сблизить эти границы для течений в кольцевых трубах. Однако в круглых трубах и каналах все попытки погасить возмущения в потоке не дали ожидаемых результатов: турбулентный переход происходит при конечном значении числа Рейнольдса.

Это позволяет предположить, что дело не в амплитуде возмущений, а в несоответствии условий течения в экспериментах и в теоретической постановке задачи. Все решения для труб и каналов были получены для задач, описывающих строго параллельные течения, скорость которых не меняется в направлении движения. Возникает вопрос, насколько точно выполняется это условие в экспериментах? Что будет, если поток оказывается не точно параллельным, а "почти" параллельным, то есть продольный градиент скорости течения отличен от нуля, хотя и меньше вертикального градиента скорости на несколько порядков?

§7 "ПОЧТИ" ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Существуют строго параллельные течения, например течение Пуазейля-Куэтта в кольцевой трубе со скользящими относительно друг друга стенками. В природе в основном встречаются «почти» параллельные течения. Это такие течения, у которых *производные параметров вдоль потока малы по сравнению с производными в поперечном направлении*. В качестве примера следует указать течение в пограничном слое или струе.

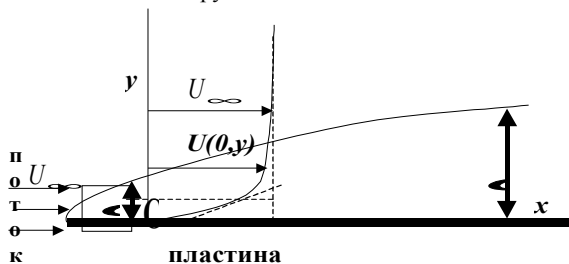


Рис. 1.7 Пластина, обтекаемая потоком жидкости

При натекании однородного потока жидкости на пластину скорость течения убывает вдоль направления движения, а толщина δ слоя, в котором наблюдается максимальное изменение скорости по вертикали, увеличивается. Толщину этого слоя часто характеризуют величиной, называемой толщиной слоя вытеснения:

$$\delta_* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\bar{u}}{U_{\max}} \right) dy \quad (1.27)$$

Асимптотическая теория этого течения была впервые дана Толмином (1929), позднее развита Шлихтингом (1935), Линем (1945) и Шеном (1964) [4] для бесконечно малых возмущений. Пока возмущения малы, результаты асимптотической теории хорошо согласуются с экспериментом. Численные результаты для возмущений *конечной амплитуды* в постановке задачи, не учитывающей малые продольные градиенты скорости, согласуются с экспериментом существенно хуже, особенно вблизи критического значения числа Рейнольдса.



Рис. 1.8 Зависимость волнового числа возмущений, нормированного на толщину слоя вытеснения, от числе Рейнольдса

Нейтральная кривая, полученная в асимптотической теории, отделяет область устойчивости от области потери устойчивости. Шубауэр и Скэрмстед [5] в ряде экспериментов по изучению устойчивости пограничного слоя на пластине приняли все возможные меры для подавления возмущений. В результате, как видно из данных рисунка, часть экспериментальных точек лежит вблизи нейтральной кривой, полученной в асимптотической теории. Точки, лежащие вне кривой соответствуют экспериментам с конечной амплитудой возмущений. Как можно подавить возмущения? Например, введя отсос приповерхностного слоя жидкости через перфорированную пластинку. Однако в этом случае "почти" параллельный поток станет параллельным. Отсюда следует, что теория, соответствующая эксперименту должна быть построена для возмущений конечной амплитуды.

Новые возможности в решении проблемы дало применение численных методов с использованием мощных быстродействующих компьютеров. Фазель и Конзельман (1990) [6] решили уравнения Навье-Стокса для двумерного потока несжимаемой жидкости без упрощений, используя адекватную численную схему. Эта работа позволила исследовать устойчивость пограничного слоя к различным возмущениям, в том числе и пространственным. Во многих экспериментах

возмущения различной формы и амплитуды вносились искусственно, чтобы убедиться в истинности полученных наименьших значений критического числа Рейнольдса.

Уравнение Навье-Стокса решалось в безразмерном виде в формулировке для вихря скорости. Введем переменные:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \omega &= \frac{\omega_p L}{U_\infty (\text{Re})^{\frac{1}{2}}}, \quad u = \frac{u_p}{U_\infty}, \quad v = \frac{v_p}{U_\infty} (\text{Re})^{\frac{1}{2}}, \\ x &= \frac{x_p - x_{0p}}{L}, \quad y = \frac{y_p}{L} (\text{Re})^{\frac{1}{2}}, \quad t = t_p \frac{U_\infty}{L}\end{aligned}\quad (1.28)$$

$\text{Re} = \frac{U_\infty L}{\nu}$ - число Рейнольдса, L - масштаб длины, x_0 - начало координат, u и v - горизонтальная и вертикальная составляющие скорости, индекс "p" обозначает размерные переменные. Уравнения движения и неразрывности тогда записываются так:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nabla^2 \omega, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.29)$$

Комбинация приведенных выше уравнений дает систему:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ \nabla^2 v &= -\frac{\partial \omega}{\partial x}\end{aligned}, \quad \text{где } \nabla^2 = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.30)$$

Система уравнений решаются со следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned}u(x, y, t_0) &= U(x, y) \\ v(x, y, t_0) &= V(x, y) \\ \omega(x, y, t_0) &= \Omega(x, y)\end{aligned}\quad (1.31)$$

где начальное поле параметров получено с помощью численного решения задачи для стационарного пограничного слоя, то есть без члена $\frac{\partial \omega}{\partial t}$.

В начале координат $x=0$ задается вертикальный профиль компонент скорости, полученный Блазиусом для ламинарного обтекания пластинки:

$$U(0, y) = u_{Bl}(0, y), \quad V(0, y) = v_{Bl}(0, y), \quad \Omega(0, y) = \omega_1(0, y) \quad (1.32)$$

Вид этого профиля, полученный в эксперименте, приведен на следующем рисунке. Вода течет со скоростью 9 см/с слева направо. Теллуровая проволока (перпендикулярная пластинке) подвергается воздействию электрического импульса продолжительностью несколько миллисекунд. Химическая реакция порождает коллоидное облако, которое дрейфует вместе с потоком и мгновением позже фотографируется с целью фиксации профиля скорости.

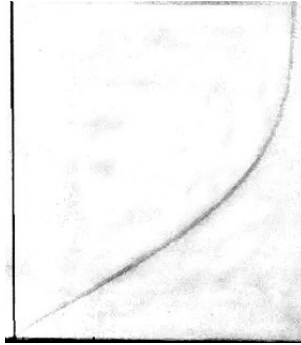


Рис. 1.9 Вертикальный профиль скорости течения, обтекающего пластину (профиль Блазиуса)

Число Рейнольдса, рассчитанное по расстоянию сечения от передней кромки, равно 500, а толщина вытеснения равна примерно 5 мм. Фото F. X. Wortmann.

Для нестационарной задачи на профиль Блазиуса накладываются периодические возмущения:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= u_{Bl}(0, y) + u_{per}(y, t) \\ v(0, y, t) &= v_{Bl}(0, y) + v_{per}(y, t) \\ \omega(0, y, t) &= \omega_1(0, y) + \omega_{per}(y, t) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Возмущения u_{per} , v_{per} , ω_{per} получены из решения задачи на собственные значения для уравнений Орра–Зоммерфельда, которые аппроксимируют уравнения Навье–Стокса для строго параллельного течения. В ходе решения оказалось, что влияние этих эффектов на собственные функции задачи так малы, что их действительно можно получить для возмущающих функций из простой задачи Орра–Зоммерфельда с разделяющимися переменными для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теперь следует выбрать форму исследуемых возмущений. Известно, что течение Гагена-Пуазейля в трубе абсолютно и глобально устойчиво относительно возмущений, не зависящих от продольной координаты. Более того, любое решение основной задачи, описывающее установившееся параллельное течение, абсолютно и глобально устойчиво относительно возмущений, не зависящих от продольной координаты. Можно предположить, что опасное для основного течения возмущение должно зависеть от x . В энергетической теории показывается, что наиболее опасное начальное возмущение всегда имеет вид «нормальной моды»: $\mathbf{u} = \text{re}\{e^{i\alpha x + n\theta} \varphi(r, \alpha, n)\}$. Применяя возмущения в виде нормальной моды, для потока, обтекающего пластину, удастся генерировать вполне реалистичные возмущения типа волн Толмина-Шлихтинга, которые усиливаются или затухают при распространении вниз по потоку в зависимости от числа Рейнольдса. Для очень малых амплитуд возмущений и малых чисел Re вид устойчивых возмущений хорошо соответствует эксперименту. Фотографии, полученные в лабораторном эксперименте, приведены ниже.

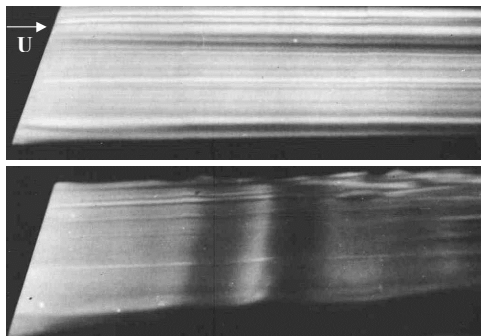


Рис. 1.10 Возмущения в виде волн Шлихтинга в пристеночном слое потока, обтекающего пластину. Фото ONERA. [Werle, 1980].

На верхней фотографии поток ламинарен, а на нижнем снимке появляются двумерные волны Толлмина–Шлихтинга, видимые благодаря подкрашенной жидкости. При увеличении числа Re и продольного градиента скорости волны сменяются вихревыми структурами.

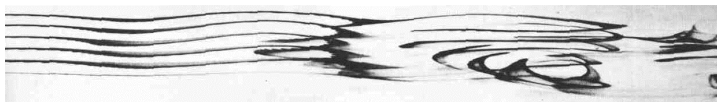


Рис. 1.11 Развитие волн Толмина–Шлихтинга слева и вихрей справа в вязком слое течения, обтекающего пластину. [Wortmann, 1977].

В левой части снимка волны двумерные; они становятся трехмерными, сворачиваясь в середине, и вихревыми - в правой части снимка. Линии меченых частиц на этом снимке, изображающем развитие процесса, были получены подкрашиванием воды. Число Рейнольдса, рассчитанное по длине (расстояние от переднего края пластины), равно 400 000.

Приведенные данные показывают, что форма возмущений, появляющихся в потоке существенным образом меняется вдоль пластины даже при одной и той же скорости течения. Этот факт позволяет сформулировать требование к решению задачи на устойчивость течения: *форма возмущений в теоретическом расчете должна соответствовать форме возмущений, наблюдаемых в эксперименте.*

Экспериментаторы, в свою очередь, пытаясь получить минимальное значение критического числа Re , стали вводить возмущения искусственным образом с помощью волнопродукторов, колеблющейся ленты и др. (Шубауэр и Сремстад, Росс, Качанов, Козлов и Левченко). Если возмущения не вносятся, минимальное критическое число Рейнольдса получается существенно более высоким. Еще один возможный способ возбуждения возмущений представляет собой периодический вдув и отсос жидкости через узкую щель, сделанную поперек пластины вдоль оси z (Липман 1982). В этом случае периодически возникают вертикальные пульсации скорости над щелью, формирующие вихревые образования в пограничном слое. Именно эту форму возмущений использовали в своей работе

Фазель и Козельман. На пластине ставятся следующие граничные условия для стационарного потока:

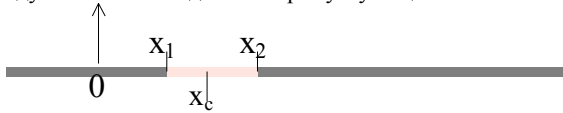
$$U(x,0) = V(x,0) = 0, \quad \frac{\partial \Omega(x,0)}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V(x,0)}{\partial y^2} \quad (1.34)$$

и для нестационарного потока:

$$u(x,0,t) = 0, \quad v(x,0,t) = f(x,t),$$

$$\frac{\partial \omega(x,0,t)}{\partial x} = -\frac{\partial^2 v(x,0,t)}{\partial y^2} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \quad (1.35)$$

Условие для вихря получены из уравнений для вертикальной компоненты скорости возмущений. В граничных условиях принято вместо условия прилипания периодическое появление вертикальной составляющей скорости, как при периодическом вдуве и отсосе жидкости через узкую щель.



Функция возмущений f задавалась в следующем виде:

$$f(x,t) = f_x(x) \sin(\beta t), \quad (1.36)$$

где β - частота возмущений, а функция f_x задавалась:

$$f_x(x) = c_1 \xi^5 - c_2 \xi^4 + c_3 \xi^3,$$

$$\xi = \frac{x - x_1}{x_c - x_1} \quad \text{ДЛЯ} \quad x_1 < x < x_c$$

$$\xi = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_c} \quad \text{ДЛЯ} \quad x_c < x < x_2$$

На выходе расчетной области, имеющей координату X , для стационарного потока имеем:

$$\frac{\partial^2 U(X,y)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V(X,y)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Omega(X,y)}{\partial x^2} = 0 \quad (1.38)$$

Для нестационарного потока запишем следующие уравнения (штрихи обозначают возмущенные величины, α - локальное волновое число волны возмущений $\alpha = 2\pi/\lambda$, λ - длина волны):

$$u' = U - u, \quad v' = V - v, \quad \omega' = \Omega - \omega \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(X, y)}{\partial x^2} &= -\alpha^2 u'(X, y), \\ \frac{\partial^2 v(X, y)}{\partial x^2} &= -\alpha^2 v'(X, y), \\ \frac{\partial^2 \omega(X, y)}{\partial x^2} &= -\alpha^2 \omega'(X, y)\end{aligned}\quad (1.40)$$

На верхней границе расчетной области задается максимальное значение горизонтальной скорости, нулевые условия для вертикального градиента вертикальной скорости и вихря скорости. Для выполнения этих условий достаточно взять высоту расчетного слоя в 6 – 14 раз превышающую толщину слоя вытеснения. Компоненты скорости возмущений полагаются затухающими по экспоненте с высотой. Однако для верхней границы домена они не равны нулю.

Изменение начальных возмущений вдоль пластины, полученное в результате численного решения задачи приведено на рисунке. Возмущения представлены как линии равной завихренности. Область отрицательной завихренности закрашена. Область роста возмущений – область неустойчивости, область затухания возмущений – область устойчивости.

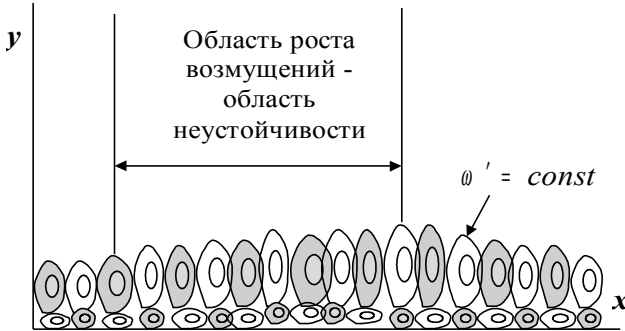


Рис. 1.12 Линии равной завихренности возмущений на пластине. Численное решение задачи с продольным градиентом скорости. Возмущения вводятся в виде плоских вихрей

Численное решение показало, что рост возмущений максимален внутри слоя вытеснения. Именно для этой области получены минимальные значения критического числа Рейнольдса в расчетах и в экспериментах. На следующем рисунке приведены зависимости критических чисел Re от волнового числа возмущений. Приведены зависимости, полученные в экспериментах, в результате решения численной задачи с возмущениями в виде периодически появляющихся вихрей и асимптотической задачи для возмущений в виде волн малой амплитуды. Все данные получены на расстоянии $y=0.15\delta$ от пластины.

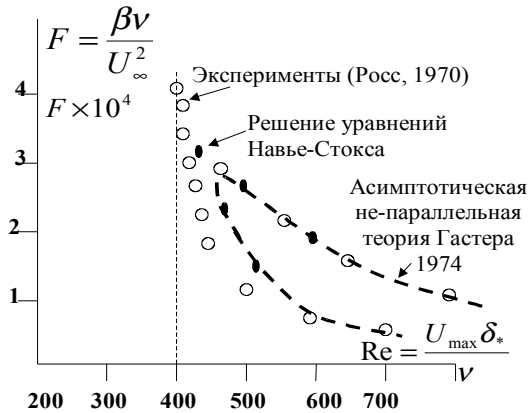


Рис. 1.13 Зависимость волнового числа возмущений от критического числа Рейнольдса

Из приведенных данных следует, что проделанный расчет оказался ближе к экспериментальным данным по сравнению с асимптотической теорией [7]. Однако качественные и количественные отличия данных расчета и эксперимента еще очень велики, особенно для возмущений высокой частоты. Следует подчеркнуть, что авторы добились улучшения теории, задавая определенный вид возмущений, описанный выше. Если использовались простые гармонические возмущения на входной вертикальной плоскости, улучшения результатов расчета не получалось. Существенное улучшение теории получено в [8]. Здесь доказана устойчивость возмущений в виде цилиндрических вихрей с горизонтальной осью перпендикулярной направлению потока.

Отсюда следует два вывода:

1) результат расчета существенно зависит от вида возмущений, задаваемых на входе;

2) лучшее совпадение теории с экспериментом получается, если использовать периодически появляющиеся в придонном слое вихревые образования.

В этой ситуации встает задача об определении источника и характера возмущений, появляющихся в придонном слое потоков в экспериментальных условиях. Так как возмущения возникают в области, где вязкость и сила трения играет определяющую роль, то основную информацию можно получить в первую очередь, изучая течение в экспериментальных условиях. Экспериментальные исследования должны дать сведения о форме возмущений, о связи вида возмущений с характеристиками потока жидкости и подстилающей поверхности.

§8 ЗНАК ПРОДОЛЬНОГО ГРАДИЕНТА СКОРОСТИ

Скорость стационарного течения может увеличиваться вдоль по течению, а может уменьшаться. И в том и в другом случае течение будет непараллельным: линии тока либо сходятся, либо расходятся. Как влияет знак продольного градиента скорости на генерацию возмущений видно на следующем рисунке, на котором приведена фотография потока, натекающего на пластину, повернутую на малый угол к оси x .



Рис. 1.14 Пластинка, обтекаемая потоком. Фото ONERA. [Werle, 1974]

Плоская пластинка относительной толщины 2% с кромками со снятой фаской наклонена под углом атаки $2,5^\circ$ к потоку. Ламинарный пограничный слой отрывается от верхней поверхности у передней кромки, где линии тока расходятся. В этой зоне видны вихревые возмущения. Под нижней кромкой нет расхождения линий тока, нет и возмущений. Аналогичная картина наблюдается и в потоке жидкости при обтекании искривленной пластины: линии тока расходятся в зоне увеличения сечения потока. Здесь появляется отрыв пограничного ламинарного слоя при образовании вихревых возмущений, как показано на приведенном ниже рисунке. Визуализация достигается с помощью пузырьков воздуха.



Рис. 1.15 Поток жидкости над искривленным дном. Фото ONERA. [Werle, 1974]

Приведенные примеры показывают, что возмущения зарождаются у твердых границ, обтекаемых жидкостью, в том случае, когда скорость потока убывает в направлении движения, что приводит к расхождению линий тока.

Рассмотрим другой случай: течение жидкости в прямом канале постоянного прямоугольного сечения $s_{\text{кан}}$. Пусть в такой канал поступает в единицу времени один и тот же объем жидкости Q [$\text{м}^3/\text{с}$]. Если канал строго горизонтальный, то на жидкость действует единственная сила – это сила трения со стороны стенок и свободной поверхности. Жидкость тормозится силой трения, а скорость течения убывает в направлении движения от значения $Q/s_{\text{вот}}$ на входе в канал.

Малые отклонения дна канала от горизонтали - не более $0,05^\circ$ - позволяют создать замедляющиеся и ускоряющиеся течения с малыми значениями продольного градиента скорости. Как выбрать наклон подсказывает приведенная выше фотография пластины в потоке жидкости: подъем дна вдоль x приводит к увеличению скорости, опускание дна дает отрицательные градиенты скорости.

При скорости потока $u=10$ см/с (канал из органического стекла) возникает замедляющееся течение с вертикальным градиентом скорости 13с^{-1} в придонном слое толщиной 0.4 см, и продольным градиентом скорости – $0,01\text{с}^{-1}$. Вертикальный градиент скорости по модулю на 3 порядка больше продольного, что удовлетворяет приближению «почти» параллельного течения:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.41)$$

Обратимся к эксперименту и посмотрим, как же течет жидкость в замедляющихся и ускоряющихся потоках [9]. Для визуализации течения будем использовать маленькие шарики нейтральной плавучести. Шарики двигаются вместе с потоком. За время экспозиции t_e они оставляют на кадре треки длиной l . Если разделить длину трека на время экспозиции, то можно получить скорость потока в области перемещения данного шарика. Направление движения определяется направлением трека на видео кадре.



Рис. 1.16 Стационарный ускоряющийся поток жидкости. Кадр видеозаписи (Мельникова О.Н.)

На рисунке приведен кадр видеозаписи движения ускоряющегося потока, полученный через боковую стенку прозрачного канала [10]. Все треки на приведенном кадре – горизонтальные. На дне лежат неподвижные частицы. Это значит, что движение ускоряющегося потока близко плоско - параллельному, отрыва пограничного слоя не происходит, а на дне выполняются условия прилипания. На следующем рисунке приведен кадр видеозаписи движения замедляющегося потока.

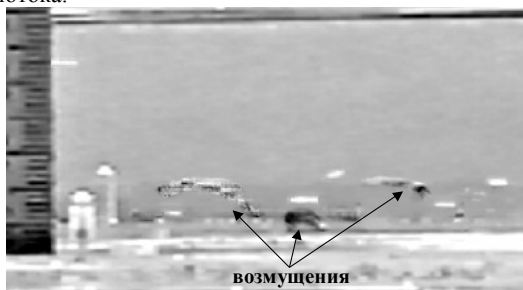


Рис. 1.17 Стационарный замедляющийся поток жидкости. Кадр видеозаписи (Мельникова О.Н.)

Хотя скорость и глубина потока остались прежними, характер течения резко изменился. Вблизи дна появились возмущения, которые видны благодаря подкраске марганцовкой. На кадре имеется наклонный трек частицы нейтральной плавучести, захваченный возмущениями. Этот трек наклонен к горизонтали, так как вихрь, захвативший частицу, движется под углом к горизонту. Остальные

треки по-прежнему горизонтальны. Это позволяет заключить, что движение основного потока близко плоско параллельному, как и в случае ускоряющегося потока. Вид возмущений, возникающих в потоке с отрицательным продольным градиентом скорости, приведен ниже на рисунке [11].

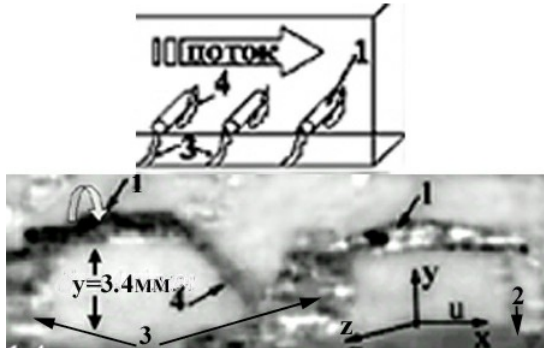


Рис. 1.18 Цилиндрические вихри в стационарном замедляющемся потоке воды. (Мельникова О.Н.)

Устойчивые возмущения представляют собой цилиндрические вихри, вращающиеся с постоянной угловой скоростью, с горизонтальной осью перпендикулярной направлению движения. Зарождаются вихри в придонном слое потока в виде цепочки цилиндров, лежащих на одинаковом расстоянии друг от друга.

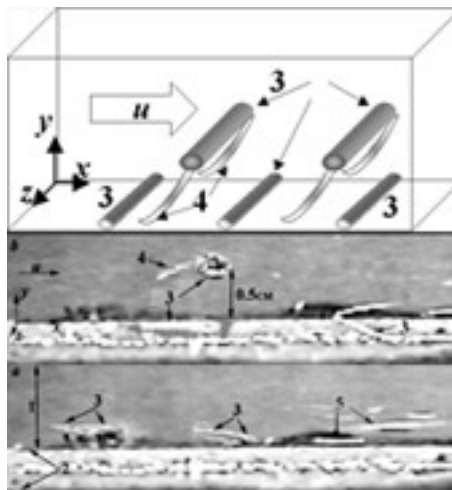


Рис. 1.19 Вихри у твердой поверхности в стационарном замедляющемся потоке воздуха. а, б – последовательные кадры видеозаписи. 1 – воздух, 2 – дно канала, 3 – вихри, 4 – концы вихрей, опускающиеся к дну. (Мельникова О.Н.)