

Сформировавшиеся вихри под действием окружающей жидкости поднимаются вверх. В зависимости от условий формирования они двигаются вдоль циклоиды или поднимаются к поверхности потока. На кадрах видеозаписи стационарного замедляющегося потока воздуха над твердой поверхностью канала (рис. 1.19), можно увидеть вихри в момент формирования и во время подъема.

ГЛАВА 2 ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВИХРИ

§1 ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ОСТАНОВКА ВЯЗКОГО СЛОЯ

Почему же цилиндрические вихри зарождаются только в потоках с отрицательным продольным градиентом скорости? Причина заключается в том, что в потоке жидкости или газа с отрицательным продольным градиентом скорости вблизи твердой границы создаются условия для торможения пограничного слоя. Рассмотрим действие сил на единичный объем жидкости, выделенный в придонном слое, имеющий ту же высоту. В этом слое скорость является линейной функцией вертикальной координаты, что обусловлено превалярованием сил вязкости. Выше этого слоя действием вязкости можно пренебречь. Пусть продольный градиент скорости на 1–2 порядка меньше вертикального градиента в прямом стационарном потоке жидкости. Мы видели на приведенных рисунках, что основное течение при выполнении этих условий – ламинарное. Однако это течение является вихревым, так как ротор скорости отличен от нуля из-за сдвига скорости. Для вихревого стационарного течения справедлив закон Бернулли вдоль линии тока в зоне, где вязкостью можно пренебречь (выше придонного слоя). В соответствии с уравнением Бернулли динамическое давление возрастает при уменьшении скорости течения в направлении движения:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2g} = \text{const} \quad (2.1)$$

где P - динамическое давление, u - скорость течения, ρ - плотность жидкости, g - ускорение свободного падения. Запишем горизонтальную компоненту сил, действующих на малый объем жидкости у дна канала:

$$\rho \left(\frac{du}{dt} \right)_x = - \frac{\partial P}{\partial x} + F_{\text{трения}} \quad (2.2)$$

При увеличении давления вдоль x на жидкий объем действует сила, направленная в отрицательную сторону оси x и является основной на верхней границе объема (где трением можно пренебречь). У дна на нижней границе объема действует сила трения, направленная вверх по потоку. Действие совокупности этих двух сил

может привести к остановке объема. В ускоряющемся потоке $\frac{\partial P}{\partial x} < 0$, и сила, определяемая градиентом давления, направлена вдоль по потоку. Под действием одной силы трения происходит торможение очень узкого слоя, непосредственно прилегающего к твердой поверхности: возникает "прилипание" (неподвижные шарики на дне ускоряющегося потока на видео кадре).

Как показывают эксперименты, в потоке с отрицательным продольным градиентом скорости у твердой поверхности действительно происходит торможение и остановка придонного слоя воды, причем процесс носит

периодический характер. Зависимость скорости придонного слоя от времени приведена на следующем рисунке [10].

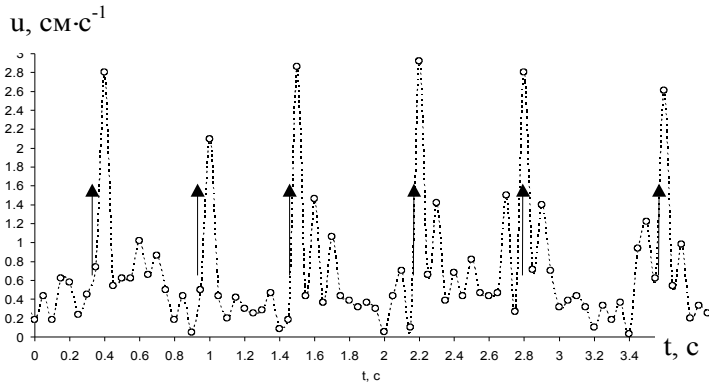


Рис. 2.1 Зависимость от времени скорости течения стационарного замедляющегося потока воды на придонной линии тока

График построен по данным видеосъемки. Периодически скорость падает практически до нуля, затем резко возрастает до максимума и медленно уменьшается до полной остановки жидкости. В этот момент, отмеченный на рисунке стрелками, обнаружен вылет вихрей.

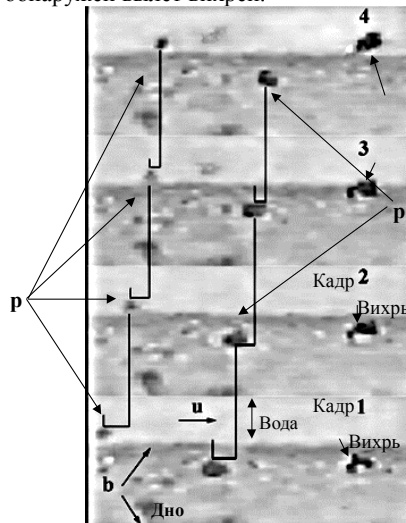


Рис. 2.2 Остановка вязкого придонного слоя в стационарном замедляющемся потоке воды. р – частицы, b – дно

Весь процесс можно наблюдать на последовательных кадрах видеосъемки, приведенных на рис. 2.2. Камера смотрит на дно канала под углом 45° к горизонту, частицы, перемещающиеся в потоке, обозначены символом "р", их перемещение показано отрезками. Частицы останавливаются на кадре №4. В правой части кадров виден вихрь, захвативший частицу, которая и позволяет наблюдать его вращение. Вихрь не меняет своей координаты до кадра №4, на котором он приподнят над дном. На следующем рисунке к предыдущей серии кадров добавлен верхний составной кадр, на котором показано перемещение вихря на последующих нескольких кадрах видеозаписи.

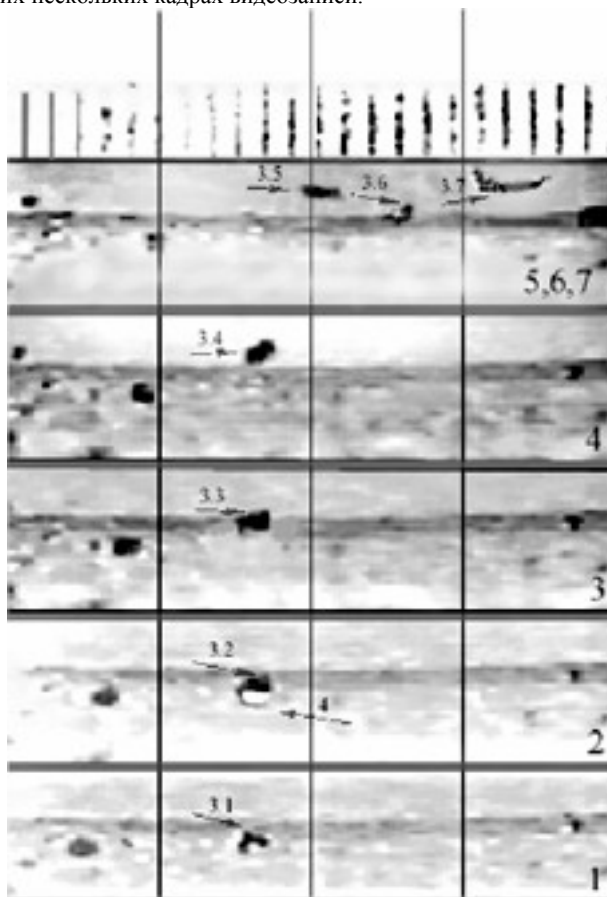
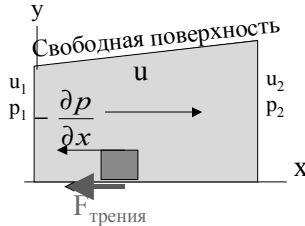


Рис. 2.2а. Здесь сверху добавлен составной кадр из кадров 5, 6 и 7, позволяющий увидеть перемещение взлетевшего вихря.

На кадрах 5, 6 и 7 видно, как вихрь сначала поднимается вверх, а затем возвращается на дно. Затем вихрь снова взлетает, двигаясь по траектории типа циклоиды.

Период между вылетом вихрей можно приблизительно оценить по времени торможения придонного слоя от максимальной скорости после вылета вихрей и до полной остановки. Для этого решаем условную задачу о торможении единичного объема жидкости высотой δ , который двигается как целое и имеет начальную скорость u_0 . Будем считать, что объем двигается только вдоль оси x . (см. схему)



Запишем уравнение Бернулли для верхней границы объема, где скорость жидкости равна u_δ , и уравнение движения, предполагая, что объем движется как целое.

$$P + m \frac{u_\delta^2}{2} = const \quad (2.3)$$

$$m \frac{du}{dt} = - \frac{\partial P}{\partial x} + F_{трения} \quad (2.4)$$

Слой останавливается под действием силы трения о дно и обратного градиента давления, величина которого может быть получена при дифференцировании (2.3) по x

$$\frac{\partial P}{\partial x} = - m \cdot u_\delta \cdot \frac{\partial u_\delta}{\partial x} = - m \cdot u_\delta \cdot u_x^\delta \quad (2.5)$$

Градиент давления определяется продольным градиентом скорости u_x^δ на верхней границе слоя и, так как скорость падает вдоль оси x , имеет положительный знак. Силу трения считаем пропорциональной квадрату скорости. Используя коэффициент трения воды о твердое дно C_f , запишем для рассматриваемого элементарного объема с площадью основания S :

$$F_{трения} = C_f \cdot \rho \cdot S \cdot u^2 \quad (2.6)$$

Используя (2.5) и (2.6), преобразуем уравнение движения:

$$\frac{du}{dt} = u_\delta \cdot u_x^\delta - \frac{C_f}{m} \cdot \rho \cdot S \cdot u^2, \quad (2.7)$$

учитывая, что толщина слоя равна δ , получаем:

$$\frac{du}{dt} = u_\delta \cdot u_x^\delta - \frac{C_f}{\delta} \cdot u^2 \quad (2.8)$$

Решение уравнения (2.8) справедливо для интервала времени между двумя вылетами вихрей $0 < t < T$:

$$u = u_0 - \sqrt{\frac{u_\delta u_x^\delta \delta}{C_f}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{u_\delta u_x^\delta C_f}{\delta}} t \right) \quad (2.9)$$

Здесь u_0 - усредненная по времени скорость течения у дна канала (придонная скорость). Используя полученную зависимость, можно рассчитать изменение скорости придонного слоя во времени, начиная от вылета вихря и до полной остановки слоя. Такие расчеты были выполнены для условий экспериментов. Зависимость коэффициента трения от размера донной частички приведена на следующем рисунке.

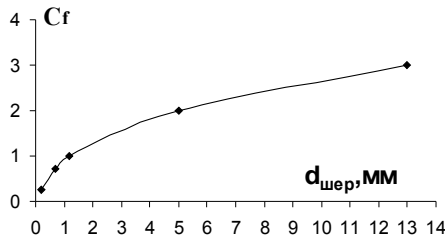


Рис.2.3 Зависимость коэффициента трения воды о твердую поверхность от диаметра частиц, из которых сложено дно

Статистический анализ большого ряда экспериментальных данных показал, что решение (2.9) хорошо согласуется с экспериментальными результатами. Это позволяет использовать полученное решение для оценки периода вылета вихрей и расстояния между вихрями [12].

Интервал времени, за который скорость уменьшается от начального значения до нуля, равен:

$$T = \left(\frac{\delta}{u_\delta |u_x^\delta| C_f} \right)^{1/2} \operatorname{arctg} \left(u_0 \sqrt{\frac{C_f}{u_\delta |u_x^\delta| \delta}} \right) \quad (2.10)$$

Расстояние, которое проходит объем от начала движения вниз по потоку до остановки, составляет:

$$s = Tu_0 - \frac{\delta}{2C_f} \ln \left(1 + u_0^2 \frac{C_f}{u_\delta |u_x^\delta| \delta} \right) \quad (2.11)$$

Было проведено сравнение результатов расчетов величин T и s с экспериментальными данными большой серии экспериментов, полученных с помощью видеосъемки процесса формирования вихрей. Оказалось, что время торможения слоя совпадает с периодом отрыва вихрей в пределах ошибки измерений. Путь, пройденный слоем до полной остановки, совпал с расстоянием между точками отрыва вихрей в тех же пределах. Полученные данные проверялись в лаборатории для широкого диапазона значений параметров течения и покрытия дна, в реках и морских условиях для глубин до 60 метров. Во всех случаях отличие расчетных данных от экспериментальных не превышало

нескольких процентов, что позволяет использовать полученные выражения для прогноза периода отрыва вихрей и расстояния между ними в тормозящихся потоках.

Из полученных формул (2.10) – (2.11) следует, что с увеличением продольного градиента скорости стационарного течения расстояние между вихрями и период вылета вихрей сокращаются. На следующих двух фотографиях показан придонный слой потока жидкости при слабом и сильном отрицательных продольных градиентах скорости.



Рис.2.4 Придонный слой потока при слабом отрицательном градиенте скорости

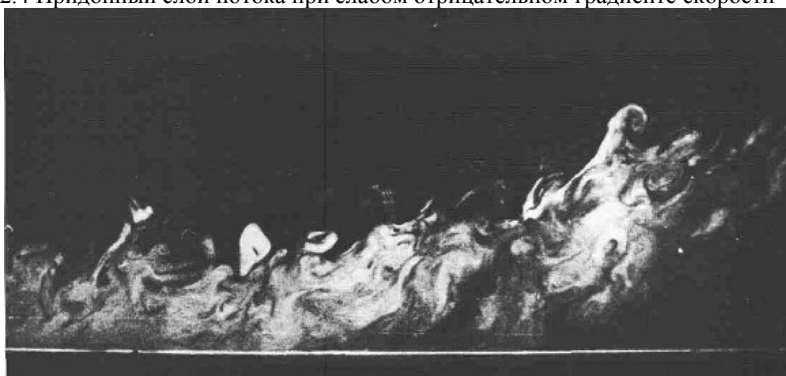


Рис.2.5 Придонный слой потока при сильном отрицательном градиенте скорости.

Фото R. E. Falco. [Head, 1982]

На фотографиях видно, что при увеличении отрицательного продольного градиента скорости расстояния между вихрями сокращаются, а количество поколений вихрей в кадре увеличивается. Эти данные согласуются с полученными теоретическими результатами.

§2 ПРОФИЛЬ ОСРЕДНЕННОЙ СКОРОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ПОТОКА

Как же влияет периодическая остановка вязкого придонного слоя на форму вертикального профиля осредненной по времени скорости течения? Так как рассматриваются стационарные потоки (расход жидкости не меняется во времени), то вертикальный профиль скорости должен оставаться неизменным во времени. Для того, чтобы это условие выполнялось, время осреднения в каждой точке вертикали, в которой проводится запись мгновенных значений скорости, должно, по крайней мере, на порядок превышать период остановки вязкого слоя (период вылета вихрей). Дополнительные возмущения скорости в точке измерения будут вносить пролетающие вихри, так как их скорость отлична от скорости основного течения.

Можно ли получить вертикальный профиль осредненной скорости основного течения без искажений, которые вносят вихри? Если мерить скорость потока каким-либо прибором, который регистрирует скорость в данной точке поперечного сечения (например, трубкой Пито, вертушкой, термосопротивлением, лазерным или ультразвуковым датчиком), то регистрироваться будет суммарный сигнал, записанный за время измерения. За какую-то часть времени регистрации будет записываться скорость основного течения, а за другую часть будет записана скорость пролетающих вихрей. С помощью таких приборов выполнить поставленную задачу нельзя. Использование видеозаписи процесса позволяет решить эту задачу. На рисунках 1.16 и 1.17 хорошо видно, что частицы нейтральной плавучести, двигающиеся вместе с основным течением, имеют только горизонтальные треки на всех кадрах видеозаписи. На рисунке 1.17 видны частицы в придонном слое захваченные вихрями: эти частицы двигаются вместе с вихрями под углом к горизонтали и имеют наклонные треки. Используя частицы, имеющие только горизонтальные треки на всех кадрах видеозаписи, можно получить величину осредненной скорости основного течения без искажений, которые вносят вихри. Измеряя перемещения вихрей от кадру к кадру, можно определить как вертикальную, так и горизонтальную компоненты их скорости. Результаты таких измерений, выполненных в прямом канале с гладким горизонтальным дном из оргстекла, приведены на рис. 2.6.

Из приведенных экспериментальных данных следует, что в ускоряющемся потоке скорость течения растет гораздо быстрее с расстоянием от дна, чем в замедляющемся потоке. Это связано с периодической остановкой придонного слоя в потоке с отрицательным продольным градиентом скорости течения. Вертикальный профиль осредненной по времени скорости течения в ускоряющихся и замедляющихся потоках представляет собой монотонно возрастающую функцию вертикальной координаты.

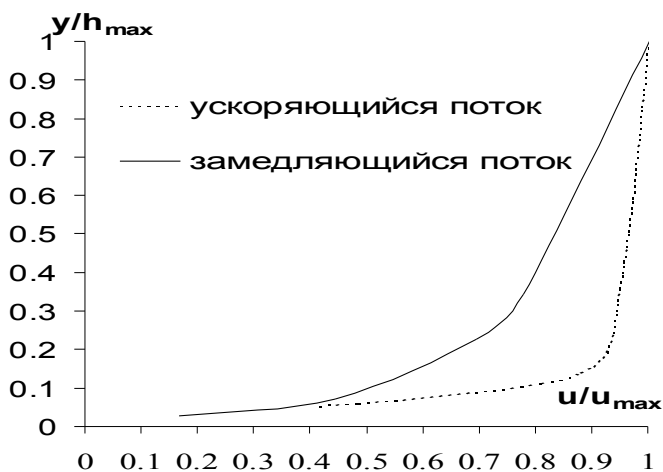


Рис. 2.6 Вертикальные профили осредненной по времени скорости течения в стационарных потоках в прямых каналах.

Вертикальный профиль *полной* скорости в замедляющемся потоке имеет характерные изгибы: в верхней части вязкого слоя δ эта скорость превышает скорость основного потока, выше имеется слой, в котором она меньше скорости основного потока, а в верхнем слое потока – обе скорости совпадают. Это позволяет предположить, что в верхней части вязкого нижнего слоя скорость вихрей превышает скорость основного потока, в среднем слое скорость вихрей ниже скорости основного потока, а в верхнем слое вихрей нет, либо вихри имеют скорость равную скорости основного течения. В нижней части придонного слоя скорость вихрей меньше скорости основного течения.

В соответствие с приведенными данными в вязком придонном слое осредненная скорость течения замедляющегося и ускоряющегося потоков является линейной функцией вертикальной координаты, что соответствует результатам Ньютона. Однако в ускоряющемся потоке скорость у дна равна нулю (условие прилипания), а в замедляющемся потоке – осредненная по времени скорость основного потока отлична от нуля. В момент остановки вязкого слоя и вылета вихрей происходит разрушение слоя трения и резкое ускорение течения (рис. 2.1). Осредненная по времени скорость основного течения на придонной линии тока, в результате, получается отличной от нуля.

Статистический анализ большого объема экспериментальных данных, полученных в лаборатории, на мелких и глубоких реках, в море для глубин до 60 м, позволил установить, что скорость основного течения на верхней границе вязкого слоя u_δ в пять раз превышает придонную скорость u_0 :

$$u_\delta = 5 \cdot u_0 \quad (2.12)$$

Эти данные получены для различных покрытий дна для частиц, размер которых не превышал 1 см. К сожалению, для изучения вязкого слоя жидкости в настоящее время нет других способов исследования кроме экспериментов.

Экспериментальные данные, приведенные на рис. 2.6, позволяют примерно оценить величину придонной скорости: она близка одной десятой величины максимальной скорости потока. На верхней границе вязкого слоя скорость примерно в 2 раза меньше максимальной скорости. Если в исследуемом потоке измерен продольный градиент скорости на некотором участке Δx , на котором зависимость скорости от продольной координаты можно оценить линейной функцией, то можно записать:

$$u_x = \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (2.13)$$

Значение продольного градиента скорости для одного и того же Δx будет зависеть от вертикальной координаты y так же, как и скорость потока. Удобнее всего измерять максимальную скорость потока на поверхности воды: в этом случае можно использовать легкие частички, измеряя их перемещение и время движения. Учитывая, что скорость течения на верхней границе вязкого слоя в два раза ниже максимальной, можно определить продольный градиент скорости течения в этой зоне по данным, полученным на поверхности потока:

$$u_x^\delta = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{y=\delta} \approx \frac{1}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{y=h} \quad (2.14)$$

§3 ТОЛЩИНА ВЯЗКОГО СЛОЯ И ПРИДОННАЯ СКОРОСТЬ

Какова же толщина δ придонного слоя, вовлеченного в этот процесс? Эксперименты показали, что останавливается слой, в котором скорость, осредненная во времени, представляет собой линейную функцию вертикальной координаты $u = u_0 + u_y y$, где u_y – вертикальный градиент скорости потока. Этот слой часто называют вязким слоем, так как в нем главными действующими силами являются силы вязкости. Трудности моделирования движения жидкости в таком слое заставляют опираться в основном на экспериментальные исследования. Большая серия лабораторных экспериментов и натурных наблюдений выполнена на кафедре физики моря и вод суши физического факультета МГУ [10]. Оказалось, что основные параметры поля скорости – придонная скорость u_0 и толщина придонного слоя δ – определяются максимальной в поперечном сечении скоростью течения u_{\max} и размером частиц грунта на дне канала d . Эксперименты проводились в прямом канале, интервал значений максимальной скорости потока составлял 3 – 50 см/с. На плоское дно канала наклеивались частички размером 0.2 мм и 1.2 мм для различных серий экспериментов. Были исследованы потоки и в канале с гладким плоским дном из органического стекла. Большая серия натурных наблюдений была выполнена на горной реке с галечным дном. Средний диаметр гальки составлял 1.2 см. Проводились исследования на двух участках реки. На одном участке максимальная скорость течения составляла 1 м/с при глубине потока 1 м. На втором участке глубина потока составляла 1.5 м, а максимальная скорость – 60 см/с.

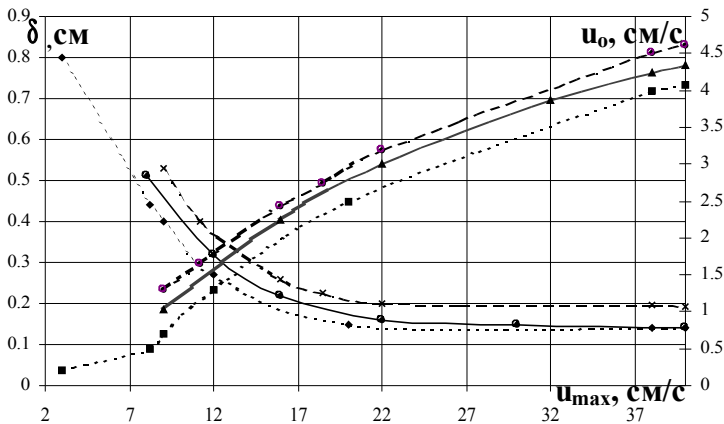


Рис. 2.7 Зависимость толщины вязкого слоя δ и придонной скорости u_0 от максимальной скорости u_{\max} . Пунктир – гладкое дно, сплошная линия – песок со средним диаметром $d = 0.2$ мм, штриховая линия – песок $d = 1.2$ мм

Оказалось, что придонная скорость и толщина придонного слоя определяются только максимальной скоростью потока и размером донной шероховатости. Результаты не зависят от продольного градиента скорости течения в исследованном интервале значений $u_x \in [0.01-1] \text{ с}^{-1}$. Полученные в лаборатории данные для указанного интервала значений исследованных параметров приведены

на рис. 2.7. Используя приведенные зависимости можно определять толщину придонного слоя и придонную скорость потока по легко измеряемой величине – максимальной в поперечном сечении скорости течения, если известен размер донных частиц.

Из приведенных данных следует, что толщина придонного слоя убывает с увеличением скорости потока до некоторой минимальной величины, которая определяется размером донных частиц и растет при увеличении их диаметра. Толщины минимального слоя для гладкого дна и песка диаметром 0.2 мм совпадают и составляют 0.14 см. Для гладкого дна придонный слой достигает минимальной толщины при максимальной скорости потока 25 см/с, а для песка с $d = 0.2$ мм – при большей скорости: $u_{\max} = 35$ см/с.

§4 ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИХРЕЙ

Эксперименты показали, что вихри сворачиваются у верхней границы придонного слоя δ , радиус вихря a определяется толщиной вязкого слоя и равен:

$$a = \frac{1}{3}\delta \quad (2.15)$$

Между основным вихрем, вращающимся по часовой стрелке, и дном за счет вязкости появляются вихри спутники, вращающиеся в противоположную сторону и компенсирующие момент количества движения основного вихря в слое δ .

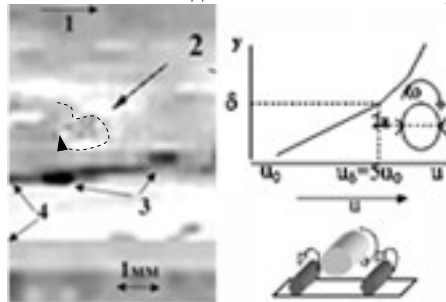


Рис. 2.8 Основной вихрь(2) сворачивается у верхней границы вязкого слоя. 1 – направление потока, 3 – вихри спутники, 4 – гладкое дно канала.

Какова же угловая скорость вращения основного вихря? Эту величину можно измерить непосредственно по перемещению захваченной частички в вихре, пока вихрь не оторвался от дна (рис. 2.2, частичка показана стрелкой). Можно оценить эту величину и из следующих соображений. Так как вихрь сворачивается у верхней границы вязкого слоя, то пренебрегая вязкостью, проверим, выполняется ли для течения вида $u = u_0 + u_y y$ уравнение Гельмгольца. Здесь u_y – вертикальный градиент скорости потока.

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = (\vec{\Omega} \nabla) \vec{u}, \text{ где } \vec{\Omega} \equiv \text{rot} \vec{u} \quad (2.16)$$

Если правая часть этого уравнения окажется равной нулю для исследуемого течения, то величина ротора скорости должна сохраняться во времени. Вычислим правую часть уравнения (2.16). Для потока с линейным вертикальным профилем

средней скорости $u = u_0 + u_y y$: $\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{u} = -\vec{k} u_y$, где \vec{k} – орт, направленный по оси z . Вычислим оператор:

$$(\vec{\Omega} \nabla) = \left(\vec{k} u_y \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) = u_y \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.17)$$

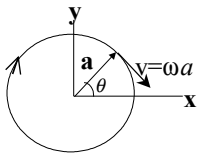
Подействуем оператором (2.8) на скорость потока и получим:

$$(\vec{\Omega} \nabla) \vec{u} = u_y \frac{\partial}{\partial z} (\vec{i} (u_0 + u_y y)) \equiv 0 \quad (2.18)$$

Уравнение Гельмгольца выполняется для исследуемого течения. Следовательно, величина ротора скорости должна оставаться неизменной во времени. Предполагая, что она сохраняется и при изменении формы движения от плоскопараллельного течения к цилиндрическому вихрям, можем записать:

$$\text{rot} \vec{u}_{\text{течения}} = \text{rot} \vec{u}_{\text{вихря}} \quad (2.19)$$

Теперь определим чему равен ротор скорости цилиндрического вихря, вращающегося как твердое тело с угловой скоростью ω . Запишем компоненты скорости вихря



$$\sin \theta = \frac{y}{a} \quad \cos \theta = \frac{x}{a}$$

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v \sin \theta & v_x &= \omega y \\ v_y &= -v \cos \theta & v_y &= -\omega x \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Подставляя компоненты скорости в определитель: $\text{rot} \nabla = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$

Получаем выражение $\text{rot} \nabla = -\vec{k} 2\omega$. Учитывая (2.19) теперь можно записать:

$$\omega = \frac{u_y}{2} \quad (2.21)$$

Сравнение экспериментальных данных с расчетами по (2.21) показало, что во всех исследованных случаях они совпадают в пределах ошибки измерений. Это позволяет заключить, что для верхней части вязкого слоя уравнение Гельмгольца справедливо, а при переходе от плоскопараллельного течения к цилиндрическим вихрям ротор скорости сохраняется.

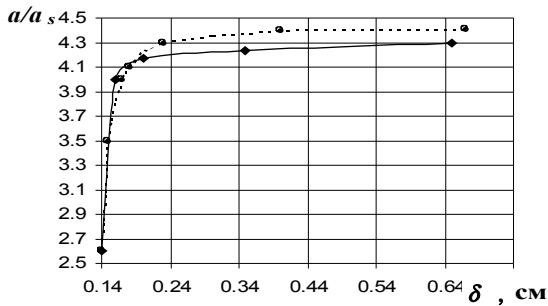


Рис. 2.9 Зависимость отношения радиусов основного вихря и вихря спутника от толщины придонного слоя. Гладкое дно – сплошная линия, песок $d = 0.2$ мм – штриховая линия.

Вихри спутники образуются за счет вязкости между основным вихрем и дном канала. Их размер зависит от толщины придонного слоя δ (рис. 2.9). Эксперименты, позволяющие увидеть на видеозаписи размер вихрей спутников, показали, что отношение радиусов основного вихря и вихря спутника уменьшается с уменьшением толщины придонного слоя. Как следует из приведенных данных, для минимальной толщины придонного слоя отношение радиусов основного вихря и вихря спутника составляет $\frac{a}{a_s} = 2.6$. Это отношение достигается при большей скорости в канале с песчаным дном, чем в канале с гладким дном из органического стекла (рис.2.10).

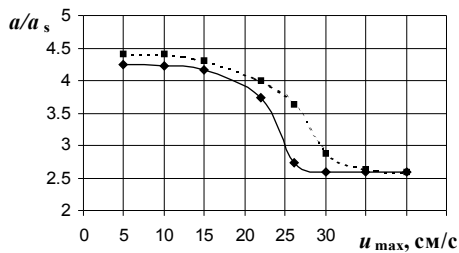


Рис. 2.10 Зависимость отношения радиусов основного вихря и вихря спутника от скорости потока. Гладкое дно – сплошная линия, песок $d = 0.2$ мм – пунктир.

Расстояние между центрами вихрей спутников $s_{сп}$ для всех экспериментов зависело только от размера основного вихря и было близко следующей величине (в пределах ошибки измерений):

$$s_{сп} \approx \frac{4}{3} a \quad (2.22)$$

Угловую скорость вращения вихрей спутников можно найти из условия равенства значений линейной скорости на границе основного вихря и вихря спутника:

$$\omega_{\text{сп}} = \frac{u_y}{2} \cdot \frac{a}{a_{\text{сп}}} \quad (2.23)$$

Параметры основных вихрей могут быть выражены только через толщину придонного слоя и придонную скорость. Для линейного вертикального профиля скорости в слое толщиной δ с учетом (2.12) получаем:

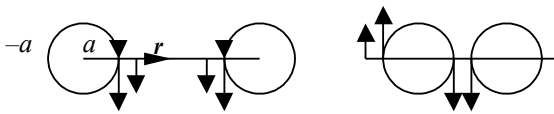
$$\omega = \frac{2u_0}{\delta} \quad (2.24)$$

Расстояние между вихрями (2.11) и период вылета вихрей (2.10) тоже выражаются через эти же величины, но, учитывая (2.14), дополнительно необходимо знать продольный градиент скорости течения на поверхности воды. В свою очередь, придонная скорость и толщина придонного слоя определяются максимальной скоростью потока и размером донных частиц по данным рис. 2.7. Таким образом, чтобы прогнозировать процесс отрыва вихрей в замедляющемся потоке жидкости в прямом канале, достаточно измерить максимальную скорость, продольный градиент скорости на поверхности потока и размер донных частиц.

§5 ТИПЫ ВИХРЕЙ

Эксперименты показали, что в зависимости от скорости потока в придонном слое образуются разные типы вихрей. В момент формирования образуется всегда три вихря: основной и два вихря спутника. Дальнейшая судьба этой системы определяется размером основного вихря. Чем больше скорость потока, тем меньше толщина придонного слоя и размер основного вихря. С уменьшением диаметра основного вихря вихри спутники сближаются. Если два вихря вращаются в одну сторону и оказываются так близко друг от друга, что слои окружающей вихри жидкости, увлеченной вязкостью в вихревое движение, соприкасаются, то на границе слоев возникает разрыв скорости, порождающий вихревой слой. Обратимся к следующей схеме, для пояснения картины. Пусть ось r направлена от центра вихря радиуса a в сторону второго вихря.

Вихри вращаются в разных направлениях



Вихри вращаются в одном направлении

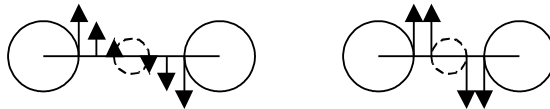


Рис. 2.11 Схема взаимодействия вихрей

На верхней части схемы показаны два твердотельных вихря, которые вращаются в разных направлениях. За счет вязкости тонкий слой окружающей вихрь жидкости

увлекается во вращение, причем скорость вращения, показанная стрелками, быстро падает вдоль оси r и не меняет направления между вихрями. Так как движение жидкости, окружающей вихрь, является потенциальным, то для любой точки можно записать закон Бернулли:

$$\frac{1}{\rho} p_{\text{ож}} + \frac{1}{2} V_{\text{ож}}^2 = \text{const} \quad (2.25)$$

Отсюда находим градиент давления вдоль оси r . Подставляем градиент давления в уравнение движения вихря. Тогда компонента силы, действующая на элемент поверхности вихря со стороны окружающей жидкости, определяется выражением:

$$\rho \left(\frac{du}{dt} \right)_r = \rho V_{\text{ож}} \frac{dV_{\text{ож}}}{dr} \quad (2.26)$$

Градиент скорости в окружающей жидкости отрицателен, и сила направлена к центру вихря против оси r . Если вихри находятся далеко друг от друга, то значения градиента скорости в точках $r = \pm a$ равны между собой по модулю, а компоненты силы в этих точках компенсируют друг друга. В этом случае расстояние между вихрями сохраняется. Если вихри расположены так близко, что градиент скорости между вихрями меньше, чем с внешней стороны, то вихри будут сближаться под действием давления окружающей жидкости до тех пор, пока внешние оболочки вихрей не окажутся рядом. В этом положении силы, прижимающие вихри друг к другу оказываются максимальны.

Если вихри вращаются в противоположные стороны, то тангенциальные составляющие скорости на границе вихрей совпадают. Если угловая скорость вращения вихрей больше некоторой критической величины то деформации вихрей не происходит. Для малых значений угловой скорости вращения круглое сечение вихрей деформируется в семядолю.

Если же вихри вращаются в одном направлении (нижняя часть рисунка), то на границе этих слоев скорость движения жидкости направлена в противоположные стороны. Такое движение жидкости является абсолютно неустойчивым: здесь сразу возникает вихревой слой. Эксперименты показывают, что вихри, вращающиеся в одну и ту же сторону, в этих условиях сближаются и сливаются в один вихрь.

При каких условиях вихри, вращающиеся в одну сторону, начинают сближаться и сливаются? Многочисленные эксперименты, выполненные в различных лабораториях, моделирующие твердотельные вихри в безграничной жидкости установили следующий критерий: отношение расстояния между центрами вихрей к их радиусу должно быть меньше четырех [13]. Запишем этот критерий для вихрей спутников с учетом (2.22):

$$\frac{s_{\text{сп}}}{a_{\text{сп}}} < 4, \quad \rightarrow \quad \frac{a}{a_{\text{сп}}} < 3 \quad (2.27)$$

Из экспериментальных данных (рис. 2.10) можно заключить, что в канале с гладким дном слияние вихрей спутников происходит при скорости 25 см/с, а в канале с дном из мельчайшего песка ($d = 0.2$ мм) – при скорости 30 см/с. Для песчаного дна с размером песчинки $d = 1.2$ мм слияние вихрей спутников наблюдалось при скорости около 1 м/с.

После слияния вихрей спутников возникает система из двух вихрей, вращающихся в противоположную сторону. Размер нового вихря, вращающегося против часовой стрелки, немного меньше, чем размер основного вихря: радиус нового вихря превышает $2/3a$. Процесс слияния можно увидеть на следующих кадрах видеозаписи, сделанной в потоке с гладким дном при скорости $u_{\max}=40$ см/с.

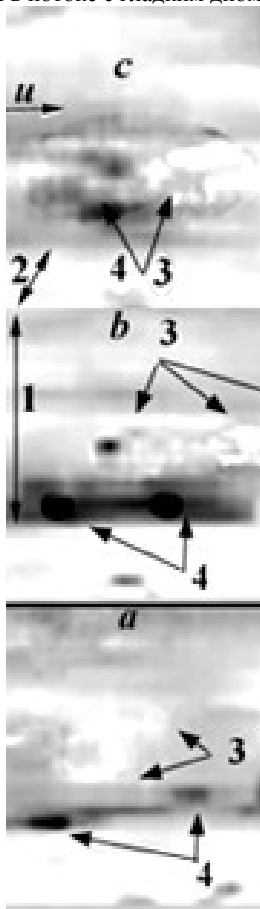


Рис. 2.12 Фазы формирования основного вихря (3) и вихрей спутников (4). Вихри спутники сближаются на кадре (b) и сливаются в один вихрь на кадре (c). 1 – вода, 2 – дно. $u_{\max} = 40$ см/с. Ширина кадра составляет 0.7 см.

На дно канала была насыпана марганцовка, частицы которой захватывали вихри спутники, формируясь непосредственно у дна. В результате вихри спутники оказались окрашены марганцовкой: на черно-белых кадрах они выглядят существенно темнее основного вихря. Основной вихрь виден, благодаря рассеянному свету и захваченным белым частицам нейтральной плавучести. Эти частицы хорошо видны при скручивании основного вихря на первом кадре (a). На

втором кадре расстояние между вихрями спутниками уже существенно сократилось, причем основной вихрь оказался сдвинутым немного вправо. На третьем кадре мы видим рядом два вихря, вращающихся в противоположные стороны: справа находится основной вихрь, вращающийся по часовой стрелке, а слева – вихрь, возникший в результате слияния вихрей спутников. Диаметр основного вихря немного больше диаметра нового вихря. Такую систему из двух вихрей иногда называют *диполем*. Если диаметры вихрей равны и совпадают скорости вращения вихрей, то такая система называется *парой* вихрей. Систему из трех вихрей, которая возникает вначале, можно назвать *триполем*. Вихри остаются в потоке в виде триполей, если не выполняется условие (2.27).

§6 ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ДИПОЛЕЙ В ПОТОКЕ

Как перемещаются диполи в жидкости? Будем считать, что движение твердотельных вихрей можно моделировать движением вихревых нитей, имеющих ту же циркуляцию, что и вихри, и помещенных в центр вихрей. Это возможно, так как поле скорости вне твердотельного вихря описывается так же, как поле скорости вне вихревой нити. Рассмотрим движение двух вихревых нитей с циркуляцией γ_1 и γ_2 . Вихри вращаются в противоположные стороны, как показано на следующем рисунке. В курсе гидродинамики показывается, что вихри двигаются на одинаковом расстоянии друг от друга, вращаясь вокруг общего центра O , как показано в правой части рисунка.

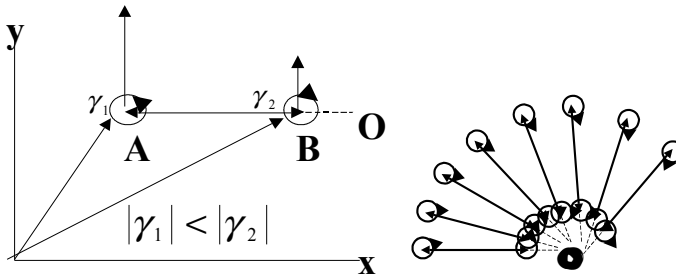


Рис.2.13 Перемещение двух вихревых нитей, вращающихся в противоположные стороны

Скорость вихрей перпендикулярна AB и определяется выражениями:

$$V_1 = \frac{\gamma_2}{2\pi \cdot BA}, \quad V_2 = \frac{\gamma_1}{2\pi \cdot AB} \quad (2.27)$$

Так как $BA = -AB$, а циркуляция вихрей имеет разный знак, то векторы скорости вихрей имеют одно направление. Центр, вокруг которого вращаются вихри, имеет координаты:

$$AO = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} AB \quad (2.28)$$

Если циркуляция вихрей в сумме равна нулю, то точка O оказывается в бесконечности, а вихри двигаются вдоль прямой, перпендикулярной AB с одинаковой скоростью. Запишем циркуляцию для основного вихря и вихря, возникшего при слиянии двух вихрей спутников, считая, что радиус последнего в два раза превышает радиус вихрей спутников:

$$\gamma = -2\omega \pi a^2, \quad (2.29)$$

$$\gamma_{2c} = 2\omega \pi a(2a_{cn}) \quad (2.30)$$

Диполи возникают при выполнении условия (2.27). Учитывая, что существует минимальный размер вихрей спутников (рис. 2.10), получаем условие:

$$a/2.6 > a_{cn} > a/3 \quad (2.31)$$

По (2.28) рассчитываем максимальное и минимальное расстояние до оси вращения вихрей, считая, что $AB = a + a_{2c}$:

$$AO \Big|_{a=3a_{cn}} \approx 3.3a \quad (2.32)$$

$$AO \Big|_{a=2.6a_{cn}} \approx 5a$$

Выражения (2.27) – (2.32) показывают, что после образования диполя, он начинает двигаться вверх (в направлении скорости между вихрями), описывая дугу вокруг центра O , пока диполь не вернется на дно канала. Максимальная высота подъема определяется выражением (2.32). При приземлении справа оказывается вихрь, вращающийся против часовой стрелки. Схема движения диполя приведена на следующем рисунке.

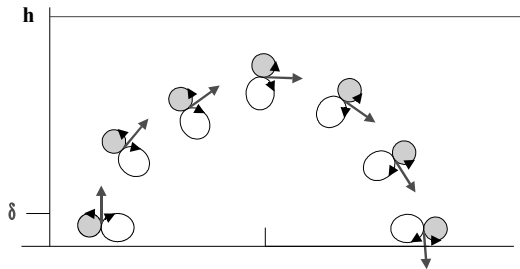


Рис. 2.14 Схема перемещения диполя

Пространственное изображение диполя приведено на следующем кадре видеозаписи.

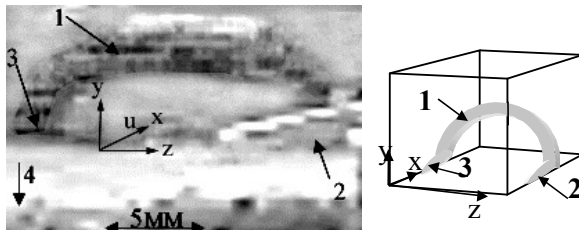
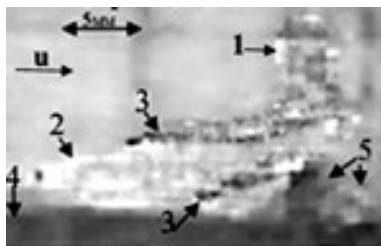


Рис. 2.15 Диполь в фазе подъема. Центральная часть (1) поднялась, а концы вихря (2) и (3) остаются у дна вблизи стенки канала.

Поднимается вверх только центральная часть диполя. Концы диполя скользят по дну канала и отстают от центральной части. На концах вблизи вертикальной стенки вихри могут и не сливаться, как хорошо видно на следующем кадре видеозаписи.



2.16 Конец вихря у вертикальной стенки вытянут вдоль продольной оси. Вихри спутники не слились в один вихрь. 1 – центральная часть диполя, 2 – основной светлый вихрь, 3 – темные вихри спутники, окрашенные марганцовкой, 4 – дно, 5 – новый вихрь.

На следующем кадре хорошо видны сечения центральных частей диполей, находящихся в различных стадиях подъема.

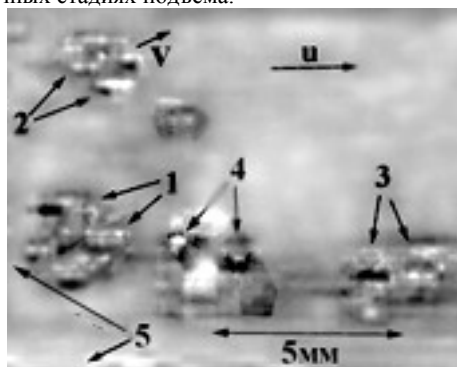


Рис. 2.17 Диполи в потоке воды в канале с гладким дном: 3 – перед началом подъема, 1, 4 – приземление после полета, 2 – подъем, 5 – дно канала.

На рисунке хорошо виден приземлившийся диполь (обозначен цифрой 4): слева лежит белый основной вихрь, а справа – темный вихрь меньшего диаметра. Он имеет более темную окраску, так как вихри спутники, которые его образовали, захватили со дна частички марганцовки. Этот диполь подняться вновь не может, так как скорость между вихрями направлена вниз. Однако центральная часть основного вихря поднимается вверх, огибая темный вихрь, как видно на приведенном кадре. Когда основной вихрь оказывается справа от темного вихря, диполь снова поднимается вверх. Подъем основного вихря обусловлен воздействием окружающей жидкости. В потоке со сдвигом скорости в верхней точке вихря скорость окружающей жидкости будет выше скорости в нижней точке. Кроме того, в верхней точке она совпадает с линейной скоростью вихря, в нижней точке – наоборот. На линии тока, окружающей вихрь справедлив закон Бернулли, в соответствии с которым, давление под вихрем превышает давление в верхней точке. Для второго вихря, вращающегося против часовой стрелки, совпадает направление линейной скорости с направлением скорости окружающей жидкости как раз в нижней точке. При этом линейная скорость вращения вихря превышает скорость потока в придонном слое. В результате относительная

скорость основного потока над вихрем меньше, чем под ним, а давление вверх выше. Этот вихрь прижимается ко дну окружающей жидкостью.

За время пребывания у дна канала размеры вихрей заметно увеличиваются, растет и расстояние между их центрами. В результате при следующем перелете вихрь поднимается выше, чем в первый раз. Скорость диполя уменьшается за счет увеличения расстояния между центрами вихрей и уменьшением циркуляции вихрей за счет вязкости.

В толще потока виден диполь, поднявшийся почти на максимальную высоту. Максимальная высота подъема примерно в 5 – 6 раз превышает радиус основного вихря. Увеличение высоты подъема, по-видимому, связано с воздействием потока на диполь. Однако отличие не превышает 15 – 20%, что позволяет использовать выражение (2.32) для примерной оценки высоты подъема диполей.

§7 ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ТРИПОЛЕЙ В ПОТОКЕ

Когда вихри спутники достаточно малы – их радиус, по крайней мере, в три раза меньше радиуса основного вихря (2.27), вихри спутники не сливаются, а начинают вращаться вокруг основного вихря по часовой стрелке. Можно показать, что в этом случае ось O оказывается внутри основного вихря и лежит очень близко к его центру. Угловая скорость вращения системы Ω вокруг центра O дается следующим выражением [14]:



$$\Omega = \omega \cdot \frac{a(a - a_{\text{сп}})}{(a + a_{\text{сп}})^2} \quad (2.33)$$

Пусть соотношение радиусов вихрей $a/a_{\text{сп}} = n$, тогда (2.33) можно записать:

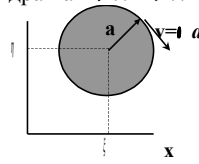
$$\Omega = \omega \cdot \frac{n(n - 1)}{(n + 1)^2} \quad (2.34)$$

Вихри спутники образуются за счет сил вязкости между основным вихрем и дном канала. Границы основного вихря и вихрей спутников соприкасаются, тангенциальная составляющая скорости на границе вихрей равны между собой. В этих условиях на вихри действует сила со стороны окружающей жидкости, прижимающая их друг к другу. Кроме того, на основной вихрь в придонном слое действует подъемная сила, обусловленная разность давления в верхней и нижней точках, так как скорость потока увеличивается с удалением от дна. В результате основной вихрь начинает подниматься вверх вместе с прижатыми к нему вихрями спутниками.

Рассмотрим перемещение основного вихря в потоке жидкости с вертикальным градиентом скорости, пренебрегая продольным градиентом. Задача решается следующим образом. Определяется поле скорости жидкости, окружающей вихрь с помощью потенциала, описывающего поле скорости основного потока и возмущения от движения вихревой нити. С помощью интеграла Коши-Лагранжа (аналога уравнения Бернулли для нестационарной задачи) определяется давление на контуре вихря. С помощью интегрирования давления по контуру вихря, можно получить уравнение его движения.

Пусть основной вихрь находится в бесконечном слое жидкости, скорость которого задается выражением $u_0 + u_x y$. Введем комплексную плоскость $z = x + iy$, на

которой обозначим текущее положение центра цилиндра как $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$: $\xi(t)$



по горизонтальной оси x и $\eta(t)$ по вертикальной оси y .

Возмущение фонового потока будем считать потенциальным. Это позволяет для возмущения скорости ввести комплексный потенциал:

$$w = \frac{u_c(t) - \zeta}{z - \zeta} a^2 + i \frac{u_y a^4}{4(z - \zeta)^2} - \frac{\gamma}{2\pi i} \ln(z - \zeta) \quad (2.35)$$

где, a - радиус вихря, $u_c(t) = u_0(t) + u_y \eta(t)$ - скорость невозмущенного фонового потока, приходящаяся на центр цилиндра, γ - циркуляция скорости вокруг цилиндра. Комплексный потенциал полностью определяется, что дает возможность найти как возмущение основного течения, так и полную скорость потока. Поле давления можно найти, используя интеграл Коши-Лагранжа для равнозавихренного течения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u_0(t)x + [u_0(t) + u_y y] \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{P}{\rho} - u_y \psi = 0 \quad (2.36)$$

Здесь $\varphi = \text{Re}(W)$ - потенциал скорости для возмущения основного течения, ψ - полная функция тока (фоновое течение плюс возмущение), ρ - плотность.

Реакция жидкости на движущийся цилиндр вычисляется через давление:

$$F_x + iF_y = -a \int_0^{2\pi} p e^{i\theta} d\theta \quad (2.37)$$

где F_x и F_y - компоненты силы, действующей на тело со стороны окружающей жидкости. Свободное движение цилиндрического тела подчиняется соотношениям:

$$\begin{aligned} \pi a^2 \rho \dot{\xi} &= F_x \\ \pi a^2 \rho \dot{\eta} &= F_y \end{aligned} \quad (2.38)$$

Отсюда получаем уравнения движения цилиндрического вихря [15]:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= u_0(t) + \left(u_y - \frac{\gamma}{2\pi a^2} \right) \eta \\ \dot{\eta} &= \left(u_y - \frac{\gamma}{2\pi a^2} \right) (u_0(t) + u_y \eta - \xi) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Здесь точка над переменной обозначает производную по времени, придонная скорость зависит от времени, а вертикальный градиент скорости считается постоянным. Вихрь, вращающийся по часовой стрелке, двигается по траектории в виде циклоиды.

Для того, чтобы учесть периодическое торможение придонного слоя во времени, следует использовать решение (2.9). Получаем решение для координат центра вихря, справедливое для интервала времени $0 < t < T$:

$$\xi(t) = (u_y + \omega) \left[\frac{v_{0y}}{\mu^2} (1 - \cos \mu t) - \frac{u_0(0) - v_{0x}}{\omega} \left(\frac{\sin \mu t}{\mu} - t \right) \right] + v_{0x} t + \frac{\delta}{C_f} \ln \cos \left(t \sqrt{u_0^2 u_x^2 / C_f / \delta} \right) \quad (2.40)$$

$$\eta(t) = \frac{v_{0y}}{\mu} \sin \mu t - \frac{u_0(0) - v_{0x}}{\omega} (\cos \mu t - 1) \quad (2.41)$$

где ω - угловая скорость вращения вихря, $\mu = \sqrt{(u_y + \omega)\omega}$, v_{0x} и v_{0y} - начальные скорости вихря при входе в слой. При формировании вихря во время остановки пограничного слоя, он не смещается вдоль оси x (рис. 2.2). Это позволяет считать, что начальные значения его скорости равны нулю. Периодическое торможение придонного слоя учитывает последнее слагаемое уравнения (2.40).

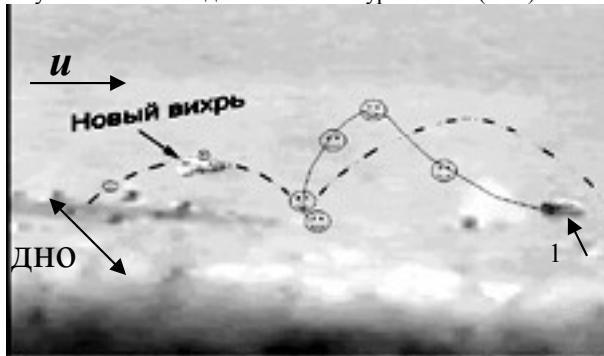


Рис. 2.18 Траектория триполя за два перелета. 1 – вихрь заканчивает второй перелет. $u_{\max} = 22 \text{ см/с}$, $d = 0.2 \text{ мм}$

Перемещение триполя в придонных слоях потока хорошо описывается перемещением основного вихря. Это было установлено в результате сравнения экспериментальных данных с расчетами движения основного вихря. На рисунке 2.18 приведен кадр, на котором вихрь, отмеченный цифрой один, закончил второй перелет. Расчетная траектория с учетом торможения придонного слоя показана сплошной линией. Круглые значки отмечают положение вихря на предыдущих кадрах. На записи виден новый вихрь, совершающий первый перелет. Его диаметр в 1.2 раза меньше первого. Такое изменение диаметра основного вихря после приземления зафиксировано во всех экспериментах:

$$a_{n+1} = 1.2 a_n \quad (2.42)$$

Реальная и расчетная траектории вихря хорошо соответствуют друг другу. Расчет выполнен с учетом того, что произошел новый вылет вихря, показанный на рисунке стрелкой. Траектория вихря, полученная без учета торможения придонного слоя и показанная штриховой линией, позволяет оценить влияние торможения. Траектория первого перелета вихрей совпадает с траекторией, рассчитанной без учета торможения придонного слоя. Используя выражения

$u_y = \frac{4u_0}{\delta}$ и $\omega = \frac{2u_0}{\delta}$, для первого перелета вихря можно получить следующие полезные соотношения для максимальной высоты подъема, дальности перелета и времени перелета вихря:

$$\eta_{\max} = \frac{2u_0}{\omega} = \delta, \quad \xi_{\max} = 5.44\eta_{\max}, \quad t_{\max} \approx \frac{1.8\delta}{u_0} \quad (2.43)$$

Центр вихря, как следует из (2.43) поднимается только до верхней границы придонного слоя δ , расстояние между точками вылета и приземления в пять с половиной раз превышает толщину этого слоя. Эти соотношения можно использовать для определения толщины придонного слоя и придонной скорости, если известна траектория первого перелета вихря.

Что же происходит с вихрями спутниками за время полета основного вихря? Время одного перелета вихря можно получить из выражения (2.41):

$$t_{\text{пер}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega(u_y + \omega)}} \quad (2.44)$$

Используя выражение для угловой скорости вращения триполя вокруг центра O (2.34), учитывая (2.42) можно показать, что за три перелета основного вихря спутники делают почти полный оборот вокруг него. Если в начале полета радиус основного вихря в четыре раза превышает радиус вихря спутника, то в конце третьего перелета спутники поворачиваются на угол $\beta_{1+2+3\text{пер}} = 1.63\pi$.

При приземлении в конце третьего перелета вихри спутники оказываются почти под основным вихрем и получают косой удар о дно. Вихри деформируются: сечение основного вихря превращается в семядолю, а вихри спутники слипаются. В результате вихри образуют *компактную пару*. Ниже приведены два последовательных видео кадра, на которых видна система вихрей перед приземлением в конце третьего перелета (кадр слева) и после удара (справа).

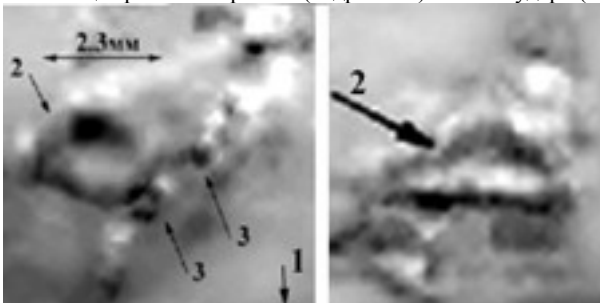
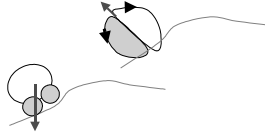


Рис. 2.19 Триполь в конце третьего перелета (слева) и после удара о дно (справа).
1 - дно, 2 - основной вихрь, 3 - вихри спутники

Приведем схему наблюдаемого процесса:



Компактная пара движется прямолинейно в направлении общего вектора скорости между вихрями. Скорость компактной пары определяется (2.27). Если предположить, что величины циркуляции вихрей в паре равны по модулю, а расстояние между центрами вихрей уменьшилось в n раз, то скорость такой пары будет определяться выражением;

$$V_{\text{пар}} = \frac{\omega a}{2} n = \frac{u_0}{3} n \quad (2.45)$$

Если расстояние между вихрями уменьшится в 2 раза, то скорость пары не будет превышать скорость потока у дна канала. Если основной вихрь имеет большую циркуляцию, то система медленно вращается по часовой стрелке, а пара смещаться вдоль по течению, когда вектор скорости направлен вдоль оси x .

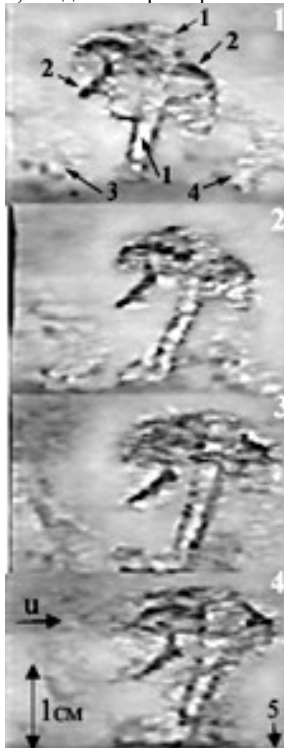


Рис. 2.20 Вертикальный подъем компактной пары, образованной при третьем приземлении триполя. 1, 2 – пара и концы вихрей, образовавших пару в пристеночной области, 3,4 – соседние вихри.

Эта запись сделана в канале с гладким дном при максимальной скорости потока 8.2 см/с, $u_0 = 0.5\text{см/с}$, $\delta = 4.4$ мм. Приведенные кадры сделаны после трех перелетов триполя и образования компактной пары. Пара показана цифрой один, а цифрой 2 обозначены концы вихрей в пристеночной области. В отличие от центральной части вихрей, концы вихрей в пристеночной области не образуют пары, а раздваиваются. По мере вращения пары, концы вихрей смещаются, закручиваясь в клубок. На верхнем кадре основной вихрь расположен над спутником, и пара начинает медленно смещаться вниз по течению. Регулярное появление таких медленных объектов вдали от придонного слоя потока приводит к тому, что измеренная полная скорость течения оказывается существенно ниже скорости фонового потока. Такую особенность вертикального профиля скорости течения можно видеть на рис. 2.6.

§8 ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНОГО ГРАДИЕНТА СКОРОСТИ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ВИХРЕЙ

До сих пор мы рассматривали модель перемещения основного вихря в потоке, скорость которого не меняется вдоль по течению. Пусть теперь будет учтен и этот фактор [16]. Рассмотрим движение твердотельного вихря в присутствии неоднородного фонового потока несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \vec{U}_\phi + \nabla \phi \\ \begin{cases} U_\phi = U_0 + eX_\phi(t) + \chi Y_\phi(t) \\ V_\phi = -eY_\phi(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.46)$$

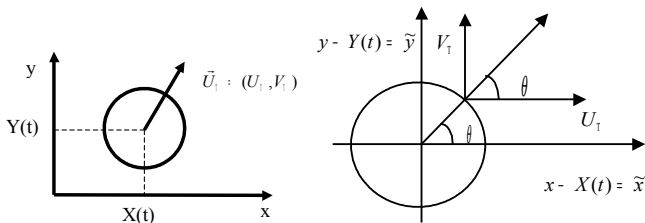
Здесь e – продольный градиент скорости, χ – вертикальный градиент скорости фонового течения. Запишем интеграл Коши-Лагранжа для фонового потока и потенциального возмущения:

$$\phi_t + (\vec{U}_0 x + \vec{V}_0 y) + \frac{1}{2}(\vec{U} + \nabla \phi)^2 + \frac{P}{\rho} + \Phi - \chi \psi = 0 \quad (2.47)$$

где ϕ – потенциал скорости для возмущения, ψ – полная функция тока (фон и возмущение) P – полное давление (фон и возмущение), Φ – потенциал внешних сил

$$(\text{rot} \vec{U}_\phi)_z = -\chi \vec{k} = (0, 0, -\chi), \quad \chi = \text{const} \quad (2.48)$$

Рассмотрим задачу обтекания твердого тела движущегося со скоростью \vec{U}_T



потоком жидкости. Запишем проекцию скорости на местную нормаль:

$$(\vec{U}_T)_n = U_T \cos \theta + V_T \sin \theta \quad (2.49)$$

Получим функцию тока на границе тела радиуса a :

$$U_n = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\Gamma \cos \theta + V_\Gamma \sin \theta \quad (2.50)$$

$$\Rightarrow \psi \Big|_\Gamma = U_\Gamma a \cos \theta - V_\Gamma a \sin \theta + \text{const}$$

Функция тока на бесконечности будет определяться только фоновым течением и циркуляцией вокруг цилиндра. Из (2.50) получаем систему:

$$\begin{cases} U_\phi = U_0 + eX_\phi(t) + \chi Y_\phi(t) = \frac{\partial \psi_\phi}{\partial y} \\ V_\phi = -eY_\phi(t) = -\frac{\partial \psi_\phi}{\partial x} \end{cases} \quad (2.51)$$

Интегрируем эту систему:

$$\psi_\phi = U_0(t)y - V_0(t)x + exy - \frac{1}{2}\chi y^2 + \text{const} \quad (2.52)$$

Давление получается из интеграла Коши-Лагранжа при подстановке соответствующих членов. Затем определим проекции силы, действующие на цилиндр со стороны потока:

$$\begin{aligned} F_x &= \dot{X}(t) = -a \int_0^{2\pi} P \cos \theta d\theta \\ F_y &= \dot{Y}(t) = -a \int_0^{2\pi} P \sin \theta d\theta \\ F_x + iF_y &= -a \int_0^{2\pi} P e^{i\theta} d\theta \end{aligned} \quad (2.53)$$

Считая, что у дна вертикальная составляющая скорости фонового потока равна нулю, а горизонтальная составляющая не зависит от времени, получаем уравнения движения твердотельного цилиндрического вихря в потоке с продольным и вертикальным градиентом скорости:

$$\begin{aligned} \dot{X}_T(t) &= \frac{e}{4} X_T(t) + (\chi - \omega) Y_T(t) + \left(\frac{3}{4} e^2 \right) X_T(t) + \\ &+ \left(\frac{3}{4} e\chi - e\omega \right) Y_T(t) + \frac{3}{4} eU_0 \\ \dot{Y}_T(t) &= -(\chi - \omega) X_T(t) - \frac{e}{4} Y_T(t) - (-e\chi + e\omega) X_T(t) + \\ &+ \left(\frac{3}{4} e^2 + \chi^2 - \omega\chi \right) Y_T(t) - (\omega - \chi) U_0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Для того, чтобы продемонстрировать влияние продольного градиента скорости на траекторию движения вихря, приведем две расчетные траектории, построенные для одинаковых условий, но различных значений продольного градиента скорости.

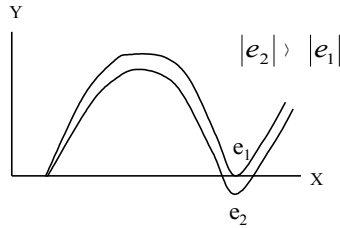


Рис. 2.21 Траектории вихря при различных значениях продольного градиента скорости в тормозящемся потоке

В тормозящемся потоке при увеличении модуля продольного градиента скорости траектория вихря смещается вниз. В ускоряющемся потоке ситуация обратная: траектория смещается вверх. Ниже приводится кадр видеозаписи потока с резким перепадом продольного градиента скорости.

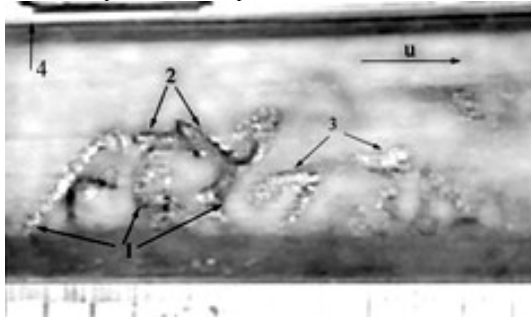


Рис. 2.22 Вихри в потоке с резким перепадом продольного градиента скорости. 2,3 – центральная часть вихрей, 1 – концы вихрей у стенки, 4 – поверхность воды.

В левой части кадра видны три вихря в точках максимального подъема при слабом продольном градиенте скорости $u_x = 0.035 \text{ с}^{-1}$, в правой части $u_x = 0.09 \text{ с}^{-1}$. В правой части кадра высота максимального подъема вихрей меньше, чем в левой, расстояние между точками вылета вихрей тоже сократилось.

§9 ВКЛАД ВИХРЕЙ В ВОЗМУЩЕНИЕ СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЯ

При исследовании реальных потоков воды большое значение уделяют исследованию пульсаций скорости течения, характерных для турбулентного движения. В 20 веке многие исследователи, считали, что колебания скорости во времени в стационарных "в среднем" потоках являются чисто хаотическими. Для изучения пульсаций скорости применяли статистический подход и правила осреднения Рейнольдса. Сам Рейнольдс считал, что вклад пульсаций в чисто хаотическое движение составляет не более 1% от величины средней скорости потока. Однако многочисленные эксперименты показали, что в придонном слое реальных потоков максимум пульсаций скорости составляют примерно 11-12% от максимального значения средней скорости. Характеристикой пульсаций скорости течения служит в турбулентной теории напряжение Рейнольдса. Типичный вертикальный профиль, этой величины приведен на следующем рисунке.

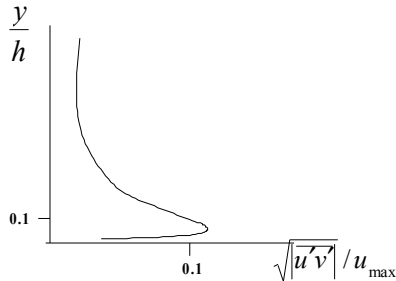


Рис. 2.23 Типичный вертикальный профиль турбулентного напряжения стационарного "в среднем" потока, измеренный в прямом канале.

Для измерения турбулентного напряжения в поток помещается чувствительный элемент измерителя скорости течения. В течение интервала времени, многократно превышающего период колебаний максимальной амплитуды, производится запись мгновенных значений двух компонент скорости течения. Затем, по правилам Рейнольдса, определяется среднее значение скорости и отклонение от него в каждый момент времени. Эти отклонения и называются пульсациями скорости. Усредняя произведения пульсаций двух компонент скорости во времени, и, извлекая квадратный корень из модуля произведения, получают значение турбулентного напряжения в данной точке сечения потока. Максимальное значение этой величины на вертикали называют динамической скоростью.

Какой же вклад в измеренную величину динамической скорости будут вносить вихри, совершающие регулярные перелеты в потоке [17]? Триполи, совершающие три перелета в нижних слоях потока имеют максимум горизонтальной скорости, превышающий скорость фонового потока. Диполи и пары имеют горизонтальную составляющую скорости много ниже скорости фонового потока. Эти вихри длительное время находятся в средних слоях потока. В результате на вертикальном профиле средней скорости потока (2.6) наблюдаются отклонения полной скорости от скорости фонового потока, обусловленные движением вихрей.

Так как турбулентные напряжения максимальны в придонном слое потока, то рассмотрим вклад, который дают в эту величину триполи. Скорость триполей отличается от скорости фонового потока, следовательно, измерительный прибор зафиксирует отклонения скорости за время прохождения вихря через чувствительный элемент прибора. Запишем вертикальную и горизонтальную компоненты скорости триполя для его первого перелета (влиянием периодического торможения слоя пренебрегаем, начальная скорость вихря равна нулю):

$$\eta = \frac{\mu u_0}{\omega} \sin \mu t, \quad \xi = (u_y + \omega) \eta \quad (2.55)$$

Ниже на рисунке построена зависимость скорости вихря и скорости фонового потока $u = u_0 + u_y$, взятой на координате центра вихря, от вертикальной координаты. Пульсации скорости определяются разность этих величин.

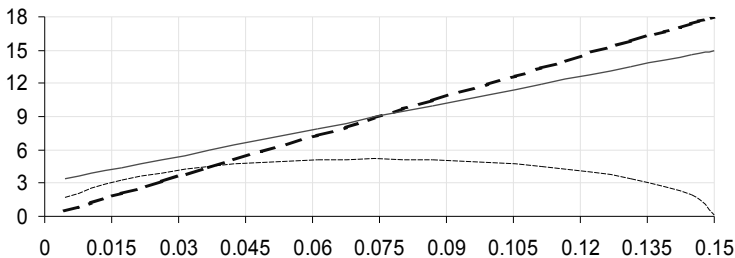


Рис. 2.24 Скорость фонового потока и скорость вихря в придонном слое
 Горизонтальная скорость вихря имеет максимум в точке максимального подъема $y=\delta$ и составляет $\xi_{\max} = 6u_0$. На этой высоте скорость основного потока равна $u(\delta)=5u_0$, как было установлено в многочисленных лабораторных и натуральных экспериментах. Максимальное значение вертикальной составляющей скорости вихря $\eta_{\max} = \sqrt{3}u_0$ достигается на половине толщины придонного слоя. Полученные выражения позволяют рассчитать отклонения скорости, возникающие в придонном слое при прохождении вихря. Они определяются разностью скорости вихря и скорости фонового течения:

$$u' = \xi - u, \quad v' = \eta \quad (2.56)$$

Рассчитаем вклад, вносимый вихрем, в величину $u'v'$ вдоль вертикали у от дна канала до δ :

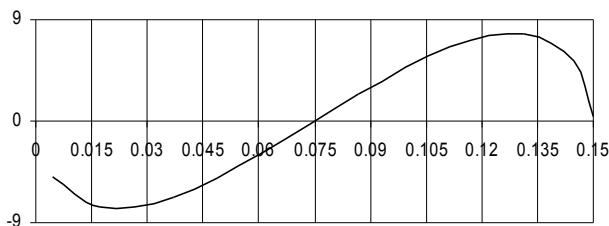


Рис. 2.25 Зависимость вклада, вносимого вихрем в величину $u'v'$, от вертикальной координаты

В нижней половине придонного слоя это произведение имеет отрицательный знак. Максимальное значение модуля этой величины в придонном слое $|u'v'|_{\max} = 0.9u_0^2$. Запишем выражение для динамической скорости и вклад в эту величину, вносимый вихрями:

$$\tau_* = \sqrt{|u'v'|_{y=0.1h}} \Rightarrow (\tau_*)_{\text{вих}} = \sqrt{|u'v'|_{\max}} = 0.95u_0 \quad (2.57)$$

Отсюда следует, что вклад в динамическую скорость составляет величину близкую придонной скорости потока. Как же связана величина u_0 с максимальной скоростью течения? Обратимся к данным, приведенным выше на рис.2.7.

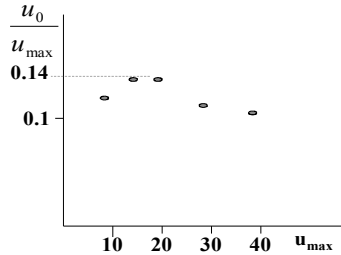


Рис. 2.26 Отношение придонной скорости к максимальной (по рис.2.7)

В соответствии с приведенными данными отношение придонной скорости к максимальной скорости потока лежит в интервале: $0.1 < \frac{u_0}{u_{\max}} < 0.14$. Тогда, учитывая (2.57), вклад вихрей в динамическую скорость определяется интервалом значений:

$$0.095 < \frac{(\tau^*)_{\text{вих}}}{u_{\max}} < 0.13 \quad (2.58)$$

Полученный интервал значений очень близок интервалу, полученному для динамической скорости течения в прямых каналах в многочисленных экспериментах и натуральных наблюдениях. Это возможно в том случае, если часть регистрируемых в экспериментах пульсаций скорости, обусловлена цилиндрическими вихрями.

Реальный вклад вихрей оказывается несколько меньше указанных значений. Рассчитаем время прохода вихря через измеритель скорости τ . Ниже на схеме показан измеритель скорости и вихрь, который, перемещаясь вдоль своей траектории.

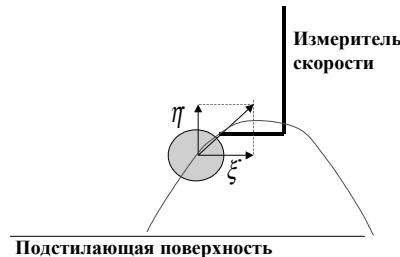


Рис. 2.27 Схема прохода вихря через чувствительный элемент измерителя скорости

$$\tau = \frac{2a}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{0.7\delta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \quad (2.59)$$

Среднее значение исследуемой величины турбулентного напряжения за время между двумя вылетами вихрей T составляет:

$$\overline{u'v'} = \pm |u'v'|_{\max} \frac{\tau}{T} \quad (2.60)$$

Ниже приведена схема, поясняющая процесс усреднения турбулентного напряжения по времени.

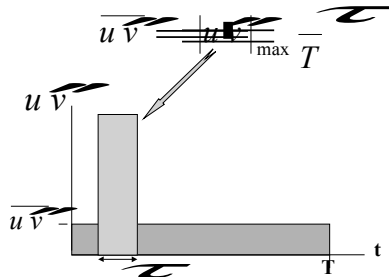


Рис. 2.28 Схема усреднения по времени вклада вихря в турбулентное напряжение.

Если отношение интервалов времени равно единице (время пролета вихря равно периоду отрыва вихрей), то получится максимальная величина турбулентного напряжения. Это соответствует большим градиентам скорости фонового течения. При стремлении периода вылета вихрей к бесконечности величина турбулентного напряжения уменьшается до нуля. Это происходит тогда, когда продольный градиент скорости равен нулю, и вихри не формируются. Для таких потоков величина динамической скорости не превышает 1% от величины максимального значения средней скорости. Отличие этих течений демонстрирует следующий график.

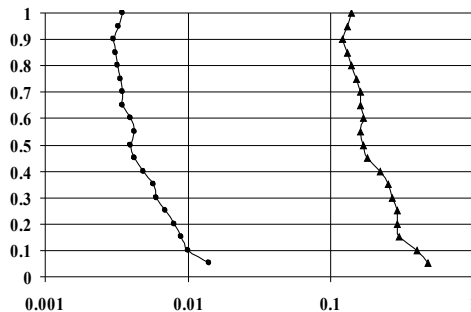


Рис. 2.29 Зависимость интенсивности пульсаций скорости от вертикальной координаты в замедляющемся и равномерном потоках. Интенсивность пульсаций определяется как

$$D = \frac{\sqrt{\sum (u_{пол} - \bar{u}_{пол})^2}}{N - 1} \text{ [см/с]}$$

Здесь N количество точек в записи, сделанной на данном горизонте.