

ГЛАВА 4 ВОЛНЫ НА ПОВРХНОСТИ ПОТОКА ВОДЫ

§1 ИСТОРИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

Во многих экспериментальных исследованиях руслового процесса было замечено наличие волновых явлений на поверхности воды, когда происходила интенсивная деформация дна. Начиная с Блазиуса (*Blasius H*), большинство исследователей полагали, что деформация дна определяется в первую очередь числом Фруда – параметром, который определяет характеристики волн на поверхности воды:

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}}, \quad (4.1)$$

где u – максимальная скорость потока, h – глубина потока, g – ускорение силы тяжести. Этот параметр возникает при переходе к безразмерным переменным в волновых уравнениях и входит в дисперсионное соотношение.

Блазиус в 1910 году [38] проводил эксперименты в лотке глубиной 5.5 см при значениях скорости течения, не превышающих 60 см/с. Выяснено, что критерий известный как число Фруда, является определяющим для характеристик донных гряд. Этот вывод подтвержден результатами большинства более поздних исследований.

Жильберт (*Gilbert G.* 1914) [39] работы выполнял в специальной лаборатории горного факультета Калифорнийского университета в период с 1908 по 1912 годы. Опыты проводились в пяти лотках длиной от 4 до 44 м, шириной от 7 до 60 см. Размер донных частиц колебался от 0.3 до 5 мм. Скорость потока менялась в широких пределах, а число Фруда принимало значения от самых маленьких, при которых не происходило образование гряд, до критических значений $Fr = 1$. При $Fr < 1$ важной характеристикой гряд являлось медленное их смещение вниз по потоку. Авторы называли гряды "дюнами". При числе Фруда $Fr = 1$ был обнаружен срыв гряд. При числах Фруда $Fr > 1$ был обнаружен совершенно другой тип гряд: эти гряды медленно смещались вверх по потоку. Такие гряды были названы "анти-дюнами". Авторы обратили внимание, что в тех экспериментах, в которых появлялись гряды на дне, на поверхности потока наблюдались четко выраженные неподвижные волны.

Кондратьев Н.Е., Макринова О.В. в 1953 году [40] проводили наблюдения на канале с большим уклоном дна в процессе его саморазмыва (нестационарный поток). В трехкилометровой зоне наблюдений были участки с относительно спокойным течением воды, на которых при числах Фруда $Fr < 1$ образовывались обычные гряды. Поток был слабо насыщен наносами, имел прозрачную воду, через которую просматривались крупные песчаные гряды на дне. Были замечены мощные восходящие токи, насыщенные наносами и заканчивающиеся на поверхности "блинообразными" припухlostями. Выбрасывались со дна песчинки размером до 2-3 мм. На других участках с максимальными уклонами дна при пуске воды числа Фруда превышали единицу. Там была замечена система неподвижных волн на поверхности воды, а область, занятая грядой, смещалась вверх по потоку. Результаты аналогичных наблюдений А.Н. Ляпина в природных потоках при числах Фруда $Fr > 1$ опубликованы в работе [41].

Эксперименты и натурные наблюдения, проделанные при скорости течения $u > 23.1$ м/с в каналах с размываемым дном, позволили установить, вместо параллельных гряд на дне образуются сложные формы. *Белостоцкий Н.* в 1935 году, анализируя натурные данные, показал, что крупные гряды на дне рек трехмерны и расположены в шахматном порядке, напоминая рыбью чешую [42]. Основные гряды большого размера образованы в половодье при максимальных числах Фруда. На этих грядах в межень (период малых расходов воды) возникают более мелкие гряды.

Шарапкина Н С (1958-1960) [43] детально исследовала роль образования гряд в процессе формирования речных русел. Опыты проводились на русловых площадках размером 6х30 и 6х60м, представляющие собой земляные лотки с гидроизоляцией из толя. Было установлено, что процесс формирования русла заключается в переходе от прямого плоского русла к грядковому рельефу вплоть до "побочней". Так принято называть длинные трехмерные гряды, поперечный размер которых превосходит ширину потока, расположенные в шахматном порядке. Аналогичные результаты были получены в работах *А.Ф.Кудряшова* (1960), *О.В.Андреева* (1958).

Kinoshita R. 1957.[45] анализирует экспериментальные и натурные данные образования гряд и излучин рек. Им были рассмотрены более 30 рек восточной части Японии. Показано, что большие гряды образуются во время паводков. Гряды образуются в реках с песчаным и гравелистым дном при больших и малых скоростях течения. Значительное развитие гряд наблюдается на участках рек, где имеется тенденция к повышению дна, на которых велики перепады скорости вдоль по течению.

Приведенные экспериментальные данные показывают, что при наиболее интенсивных деформациях русла, на поверхности потока наблюдается система волн. В докторской диссертации *С.М. Анциферова* приведено большое количество экспериментальных данных, показана связь возникновения донных образований с параметрами потока и волн. Определяющими критериями являются числа Фруда, Рейнольдса, характер грунта и др. Для прогноза размыва дна потоками воды используются эмпирические методы расчета, дающие удовлетворительные результаты, если применяются для тех же условий, в которых были получены. Нередко решение этой задачи невыполнимо, особенно для крупных, глубоких рек: числа Рейнольдса получаются в лаборатории значительно меньшими, а Фруда большими. Отсутствие физического механизма формирования гряд обуславливает существование множества эмпирических формул для прогноза процесса [31].

В работе [45] была проведена проверка эмпирических методов [46], [47] для Амазонки и Миссисипи. Были обнаружены значительные расхождения расчетных и натуральных данных сразу по нескольким параметрам. В работе [48] проверены методы [46], [47], [49 – 51] для 414 крупных и 535 средних рек и каналов. Минимальная относительная ошибка при расчете концентрации взвеси обнаружена для метода [46] и составила 50%, максимальная - для метода [47] 165%. Остальные параметры отличаются от измеренных значений примерно на такую же величину. Существующие пакеты программ для расчета размыва дна основаны на тех же методах. Значительное различие измеренных и рассчитанных параметров показывает, что проблема прогноза деформации русла до сих пор актуальна.

§2 ВОЛНЫ С НЕПОДВИЖНЫМИ ГРЕБНЯМИ

Впервые влияние волн с неподвижными гребнями на деформацию русла детально было изучено на кафедре физики моря и вод суши физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Первая публикация была сделана в 1986 году [52]. Дальнейшее развитие исследований изложено в работах [53-55].

Как было отмечено многими исследователями, на поверхности потока воды, формирующего гряды на дне, наблюдаются волны, гребни которых не двигаются. Известно, что группа таких волн возникает при движении потока жидкости в канале с препятствием на дне или в канале с наклонным дном. Волны бегут вверх по потоку. *Фазовая* скорость волн (скорость перемещения постоянной фазы, например, гребня волны) близка скорости потока по модулю и направлена вверх по течению. Существует единственная синусоидальная волна, фазовая скорость которой точно равна по модулю скорости потока. Именно эта волна оказывается неподвижной.

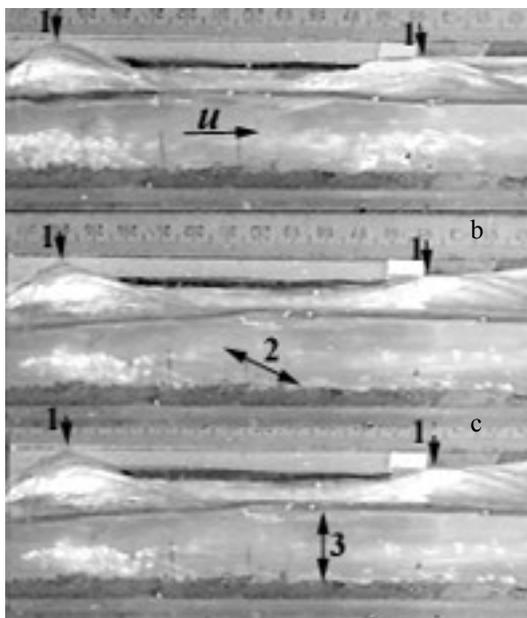


Рис. 4.1 Последовательные кадры видеозаписи течения потока воды, скорость которого меняется в направлении движения. На поверхности потока видны неподвижные гребни волн, отмеченные стрелками. 1 – гребни волн, 2 – дно, 3 – глубина воды.

Как возникают такие волны? Для того, чтобы лучше понять этот процесс, представим себе, что на поверхности неподвижной воды мы каким-то предметом, создаем возмущение, двигая предмет вдоль поверхности со скоростью U . В результате возникает волна, гребень которой бежит в направлении перемещения предмета с той же скоростью. Добавим, что предмет должен перемещаться в воде со скоростью $U > 23.1$ см/с. Пусть неподвижная система координат будет связана теперь с движущимся предметом и бегущей за ним волной. В этой системе

координат вода будет двигаться с той же скоростью, с которой двигался предмет, но в противоположном направлении. Так как вода несжимаема в рассматриваемых пределах скорости, предмет, возбуждающий волну можно опустить на дно канала. Пусть этим предметом будет ступенька на дне. Ступенька также будет генерировать волну, привязанную к ступеньке. Возбуждается самая обычная бегущая волна, но бежит она вверх по потоку. Поток сносит волну с той же скоростью в противоположном направлении. В результате гребни волны оказываются неподвижными.

Реально в эксперименте при движении потока над ступенькой возникает не одна монохроматическая волна, а группа волн – ряд волн, длины которых лежат в узком диапазоне, а амплитуды быстро убывают к границам этого интервала:

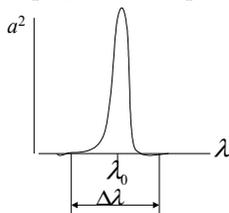


Рис. 4.2 Распределение амплитуд в группе волн

Волны на воде обладают *дисперсией*: их фазовая скорость зависит от длины. Волна максимальной амплитуды в группе – единственная монохроматическая волна, которая имеет скорость по модулю равную скорости потока. Именно эту волну мы и видим, как неподвижную синусоидальную деформацию водной поверхности.

Линейную теорию волн с неподвижными гребнями предложил Лайтхилл [56]. Он показал, что дисперсионное соотношение для волн на потоке воды в канале с наклонным дном совпадает с дисперсионным соотношением волн на горизонтальном слое неподвижной воды. Отличие решений заключается в том, что для волн с неподвижными гребнями получено выражение, связывающее амплитуду волны с углом наклона дна. В линейной теории волн на слое неподвижной жидкости можно получить только дисперсионное соотношение, а амплитуда остается неопределенной бесконечно малой величиной.

Рассмотрим канал с наклонным дном, считаем, что угол наклона мал. В канале течет плоский поток, скорость которого не меняется по вертикали.

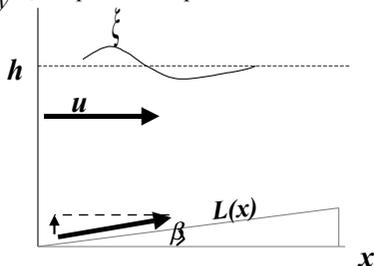


Рис. 4.3 Волновые возмущения на поверхности потока в канале с наклонным дном. На дне вертикальная составляющая скорости отлична от нуля.

На поверхности воды отклонения от невозмущенного уровня обозначим ξ , функция $L(x)$ – описывает форму дна. У дна скорость потока направлена параллельно поверхности дна и, в связи с этим, имеет вертикальную составляющую, так как дно наклонное. Запишем граничное условие на дне для вертикальной скорости η :

$$\eta = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = uf(x) \quad (4.2)$$

Здесь $f(x) = \frac{dL}{dx}$ (считаем, что поток плоский), φ - потенциал скорости. Если дно представляет собой наклонную плоскость, то $\eta = uf(x) = u \sin \beta$.

Линеаризованная задача для стационарных волн в канале с наклонным дном записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \xi_t - \varphi_y(x, h, t) = 0 \\ \text{Fr}^2 \varphi_t(x, h, t) + \xi = 0 \\ \varphi_y(x, 0, t) = f(x) \end{cases} \quad (4.3)$$

Здесь выполнена нормировка переменных на глубину потока h и скорость натекающего потока u . При переходе к безразмерным переменным в задаче появляется параметр – число Фруда $\text{Fr} = \frac{u}{\sqrt{gh}}$. Основным уравнением для

потенциала скорости возмущений служит первое уравнение системы (4.3), которое представляет собой уравнение неразрывности, совпадающее с уравнением Лапаласа для однородной несжимаемой жидкости. Второе и третье уравнения – кинематическое и динамическое условия для свободной поверхности. Четвертое уравнение – кинематическое условие на дне. Общий вид решения для отклонения свободной поверхности ξ , определяется уравнением Лапаласа и имеет вид гармонических колебаний:

$$\xi = ae^{i(\omega t + kx)} \quad (4.4)$$

Вертикальная скорость смещения свободной поверхности получается из (4.4) при дифференцировании по времени и в обобщенном виде может быть записана:

$$\eta = \partial \xi / \partial t = aB(\omega, k)e^{i(\omega t + kx)} \quad (4.5)$$

Скорость η отличается от смещения ξ множителем $B(\omega, k)$, определяющим зависимость частоты ($\omega = kc$), от волнового числа ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$), где c – фазовая скорость. Таким образом, $B(\omega, k)$ представляет собой дисперсионное соотношение. Используя (4.5), выразим смещение поверхности (4.4) через скорость η :

$$\xi = \frac{\eta}{B(\omega, k)} \quad (4.6)$$

Вертикальная скорость должна удовлетворять граничному условию на дне, учитывая, что поток однороден по вертикали:

$$\eta = uf(x) \quad (4.7)$$

Представим функцию $f(x)$ в виде ряда Фурье:

$$\eta = u \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk, \quad \text{где} \quad F(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx \quad (4.8)$$

Возмущения, удовлетворяющие граничному условию на дне, будут иметь вид:

$$\xi = \frac{\eta}{B(\omega, k)} = u \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)e^{ikx}}{B(\omega, k)} dk \quad (4.9)$$

В выражении (4.9) учтено, что фазовая скорость неподвижной волны должна по модулю совпадать со скоростью потока (иначе волна не будет неподвижной):

$$\omega = kc = ku \quad (4.10)$$

Предположим, что функция $B(\omega, k)$ при значениях параметров (ω_0, k_0) равна нулю. В этом случае интеграл в выражении (4.9) содержит особую точку. Для какого же случая справедливо условие

$$B(\omega_0, k_0) = 0 \quad (4.11)$$

В соответствии с выражением (4.7) вертикальная скорость возмущения на дне обращается в ноль, если справедливо условие (4.11). Такая ситуация реализуется, если дно будет горизонтальным. Для слоя воды над горизонтальным дном дисперсионное соотношение известно:

$$B(\omega_0, k_0) = i\omega_0^{-1}(\omega_0^2 \operatorname{ch} k_0 h - gk_0 \operatorname{sh} k_0 h) = 0 \quad (4.12)$$

Оценка интеграла в выражении для отклонения свободной поверхности (4.9) будет определяться вычетом в особой точке $B(\omega_0, k_0) = 0$.

Решение задачи для возмущения на потоке воды в канале с наклонным дном получено Лайтхиллом:

$$\xi = \frac{4\pi F(k_0)e^{ik_0 x} \operatorname{sh}(k_0 h)}{\operatorname{sh}(2k_0 h) - 2k_0 h} \quad (4.13)$$

Для канала с плоским наклонным дном получаем, что амплитуда волны пропорциональна углу наклона дна к горизонту. Дисперсионное соотношение соответствует задаче с горизонтальным дном. Запишем его для гравитационных волн в виде (без учета воздействия сил поверхностного натяжения):

$$\frac{u^2}{gh} = \frac{\operatorname{th}(kh)}{kh}, \quad \text{или} \quad \operatorname{Fr}^2 = \frac{\operatorname{th}(kh)}{kh} \quad (4.14)$$

В выражении (4.14) вместо фазовой скорости волны записана скорость потока, так как нас интересует волна с неподвижными гребнями, для которой эти величины равны по модулю

$$\vec{c} = -\vec{u} \quad (4.15)$$

В соответствии с (4.14) отношение длины неподвижной волны к глубине определяется только числом Фруда.

§3 ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ

Второе выражение (4.14) представляет дисперсионное соотношение для гравитационных волн на слое воды конечной глубины как зависимость числа Фруда от отношения λ/h . Для волн, длина которых много больше глубины потока, дробь в правой части дисперсионного соотношения стремится к единице ($Fr=1$). Скорость таких *длинных* волн определяется только глубиной слоя воды и не зависит от длины волны $c = \sqrt{gh}$. В отсутствии дисперсии, в потоке со ступенькой на дне все возникающие длинные волны будут иметь одну и ту же скорость, равную по модулю скорости потока. Складываясь, волны дадут сложную деформацию поверхности воды. В результате интерференции волн синусоидальная деформация водной поверхности наблюдаться не будет. Таким образом, существует верхняя граница значения скорости потока, при которой образуются гравитационные синусоидальные волны с неподвижными гребнями – это скорость длинных волн:

$$u_{\max} = \sqrt{gh} \quad (4.16)$$

Для коротких капиллярных волн в системе уравнений следует учесть помимо силы гравитации еще и поверхностное натяжение. Дисперсионное соотношение в этом случае можно получить заменой

$$g \Rightarrow g + \rho^{-1}k^2T \quad (4.17)$$

Здесь T – поверхностное натяжение, для воды $T=0.074$ н/м. Дисперсионное соотношение для волн на глубокой воде записывается следующим образом:

$$c = \sqrt{g \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{T}{\rho}} \quad (4.18)$$

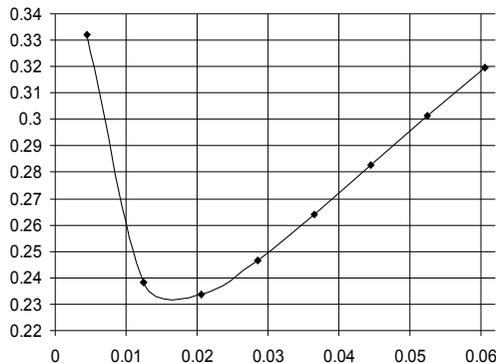


Рис. 4.4 График дисперсионного соотношения для линейных волн на воде. Вид функции $c(\lambda)$ (4.18) показывает, что существует такая длина волны λ , при которой фазовая скорость волн имеет минимальное значение – c_{\min} . Значение минимальной скорости волн определяется величиной поверхностного натяжения и плотности жидкости. Для волн с неподвижными гребнями на потоке воды это значит, что существует минимальное значение скорости потока, при котором могут существовать эти волны. Для воды эта величина равна

$$u_{\min} = 23.1 \text{ см/с} \quad (4.19)$$

При этой скорости потока длина волны равна $\lambda = 1.7 \text{ см}$.

На следующей фотографии видна резкая граница на поверхности воды, между областью, где скорость течения выше минимальной, и областью где $u_{\min} > 23.1 \text{ см/с}$. В верхней части кадра скорость меньше критической: видна зеркальная поверхность воды. Внизу скорость течения выше критической, и мы видим параллельные гребни неподвижных волн.



Рис. 4.5 Скорость течения реки близка u_{\min} , при которой образуются волны с неподвижными гребнями. 1 – волновая поверхность. В верхней части кадра – зеркальная поверхность воды.

Почему же фазовая скорость волн увеличивается с ростом длины волны для гравитационных волн и уменьшается для капиллярных волн? Волны возникают на поверхности воды при импульсном воздействии скачка давления над ступенькой. Локальный объем жидкости, получивший момент количества движения, мог бы сохранить его, двигаясь вверх, если бы не возвращающие силы: гравитации для длинных волн и поверхностного натяжения для капиллярных волн.

Инерция и гравитация определяются массой колеблющейся жидкости, а масса зависит от толщины слоя воды, в котором эти колебания существуют. Глубина слоя пропорциональна длине волны. Кроме того, глубина слоя растет с увеличением амплитуды волны.

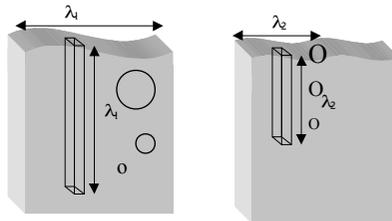


Рис. 4.6 Глубина проникновения волновых возмущений. Кружками показаны траектории частиц.

Чем больше длина волны, тем больше масса жидкости, охваченной колебаниями. С увеличением массы столба жидкости, охваченного колебаниями, увеличивается инерция и сила гравитации, действующие на объем. В результате фазовая скорость волны, определяемая этими силами, растет с увеличением длины волны.

Что же будет в том случае, когда длина волны превышает глубину бассейна, и колеблется весь слой жидкости? Будет ли в этом случае изменение длины волны приводить к изменению массы колеблющейся жидкости? Очевидно, что нет, так как, если колеблется весь слой, то высота столба жидкости останется неизменной при увеличении длины волны. В этом случае дисперсия наблюдаться не будет. Такие волны принято называть *длинными волнами*, а воду – *мелкой водой*.

Для капиллярных волн возвращающей силой является сила поверхностного натяжения. Эта сила имеет максимальную величину в слое, толщина которого близка диаметру молекул. При увеличении длины волны, с увеличением толщины слоя колеблющейся жидкости, действие поверхностного натяжения уменьшается. В результате фазовая скорость капиллярной волны, определяемая силой поверхностного натяжения, уменьшается с увеличением длины волны.

Можно записать дисперсионное соотношение для безразмерных величин, выбрав в качестве нормировочных параметров скорость длинных волн и глубину слоя воды. В этом случае по оси абсцисс будет отложено отношение λ/h , а по оси ординат – число Фруда. Если минимальная скорость потока, при которой образуются волны с неподвижными гребнями, определяется только поверхностным натяжением жидкости при постоянной плотности, то минимальное число Фруда будет зависеть от глубины потока:

$$Fr_{\min} = \frac{u_{\min}}{\sqrt{gh}} \quad (4.20)$$

Ниже на рисунке представлено дисперсионное соотношение для слоя воды глубиной 5 см.

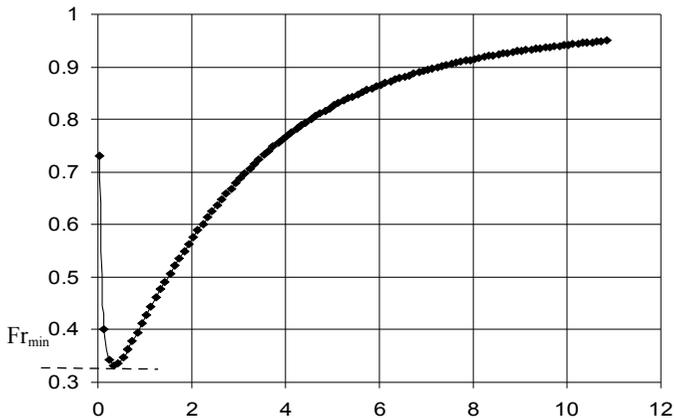


Рис. 4.7 Дисперсионное соотношение для волн на поверхности воды для слоя глубиной 5см.

С уменьшением глубины потока минимальное число Фруда увеличивается. Когда минимальное число Фруда достигает единицы (скорость потока равна скорости длинных волн), дисперсия исчезает, а синусоидальная волна с неподвижными гребнями наблюдаться не будет. Минимальное число Фруда достигает единицы при глубине потока:

$$h_{\min} = \frac{u_{\min}^2}{g} \quad (4.21)$$

Расчеты по (4.21) позволяют найти минимальную глубину потока, на поверхности которого возникают гравитационные синусоидальные волны с неподвижными гребнями: $h_{\min} = 0.54$ см.

В соответствии с дисперсионным соотношением (рис. 4.7) каждому числу Фруда течения, удовлетворяющему условию:

$$\frac{u_{\min}}{\sqrt{gh}} < Fr < 1 \quad (4.22)$$

соответствует две волны с неподвижными гребнями: гравитационная волна и короткая капиллярная волна. Эксперименты в каналах со ступенькой на горизонтальном дне показывают, что эти волны наблюдаются в разных областях потока. Гравитационная волна видна ниже ступеньки, а капиллярная – выше.

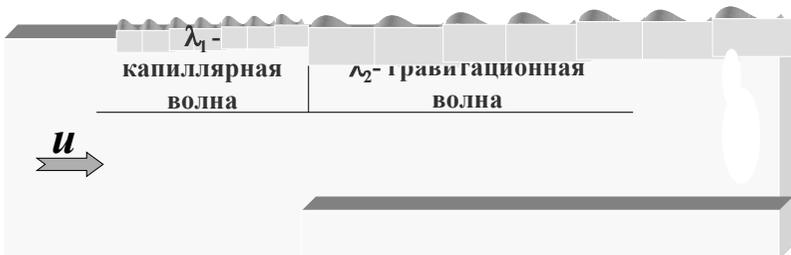


Рис.4.8 Волновая поверхность в потоке со ступенькой

Такое пространственное разделения волн связано с еще одной важной характеристикой волн на воде – групповой скоростью. Выше уже обсуждалось возбуждение волн на потоке над ступенькой и отмечалось, что в эксперименте возбуждается группа волн. Волны в группе сосредоточены в узком интервале длин волн. Так как в интересующем нас диапазоне волны обладают дисперсией, то волны в группе обладают разной фазовой скоростью. Из-за дисперсии волны смещаются относительно друг друга. Существуют области, где волны близкой длины находятся в фазе. В этой области происходит усиление волн. В других зонах волны оказываются в противофазе, здесь волны гасят друг друга. В эксперименте волна максимальной амплитуды наблюдается в области усиления волн. Эта область перемещается со скоростью, отличной от фазовой скорости волны. Такая скорость U называется *групповой* скоростью и определяется следующим образом:

$$U = \frac{d\omega}{dk}$$

$$\omega = kc$$

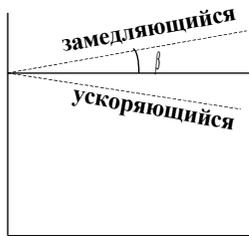
$$\frac{d(kc)}{dk} = c + k \frac{dc}{dk} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \quad (4.23)$$

$$U = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}$$

Из последнего выражения (4.23) следует, что для капиллярных волн, для которых фазовая скорость убывает с увеличением длины волны (рис.4.4), групповая скорость больше фазовой. Для гравитационных волн – групповая скорость меньше фазовой, так как фазовая скорость увеличивается с ростом длины волны. Область, где волны усиливают друг друга, для гравитационных волн движется медленнее потока, а для капиллярных волн – быстрее потока. В результате капиллярные волны всегда оказываются выше по течению от источника возмущений, а гравитационные волны – ниже.

§4 НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

Дисперсионное соотношение (4.14) определяет основные свойства волн с неподвижными гребнями в потоке переменной глубины, пока амплитуда волны достаточно мала и справедливо линейное приближение задачи. В соответствии с (4.13) амплитуда волны растет пропорционально углу наклона дна или продольному градиенту скорости течения. Для потока в канале с горизонтальным дном продольный градиент скорости можно определить по наклону невозмущенной (волнами) поверхности воды:



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \pm \frac{u}{h} \operatorname{tg} \beta$$

(4.24)

В решении линейной задачи при увеличении продольного градиента скорости в потоке растет только амплитуда волны, а длина волны не зависит от градиента скорости (4.14). Это приводит к быстрому росту *крутизны* волны – отношению амплитуды волны к ее длине. Часто используют в качестве крутизны волны

параметр ak , где a – амплитуда волны, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число. Крутизна волны

представляет собой малый параметр, определяющий границы применимости линейной задачи. Пока она достаточно мала, можно пренебречь произведениями малых величин. Начиная с некоторого значения крутизны волны, следует решать нелинейную задачу. Сохранение в волновых уравнениях произведений малых величин приводит к совершенно новым эффектам. Впервые нелинейную задачу рассмотрел Стокс в 1847 году. Он представил возмущение в виде ряда по степеням крутизны волны:

$$\xi = a \cos(kx - \omega t) + \frac{1}{2} ka^2 \cos 2(kx - \omega t) + \frac{3}{8} k^2 a^3 \cos 3(kx - \omega t) \dots \quad (4.25)$$

Равномерная сходимость ряда обеспечивается тем, что частота зависит от крутизны волны в соответствии с дисперсионным соотношением:

$$\omega^2 = gk + gk(ak)^2 + \dots \quad (4.26)$$

В нелинейной задаче сохраняются произведения малых величин, что приводит к появлению новых эффектов в волновых явлениях. Линейная система (4.3) содержит как основное – уравнение неразрывности, имеющего вид уравнения Лапласа, если скорость можно выразить через потенциал φ . В нелинейной задаче правая часть этого уравнения уже не будет равна нулю.

$$\Delta \varphi = L_1(\varphi^2) + L_2(\varphi^3) + \dots \quad (4.27)$$

где L_n – линейные операторы, имеющие порядок $(ak)^n$. В простейшем случае, когда потенциал скорости имеет вид

$$\varphi_1 = a_1 \sin(\omega t - k_1 x), \quad (4.28)$$

в операторах при больших степенях потенциала скорости появятся моды вида:

$$\varphi_n = a_n \sin(n\omega t - k_n x) \quad (4.29)$$

Если в правой части сохраняется только квадратичный член ($n=2$), то появляется новая волна, длина которой составляет половину исходной. Таким образом, если крутизна волны достаточно велика, то происходит генерация новых более коротких волн.

Если дисперсия отсутствует, то основная волна и новые моды имеют одинаковые фазовые скорости. Тогда интерференция волн приводит к искажению синусоидального профиля волны, как показано на рисунке.



Рис. 4.9 Сложение волн в системе без дисперсии. Передний фронт волны становится круче, а задний – положе.

Длинные волны испытывают такие деформации фронта при малых значениях крутизны волны, так как дисперсией не обладают. Увеличение крутизны переднего склона волны приводит к усилению нелинейных эффектов. Таким образом, в системе волн без дисперсии нелинейные эффекты могут накапливаться. При очень большом наклоне поверхности воды волна может обрушиться. Это явление наблюдается при выходе морских волн на берег, когда длина волны превосходит глубину слоя воды, а число Фруда близко единице. Если на потоке

воды возникают неподвижные длинные волны с крутым передним склоном, то они называются *гидравлическим прыжком*. Гребень волны, обрушаясь, создает постоянную циркулирующую жидкости.

Существуют стабильные волны с крутым передним склоном. Стабилизирующее влияние на волновой профиль крутых акустических волн оказывают диссипативные процессы, которые начинают сказываться, когда наклон переднего склона волны приближается к вертикальному углу. Устойчивые волны с подобным профилем называются *ударными*.

Для длинных волн со слабой дисперсией, именно дисперсия играет роль стабилизатора волнового профиля. В этой области чисел Фруда ($Fr < 1$) существуют устойчивые волны, имеющие стационарный профиль, – *солитоны* или *уединенные* волны. Такие волны имеют профиль в виде уединенного возвышения водной поверхности.

Если волны обладают дисперсией, то при малых значениях крутизны волны основная гравитационная волна и возникающие гармоники будут двигаться с разной скоростью. В этих условиях волны разной длины взаимодействовать не могут. Однако при увеличении крутизны волны глубина и масса колеблющегося слоя воды увеличиваются, что приводит к снижению влияния дисперсии. Если нелинейные эффекты оказываются сравнимы с дисперсией, то волны будут взаимодействовать.

§5 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН

Взаимодействие диспергирующих волн малой конечной амплитуды возможно при выполнении некоторых условий. Рассмотрим три волны малой амплитуды, которые можно записать в виде [57]:

$$p = \sum_{j=1}^3 \left[a_j(\varepsilon \omega t) e^{i(k_j x - \omega_j t)} + a_j^*(\varepsilon \omega t) e^{-i(k_j x - \omega_j t)} \right] \quad (4.30)$$

для малых значений ε . Пусть волны удовлетворяют решению нелинейного уравнения с учетом квадратичной нелинейности:

$$L(p) = \varepsilon N(p) \quad (4.31)$$

Подставляем (4.30) в (4.31) и учитываем, что

$$L(e^{i(kx - \omega t)}) = 0 \quad (4.32)$$

При дифференцировании в левой части получаем члены вида:

$$\varepsilon \omega_j \left[a_j(\varepsilon \omega t) e^{i(k_j x - \omega_j t)} + a_j^*(\varepsilon \omega t) e^{-i(k_j x - \omega_j t)} \right] + \varepsilon^2 (\dots) \quad (4.33)$$

В правой части квадратичные члены дают выражения вида:

$$\begin{aligned} & a_j a_i e^{i(\chi_j + \chi_i)}, a_j a_i^* e^{i(\chi_j - \chi_i)}, \\ & a_j^* a_i e^{i(-\chi_j + \chi_i)}, a_j^* a_i^* e^{i(-\chi_j - \chi_i)} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\chi = kx - \omega t$$

Если умножить результирующее уравнение на величину $e^{-i\chi_j}$, при фиксированном значении j , то после суммирования в правой части остаются члены, удовлетворяющие условию:

$$\chi_1 = \pm \chi_2 \pm \chi_3 \quad (4.35)$$

При выполнении фазового условия (4.35), в правой части уравнения останутся члены порядка $a_1 a_2$. Таким образом, получено условие взаимодействия волн малой конечной амплитуды. Перепишем (4.35) для частот $\omega_j = \omega_j(\vec{k}_j)$ и волновых чисел в виде:

$$\begin{aligned} \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 &= 0 \\ \vec{k}_1 \pm \vec{k}_2 \pm \vec{k}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Условия (4.36) называют условиями резонанса второго порядка или условиями *фазового синхронизма*. При выполнении условий фазового синхронизма возможно взаимодействие волн малой конечной амплитуды, обладающих свойством дисперсии. Условия (4.36) выполняются в том случае, когда все три волны имеют одинаковые фазовые скорости. Линейное дисперсионное соотношение определяет две волны с равными значениями фазовой скорости: на гравитационной и капиллярной ветви. Учитывая этот факт, посмотрим, как же можно найти три волны, удовлетворяющие (4.36) [58]. На рисунке схематично показано дисперсионное соотношение $\omega = \omega(\vec{k})$. Кривая, изображенная сплошной линией, имеет точку перегиба, отделяющую гравитационные и капиллярные волны. Построим еще один рисунок в штриховых линиях, повторяющий основной рисунок, показанный сплошными линиями (оси координат вместе с дисперсионной зависимостью). Будем перемещать новый рисунок параллельным переносом так, чтобы начало координат скользило вдоль сплошной дисперсионной кривой. Существует область параметров, для которой сплошная и штрихованная дисперсионные кривые пересекутся дважды, как показано на рисунке.

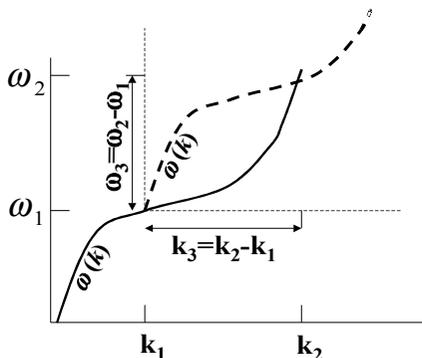


Рис. 4.10 Условие фазового синхронизма для взаимодействия трех волн.

Две точки пересечения дисперсионных кривых дадут параметры первой (k_1, ω_1) и второй (k_2, ω_2) волн, а разность волновых чисел и частот даст параметры

третьей волны. Эта третья волна также удовлетворяет дисперсионному соотношению, так как лежит на штрихованной дисперсионной кривой. Найденная тройка волн удовлетворяет как дисперсионному соотношению, так и условиям фазового синхронизма.

Где же реально взять такую третью волну, имеющую ту же фазовую скорость, что и две другие волны? Оказывается, что третья волна должна быть направлена перпендикулярно к двум начальным волнам. Это было экспериментально доказано для слоя неподвижной воды. В том случае, когда в бассейне возбуждали две волны из тройки взаимодействующих волн, на поверхности воды появлялась третья волна, вносящая поперечную модуляцию исходных волн.

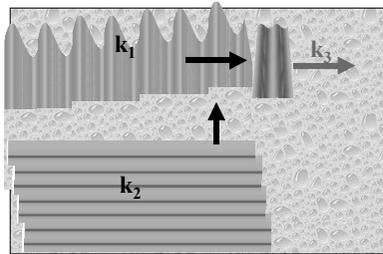


Рис. 4.11 Схема возбуждения третьей волны на неподвижном слое жидкости.

Выше мы видели, что при увеличении крутизны монохроматической волны из-за нелинейных эффектов появляются новые более короткие моды. Может ли этот процесс привести к появлению нелинейного взаимодействия волн? Это возможно, при условии, что возникнут волны, удовлетворяющие условию фазового синхронизма. Проведенные исследования крутых волн с дисперсией на слое неподвижной воды показали, что и в этом случае появляется волна с поперечной модуляцией.

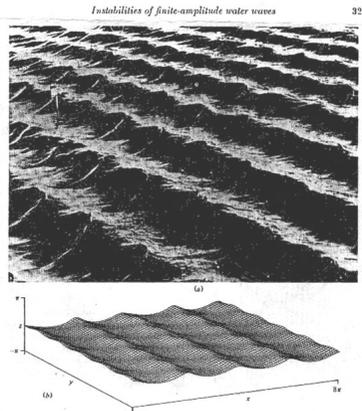


FIGURE 7. Comparison of theory and experiment for $h/A = 0.105$. (a) Photograph by Ma (1981); (b) perturbed wave (theory). The eigenfunction is normalized as in figure 3.

Рис. 4.12 Поперечная модуляция при распаде волн большой крутизны. Сравнение теории [59] с экспериментом [60]

Численное исследование [59] показало, что при достижении критической крутизны $ak = 0.31$, плоская волна на слое неподвижной жидкости распадается на более длинные волны, с поперечной модуляцией. Результаты работы проверены в экспериментах [60]. В экспериментах предельное значение крутизны устойчивой плоской волны – $ak = 0.27$ оказалась ниже теоретической. Выше на рисунке показана волновая поверхность воды, полученная при численном решении задачи и в эксперименте [60]. Расхождение результатов численного исследования и эксперимента может быть связано с отличием граничных условий. Эксперимент проводился в ограниченном канале, а численная задача решалась для бесконечного слоя жидкости постоянной глубины.

§6 НЕПОДВИЖНЫЕ ВОЛНЫ С ДИСПЕРСИЕЙ

Могут ли взаимодействовать волны с неподвижными гребнями на потоке воды, скорость которого меняется в направлении движения? Условием взаимодействия диспергирующих волн является равенство значений фазовой скорости волн. Это условие следует из условий фазового синхронизма (4.36). Кроме того, фазовая скорость волн должна совпадать со скоростью потока по модулю. Численного решения такой задачи пока не получено. Диспергирующие волны большой крутизны, существующие на потоке в виде неподвижных гребней, были исследованы экспериментально на кафедре физики моря и вод суши физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Основные результаты представлены в работах [9], [61-63].

Условием существования неподвижных волн на поверхности стационарного потока жидкости является изменение скорости потока в направлении его движения. Для линейных волн амплитуда прямо пропорциональна продольному градиенту скорости. При больших значениях продольного градиента скорости амплитуда является конечной величиной, а волна описывается решением нелинейных уравнений.

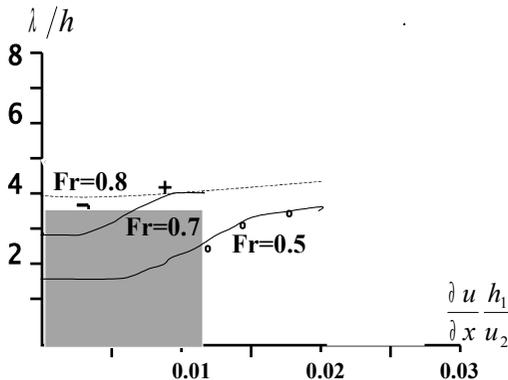


Рис. 4.13 Зависимость длины волны с неподвижными гребнями от продольного градиента скорости течения. Отрезком показан доверительный интервал для вероятности 0.67. Затемнена область, где справедливо линейное решение задачи.

Линии аппроксимируют экспериментальные значения.

Для того, чтобы выяснить особенности волн конечной амплитуды, был проведен ряд экспериментов в лабораторном потоке воды при различных

значениях продольного градиента скорости течения. Вторым параметром, который варьировался от эксперимента к эксперименту, была глубина потока. Это позволило получить параметры волн для различных чисел Фруда. Эксперименты проводились в прямом канале, скорость потока представляла собой линейную функцию продольной координаты. Результаты исследования удобно представить в виде зависимости крутизны и длины волны от угла наклона невозмущенной поверхности воды к горизонту:

$$|tg\beta| = \left| \frac{h_1}{u_2} \frac{\partial u}{\partial x} \right| \quad (4.37)$$

Длина волны нормируется на глубину потока.

Из приведенных на рис.4.13 данных следует, что для чисел Фруда $Fr < 0.8$ существует конечный интервал значений продольного градиента скорости, в котором длина волны не меняется и совпадает с решением линейной задачи (затененная область на рисунке). Вне этого интервала длина волны сначала быстро растет с увеличением продольного градиента скорости, а затем ее рост резко замедляется. С увеличением числа Фруда ширина затененной области и области, где происходит интенсивный рост длины волны с увеличением продольного градиента скорости, быстро уменьшается. Для волн со слабой дисперсией (с числами Фруда $Fr > 0.8$) длина волны слабо зависит от продольного градиента скорости.

Глубина проникновения волновых колебаний растет пропорционально не только длине волны, но и ее амплитуде. Для малых чисел Фруда участок интенсивного роста длины волны смещается в область больших значений продольного градиента скорости, по сравнению с более длинными волнами. Из-за такого смещения, волны одной длины имеют более высокую амплитуду на потоках с малыми числами Фруда, чем на потоках с большими числами Фруда.

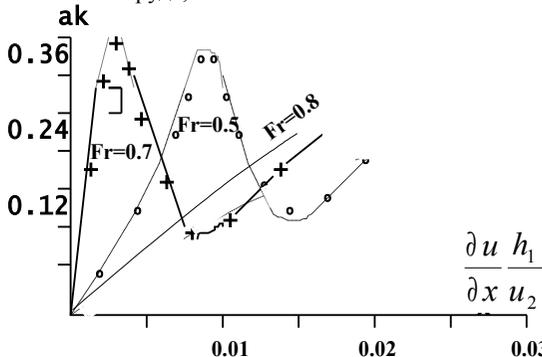


Рис. 4.14 Зависимость крутизны волн с неподвижными гребнями от продольного градиента скорости течения. Отрезком показан достоверный интервал для вероятности 0.67. Линии аппроксимируют экспериментальные значения, показанные значками.

Зависимости крутизны волны от продольного градиента скорости течения имеют максимум для потоков с числами Фруда $Fr < 0.73$. Этот максимум смещается к началу координат при увеличении числа Фруда. Для числа Фруда $Fr = 0.73$

максимум лежит на оси ординат. Существование максимума связано с тем, что длина волны при малых значениях продольного градиента скорости не меняется, а амплитуда волны быстро растет в некотором интервале значений градиента скорости. Этот интервал затенен на рис. 4.13. В области максимума крутизна волны достигает критических значений, при которых происходит распад плоской волны на длинные волны с поперечной модуляцией. Вид гребней волн до и после распада приведен на следующем рисунке.

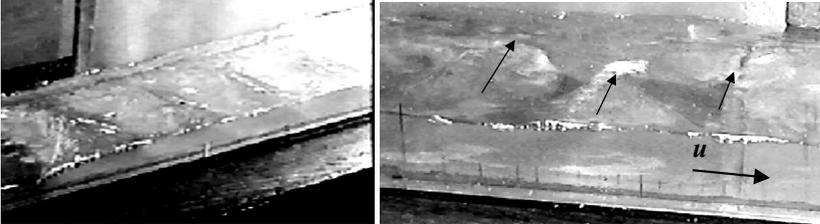
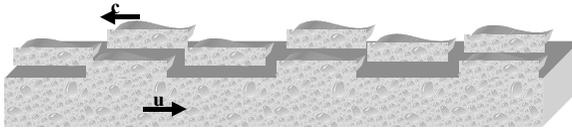


Рис.4.15 Плоские волны с неподвижными гребнями на потоке воды (слева) и волны с поперечной модуляцией после распада (справа). Стрелки показывают гребни волн, расположенные в шахматном порядке.

На правой фотографии видны гребни трехмерной волны на поверхности потока воды. Видно, что гребни волн расположены в шахматном порядке, как показано ниже на схеме.



Волны, возникающие в результате распада плоской волны k_0 большой крутизна, удовлетворяют условию фазового синхронизма и закону сохранения энергии:

$$k_0 = k_1$$

$$|k_1| = |k_2| + |k_3| \quad (4.38)$$

$$a_0^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

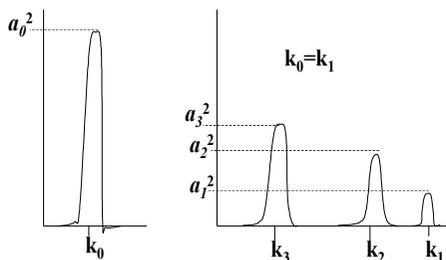


Рис. 4.16 Спектр волн перед распадом (слева) и после распада (справа).

Амплитуда начальной волны a_0 резко падает после распада до значения a_1 , а амплитуда самой длинной волны с поперечной модуляцией a_3 оказывается самой

большой. Приведенные спектры получены следующим образом. В серии экспериментов постепенно изменялось значение продольного градиента скорости течения при заданном числе Фруда. Было определено предельное значение продольного градиента, при котором существует плоская волна и построен ее спектр. Затем градиент скорости немного увеличивался и записывался спектр волн с трехмерными гребнями.

Область существования трехмерных волн показана на рис. 4.14 штриховой линией. Эксперименты показали, что предельная крутизна волны, при которой происходит распад плоской волны на длинные трехмерные волны, зависит от числа Фруда. Область существования трехмерных волн определяется крутизной волны и числом Фруда и может быть представлена в этих переменных, как показано на рис. 4.17. На рисунке область существования трехмерных волн отмечена штриховкой. В канале с закрепленным дном можно создать любую волну, параметры которой лежат в пределах указанной области, задавая необходимое число Фруда и значение продольного градиента скорости течения.

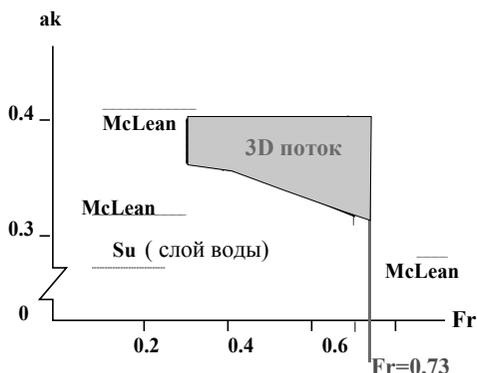


Рис. 4.17 Область существования трехмерных волн с неподвижными гребнями на потоке воды (показана штриховкой) в канале с закрепленным дном. Штриховые линии обозначают данные работ [59], [60] для слоя неподвижной воды.

С увеличением числа Фруда нижняя граница заштрихованной области понижается. Это связано с уменьшением влияния дисперсии. Справа область ограничена значением числа Фруда $Fr = 0.73$. Нижняя граница области лежит в пределах, указанных в численной работе [59] для слоя неподвижной воды. Верхняя граница области соответствует данным этой же работы и соответствует волнам с крутизной $ak = 0.41$. Существование верхней границы связано с тем, что при такой большой крутизне волн полностью преобладают нелинейные эффекты. Для таких высоких значений крутизны волны трехмерные волны не наблюдаются.

Трехмерные волны, описанные выше, появляются в результате взаимодействия нелинейных неподвижных волн с сильной дисперсией. В этом процессе основная волна взаимодействует с модами, которые появляются, когда волна становится нелинейной, а амплитуда новых мод достигает критической величины. Эксперименты показывают, что на потоках с продольным градиентом скорости существует другой вид взаимодействия диспергирующих волн

Дело в том, что в одной и той же области течения с продольным градиентом скорости существует не одна волна, а несколько волн с очень близкими характеристиками. Эти волны возникают потому, что число Фруда меняется вдоль по течению. Чем больше продольный градиент скорости, тем сильнее отличаются параметры волн. Кроме того, крутизна волн также увеличивается с ростом градиента скорости. Это создает предпосылки к взаимодействию волн. Численные исследования нелинейных волн показывают, что в области существования двух нелинейных волн с близкими характеристиками могут возникнуть так называемые дефекты или дислокации, являющиеся результатом взаимодействия волн. В работе [64] предсказано появление таких дефектов в виде солитонов или кинков.

Ниже приведена серия кадров видеозаписи, на которой виден гребень неподвижной волны на потоке воды. На верхнем кадре гребень имеет максимальную высоту. На среднем кадре высота гребня резко падает, а слева от него виден гребень другой волны, которая отделяется от основного гребня и бежит навстречу потоку. На последнем нижнем кадре основной гребень увеличивает высоту, а новая волна дальше смещена вверх по потоку. Высота основного гребня периодически меняется, но он не смещается в направлении течения.

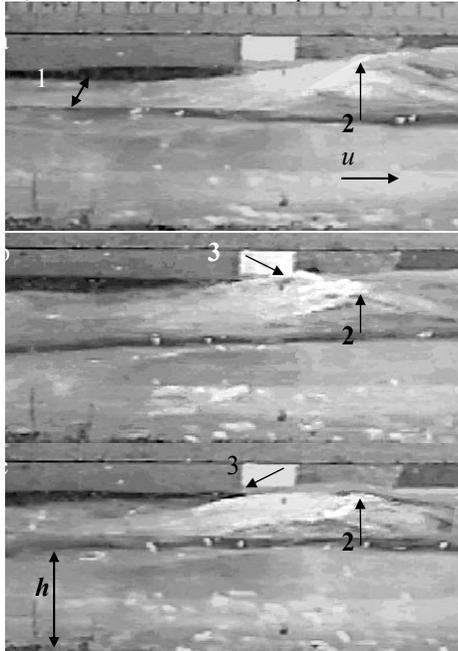


Рис.4.18 Излучение солитонов(3) гребнями неподвижной волны (2). 1 – поверхность воды, h – глубина потока.

В момент излучения высота основного гребня уменьшается, так как часть энергии основной волны тратится на генерацию новой волны. Такое явление наблюдается для неподвижных волн, крутизна которых $ak > 0.15$ при числах Фруда не

превышающих 0.8. Впервые это явление исследовано на кафедре физики моря и вод суши физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова [65].

Излучение волн происходит периодически: волна зарождается на гребне неподвижной волны, бежит вверх по потоку, сохраняя свою форму. Амплитуда основной волны в момент излучения резко уменьшается, а затем постепенно растет. Когда она достигает максимальной исходной величины, происходит излучение новой волны. Излучение волны схематично показано на рисунке.

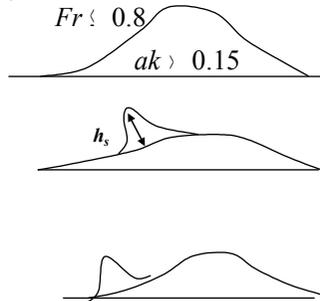


Рис. 4.19 Излучение солитона гребнем волны

Продольный профиль излученной волны хорошо описывается солитонным решением уравнения Кортевега -де Вриза.

$$y = \varepsilon \left(\operatorname{sech} \left[\left(\frac{3\varepsilon}{4h^2} \right)^{1/2} x \right] \right)^2 \tag{4.39}$$

Здесь $\varepsilon = \frac{h_s}{h}$, h_s – высота излучаемой волны, h –глубина потока с невозмущенной поверхностью. Скорость волны превышает скорость длинных волн $v = \sqrt{gh}(1 + \varepsilon)$, в результате чего в потоках с числом Фруда $Fr < 0.8$ солитон убегает вверх по течению.

Период излучения волны уменьшается, а высота увеличивается с ростом крутизны основной волны с неподвижными гребнями. Экспериментальные зависимости для числа Фруда $Fr = 0.8$ приведены на рисунке. При таком числе Фруда еще существует слабая дисперсия, но нет распада основной волны на трехмерные волны.

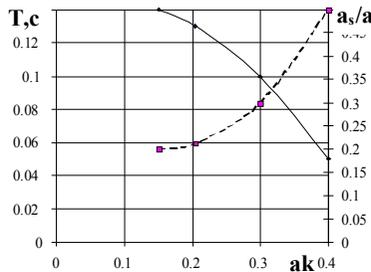


Рис. 4.20 Зависимость относительной высоты (штриховая линия) и периода излучения (сплошная линия) солитона от крутизны основной волны для $Fr=0.8$.

§7 НЕПОДВИЖНЫЕ ВОЛНЫ СО СЛАБОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Когда продольный градиент скорости потока превышает значение

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{h_1}{u_2} \right| > 0.025, \quad (4.40)$$

крутизна гравитационных волн очень велика, что приводит к превалированию нелинейности над дисперсией даже при средних числах Фруда. В диапазоне значений крутизны волны

$$0.41 < ak < 0.43 \quad (4.41)$$

генерация кратных мод приводит к формированию крутого переднего фронта волны и пологого заднего, как у длинных волн без дисперсии. Основная мода волны и высшие гармоники имеют фазовые скорости, равные по модулю скорости потока. Это позволяет увидеть вторую гармонику на серии последовательных кадров видеозаписи, приведенной ниже.

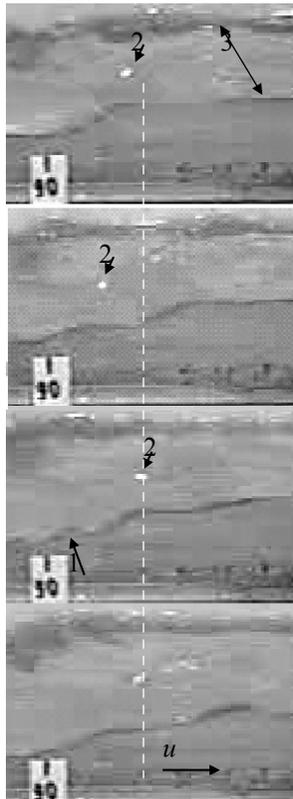


Рис. 4.21 Волна ($ak=0.43$) на потоке с числом Фруда 0.78. 1 – вторая гармоника, 2 – частица, захваченная обрушающимся гребнем, 3 – поверхность воды.

Волна на приведенных кадрах достигла предельной крутизны, при которой происходит обрушение $ak = 0.43$. Когда неподвижная волна обрушается, амплитуда ее падает, затем вновь увеличивается. Периодическое обрушение гребня волны формирует вихревое образование, вращающееся против часовой стрелки. Белая частица, захваченная таким циркуляционным течением, вращается вместе с ним и не смещается вниз по потоку, оставаясь в кадре. На приведенном рисунке можно проследить за обрушением волны по перемещению белой частицы.

Вторая гармоника хорошо видна на третьем кадре (стрелка с цифрой 1). Параметры волн удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} k_2 &= 2k_1 \\ a_0^2 &= a_1^2 + a_2^2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

При генерации второй гармоники часть энергии основной волны переходит во вторую гармонику. Это выражается в уменьшении амплитуды основной волны, как показано на следующем рисунке.

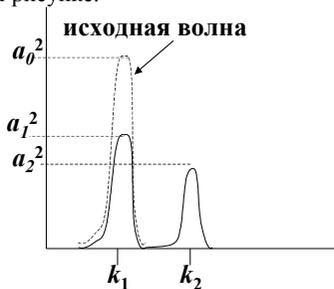


Рис. 4.22 Спектр волн при генерации второй гармоники

Эффективность перекачки энергии во вторую гармонику увеличивается при уменьшении дисперсии (увеличении числа Фруда). Зависимость отношения амплитуд второй и первой гармоник от числа Фруда приведена на следующем рисунке.

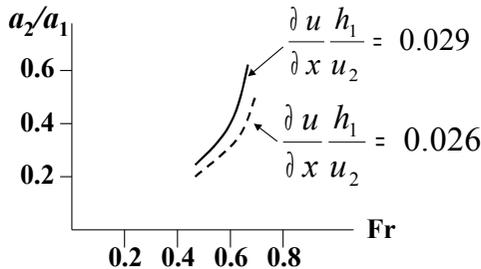


Рис. 4.23 Отношение амплитуд первой и второй гармоник от числа Фруда для двух значений продольного градиента скорости течения.

На рисунке приведены две кривые, полученные в эксперименте для двух значений продольного градиента скорости. При увеличении перепада скорости в потоке эффективность перекачки энергии основной волны во вторую гармонику возрастает. Генерация второй гармоники, приводит к уменьшению крутизны

основной волны для данного значения продольного градиента скорости течения. В результате переход к обрушающимся волнам происходит при больших значениях продольного градиента скорости течения.

§8 ВОЛНЫ ПРИ КРИТИЧЕСКИХ ЧИСЛАХ ФРУДА

При критическом числе Фруда $F_r = 1$ все гравитационные волны имеют одну скорость $c = \sqrt{gh}$. При возбуждении цуга волн на потоке, скорость которого меняется в направлении движения, мы уже не увидим неподвижную синусоидальную волну, скорость которой равна по модулю скорости потока. Все волны цуга имеют одинаковую скорость, создавая сложную интерференционную картину на поверхности воды.

Убывание дисперсии при стремлении числа Фруда к единице имеет важное следствие. Для волн малой амплитуды влияние дисперсии оказывается сравнимо с нелинейными эффектами. Нелинейные эффекты в отсутствие дисперсии приводят к тому, что появляются высшие гармоники, имеющие ту же фазовую скорость, искажая волновой фронт: передний склон волны становится круче, а задний склон – положе. Если есть слабая дисперсия, то скорости волн немного отличаются друг от друга, что будет препятствовать искажению фронта волны. Баланс этих эффектов порождает волну неизменной формы, называемую солитон или уединенная волна. Эксперименты показывают, что такие волны появляются и на поверхности потока, скорость которого меняется в направлении движения при числах Фруда близких критическим $F_r \rightarrow 1$.

Возбуждение солитонов кораблями в канале конечной ширины и глубины исследовано в [66]. В [67] приведены данные исследования возбуждения солитонов в стационарном потоке стратифицированной жидкости в канале с плоским препятствием на дне. Численные исследования возбуждения солитонов в каналах движущимся источником проанализированы в [68]. Возможность возбуждения солитона движущимся перепадом давления на поверхности воды при критических числах Фруда впервые доказана в [69].

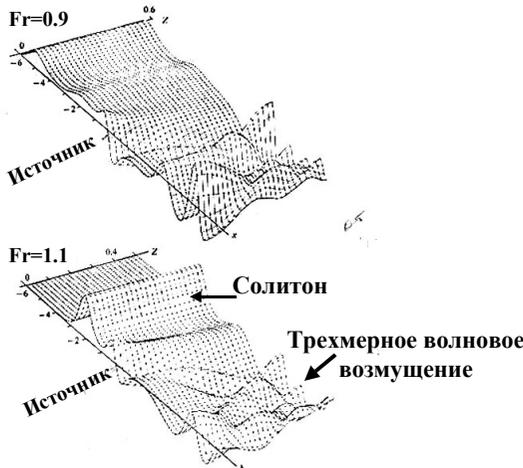
В работе [68] показано, что возбуждение солитонов движущимся источником на поверхности воды при критических числах Фруда описывается вынужденным уравнением Кадомцева – Петвиашвили при балансе влияния линейной дисперсии, нелинейности и трехмерных эффектов. В этой работе рассматривается перепад давления, который движется вдоль канала с неподвижной водой с критической скоростью. Исследован случай бесконечной ширины канала и ширины, в 20 раз превышающей глубину. В первом случае получен солитон с изогнутым фронтом, расположенный перед источником возмущения в системе координат, связанной с источником. За источником располагается волновое трехмерное образование или волновой хвост. В канале конечной ширины обнаружена похожая картина, но фронт солитона – прямой. Картина волновой поверхности для канала конечной глубины приведена ниже на рисунке в системе координат, связанной с движущимся источником возмущения. Приведены результаты расчетов для числа Фруда $F_r = 0.9$ и $F_r = 1.1$. В первом случае амплитуда солитона очень мала по сравнению с амплитудой трехмерного волнового хвоста, который наблюдается позади источника. Во втором случае амплитуда солитона превышает амплитуду трехмерного волнового хвоста.

Почему в системе координат, связанной с источником возмущения, солитон располагается впереди источника, а трехмерная волна позади него? Это значит, что солитон движется быстрее источника, а хвостовая волна – медленнее. Хвостовая волна имеет максимальную амплитуду там, где волны группы усиливают друг друга. Эта область движется с групповой скоростью, которая для гравитационных волн меньше фазовой. Фазовая скорость волн совпадает со скоростью источника. Скорость солитона определяется следующим выражением:

$$v = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{h_s}{h} \right) \tag{4.43}$$

где h_s/h - отношение высоты солитона к глубине потока. Из приведенного выражения следует, что скорость солитона всегда выше скорости источника.

U. Katsin and T. R. Akylas



Forced nonlinear response of $T = 2$ and channel of fixed width $W = 0.3$ (only half of the domain is displayed): (a) $Fr = 0.9$, (b) $Fr = 1.1$.

Рис. 4.24 Возбуждение солитона возмущением, движущимся со скоростью близкой скорости длинных волн.

Положение волн, возбуждаемых движущимся источником возмущения на поверхности воды в канале конечной ширины, приведено на следующей схеме.

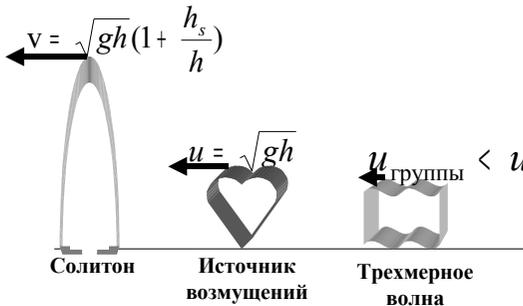


Рис. 4.25 Схема расположения волн в системе координат, связанной с движущимся источником возмущений.

Возбуждение солитонов на поверхности потока воды, скорость которого меняется в направлении движения впервые исследовано экспериментально в [54]. Волновая картина в этом случае очень похожа на картину, показанную на рисунках 4.22-4.23. Отличается она тем, что фронт солитона изогнут, а волновой хвост представляет собой овальное возвышение воды малой амплитуды.

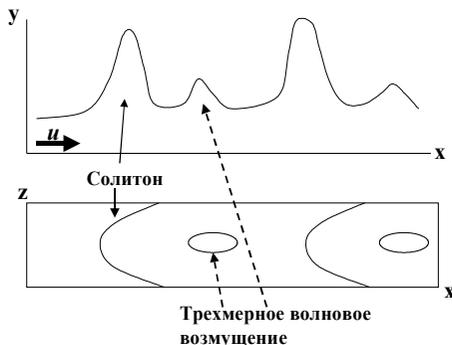


Рис. 4.26 Схема волновой картины, возникающей на потоке воды, скорость которого меняется вдоль по течению, при $Fr \approx 1$.

Солитоны и волновые хвосты образуют на потоке неподвижную деформацию поверхности воды так же, как и диспергирующие волны. Ниже приведена фотография солитонов на потоке воды (Н. Chanson, 1999).



Рис. 4.27 Солитоны на потоке воды. (Н. Chanson). 1 — солитон, 2 — трехмерный хвост, 3 — гравитационные волны.

На фотографии виден поток с неподвижными волнами на его поверхности, втекающий в море. Скорость потока сильно меняется в поперечном направлении. В центральной части кадра скорость потока максимальна, и число Фруда превышает единицу. Здесь мы видим изогнутый фронт солитона большой амплитуды. С изменением скорости потока по поперечной координате, меняется и амплитуда солитона. Там, где скорость потока достигает максимума, амплитуда солитона максимальна. На фотографии видно, что с увеличением амплитуды

солитона фронт волны выдвигается вверх по потоку. Искривление фронта связано с ростом скорости солитона при увеличении его амплитуды в соответствии с (4.43). Слева на фотографии видны волны с прямыми гребнями малой амплитуды. В этой области число Фруда меньше единицы, так как скорость потока ниже, чем в центральной части кадра.

Зависимость параметров солитонов от продольного градиента скорости при числе Фруда $Fr \approx 1$ приведена ниже на рисунке. Данные получены в лабораторном исследовании [54].

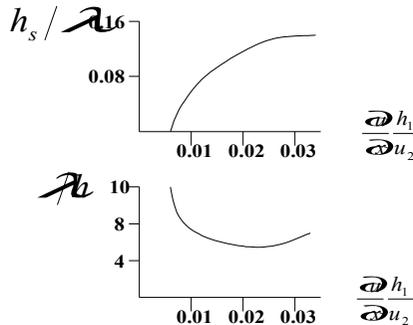


Рис. 4.28 Параметры солитонов на поверхности потока воды как функция продольного градиента скорости при $Fr \approx 1$.

В соответствии с приведенными данными амплитуда солитона быстро растет с увеличением продольного градиента скорости. Длина волны уменьшается с увеличением продольного градиента скорости потока и, достигнув минимального значения $6h$, вновь начинает расти.