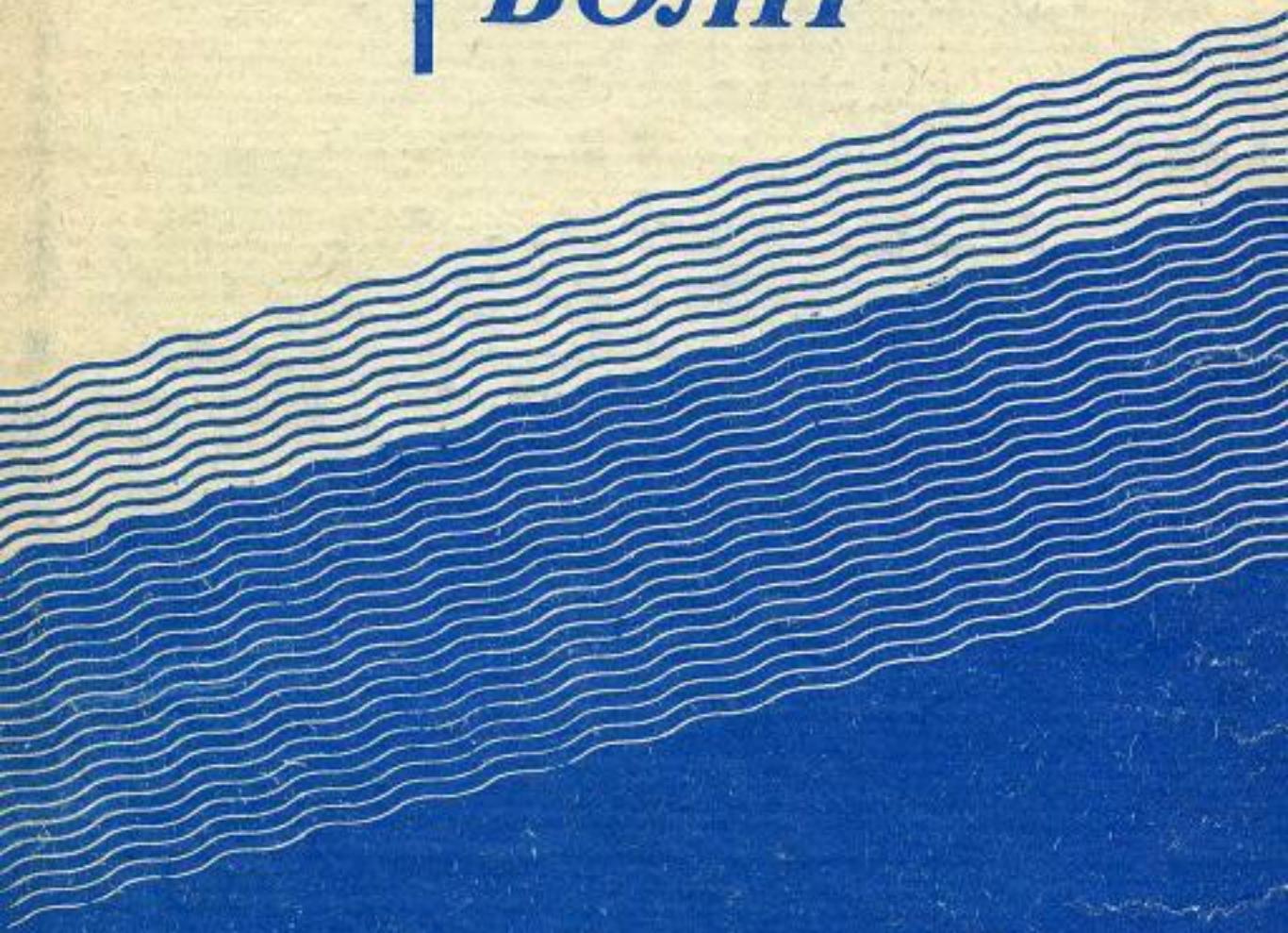




Г. Е. Кононкова,
К. В. Показеев

ДИНАМИКА МОРСКИХ ВОЛН



ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Г.Е.КОНОНКОВА
К.В.ПОКАЗЕЕВ

ДИНАМИКА
МОРСКИХ
ВОЛН

Издательство
Московского
университета
1985

Кононкова Г.Е., Показеев К.В. Динамика морских волн. - М.: Изд-во
МГУ, 1985. - 298 с.

Монография посвящена современному учению о морских волнах. Излагаются основы гидродинамики и классические теории поверхностных волн. Проведены обширный анализ натурных и лабораторных исследований и сравнение с существующими теориями. Рассматриваются также внутренние волны, цунами. Большое место занимает изложение исследований авторов по начальной стадии генерации ветровых волн, взаимодействию поверхностных волн с течениями и внутренними волнами, трансформации волн цунами в прибрежной зоне.

Для специалистов, занимающихся исследованиями в области физики моря, океанологии, кораблестроения и мореплавания.

Р е ц е н з е н т ы:

проф. А.И.Дуванин, проф. Ю.М.Крылов

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

К 1903030100 - 087 121 - 84
077(02) - 85

© Издательство Московского университета, 1985

ПРЕДИСЛОВИЕ

Воды морей и океанов находятся в постоянном движении. Наиболее распространенным видом являются волны, которые оказывают существенное влияние на ряд протекающих в мировом океане физических процессов: оптических, акустических, тепловых и т.д. Поэтому исследования морского волнения представляют большой интерес для физики моря в целом. Кроме того, такие исследования необходимы и для практики. Навигация подводных и надводных кораблей, освоение шельфовой зоны океанов, защита от цунами, неконтактные методы исследования океана, использование энергии морских волн – вот далеко не полный перечень практических задач, требующих исследований морского волнения.

Волновые движения в океане крайне разнообразны. Если океан рассматривать как механическую систему, волновые движения возникают под действием возвращающих сил, стремящихся вернуть эту систему в равновесное состояние. Роль возвращающих сил могут играть гравитационные, капиллярные и силы, вызванные вращением Земли. Сжимаемость воды приводит к существованию звуковых волн. Для капиллярных волн роль возвращающих сил играет поверхностное натяжение, возникающее на границе раздела двух сред. В гравитационных волнах роль возвращающей силы играет сила тяжести, действующая на частицы воды, смещенные относительно эквипотенциальных уровней.

В соответствии с природой возвращающей силы в океане можно выделить следующие виды волн: капиллярные, гравитационные, звуковые, а также инерционные и планетарные, связанные с вращением Земли и другими факторами. В монографии рассматриваются только два первых вида волн.

Гравитационные волны по области своей локализации могут быть разделены на длинные, поверхностные и внутренние. Длинными называют волны, подобные приливным, у которых вертикальные скорости и ускорения частиц воды пренебрежимо малы. Волновое движение охватывает всю толщу жидкости. В длинной волне давление в некоторой точке определяется весом столба воды, находящимся над этой точкой. В поверхностных волнах волновое движение ограничено в пределах слоя некоторой конечной глубины, вертикальные ско-

ности и ускорения частиц воды в таких волнах не являются пренебрежимо малыми. В отличие от поверхностных волн внутренние возникают не на границе раздела вода – воздух, а в стратифицированной жидкости. Во внутренних волнах вертикальные смещения поверхности жидкости пренебрежимо малы по сравнению с движением в толще жидкости.

Временной диапазон гравитационных волн очень широк. Их периоды изменяются от долей секунды у коротких гравитационных волн до нескольких минут и десятков минут у волн цунами и суток у приливных волн. Длины гравитационных волн изменяются от нескольких сантиметров у поверхностных волн (ряби, примыкающей к капиллярным волнам) до сотен метров у штормовых волн и волн зыби и до сотен километров у волн цунами. Очень разнообразны и причины, вызывающие гравитационные волны, к этим причинам относятся: ветер, колебания атмосферного давления, землетрясения, взаимодействие волн между собой и ряд других.

Теоретическое исследование морских волн основывается на результатах классической гидродинамики. В теориях волн бесконечно малой амплитуды и теориях волн конечной амплитуды волнение представляется в виде волн неизменной формы. При этом не учитывается волнообразующие силы, взаимодействие волн друг с другом и со средними течениями и т.д. Эти взаимодействия в реальном океане приводят к тому, что волновые процессы имеют целый спектр колебаний, изменяющийся во времени и пространстве. Для описания таких процессов необходимо применение вероятностных методов, в частности статистических и спектральных.

Полтора десятилетия, прошедшие со времени издания монографии Г.Е.Кононковой "Динамика морских волн", ознаменовались интенсивным исследованием волновых процессов в океане. Возникли новые направления, связанные с широким применением современных измерительных приборов и вычислительной техники, значительно расширились и лабораторные исследования волновых движений. Все это вызвало существенное расширение представлений о морских волнах и обусловило потребность в новом издании монографии.

Исследования последних лет показали, что генерация и развитие ветровых волн зависят от крупномасштабных процессов, таких, как внутренние волны, течения и волны больших масштабов, на фоне которых происходит развитие волн. Кроме того, сведения о пространственно-временной структуре коротковолнового участка спектра поверхностных волн, изменчивости этого участка спектра необходимы для развития неконтактных методов исследования океана. Поэтому вопросами изменчивости поверхностных волн под действием течений, внутренних волн в монографииделено значительное внимание.

На современном этапе изучения морских волн пригодные для практического использования количественные соотношения, определяющие связь между условиями волнообразования и волнами, могут быть получены пока только на основе анализа и обобщения натурных и лабораторных измерений. Вследствие этого значительное место в

монографииделено экспериментальным исследованиям.

В книге использован материал курса лекций, читаемых авторами на физическом факультете Московского университета. Содержание и построение книги таково, что она может служить учебным пособием для студентов университетов, гидрометеорологических и других институтов.

В первых двух главах приводятся необходимые сведения из гидродинамики идеальной и вязкой жидкости, дается понятие о турбулентной вязкости, излагаются классические теории установившихся волн. В третьей главе даны спектральные и статистические представления волновых процессов. Четвертая глава посвящена описанию процессов генерации и развития ветрового волнения, в пятой описывается изменение параметров поверхностных волн на течениях и волнах больших пространственных и временных масштабов. В шестой главе даются краткие сведения о внутренних волнах, их воздействие на поверхностные волны рассмотрено в следующей главе. В восьмой главе приводятся теоретические сведения о длинных волнах. В последней, девятой главе рассматриваются волны цунами.

Значительное место в книге занимают работы, выполненные авторами. В них особое вниманиеделено вопросам генерации и развития волн под действием ветра, взаимодействию поверхностных волн с течениями и внутренними волнами, трансформации и накату волн цунами на берег.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую благодарность профессору А.М.Гусеву, профессору А.А.Пивоварову и доктору физико-математических наук А.Д.Розенбергу за ценные замечания по отдельным главам книги, профессору Ю.М.Крылову и профессору А.М.Дуванину за рецензирование книги и полезные советы, коллективу кафедры физики моря и вод суши за обсуждение рукописи, а также В.А.Буяновой за помощь при оформлении рукописи.

ГЛАВА I

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГИДРОДИНАМИКИ

§ 1.1. Жидкость как объект изучения

Отвлекаясь от молекулярного строения жидкости, не существенного для тех макроскопических процессов, которые она изучает, гидродинамика рассматривает жидкость как сплошную среду. Это значит, что объемы жидкости, движение которых рассматривается гидродинамикой, всегда содержат большое количество молекул. "Бесконечно малый элемент объема" понимается в гидродинамике как объем, размеры которого малы по сравнению с объемом всего потока, но велики по сравнению с межмолекулярными расстояниями. Аналогично следует понимать термины "точка жидкости" или "жидкая частица".

Представление о жидкости как о сплошной среде позволило рассматривать физико-механические характеристики движущейся жидкости как функции координат x, y, z и времени t . Такими характеристиками являются скорость $\underline{V}(x, y, z, t)$, давление $p(x, y, z, t)$ и плотность $\rho(x, y, z, t)$. Задание вектора скорости, давления и плотности полностью определяет состояние движущейся жидкости. Заметим, что вместо давления и плотности может быть взята пара других термодинамических величин, поскольку, зная их и применяя уравнение состояния, можно найти все термодинамические величины.

При исследовании геофизических явлений в морях и океанах плотность воды в большинстве случаев можно считать непрерывной функцией координат и времени, зависящей от давления, температуры и солености. В задачах о морских поверхностных волнах плотность воды обычно принимается постоянной, поскольку изменения ее как по глубине и акватории моря, так и во времени незначительны для рассматриваемого круга явлений. Изменение плотности очень важно при рассмотрении внутренних волн, возникающих в жидкости при на-

личии стратификации, т.е. изменениях плотности по вертикали.

Важным свойством жидкости является вязкость, или внутреннее трение. Вязкостью называется способность жидкости оказывать сопротивление растягивающим и сдвигющим усилиям, возникающим при перемещении одной частицы жидкости относительно другой.

Пусть, например, жидкость помещается между двумя твердыми стенками, из которых нижняя неподвижна, а верхняя движется с некоторой скоростью. Благодаря наличию сил сцепления молекулы жидкости, близайшие к верхней стенке, прилипают к ней и увлекают за собой молекулы следующего слоя. Эти передают движение следующему слою и т.д. Молекулы жидкости вблизи нижней стенки остаются неподвижными. Так формируется сдвиг слоев жидкости в плоскостях, параллельных стенкам. Сила трения F_{tr} между слоями жидкости выражается законом Ньютона:

$$F_{tr} = \mu s \frac{dV}{dn}, \quad (1.1)$$

где s — площадь соприкасающихся слоев, $\frac{dV}{dn}$ — производная скорости жидкости по нормали к ним, μ — коэффициент вязкости, имеющий размерность $\frac{M}{LT}$.

Вязкость играет двоякую роль в движении жидкости: во-первых, она создает передачу движения от слоя к слою, т.е. формирует непрерывное скоростное поле потока, во-вторых, молекулярный механизм этой передачи движения поглощает часть механической энергии потока, трансформируя ее в тепловую. Переход механической энергии в тепловую называется рассеянием или диссипацией энергии. Процесс перехода механической энергии движущейся жидкости в тепловую является источником гидродинамического сопротивления, учет которого необходим при решении многих практических задач.

Вязкость жидкости существенно зависит от температуры, уменьшаясь при возрастании последней. Коэффициент вязкости воды при 0°C равен $1,729 \cdot 10^{-2}$, а при 20°C — $1,005 \cdot 10^{-2} \text{ г}/\text{см} \cdot \text{с}$.

Вязкость газов, наоборот, увеличивается при возрастании температуры, что объясняется другим механизмом явления внутреннего трения в газах. Коэффициент вязкости воздуха при 0°C равен $1,171 \cdot 10^{-4}$, а при 20°C — $1,808 \cdot 10^{-4} \text{ г}/\text{см} \cdot \text{с}$.

§ 1.2. Силы, действующие в жидкости

Действующие в жидкости силы разделяют на "массовые" и "поверхностные". Выделим в жидкости некоторый объем Ω , ограниченный замкнутой поверхностью s . Массовые силы действуют на каждый элемент $d\Omega$ выделенного объема независимо от того, существуют ли рядом с $d\Omega$ другие частицы жидкости. Если \underline{F} — вектор массовой силы, действующей на единицу массы, то к элементу объема $d\Omega$ жидкости с плотностью ρ будет приложена сила $\underline{F}_\rho d\Omega$, а ко всему объему Ω — сила $\underline{F} = \int \underline{F}_\rho d\Omega$. Сила \underline{F} имеет следующие проекции на оси координат: $\int X_\rho d\Omega; \int Y_\rho d\Omega; \int Z_\rho d\Omega$. Массовыми силами, наиболее часто встречающимися в задачах о

морских волнах, являются силы тяготения и инерционные.

Помимо массовых на объем Ω действуют силы со стороны других частиц жидкости. Эти силы приложены к поверхности s , ограничивающей объем Ω , и называются поверхностными.

Обозначим p_n вектор поверхностной силы, отнесенный к единице площади. На элементе поверхности ds к объему Ω будет приложена сила $p_n ds$, исходящая от внешних частиц жидкости. Индекс n указывает, что вектор p_n зависит от ориентации площадки ds , т.е. от направления внешней нормали n . Он может зависеть также от координат площадки и времени.

Вектор поверхностных сил, приложенных к объему Ω , выражается интегралом $\int p_n ds$. Направление вектора поверхностной силы p_n может составлять некоторый угол с внешней нормалью n . Проекция p_n на нормаль к элементу ds называется давлением, касательная к элементу ds проекция p_n — силой трения. Касательные силы проявляются только при движении жидкостей и создают сопротивление движению. Точный учет этих сил, вызываемых вязкостью, представляет серьезные математические трудности. В большинстве случаев невозможно дать точное решение задач с учетом сил вязкости без дополнительных упрощающих положений. В связи с этим широкое развитие получила гидродинамика так называемой идеальной, т.е. лишенной вязкости, жидкости.

В идеальной жидкости, не обладающей трением, давление направлено по нормали внутрь объема Ω . В курсах гидродинамики доказывается, что величина давления при этом не зависит от ориентировки площадки ds . В связи с этим при обозначении давления в идеальной жидкости индекс "n" можно опустить.

§ 1.3. Динамическое уравнение движения идеальной жидкости

Пусть элемент объема жидкости $d\Omega$ движется с ускорением a под действием приложенных к нему массовых F и поверхностных p_n сил. Для всего объема Ω согласно второму закону Ньютона справедливо следующее уравнение:

$$\int_{\Omega} (\underline{a} - \underline{F}) \rho d\Omega = \int_s p_n ds. \quad (1.2)$$

Здесь s — поверхность, ограничивающая объем Ω . В случае идеальной жидкости вектор гидродинамического давления направлен по внутренней нормали к поверхности s :

$$\underline{p} = -p_n,$$

где n — орт внешней нормали к s . Уравнение (1.2) для случая идеальной жидкости примет вид

$$\int_{\Omega} (\underline{a} - \underline{F}) \rho d\Omega = - \int_s p_n n ds.$$

Применяя к нему преобразование Гаусса, получим

$$\int_{\Omega} [(\underline{a} - \underline{F}) \rho] d\Omega + \int_{\Omega} \text{grad } p d\Omega = 0. \quad (1.3)$$

Ввиду того что объем Ω выбран произвольно, подынтегральное выражение должно быть равно нулю в любой точке жидкости. Отсюда получаем динамическое уравнение движения идеальной жидкости:

$$\underline{a} = \underline{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (1.4)$$

Поскольку одни и те же переменные (x, y, z) входят в (1.4) в качестве искомых функций и в качестве аргументов, динамическое уравнение движения идеальной жидкости обычно преобразовывают к другой форме.

§ 1.4. Основные уравнения гидродинамики в форме Эйлера

В гидродинамике существуют два метода рассмотрения движения жидкости. Одним из них является "метод Эйлера". Это локальный метод, не рассматривающий движение каждой частицы, а выделяющий в пространстве, занимаемом движущейся жидкостью, неподвижный объем и рассматривающий движение жидкости через этот объем. Объектом изучения здесь являются различные векторные и скалярные поля, характеризующие движение жидкости, а именно поле скоростей, поле ускорений, поле давлений и т.д. При этом изучается изменение различных элементов движения в фиксированной точке пространства с течением времени и изменение этих элементов при переходе к другим точкам пространства.

Преобразуем динамические уравнения (1.4) в форму Эйлера. Пусть скорость движения жидкости имеет компоненты u, v, w , которые являются функциями координат x, y, z и времени t . Задавливав либо время, либо координаты точки наблюдения, можно характеризовать скоростную структуру движущейся жидкости распределением скоростей в потоке в определенный момент времени или изменением их в определенной точке в течение времени.

Получить практически мгновенную картину скоростного поля можно посредством фотографии достаточно большого участка жидкости при кратковременной экспозиции, если тем или иным способом поток визуализирован. Картина изменения скорости в фиксированной точке может быть получена, например, более или менее продолжительной съемкой с помощью неподвижно установленного киноаппарата.

Относительно u, v, w Эйлер сделал предположение, что они конечные и непрерывные функции x, y, z и их первые производные по координатам тоже всюду конечны. Заменим компоненты ускорения, входящие в уравнение (1.4), через производные соответствующих компонентов скоростей:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{du}{dt}; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}; \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dw}{dt}.$$

Изменения же скорости элемента объема $d\Omega$ происходят непосредственно вследствие изменения времени и вследствие того, что за это время элемент $d\Omega$ перемещается в пространстве. Поэтому

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial t} + (V_x u)_x + (V_y v)_y + (V_z w)_z,$$

и уравнение (1.4) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Уравнения (1.5), называемые уравнениями Эйлера, содержат четыре неизвестные функции u, v, w, p . В качестве четвертого уравнения, замыкающего динамические, используют уравнение неразрывности.

Уравнение неразрывности описывает основное свойство движущейся жидкости – двигаться без образования пустот, непрерывно заполняя определенную часть пространства. Выделим в пространстве, занимаемом потоком, неподвижный объем $d\Omega$, ограниченный поверхностью параллелепипеда с осями dx, dy, dz . Исследуем, как изменяется масса, заключенная в этом объеме, вследствие протекания жидкости через поверхность, ограничивающую этот объем.

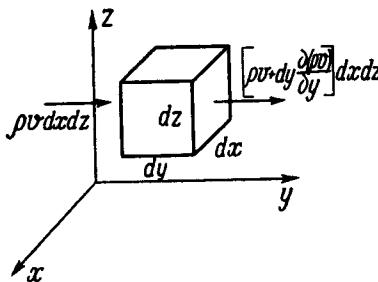


Рис. 1.1. К выводу уравнения неразрывности

$$d\Omega \text{ жидкости } dm = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz. \quad (1.6)$$

Вытекание жидкости из объема $d\Omega$ приводит к уменьшению массы жидкости в этом объеме на величину

$$dm = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz. \quad (1.7)$$

Сравнивания (1.6) и (1.7), получим уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.8)$$

Если жидкость несжимаемая, то $\frac{d\rho}{dt} = 0$ и

$$\operatorname{div} \underline{V} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.9)$$

§ 1.5. Основные уравнения гидродинамики в форме Лагранжа

Можно выбрать в жидкости некоторую материальную частицу и фиксировать ее координаты в некоторый момент времени, принятый за начальный. Эти координаты a, β, γ дают как бы пометку частицы. В следующий момент времени координаты этой частицы будут $x(a, \beta, \gamma, t)$; $y(a, \beta, \gamma, t)$; $z(a, \beta, \gamma, t)$. Если функции x, y, z , а также давление p будут найдены, то задача о движении жидкости будет решена.

Этот метод описания движения жидкости, называемый методом Лагранжа, является субстанциональным, поскольку он рассматривает движение отдельных материальных частиц, историю каждой частицы. Аргументы a, β, γ называются переменными Лагранжа, причем они могут обозначать не только начальные координаты частицы, но и некоторые параметры, связанные однозначной зависимостью с начальными координатами частицы.

Выразим динамические уравнения и уравнение неразрывности в переменных Лагранжа. Пусть a, β, γ – параметры Лагранжа, связанные взаимно-однозначными зависимостями с начальными координатами некоторой частицы жидкости, x, y, z – ее координаты в момент времени t . Проекции на оси координат скорости частицы с начальными координатами a, β, γ в момент t будут $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$. Проекции ускорения $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ в момент времени t этой частицы выражаются уравнениями (1.4). В этих уравнениях нужно заменить производные по x, y, z производными по a, β, γ поскольку именно они являются независимыми переменными. Для этого умножим первое уравнение на $\frac{\partial x}{\partial a}$, второе на $\frac{\partial y}{\partial a}$, третье на $\frac{\partial z}{\partial a}$ и сложим все три уравнения. Таким образом мы получим первое уравнение движения в форме Лагранжа. Проделав аналогичную операцию с частными производными по β и γ , в результате получим систему уравнений движения в переменных Лагранжа:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X \right) \frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y \right) \frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z \right) \frac{\partial z}{\partial a} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial a}; \\ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X \right) \frac{\partial x}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y \right) \frac{\partial y}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z \right) \frac{\partial z}{\partial \beta} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial \beta}; \\ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X \right) \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - Y \right) \frac{\partial y}{\partial \gamma} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z \right) \frac{\partial z}{\partial \gamma} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial \gamma}.\end{aligned}$$

Рассмотрим элемент жидкости, который первоначально занимал объем $d\Omega_0$ прямоугольного параллелепипеда с одной из вершин в точке (x_0, y_0, z_0) и с длинами ребер dx_0, dy_0, dz_0 . По истечении времени t этот элемент переместится, деформируется и при этом займет объем $dx dy dz$, вершина его переместится в точку x, y, z . По известным правилам замены переменных

$$d\Omega_0 = dx_0 dy_0 dz_0 = \frac{D(x_0, y_0, z_0)}{D(a, \beta, \gamma)} da db dy,$$

$$d\Omega = dx dy dz = \frac{D(x, y, z)}{D(a, \beta, \gamma)} da d\beta dy.$$

Так как масса элемента жидкости постоянна, то

$$\rho_0 \frac{D(x_0, y_0, z_0)}{D(a, \beta, \gamma)} = \rho \frac{D(x, y, z)}{D(a, \beta, \gamma)}.$$

Это и есть уравнение неразрывности в переменных Лагранжа.

Если жидкость несжимаемая, т.е. ее плотность постоянна, то оно будет иметь вид

$$\frac{D(x_0, y_0, z_0)}{D(a, \beta, \gamma)} = \frac{D(x, y, z)}{D(a, \beta, \gamma)}. \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) показывает, что определитель Остроградского не зависит от времени при условии постоянства плотности жидкости.

§ 1.6. Уравнения движения вязкой жидкости

Пренебрежение вязкостью жидкости, упрощая математическое решение задачи, во многих случаях оказывается недопустимым с точки зрения физической сущности явлений, в которых вязкость играет решающую роль.

В вязкой жидкости поверхностные силы, действующие на элементарную площадку ds , зависят от ее ориентировки, т.е. от направления внешней нормали к ней. Если через произвольную точку в жидкости проведем три взаимно перпендикулярные площадки, то отнесенные к единице площади векторы поверхностных сил, действующих на каждую из них, будут различны, но среднее арифметическое значение нормальных составляющих этих векторов не зависит от ориентации тройки взаимно перпендикулярных площадок. Если площадки перпендикулярны к координатным осям x, y, z , то нормальные составляющие напряжений обозначим соответственно p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} , а их среднее арифметическое значение — $-p$ (в идеальной жидкости $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$).

Помимо нормальных напряжений на площадку, перпендикулярную оси x , действуют касательные напряжения p_{xy} и p_{xz} , на вторую площадку — p_{yx}, p_{yz} , на третью — p_{zx}, p_{zy} . Для компонентов напряжений p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} справедливы выражения [1]

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \underline{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ p_{yy} &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \underline{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ p_{zz} &= -p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \underline{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned}$$

которые для несжимаемой жидкости $\operatorname{div} \underline{V} = 0$ преобразуются в более компактную форму

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1.11)$$

$$p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Аналогичные выражения существуют и для остальных компонент напряжения:

$$p_{yz} = p_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

$$p_{zx} = p_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad p_{xy} = p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (1.12)$$

Уравнения движения вязкой жидкости вывели различными способами Навье (1822 г.) и Стокса (1845 г.). Эти уравнения можно получить из уравнений Эйлера (1.5), если заменить в них $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$,

соответственно через

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z}, \quad \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}.$$

Подставляя значения p_{xx}, p_{xy}, \dots из равенств (1.11) и (1.12), находим уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости

$$\frac{d\underline{V}}{dt} = \underline{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \underline{V}. \quad (1.13)$$

Входящие в уравнения Навье—Стокса силы внутреннего трения, выражающиеся вторыми производными скоростей по координатам, вносят в методы их решения значительные трудности. Но помимо математических трудностей применение уравнений Навье—Стокса к решению конкретных задач о движении жидкости в природе наталкивается на трудности принципиального характера.

Дифференциальные уравнения Навье—Стокса, определяющие скорости и давление, относятся к бесконечно малому объему пространства и интервалу времени. Для того чтобы перейти от них ко всему объему жидкости и определить скорости и давление в ней в любой момент времени, требуется эти уравнения проинтегрировать.

Однако интегрирование уравнений Навье—Стокса имеет смысл только в том случае, когда принципиально возможен переход от бесконечно малых объемов и интервалов времени к конечным. Это имеет место только при "ламинарном движении", т.е. при очень малых скоростях, малых размерах и большой вязкости жидкости, когда движение устойчивое и не отклоняется от тех траекторий, которые закономерно обусловлены действием известных нам сил. Ламинарное движение осуществляется лишь при редком сочетании благоприятных условий. Обычно же движения жидкости в природе (морские течения и волны, русловые потоки, движения в атмосфере и т.д.) таковы, что каждая их частица движется по одной из бесчисленных возможных для нее траекторий. Проходя через определенную точку пространства, частицы жидкости создают в этой точке непрерывное изменение скорости. Скоростные поля в движущейся жидкости бесконечно разнообразны и, сменяя друг друга, образуют непрерывный случайный процесс, который определяется не только уравнениями гидродинамики, но и корреляционными зависимостями. Такое движение называется "турбулентным".

Никакая совокупность функциональных зависимостей не может полностью описать случайный процесс. Поэтому вопрос об интегрировании уравнений гидродинамики для определения реальной смены мгновенных скоростей не имеет смысла.

§ 1.7. Понятие о турбулентной вязкости

При турбулентном движении жидкости скорости ее частиц являются случайными функциями координат и времени, однако при этом они обычно имеют некоторое основное направление и величину, относительно которых как-то колеблется мгновенная скорость. Эти отклонения, как правило, невелики по сравнению с основной скоростью. Для того чтобы найти основную величину скорости, произведем операцию осреднения по времени (в некоторых случаях бывает целесообразно провести осреднение по пространству или по времени и по пространству)

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^{t+T} V dt.$$

Мгновенные отклонения V' , называемые пульсациями истинных значений V от \bar{V} , определяются равенством $V' = V - \bar{V}$.

Для того чтобы получить уравнения, связывающие не мгновенные, пульсирующие во времени, значения скоростей и давлений, а их средние величины, произведем операцию осреднения уравнений (1.13). Запишем их в несколько более общей форме, предполагая, что массовые силы имеют потенциал U :

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (V_j V_k) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(V + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k^2}, \quad (1.14)$$

где V_i и V_k – проекция скорости на одну из осей координат. Задавая j или k значение 1,2,3, получим проекции скорости на ось O_x : $V_1 = u$, на ось O_y : $V_2 = v$ и на ось O_z : $V_3 = w$. Соответственно $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ и $\frac{\partial u}{\partial x_1} = -X$; $\frac{\partial u}{\partial x_2} = -Y$; $\frac{\partial u}{\partial x_3} = -Z$. Зафиксировав в уравнении (1.14) j и суммируя по $k = 1,2,3$, получим одно из уравнений Навье–Стокса (1.13), задавая разные j , получим все три уравнения.

Выразим мгновенные значения скорости и давления через их средние значения и пульсации $V_j = \bar{V}_j + V'_j$, $p = \bar{p} + p'$ и подставим в (1.14):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{V}_j + V'_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\bar{V}_j + V'_j)(\bar{V}_k + V'_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(U + \frac{\bar{p} + p'}{\rho} \right) \right] = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} (\bar{V}_j + V'_j).$$

Осредняя его по времени и учитывая, что

$$\frac{\partial \bar{V}_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial (\bar{V}_j + V'_j)}{\partial x_k} = 0$$

и т.д., получим уравнение Рейнольдса:

$$\frac{\partial \bar{V}_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{V}_j \bar{V}_k + \bar{V}'_j \bar{V}'_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(U + \frac{\bar{p}}{\rho} \right) = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{V}_j}{\partial x_k^2}.$$

Причем если $\frac{\partial \bar{V}_j}{\partial t} \neq 0$, т.е. средняя скорость претерпевает изменения со временем, обусловленные длительно действующими закономерными факторами, то период осреднения нужно выбрать так, чтобы он не сглаживал эти изменения. Например, в случае приливных волн с полусуточным периодом осреднение можно проводить по интервалу времени 10–20 мин.

Эти уравнения Рейнольдса впервые применил при построении своей теории турбулентности. Уравнения Рейнольдса в сочетании с уравнениями нераэрывности не образуют замкнутую систему, так как содержат помимо неизвестных функций \bar{V}_j ($j = 1,2,3$) и p еще шесть компонентов тензора $\bar{V}'_j \bar{V}'_k$. Произведения $\bar{V}'_j \bar{V}'_k$ выражают турбулентный перенос количества движения.

Запишем уравнения Рейнольдса в другом виде:

$$\frac{\partial \bar{V}_j}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{V}_i \bar{V}_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(U + \frac{\bar{p}}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial x_i} \right) - \bar{V}'_j \bar{V}'_k \right].$$

Произведения $\bar{V}'_j \bar{V}'_k$ трактуются как турбулентные напряжения трения, обычно значительно превышающие напряжения $\mu \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial x_i} \right) \frac{1}{\rho}$, обусловленные молекулярной вязкостью. Поскольку турбулентное движение может только усиливать трение в жидкости, то в это уравнение вместо члена $-\bar{V}'_j \bar{V}'_k$ введем член $\bar{V}'_j \bar{V}'_k$ с положительным знаком:

$$\frac{\partial \bar{V}_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{V}'_j \bar{V}'_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(U + \frac{\bar{p}}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial x_i} \right) + |\bar{V}'_j \bar{V}'_k| \right]. \quad (1.15)$$

В гидродинамике вводится понятие "турбулентной" или "виртуальной" вязкости. Напряжение турбулентного трения $\tau_{\text{турб}}$ по аналогии с молекулярным (1.1) записывается в виде

$$\tau_{\text{турб}} = \mu_{\text{турб}} \left(\frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial x_j} \right).$$

В то же время

$$\tau_{\text{турб}} = \rho |\bar{V}'_j \bar{V}'_k|. \quad (1.16)$$

Отсюда определяется коэффициент турбулентной вязкости:

$$\mu_{\text{турб}} = \frac{\rho |\bar{V}'_j \bar{V}'_k|}{\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial x_i}}. \quad (1.17)$$

Поскольку $\mu_{\text{турб}} \gg \mu$, то в уравнениях (1.15) можно пренебречь членами, зависящими от молекулярной вязкости, и записать (1.15) в форме, аналогичной уравнениям Навье–Стокса с той разницей, что вместо коэффициента молекулярной вязкости в них будет фигурировать коэффициент турбулентной вязкости и вместо мгновенных скоростей и давлений их средние значения

$$\frac{\partial \bar{V}_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{V}_j \bar{V}_k) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(U + \frac{\bar{p}}{\rho} \right) = \frac{\mu_{турб}}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \bar{V}_j}{\partial x_k^2}. \quad (1.18)$$

Если молекулярной вязкостью нельзя пренебречь, то можно ввести суммарный коэффициент вязкости $\mu + \mu_{турб}$. Уравнение (1.18) является одним из важнейших в динамике морских волн и течений. Однако применение его к конкретным расчетам затрудняется тем, что в него входит неизвестная величина турбулентной вязкости, которая не может быть определена из уравнений гидродинамики.

Турбулентная вязкость зависит от многих факторов, но прежде всего от характера и параметров среднего движения. Так, например, при течении и волнении в море различны не только значения турбулентной вязкости, но и тенденции изменения ее с глубиной. Вопрос о турбулентной вязкости при волнении изучен еще очень слабо.

Методы исследования турбулентной вязкости могут быть различные. Наиболее надежным является прямой инструментальный метод определения коэффициента корреляции между пульсациями компонент скорости. В случае плоского движения напряжение турбулентного трения (1.16) и коэффициент турбулентной вязкости (1.17) выражаются через пульсации горизонтальной компоненты скорости вдоль основного движения u' и вертикальные пульсации w' :

$$\tau_{турб} = \rho |u'w'|; \quad \mu_{турб} = \frac{\rho |\bar{u}'w'|}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}. \quad (1.19)$$

Прямое инструментальное определение коэффициента корреляции между пульсациями скорости требует применения весьма совершенной аппаратуры с малой инерционностью. Поэтому усилия ряда ученых (Шмидта, Прандтля, Кармана) сводились к тому, чтобы найти какие-то соотношения, позволяющие вместо трудноизмеримой величины $u'w'$ пользоваться легкими измеримыми средними скоростями и их градиентами. При этом они обычно привлекали малообоснованные гипотезы, что снижало ценность полученных ими соотношений. Однако эти соотношения применяются некоторыми исследователями до настоящего времени. Не останавливаясь подробно на ходе их рассуждений [2], приведем полученные Прандтлем и Карманом соотношения.

Прандтель выразил напряжение турбулентного трения через так называемую "длину пути смещения" l и градиент средней скорости $\frac{du}{dz}$

$$\tau_{турб} = \rho |u'w'| = l^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \rho. \quad (1.20)$$

Карман освободил выражение для напряжения турбулентного трения от неподдающейся прямому измерению величины пути смещения:

$$\tau_{турб} = \frac{x^2}{\left(\frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} \right)^2} \cdot \quad (1.21)$$

Карман принимает коэффициент α равным 0,38 – 0,40 – величина, найденная Никурадзе для аэродинамических труб.

Исходя из (1.20) и (1.21), получим выражение для коэффициента турбулентной вязкости через градиент скорости и его производную:

$$\mu_T = \rho \alpha^2 \frac{\left(\frac{du}{dz}\right)^3}{\left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)^2} . \quad (1.22)$$

Л и т е р а т у р а

1. Ко chin Н.Е, К и б е л ь И.А., Р о з е Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.1. – М.: Физматгиз., 1963.
2. Л о й ц я н с к и й Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970.

ГЛАВА II

УСТАНОВИВШИЕСЯ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 2.1. Потенциальное волновое движение жидкости

Волны на поверхности воды образуются под действием силы тяжести и сил поверхностного натяжения, или сил капиллярности. Поверхностное натяжение начинает играть роль при образовании волн с длиной волны в несколько сантиметров. Волны, в образовании которых определяющую роль играют силы поверхностного натяжения, называются капиллярными. Волны, в образовании которых определяющую роль играет сила тяжести, называются гравитационными. Если каким-либо образом поверхность воды выведена из горизонтального положения, то сила тяжести будет стремиться вернуть эту поверхность в ее равновесное положение и заставит колебаться. Начальные возмущения поверхности воды в море (океане, озере или другом водоеме) обычно создает ветер.

Пусть на поверхность воды, находившейся вначале под действием приложенного к ней всюду одинакового атмосферного давления в состоянии равновесия, действует добавочное давление p в течение малого промежутка времени ΔT . Это добавочное давление, являющееся функцией координат, сообщает частицам воды начальные скорости, т.е. выводит ее из состояния равновесия. Предполагая, что вода является идеальной несжимаемой однородной жидкостью, значения этих скоростей найдем интегрированием уравнений Эйлера (1.5) за промежуток времени ΔT :

$$\int_0^{\Delta T} \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} dt = - \int_0^{\Delta T} (\underline{V} \underline{V}) \underline{V} dt + \int_0^{\Delta T} F dt - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \int_0^{\Delta T} p dt. \quad (2.1)$$

Предположим, что добавочное давление p настолько велико, что $\int_0^{\Delta T} p dt = J$ конечен, несмотря на малость интервала времени ΔT . Остальные интегралы в правой части уравнения (2.1) будут

малыми величинами порядка ΔT . Учитывая, что в начальный момент скорость \underline{V} была равна нулю, из (2.1) найдем

$$\underline{V} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} J = - \operatorname{grad} \left(\frac{J}{\rho} \right).$$

Скорость \underline{V} движения, возникающего в воде под действием приложенного к его поверхности импульса давления J , выражается как градиент некоторой функции $\phi_1 = \frac{J}{\rho}$. Следовательно, это движение является безвихревым. Функция ϕ_1 называется потенциалом скорости, и если движение неуставнившееся, то потенциал скорости ϕ_1 является функцией четырех аргументов x, y, z, t . При этом очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \phi_1 = \operatorname{grad} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}.$$

Безвихревой характер возникшего движения сохранится и в дальнейшем, поскольку оно будет происходить под действием силы тяжести, являющейся потенциальной:

$\underline{F} = -\operatorname{grad} U$,
где U – потенциал силы тяжести. Учитывая все это, перепишем систему уравнений (2.1) в виде одного векторного уравнения:

$$\operatorname{grad} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right) = 0.$$

Это означает, что выражение в скобках не зависит от координат и может быть функцией только времени:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = f(t). \quad (2.2)$$

Если ось O_z направлена вертикально вверх, то потенциал силы тяжести $U = gz$. Введем вместо ϕ_1 функцию ϕ_2 так, что $\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - f(t)$, и перепишем "интеграл Коши" (2.2) в виде $\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right)^2 \right] + gz + \frac{p}{\rho} = 0$. (2.3)

Преобразовав уравнение неразрывности (1.9) к виду

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} = 0,$$

можно найти из него ϕ_2 , а из выражения (2.3) – давление p .

Чтобы выбрать из множества решений уравнения Лапласа то единственное, которое соответствует данной задаче, нужно обратиться к граничным и начальным условиям. Пусть жидкость ограничена дном и свободной поверхностью. На свободной поверхности давление имеет постоянную величину p_0 , равную атмосферному давлению. Вблизи дна, т.е. твердой стенки, жидкость течет параллельно этой стенке, и нормальная составляющая скорости равна нулю:

$$\left[\frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right]_{z=-H} = 0. \quad (2.4)$$

Преобразуем соотношение (2.3), введя функцию $\phi = \phi_2 + \frac{p_0}{\rho} t$:

$$\frac{p - p_0}{\rho} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g z = 0. \quad (2.5)$$

Для свободной поверхности $z = \zeta$, $p = p_0$ и

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=\zeta} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{z=\zeta}^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{z=\zeta}^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=\zeta}^2 \right] + g \zeta = 0. \quad (2.6)$$

Кинематическое граничное условие определяет связь между отклонением свободной поверхности $\zeta(x, y, t)$ и вертикальной составляющей скорости w на свободной поверхности, т.е. при $z = \zeta$:

$$\left[w \right]_{z=\zeta} = \left[\frac{d\zeta}{dt} \right]_{z=\zeta} = \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} u + \frac{\partial \zeta}{\partial y} v \right]_{z=\zeta}. \quad (2.7)$$

В начальный момент времени $t = 0$ задаются отклонение свободной поверхности от положения равновесия и потенциал скорости на ней: $\zeta(x, y, 0) = f_2(x, y)$ и $\phi(x, y, 0) = f_2(x, y)$.

Составляющие скорости u, v, w частиц жидкости по осям координат легко найти, зная потенциал скорости ϕ :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Динамическое уравнение (2.5) (как и граничные условия (2.6), (2.7)) является нелинейным, и его решение поэтому представляет большие математические трудности.

Существуют две основные приближенные теории волн: теория волн бесконечно малой амплитуды, исходящая из допущения, что амплитуда волн очень мала по сравнению с длиной волны, и являющаяся линейной, и теория длинных волн, предполагающая малость глубины жидкости по сравнению с длиной волны.

§ 2.2. Гравитационные волны бесконечно малой амплитуды при бесконечной глубине жидкости

Рассмотрим волны, амплитуда которых пренебрежимо мала по сравнению с длиной волны. Будем считать, что амплитуда этих волн является величиной бесконечно малой. В этом случае скорости частиц $\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ также являются бесконечно малыми величинами и квадратами их в уравнении (2.5) можно пренебречь:

$$\frac{p - p_0}{\rho} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + g z = 0.$$

Соответственно упрощается условие на свободной поверхности $z = \zeta$ (2.6):

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=\zeta} + g \zeta = 0.$$

- 20 -

Ввиду того что отклонения ζ от невозмущенного уровня бесконечно малы, здесь можно брать $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ при $z = 0$ вместо $z = \zeta$. Тогда

$$\zeta = - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial \phi(x, y, 0, t)}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Продифференцируем это выражение по t :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 \phi(x, y, 0, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Производную $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ можно принять равной вертикальной составляющей скорости w , так как для волн бесконечно малой амплитуды (2.7) упрощается: $\frac{\partial \zeta}{\partial t} \approx \frac{d\zeta}{dt}$. Учитывая, что $w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$,

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} = - \frac{1}{g} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right]_{z=0}. \quad (2.9)$$

Таким образом, происходящее на поверхности жидкости под действием силы тяжести потенциальное волновое движение с бесконечно малой амплитудой характеризуется линейной системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{p - p_0}{\rho} - \frac{\partial \phi}{\partial t} - g z + \frac{p_0}{\rho}, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \\ \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} = - \frac{1}{g} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right]_{z=0}, \\ \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=-H} = 0 \\ \frac{\partial \phi(x, y, 0, 0)}{\partial t} = f_1(x, y), \\ \phi(x, y, 0, 0) = f_2(x, y). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай плоских, или двумерных, волн, когда движение каждой частицы жидкости происходит параллельно плоскости xOz , причем скорости и давление не зависят от координаты y . Потенциал скорости будем искать в виде плоских волн, распространяющихся в направлении положительной оси Ox , амплитуда которых является функцией вертикальной координаты z :

$$\phi = A(z) \sin(kx - \omega t).$$

Подставим это соотношение в уравнение неразрывности $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$ получим уравнение для $A(z)$:

$$\frac{d^2 A}{dz^2} - k^2 A = 0.$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$A(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}, \quad (2.11)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Для случая бесконечно глубокой жидкости при возрастании глубины, т.е. при $z \rightarrow \infty$, $C_2 e^{-kz} \rightarrow \infty$. Очевидно, что предположение о неограниченном возрастании с глубиной $A(z)$, а следовательно и потенциала $\phi(z)$ и скоростей не имеет физического смысла. Поэтому постоянную C_2 следует положить равной нулю. При этом вместо (2.10) получим

$$\phi(x, z, t) = C_1 e^{+kz} \sin(kx - \omega t). \quad (2.12)$$

Потенциал скорости экспоненциально убывает с глубиной, что является следствием условия неразрывности движения жидкости. Зная потенциал скорости, можно окончательно определить вид свободной поверхности из уравнения (2.8)

$$\zeta = \frac{C_1 \omega}{g} \cos(kx - \omega t). \quad (2.13)$$

Таким образом, по свободной поверхности жидкости распространяются прогрессивные волны с амплитудой $a = \frac{C_1 \omega}{g}$, частотой ω и длиной $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Покажем, что волны на поверхности жидкости обладают дисперсией, выражющейся в зависимости их скорости распространения от частоты. Дифференцируя уравнение для потенциала скорости (2.12) по z и t и подставляя полученные производные $\frac{\partial \phi}{\partial z} = C_1 k e^{kz} \sin(kx - \omega t)$ и $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -C_1 \omega^2 e^{kz} \sin(kx - \omega t)$ в уравнение (2.9), выражающее граничные условия на свободной поверхности, находим дисперсионное уравнение гравитационных волн бесконечно малой амплитуды

$$\omega^2 = gk. \quad (2.14)$$

Это соотношение является очень важным в теории поверхностных волн жидкости: оно позволяет определить длину λ и фазовую скорость c волн, если известны ее частота ω или период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (рис. 2.1):

$$\lambda = \frac{g T^2}{2\pi} = \frac{g 2\pi}{\omega^2},$$

$$c = \frac{g T}{2\pi} = \frac{g}{\omega} = \frac{\omega}{k}.$$

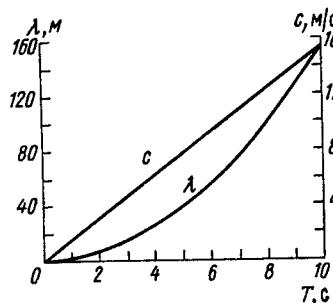


Рис. 2.1. Зависимость между периодом, фазовой скоростью и длиной гравитационной волны в глубоком море

Скорости частиц жидкости в волновом движении выражаются через потенциал ϕ :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{agke^{kz}}{\omega} \cos(kx - \omega t),$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{agke^{kz}}{\omega} \sin(kx - \omega t). \quad (2.15)$$

С учетом же соотношения (2.14) они будут иметь вид

$$u = a\omega e^{kz} \cos(kx - \omega t),$$

$$w = a\omega e^{kz} \sin(kx - \omega t). \quad (2.16)$$

Уравнения (2.15) и (2.16) показывают, что амплитуды горизонтальной и вертикальной составляющих скорости равны друг другу и убывают с глубиной по экспоненциальному закону. При этом более короткие волны затухают с глубиной быстрее, чем длинные. Фаза горизонтальной составляющей скорости и совпадает с фазой колебаний поверхности, фаза вертикальной составляющей w сдвинута относительно них на $\frac{\pi}{2}$.

Найдем теперь траектории частиц в волне интегрированием уравнений для скоростей частиц u и w . При этом ввиду малости амплитуды волн положим в правых частях этих уравнений координаты x и z равными тем значениям x_0 и z_0 , которые они имеют при равновесном положении частиц:

$$u = \frac{dx}{dt} = a\omega e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t),$$

$$w = \frac{dz}{dt} = a\omega e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t).$$

Проинтегрировав эти уравнения по времени, найдем, что

$$\begin{aligned}x &= x_0 - a e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t), \\z &= z_0 + a e^{kz_0} \cos(kx_0 + \omega t).\end{aligned}\quad (2.17)$$

Исключая время, заметим, что траекториями частиц, совершающих волновое движение, являются окружности:

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 e^{2kz_0}.$$

Радиусы окружностей $r = a e^{kz_0}$ экспоненциально убывают с глубиной. При распространении волны в положительном направлении оси x каждая частица описывает окружность в направлении часовой стрелки. На гребне частицы движутся в направлении распространения волны, во впадине — навстречу. Угловая скорость вращения частиц по орбитам равна частоте волны ω . Частицы, находящиеся на одной вертикали, движутся с одинаковой фазой.

Давление в жидкости при волнении можно также определить из уравнения (2.5) с помощью выражения для ϕ (2.12), в котором C_1 заменено через амплитуду волны $a = C_1 \frac{\omega}{g}$:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + a g e^{kz} \cos(kx - \omega t) - gz. \quad (2.18)$$

Положим $a g e^{kz} \cos(kx - \omega t) \approx a g e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t)$ и применим соотношения (2.17). Тогда вместо уравнения (2.18) получим

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} - gz_0.$$

Это выражение показывает, что частицы, находившиеся при равновесии на одной горизонтальной плоскости $z = z_0$ во все время движения, образуют поверхность, на которой давление одно и то же, равное начальному значению при равновесии. В то же время давление в фиксированной точке внутри жидкости не остается постоянным.

Пусть координаты этой точки $x = x_1$ и $z = z_1$ и давление

$$p_1 = p_0 - \rho g z_1 + \rho g a e^{kz_1} \cos(kx_1 - \omega t).$$

Давление в точке $x = x_1, z = z_1$ жидкости при волновом движении складывается из атмосферного p_0 , гидростатического $\rho g z_1$ и волнового

$$\Delta p = \rho g a e^{kz_1} \cos(kx_1 - \omega t).$$

Итак, сопоставив колебания давления Δp в точке, лежащей на вертикали $x = x_1$ на глубине z_1 с колебаниями поверхности вдоль той же вертикали $\zeta = a \cos(kx_1 - \omega t)$, мы видим, что те и другие колебания совпадают по фазе, амплитуда колебаний давления пропорциональна амплитуде волны a , но убывает как e^{kz} ($z < 0$) по мере удаления от поверхности в глубь жидкости.

Выше было показано, что по тому же закону убывают скорости частиц и радиусы их орбит. Чтобы не говорить отдельно о затуха-

нии скоростей, радиусов орбит и давления, употребляют общий термин "затухание волн с глубиной". Затухание волн с глубиной происходит избирательно: более короткие волны затухают быстрее длинных. Это явление называется гидродинамической фильтрацией.

§ 2.3. Гравитационные волны бесконечно малой амплитуды при конечной глубине жидкости

В случае, если глубина жидкости ограничена, постоянная C_2 в соотношении (2.11) не равна нулю и может быть определена из условия (2.4) для вертикальной составляющей скорости у дна:

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=-H} = 0.$$

Поскольку

$$\phi = A(z) \sin(kx - \omega t) \quad \text{и} \quad A(z) = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz},$$

$$\text{получаем} \quad C_1 e^{-kH} - C_2 e^{kH} = 0.$$

Обозначим

$$C_1 e^{-kH} = \frac{C}{2}, \quad \text{тогда и} \quad C_2 e^{kH} = \frac{C}{2}.$$

Отсюда

$$A(z) = \frac{C}{2} e^{k(H+z)} + e^{-k(H+z)} = C \operatorname{ch} k(H+z),$$

и потенциал скорости

$$\phi = C \operatorname{sh} k(H+z) \sin(kx - \omega t). \quad (2.19)$$

Потенциал скорости должен удовлетворять условию (2.9) на свободной поверхности

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=0} = - \frac{1}{g} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right]_{z=0},$$

которое дает соотношение

$$k \operatorname{sh} kH = \frac{\omega^2}{g} \operatorname{ch} kH,$$

что, в свою очередь, определяет связь между периодом и длиной волны:

$$\lambda = \frac{g T^2}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda}$$

и между периодом и скоростью волны:

$$c = \frac{g T}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda}.$$

(2.20)

Отсюда вытекает и соотношение между длиной волны и ее скоростью:

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \quad \text{и} \quad \frac{2\pi H}{\lambda}$$

Скорость волны в общем случае зависит как от периода волны, так и от глубины жидкости. Если глубина жидкости велика по сравнению с длиной волны, т.е. $\frac{H}{\lambda} \gg 1$ и $\operatorname{th} 2\pi \frac{H}{\lambda} \approx 1$, то из соотношения (2.20) мы получим уже известное выражение

$$c = \frac{gT}{2\pi}.$$

Если глубина жидкости мала по сравнению с длиной волны (как, например, при распространении приливных волн в морях и океанах), т.е. $\frac{H}{\lambda} \ll 1$ и $\operatorname{th} 2\pi \frac{H}{\lambda} \approx 2\pi \frac{H}{\lambda}$, то скорость волн оказывается зависящей только от глубины жидкости: $c = (gH)^{1/2}$.

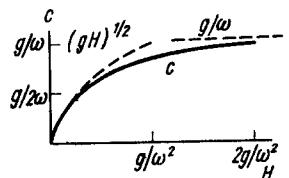


Рис. 2.2. Зависимость фазовой скорости от длины волны при постоянной глубине [1]

На рис. 2.2. показана зависимость скорости волны с от относительной длины волны $\frac{\lambda}{H}$ при неизменной глубине. При увеличении λ происходит переход от зависимости $(g\lambda/2\pi)^{1/2}$ на глубокой воде ($\lambda \ll H$) к зависимости $(gH)^{1/2}$, справедливой для длинных волн (условие мелкой воды $\lambda \gg H$).

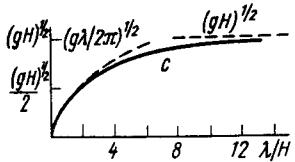


Рис. 2.3. Зависимость фазовой скорости волны от глубины жидкости для волн постоянной частоты [1]

На рис. 2.3 представлена зависимость скорости волны с от глубины H для волны с постоянной частотой. В этом случае происходит переход от зависимости $(gH)^{1/2}$, справедливой для длинных волн на мелкой воде, к зависимости g/ω , которая справедлива для волн на глубокой воде.

Отклонение свободной поверхности находим из уравнения (2.8) с помощью выражения (2.19) для ϕ :

$$\zeta = \frac{C\omega}{g} \operatorname{ch} k H \cos(kx - \omega t).$$

Отсюда видно, что амплитуда волны

$$a = \frac{C\omega}{g} \operatorname{ch} k H \quad \text{и} \quad C = \frac{ag}{\omega} (\operatorname{ch} k H)^{-1}. \quad (2.21)$$

Составляющие скоростей частиц, совершающих волновое движение, также могут быть найдены через потенциал скорости:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{agk}{\omega} \cdot \frac{\operatorname{ch} k(H+z)}{\operatorname{sh} k H} \cos(kx - \omega t),$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{agk}{\omega} \cdot \frac{\operatorname{sh} k(H+z)}{\operatorname{ch} k H} \sin(kx - \omega t).$$

Для определения траекторий частиц воспользуемся опять условием малости амплитуды волн и подставим в правые части уравнений вместо x, z те координаты x_0 и z_0 , которые частица жидкости имела в невозмущенном состоянии:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{agk}{\omega} \cdot \frac{\operatorname{ch} k(H+z_0)}{\operatorname{sh} k H} \cos(kx_0 - \omega t),$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{agk}{\omega} \cdot \frac{\operatorname{sh} k(H+z_0)}{\operatorname{ch} k H} \sin(kx_0 - \omega t).$$

Интегрируем эти уравнения:

$$x - x_0 = - \frac{agk}{\omega} \cdot \frac{\operatorname{ch} k(H+z_0)}{\operatorname{sh} k H} \sin(kx_0 - \omega t),$$

$$z - z_0 = \frac{agk}{\omega} \cdot \frac{\operatorname{sh} k(H+z_0)}{\operatorname{ch} k H} \cos(kx_0 - \omega t)$$

и с помощью несложных математических выкладок получаем следующую формулу:

$$\left[\frac{(x - x_0)^2}{a \operatorname{ch} k(H + z_0)} \right]^2 + \left[\frac{(z - z_0)^2}{a \operatorname{sh} k H} \right]^2 = 1.$$

Значит, при конечной глубине жидкости траекторией частицы, совершающей волновое движение с бесконечно малой амплитудой, является не окружность, а эллипс с горизонтальной полуосью

$$\frac{a \operatorname{ch} k(H + z_0)}{\operatorname{sh} k H}$$

и вертикальной

$$\frac{a \operatorname{sh} k(H + z_0)}{\operatorname{sh} k H}.$$

Вертикальная ось эллипса быстрее затухает с глубиной, чем горизонтальная. В результате этого орбиты все более вытягиваются по мере приближения ко дну. У самого дна $z_0 = -H$ и $\operatorname{sh} k(H + z_0) = 0$, т.е. частицы движутся у дна только в горизонтальном направлении. Траектории частиц жидкости в синусоидальной волне в жидкости конечной глубины даны на рис.2.4.

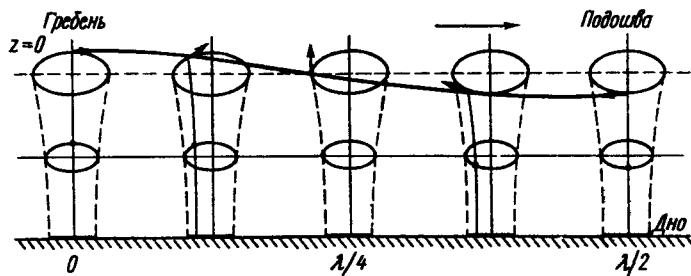


Рис.2.4. Траектории частиц жидкости в гармонической волне при конечной глубине жидкости ($\frac{H}{\lambda} = 0,15$). Волна распространяется слева направо [11]

§ 2.4. Групповая скорость волн

При любой степени волнения на поверхности воды присутствуют волны разных периодов, имеющие различные скорости распространения. Накладываясь друг на друга, они образуют группы, распространяющиеся со скоростью, отличной от скорости отдельных волн.

Схематизируем явление и рассмотрим упрощенный случай, когда

на поверхности жидкости присутствуют две системы синусоидальных волн: $\zeta_1 = a \cos(k_1 x - \omega_1 t)$

$$\text{и } \zeta_2 = a \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

с одинаковыми амплитудами a , распространяющиеся в одном и том же направлении x , но с разными фазовыми скоростями $c_1 = \frac{g}{\omega_1}$ и $c_2 = \frac{g}{\omega_2}$. Пусть обе системы волн имеют близкие частоты $(|\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1}| \ll 1)$ и длины $(\frac{|k_1 - k_2|}{k_1} \ll 1)$.

Результирующее колебание свободной поверхности

$$\zeta = 2a \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

выражается произведением двух гармонических функций координат и времени.

Первая из них медленно изменяется со временем и в направлении распространения волны, так как имеет малые частоты $1/2(\omega_1 - \omega_2)$ и большие длины $\frac{4\pi}{k_1 - k_2}$.

Вторая гармоническая функция колеблется во времени и пространстве почти с теми же периодами, что и накладывающиеся системы волн:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}$$

$$\text{и } \lambda = \frac{4\pi}{k_1 + k_2},$$

так что первый множитель

$$2a \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

можно рассматривать как амплитуду результирующих волн, медленно изменяющуюся от нуля до $2a$, т.е. до удвоенного значения амплитуд складываемых волн. Совокупность волн (с периодом T и длиной λ), амплитуды которых последовательно возрастают от 0 до $2a$, а затем убывают от $2a$ до 0, образует группу. Максимум группы перемещается со скоростью, называемой "групповой".

Групповая скорость отлична от фазовой скорости отдельных волн. Амплитуда волн в группе достигает максимума при

$$\left| \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \right| = 1.$$

Отсюда

$$x = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} t + \frac{\pi n}{k_1 - k_2}$$

и групповая скорость

$$c_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \approx \frac{d\omega}{dk} .$$

Это выражение для групповой скорости справедливо всегда независимо от частных предположений, использованных при его выводе, прежде всего о количестве волновых систем, образующих группу волн. Более общий вывод выражения $c_g = \frac{d\omega}{dk}$ с использованием метода Фурье изложен в [1,2]. Используя $\omega = ck$, имеем

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = c + k \frac{dc}{dk} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} ,$$

откуда следует, что групповая скорость c_g может быть как меньше, так и больше фазовой скорости волн в зависимости от величины $\frac{dc}{d\lambda}$. В случае так называемой нормальной дисперсии $\frac{dc}{d\lambda} > 0$ и групповая скорость меньше фазовой, это соотношение реализуется для гравитационных волн на глубокой воде. Если $\frac{dc}{d\lambda} = 0$, фазовая скорость равна групповой, что справедливо для длинных волн на мелкой воде. В случае аномальной дисперсии $\frac{dc}{d\lambda} < 0$ и $c_g > c$, это соотношение выполняется для капиллярных волн. Например, фазовая скорость волн $c = \frac{\omega}{k}$ в случае бесконечно глубокой жидкости превышает групповую в два раза. В самом деле, поскольку $\omega = (gk)^{1/2}$, то

$$c_g = \frac{d(gk)^{1/2}}{dk} = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} ,$$

т.е.

$$c_g = \frac{c}{2} .$$

В случае конечной глубины жидкости $\omega = (gk \tanh kH)^{1/2}$ и

$$c_g = \frac{1}{2} \left[\frac{g}{k} \tanh kH \right]^{1/2} \left(1 + \frac{2kH}{\sinh 2kH} \right) ,$$

или

$$c_g = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{2kH}{\sinh 2kH} \right) .$$

В случае очень малой глубины, когда $kH \ll 1$,

$$\frac{2kH}{\sinh 2kH} \approx 1$$

и групповая скорость становится равной фазовой. Физически это объясняется отсутствием дисперсии волн на мелкой воде, поскольку скорость их зависит в этом случае только от глубины жидкости:

$$c = (gH)^{1/2} .$$

§ 2.5. Энергия волн

Энергия волн на поверхности жидкости складывается из кинетической энергии движения ее частиц и из потенциальной, обусловленной отклонением частиц в ту или иную сторону от положения равновесия.

Кинетическая энергия волны

$$\mathcal{E}_k = \frac{\rho}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz ,$$

где S – площадь, ограниченная профилем волны, двумя вертикалями и дном.

Согласно теореме Грина интеграл по площади S можно заменить интегралом по контуру L , ограничивающему эту площадь:

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz = \int_L \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dL .$$

На дне $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$, поэтому вдоль линии дна этот интеграл равен нулю. Результаты интегрирования по двум вертикалям в сумме тоже дадут нуль, так как значения ϕ вдоль этих вертикалей будут равны вследствие периодичности движения, а значения $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ будут противоположного знака. Следовательно, интеграл по контуру L сводится к интегралу по поверхности жидкости в пределах от 0 до λ . Ввиду малости амплитуд, а следовательно и крутизны волн, производную $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ по нормали к поверхности можно заменить производной по z и интегрировать по оси Ox , так как $dL \approx dx$. В результате получим

$$\mathcal{E}_k = \frac{\rho}{2} \int_0^\lambda \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} dx .$$

Подставляя сюда выражение для потенциала скорости

$$\phi = \frac{ag}{\omega} \cdot \frac{\sinh k(H+z)}{\sinh kH} \sin(kx - \omega t) ,$$

выведенное из соотношений (2.19) и (2.21), и учитывая, что на поверхности жидкости $z=0$, окончательно найдем выражение для кинетической энергии волн

$$\mathcal{E}_k = \frac{\rho g a^2 \lambda}{4} . \quad (2.22)$$

Потенциальная энергия элемента жидкости длиной dx и высотой от невозмущенного уровня ζ

$$d\mathcal{E}_n = \rho g dx \int_0^\zeta z dz = \rho g \frac{\zeta^2}{2} dx .$$

Потенциальная энергия всей волны длиной λ тогда равна

$$\epsilon_{\text{п}} = \frac{\rho g}{2} \int_0^{\lambda} \zeta^2 dx,$$

где $\zeta = a \cos(kx - \omega t)$.

Произведя интегрирование, получим

$$\epsilon_{\text{п}} = \frac{\rho g a^2 \lambda}{4}. \quad (2.23)$$

Формулы (2.22) и (2.23) показывают, что кинетическая и потенциальная энергии постоянны в любой момент времени и равны друг другу.

Полная энергия волны

$$\epsilon = \frac{\rho g a^2 \lambda}{2} = \frac{1}{8} \rho g h^2 \lambda.$$

Часто применяют выражение энергии, отнесенной к единице длины по оси Ox :

$$E = \frac{1}{8} \rho g h^2.$$

Рассмотренная в § 4 групповая скорость является чисто кинематической волновой характеристикой, так как она описывает скорость распространения группы волн. Однако она имеет важную динамическую роль — с групповой скоростью происходит перенос энергии волн.

Вычислим усредненный за период волны поток энергии Θ , проходящий через сечение единичной ширины и высоты H , расположенное вдоль фронта волны, в направлении оси Ox . Поток энергии Θ определяется переносом кинетической энергии и работой сил волнового давления над рассматриваемым объемом. Используя (2.18), имеем

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\zeta}^{H-\zeta} \rho u \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) dz dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\zeta}^{H-\zeta} \left\{ \frac{\rho u}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] - \rho g z u - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} u \right\} dz dt. \end{aligned}$$

При интегрировании по времени исчезают первые два слагаемых, так как в них входят нечетные степени тригонометрических функций:

$$\Theta = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\zeta}^{H-\zeta} -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} u dt dz.$$

Используя выражение для потенциала скорости ϕ , получаем

$$\Theta = \frac{\rho h^2}{8} \cdot \frac{\omega^3}{2 k^3} \cdot \frac{1}{\sinh k H} \left(1 + \frac{2 \operatorname{sh} k H}{\operatorname{sh} 2 k H} \right) =$$

$$= \frac{\rho g h^2}{8} \cdot \frac{c}{2} \left(1 + \frac{2 \operatorname{sh} k H}{\operatorname{sh} 2 k H} \right) = E c_r.$$

Применяя аналогичный метод, можно показать, что импульс волн, как и энергия, переносится с групповой скоростью.

§ 2.6. Капиллярные волны

При уменьшении длины поверхностных волн силы поверхностного натяжения начинают оказывать на них все большее влияние. Для волн длиной в несколько миллиметров силы поверхностного натяжения доминируют над гравитационными силами. Интервал длин волн от 0,2 см до 20 см, в котором гравитационные и поверхностные силы имеют величины одного порядка, называется гравитационно-капиллярным. Волны с длиной более 20 см относятся к гравитационным; меньше 0,2 см — к капиллярным. Короткие гравитационно-капиллярные и капиллярные волны иногда называют рябью. Сила поверхностного натяжения, действующая на единицу площади поверхности, равна [3]

$$P_{\text{п}} = -a \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (2.24)$$

где a — коэффициент поверхностного натяжения.

Для учета роли поверхностного натяжения в образовании волн силу поверхностного натяжения необходимо включить в интеграл Коши (2.5). Повторяя преобразования § 2, выполненные для гравитационных волн, получим систему линейных уравнений для плоских волн бесконечно малой амплитуды, которая учитывает влияние капиллярности:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= -\frac{\partial \phi}{\partial t} - g z + \frac{p_0}{\rho} + a \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \\ \left[-\frac{a}{\rho} \cdot \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial z} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right]_{z=0} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Границные условия на дне и кинематическое условие на поверхности имеют вид, аналогичный для гравитационных волн, т.е. (2.4) и (2.7).

Потенциал скорости, являющийся решением (2.25) с учетом (2.4), равен

$$\phi = \frac{a \omega \operatorname{ch} k(z + H)}{K \operatorname{sh} k H} \sin(kx - \omega t). \quad (2.26)$$

Подставив ϕ в динамическое граничное условие (2.25), получим дисперсионное соотношение для гравитационно-капиллярных волн

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\alpha k^3}{\rho} \right) \operatorname{th} kH . \quad (2.27)$$

Из (2.27) следует выражение для фазовой скорости гравитационно-капиллярных волн

$$c = \frac{\omega}{k} = \left[\left(\frac{g}{k} + \frac{\alpha k}{\rho} \right) \operatorname{th} kH \right]^{1/2} = \left(\frac{g}{\omega} + \frac{\alpha k^2}{\rho \omega} \right)^{1/2} \operatorname{th} kH . \quad (2.28)$$

Первое слагаемое – чисто гравитационное, оно возрастает при увеличении длины волны. Второе слагаемое – чисто капиллярное – уменьшается с ростом длины волны. Поэтому $c(\lambda)$ имеет минимум, который легко найти из условия $\frac{dc}{d\lambda} = 0$. Длина гравитационно-капиллярной волны на глубокой воде в точке минимума фазовой скорости равна

$$\lambda_m = 2\pi \left(\frac{a}{\rho g} \right)^{1/2} .$$

При $a = 74$ дин/см $\lambda_m = 1,74$ см, а фазовая скорость равна 23,1 см/с.

Групповая скорость гравитационно-капиллярных волн на глубокой воде равна

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g + \frac{3a}{\rho} k^2}{2 \left(gk + \frac{\alpha k^3}{\rho} \right)^{1/2}} . \quad (2.29)$$

Зависимости фазовой и групповой скоростей гравитационно-капиллярных волн от длины волны даны на рис. 2.5. Минимум групповой скорости равен 17,8 см/с, он наблюдается при $\lambda = 4,4$ см, фазовая скорость равна при этом 28 см/с ($a = 74$ дин/см).

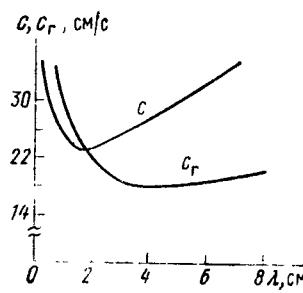


Рис. 2.5. Зависимость фазовой и групповой скоростей гравитационно-капиллярных волн от длины волны

Эта форма потенциала скорости показывает, что для линейных грави-

тационно-капиллярных волн их характеристики являются аддитивными функциями гравитационных сил и сил поверхностного натяжения. Отсюда, в частности, следует, что энергия гравитационно-капиллярных волн E^{RK} может быть представлена суммой энергий гравитационной и капиллярной частей:

$$E^{RK} = E + E^K .$$

Величина энергии гравитационной части E определяется в § 2.5. Энергия капиллярной части состоит из потенциальной и кинетической энергии. Кинетическая энергия капиллярных волн E_K определяется так же, как и гравитационных – путем замены потенциала скорости на ϕ_k :

$$E_K = \frac{\rho}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz .$$

После подстановки ϕ_k и осреднения получим плотность энергии, отнесенную к единице длины:

$$E_K = \frac{a a^2 k^2}{4} = \frac{a h^2 k^2}{16} .$$

Потенциальная энергия капиллярных волн связана с растяжением поверхности воды. Для плоских двухмерных волн потенциальная энергия, приходящаяся на единицу длины волны λ , определяется разностью длины поверхности волны $\zeta = a \cos(kx - \omega t)$ и длины волны λ . Так как длина поверхности равна

$$l = \int_0^\lambda \left[1 + \left(\frac{d\zeta}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx ,$$

то потенциальная энергия, приходящаяся на единицу длины равна

$$E_{\Pi}^K = \frac{a(1-\lambda)}{\lambda} = \frac{a}{\lambda} \left[\int_0^\lambda \left[1 + \left(\frac{d\zeta}{dx} \right)^2 \right] dx - \lambda \right] .$$

Рассматривая волны малой крутизны, можно учесть, что

$$\left[1 + \left(\frac{d\zeta}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} \approx 1 + \frac{a^2 k^2}{2} \cos^2(kx - \omega t) .$$

В результате имеем

$$E_{\Pi}^K = \frac{a}{\lambda} \left\{ \int_0^\lambda \left[1 + \frac{a^2 k^2}{2} \cos^2(kx - \omega t) \right] dx - \lambda \right\} = \frac{a a^2 k^2}{4} .$$

Полная энергия гравитационно-капиллярных волн, приходящаяся на единицу длины волны, равна

$$E^{RK} = E + (E_K^K + E_{\Pi}^K) = \frac{\rho g h^2}{8} + \frac{a k^2 h^2}{8} = \frac{n^2 (g \rho + a k^2)}{8} .$$

Для волн с длинами меньше 0,2 см действием сил гравитации по сравнению с силами поверхностного натяжения можно пренебречь. Соответственно упрощаются выражения для параметров волн:

$$\omega = \frac{a k^3}{\rho} \operatorname{th} k H,$$

$$c = \left(\frac{a k}{\rho} \operatorname{th} k H \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$E = \frac{a^2 h^2}{8}.$$

§ 2.7. Трохоидальные волны

Теория волн конечной амплитуды была создана в 1802 г. чешским ученым, профессором Пражского университета Герстнером [4]. Особенностью этого типа волнового движения является его вихревой характер. Герстнер заранее исходил из предположения, что частицы жидкости в волне описывают окружности, радиусы которых убывают с глубиной по экспонциальному закону. Это допущение основывалось на результатах прямых наблюдений за поведением взвешенных в воде мелких тел при волнении. Наблюдения показали, что эти тела описывают кривую, близкую к окружности, и возвращаются приблизительно в одно и то же положение.

Уравнения, описывающие траектории частиц в переменных Лагранжа a, y для плоских волн, имеют следующий вид:

$$x = a + a e^{ky} \sin(ka - \omega t), \quad (2.30)$$

$$z = y - a e^{ky} \cos(ka - \omega t).$$

Здесь ось Oz по-прежнему направлена вертикально вверх, а ось Ox совпадает с направлением распространения волн.

Проверим, удовлетворяют ли уравнения (2.30) динамическому уравнению (1.4), уравнению неразрывности (1.10) и граничному условию на свободной поверхности ($p = p_0$).

Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа для случая плоского движения жидкости постоянной плотности выражается так:

$$\frac{D(x, z)}{D(a, y)} = \text{const.}$$

Входящие в определитель Остроградского производные $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial y}$ найдем из уравнений (2.30):

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1 + k a e^{ky} \cos(ka - \omega t),$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = k a e^{ky} \sin(ka - \omega t),$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = k a e^{ky} \sin(ka - \omega t),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - k a e^{ky} \cos(ka - \omega t).$$

Вычислим определитель Остроградского:

$$\frac{D(x, z)}{D(a, y)} = 1 - k^2 a^2 e^{2ky}.$$

Определитель Остроградского действительно является постоянной величиной, не зависящей от времени. Следовательно, условие неразрывности выполнено.

Обратимся теперь к динамическим уравнениям. Поскольку в направлении распространения волн массовые силы не действуют, а в вертикальном направлении действует только сила тяжести, динамические уравнения запишутся так:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g.$$

Умножим первое из этих уравнений на dx , второе на dz и сложим:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dz + g dz + \frac{1}{\rho} dp = 0. \quad (2.32)$$

Из системы уравнений (2.30) найдем $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = - \omega^2 (x - a),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = - \omega^2 (z - y).$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dz =$$

$$= - \omega^2 [(x - a) d(x - a) + (z - y) d(z - y) + (x - a) da + (z - y) dy] -$$

$$= - \frac{\omega^2}{2} d[(x - a)^2 + (z - y)^2] + \omega^2 [(x - a) da + (z - y) dy] =$$

$$= - \frac{\omega^2}{2} d(a^2 e^{2ky}) + \frac{\omega^2}{k} a d[e^{ky} \cos(ka - \omega t)].$$

Значит, сумма, стоящая в левой части этого выражения, является полным дифференциалом, и уравнение (2.32) можно преобразовать следующим образом:

$$-\frac{d}{2} \left[\frac{\omega^2 a^2 e^{2ky}}{2} - \frac{\omega^2 a e^{ky}}{k} \cos(ka - \omega t) \right] + d \left(g z + \frac{p}{\rho} \right) = 0.$$

Отсюда ясно, что

$$\frac{p}{\rho} + g z - \frac{\omega^2 a^2 e^{2ky}}{2} + \frac{\omega^2}{2k} a e^{ky} \cos(ka - \omega t) = \text{const.}$$

Это уравнение соответствует условию, что x и z выражаются уравнениями трохоиды (2.30). Поэтому если найденное отсюда давление p подставить в динамические уравнения (2.31), то эти уравнения будут справедливы и для трохоидальных волн.

Найдем это давление P . Так как на свободной поверхности давление постоянно и равно P_0 , а $y = 0$, то

$$\text{const} = \frac{P_0}{\rho} + a \left(g - \frac{\omega^2}{k} \right) \cos(ka - \omega t) + \frac{\omega^2 a^2}{2}.$$

Поскольку P_0 не зависит от времени, то множитель при $\cos(ka - \omega t)$ должен обращаться в нуль, т.е. $\omega^2 = g k$.

Таким образом, это равенство — обязательное условие того, что трохоидальные волны удовлетворяют основным уравнениям гидродинамики и условию постоянства давления $p = P_0$ на свободной поверхности жидкости. Поэтому искомое давление

$$p = P_0 - \rho g y - \frac{\omega^2 a^2 \rho}{2} (1 - e^{2ky}). \quad (2.33)$$

Эта форма позволяет найти давление на любой изобарической поверхности, составленной частицами, имеющими одно и то же значение параметра y . Профиль волны в определенный момент времени, например $t = 0$, выразится через параметр a , поскольку $y = 0$ для свободной поверхности:

$$x = a + a \sin ka,$$

$$z = -a \cos ka.$$

Введем угол $\Theta = ka$ и получим

$$x = \frac{\Theta}{k} + a \sin \Theta, \quad (2.34)$$

$$z = -a \cos \Theta.$$

Это уравнение кривой, называемой трохоидой. Построить эту кривую можно следующим образом. Проведем прямую $z = \frac{1}{k} x$. Пусть по этой прямой катится круг радиуса $\frac{1}{k}$ в положительном направлении оси Ox (рис. 2.6). При этом точка M круга, удаленная от центра на расстояние a , описывает трохоиду. В самом деле, ее координаты отвечают уравнениям (2.34) при любом угле Θ . При $\Theta = 0$ уравнения (2.34) дают $x = 0$, $z = -a$, что соответствует рис. 2.6. При повороте на угол Θ центр круга смещается на Θ/k , точка M пере-

ходит в положение M' и перемещается по оси Ox на $a \sin \Theta$ относительно нового положения центра круга O' . При этом горизонтальная координата этой точки $x = \frac{\Theta}{k} + a \sin \Theta$, а ее вертикальная координата $-z = -a \cos \Theta$. Следовательно, построенная указанным методом кривая $MM'ABCDA$ отвечает уравнениям (2.34). Трохоида имеет более крутые вершины и пологие впадины, чем синусоида. В природе профиль, близкий к трохоиде, наблюдается у волн, оставшейся после прекращения действия ветра.

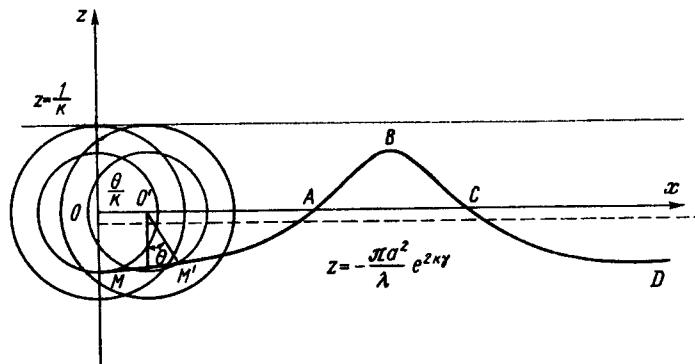


Рис. 2.6. Волна трохоидального профиля. Положение невозмущенного уровня обозначено пунктирной линией. Сплошная прямая линия Ox является геометрическим местом центров круговых орбит поверхностных частиц

Рассмотрим положение трохоиды относительно невозмущенной поверхности. Для этого посчитаем площадь, ограниченную трохоидой и прямой $z = y$, считая части площади, лежащие над прямой, положительными, под прямой — отрицательными:

$$s = \int_0^y (z - y) dx. \quad (2.35)$$

Находим значение $\frac{dx}{dy}$ из уравнения (2.25):

$$dx = (1 + ka e^{ky} \cos ka) da$$

и подставляем его значение в выражение для площади s

$$s = - \int_0^y a e^{ky} \cos ka (1 + ka e^{ky} \cos ka) da = -\pi a^2 e^{2ky}.$$

Площадь s оказалась отрицательной. Следовательно, искомая линия трохоиды, соответствующая положению частиц в состоянии равновесия, лежит ниже линии $z = y$ на величину

$$\Delta z = \frac{s}{\lambda} = -\frac{\pi}{\lambda} a^2 e^{2ky}$$

и имеет вертикальную координату

$$z_0 = \gamma - \frac{\pi}{\lambda} a^2 e^{2ky}. \quad (2.36)$$

Поскольку мы положили $\gamma = 0$ на свободной поверхности, то невозвышенная поверхность жидкости лежит ниже линии $z = 0$, а именно для нее

$$z_0 = -\frac{\pi}{\lambda} a^2.$$

Отсюда следует, что гребни волны лежат выше спокойной поверхности на величину $a + \frac{\pi}{\lambda} a^2$, впадины — ниже на $a - \frac{\pi}{\lambda} a^2$, а высота волны при этом равна $2a$ (рис. 2.6). По построению трохоиды $a \ll 1/k$, где $k = 2\pi/\lambda$. Следовательно, $a \ll \lambda/2\pi$. В предельном случае, когда $a = a$ max $= \lambda/2\pi$, профиль волны имеет вид циклоиды. При этом предельная высота волны составляет $\sim 0,32\lambda$.

Трохоидальная теория дает слишком большое значение максимальной крутизны волн ($\frac{2a}{\lambda} \approx 0,32$). Максимальные значения наблюдаемой в природе крутизны волн оказываются близкими к 0,15.

Ввиду малости отношения a/λ определяемая уравнением (2.36), разность между γ и z_0 является незначительной. Наибольшее значение эта разность имеет на поверхности жидкости при предельно крутой трохоиде ($\pi a/\lambda = 0,5$):

$$\Delta z = -0,5a. \quad (2.37)$$

Но поскольку в природе такие крутые волны не встречаются, то и Δz всегда меньше. Кроме того, Δz очень быстро убывает с глубиной. Так, например, на глубине, равной одной четверти длины волны, величина Δz приблизительно в 23 раза меньше, чем на поверхности.

Рассмотрим изменение со временем давления в некоторой фиксированной точке, например в точке M , имеющей вертикальную координату z_M (рис. 2.7). Давление в этой точке будет колебаться

вследствие того, что она попадает на различные изобарические поверхности. Крайние из этих поверхностей составлены частицами, вертикальные координаты Лагранжа которых равны y_1 и y_2 , где

$$y_1 = z_M + a e^{k y_1 + \frac{\pi}{\lambda} a^2 e^{2ky_1}},$$

$$y_2 = z_M - a e^{k y_1 + \frac{\pi}{\lambda} a^2 e^{2ky_2}}.$$

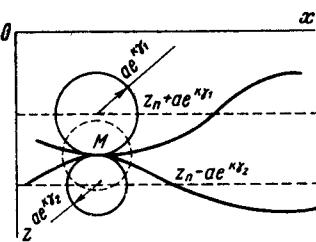


Рис. 2.7. Схема к расчету колебаний давления в фиксированной точке для трохоидальных волн

Давление на верхней изобарической поверхности

$$p_1 = p_0 - \rho g z_M - \rho g a e^{k y_1} - \frac{k a^2}{2} \rho g.$$

Удвоенная амплитуда колебаний давления в точке M равна разности

$$p_2 - p_1:$$

$$2\Delta p = \rho g a (e^{k y_2} + e^{k y_1}).$$

Для всей толщи воды, за исключением поверхностного слоя толщиной порядка высоты волны, с достаточной для практики точностью можно положить

$$\frac{e^{k y_1} + e^{k y_2}}{2} \approx e^{k y}.$$

Здесь y — координаты Лагранжа частиц, центр орбиты которых находится в точке M . Принимая во внимание сделанные допущения, получим следующее выражение для амплитуды колебаний давления в фиксированной точке воды при трохоидальных волнах:

$$\Delta p = \rho g a e^{k y}.$$

Это выражение аналогично выражению для волн бесконечно малой амплитуды § 2.2, но отличается от него тем, что показатель экспоненты в нем содержит координату Лагранжа y , а не координату Эйлера z . Выше было показано, что разница между y и z невелика и убывает с глубиной.

Покажем, что трохоидальные волны сопровождаются вихревым движением жидкости. Для этого посчитаем компоненту вихря скорости по оси Oy :

$$\text{rot}_y V = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Скорости u и w найдем дифференцированием уравнений (2.30) по времени: $u = -a\omega e^{ky} \cos(k\alpha - \omega t) = +\omega(z - y)$,

$$w = -a\omega e^{ky} \sin(k\alpha - \omega t) = -\omega(x - a).$$

Тогда

$$\text{rot}_y V = \omega \left(2 - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial z} \right). \quad (2.38)$$

Чтобы найти $\frac{\partial a}{\partial x}$, продифференцируем оба уравнения (2.30) по x :

$$\frac{\partial a}{\partial x} [1 + a k e^{ky} \cos(k\alpha - \omega t)] + a k e^{ky} \sin(k\alpha - \omega t) \frac{\partial y}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} a k e^{ky} \sin(k\alpha - \omega t) + [1 - a k e^{ky} \cos(k\alpha - \omega t)] \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{1 - a k e^{ky} \cos(k\alpha - \omega t)}{1 - a^2 k^2 e^{2ky}}. \quad (2.39)$$

Дифференцируя оба уравнения (2.30) по z , найдем аналогично

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{1 + a k e^{ky} \cos(ka - \omega t)}{1 - a^2 k^2 e^{2ky}} . \quad (2.40)$$

Подставим выражение (2.39) и (2.40) в (2.38) и получим значение вихря:

$$\text{rot}_y V = \omega \left[2 - \frac{2}{1 - a^2 k^2 e^{2ky}} \right] = - \frac{2 \omega a^2 k^2 e^{2ky}}{1 - a^2 k^2 e^{2ky}} .$$

Вихрь направлен в отрицательном направлении оси Oy , т.е. противоположно вектору угловой скорости вращения частиц по орбитам. Максимальное значение он имеет на поверхности и быстро убывает с глубиной.

§ 2.8. Потенциальные волны конечной амплитуды

Рассмотренная в предыдущем параграфе теория волн конечной амплитуды трохоидального профиля дает точные решения, выражаемые простыми и удобными формулами. Однако вихревой характер движения жидкости является существенным недостатком этой теории.

Поскольку движение происходит под действием силы тяжести, являющейся потенциальной, то естественно предполагать, что оно также будет потенциальным. В самом деле, в гидродинамике доказывается, что потенциальное в начальный момент движение однородной идеальной жидкости, находящейся под действием потенциальных сил, продолжает оставаться таковым и во все последующие моменты времени. Вихревое движение, сопровождаемое действием потенциальных сил, может иметь место только в том случае, если в начальный момент имелись специальные условия, которые способствовали возникновению вихрей.

Что касается общей теории волн конечной амплитуды, сопровождаемых потенциальным движением жидкости, то первые шаги в этом направлении были сделаны Стоксом в 1847 г. Основные уравнения, характеризующие потенциальные волны конечной амплитуды, приведены в § 1 настоящей главы. Поскольку динамическое уравнение (2.5) и условие на свободной поверхности (2.6) являются нелинейными, то получить точное решение задачи Стоксу не удалось. Решая задачу методом последовательных приближений, он получил формулы для подсчета профиля волн и выяснил интересные особенности движения. Затем результаты Стокса были вновь получены Рэлеем, который произвел более детальные исследования (1917 г.). Точное решение задачи о потенциальных волнах конечной амплитуды на поверхности бесконечно глубокой жидкости и доказательство существования периодических установившихся волн конечной амплитуды было получено А.И.Некрасовым в 1921 г. [5], а в 1925 г. ту же задачу, но другим методом решил Леви-Чивита [6]. Прекрасное изложение результатов Стокса, Рэлея, Некрасова дано в монографии Л.Н.Сретенского [7].

Рассмотрим результаты, полученные Стоксом для волн конечной амплитуды на поверхности бесконечно глубокой жидкости. Ему первому удалось выяснить, что профиль установившихся волн конечной амплитуды выражается не синусоидой, а более сложной кривой. Отличавшаяся учетом членов, содержащих отношение a/λ в третьей степени, можно записать уравнение волны в следующем виде:

$$\zeta = a \cos(kx - \omega t) + \frac{1}{2} k a^2 \cos 2(kx - \omega t) + \frac{3}{8} k^2 a^3 \cos 3(kx - \omega t) .$$

Отсюда можно вывести ряд заключений о форме волны. Такая волна симметрична относительно вертикальных прямых, проходящих через гребни и подошвы волны. В то же время она не симметрична относительно плоскости невозмущенного уровня. Гребень волны лежит выше этой плоскости на величину

$$\zeta_{\text{греб}} = a \left[1 + \frac{ak}{2} + \frac{3}{8} a^2 k^2 \right] ,$$

а впадина — ниже на величину

$$\zeta_{\text{впад}} = a \left[1 - \frac{ak}{2} + \frac{3}{8} a^2 k^2 \right] .$$

При этом впадины имеют более пологое очертание, чем гребни. С увеличением высоты при данной длине гребни волн становятся все более заостренными и приближаются к предельной форме, характеризуемой наличием угловой точки в вершине волны. Угол между касательными в угловой точке равен 120° . Мичелл [8] провел подробный расчет профиля предельной волны Стокса. Он нашел, что крутизна этой волны $\frac{2a}{\lambda} = 0,142$.

Это значение максимальной крутизны волн соответствует наблюдаемому в природе. Скорость распространения волны

$$c = \left\{ \frac{g\lambda}{2\pi} \left[1 + \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{g}{k} \left[1 + (ak)^2 \right] \right\}^{1/2} \quad (2.41)$$

зависит не только от ее длины, как это имеет место для волны бесконечно малой амплитуды, но и от амплитуды. Так, фазовая скорость волны предельной формы будет в 1,095 больше фазовой скорости волны бесконечно малой амплитуды. Траектории частиц в волновом движении оказываются незакнутыми вследствие наличия волнового течения со скоростью

$$U_{\text{вол}} = a^2 k^2 \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2} e^{2kz} . \quad (2.42)$$

Скорость $U_{\text{вол}}$ этого добавочного волнового течения невелика и быстро убывает с глубиной, но существование ее несомненно и является следствием наличия потенциала скоростей у рассматриваемого движения. При распространении волн создается непрерывный перенос жидкости в том же направлении.

Кинетическая и потенциальная энергии волн конечной амплитуды с точностью до второй степени a/λ равны

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{4} \rho g \lambda a^2 (1 + a^2 k^2) ,$$

$$\mathcal{E}_{\text{п}} = \frac{1}{4} \rho g \lambda a^2 (1 + \frac{1}{4} a^2 k^2).$$

Как следует из этих выражений, кинетическая энергия волн конечной амплитуды превосходит потенциальную энергию. Полная энергия волны равна

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{\text{п}} = \frac{1}{2} \rho g a^2 [1 + \frac{5}{8} a^2 k^2].$$

В конце 60-х – начале 70-х годов было показано, что периодические волны конечной амплитуды на глубокой воде неустойчивы к бесконечно малым возмущениям [1; 9; 10]. Неустойчивость периодической волны заключается в экспоненциальном развитии по мере распространения волны начального возмущения амплитуды и частоты (модуляции). Бенджамен и Фейр экспериментально продемонстрировали существование такой неустойчивости [9; 10]. На глубокой воде волна, для амплитуды которой выполняется условие $a < 0,054k$, будет неустойчивой [1]. В жидкости глубиной H волна с волновым числом k будет неустойчива, если $kH > 1,363$ [1].

§ 2.9. Влияние вязкости на волны

В предыдущих параграфах были рассмотрены волны на поверхности идеальной жидкости. Реальные жидкости обладают вязкостью. Как же скажется вязкость на волновое движение?

При любом движении жидкости вязкость, или внутреннее трение, приводит к рассеянию части механической энергии жидкости, т.е. к превращению ее в тепло. Найдем скорость рассеяния энергии в элементарном объеме жидкости $dx dy dz$ с центром в точке x, y, z . Работа, которая производится напряжениями, действующими на пары противоположных граней рассматриваемого элемента, равна [11]

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (p_{xx} u + p_{xy} v + p_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y} (p_{yx} u + p_{yy} v + p_{yz} w) + \frac{\partial}{\partial z} (p_{zx} u + p_{zy} v + p_{zz} w) \right] dx dy dz.$$

В тепло переходит только часть этой работы, которая связана с деформацией рассматриваемого объема, а именно

$$dW_{\mu} = \left[p_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + p_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + p_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + p_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + p_{xz} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + p_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dx dy dz.$$

Заменяя p_{xx} , p_{xy} их выражениями (1.11), найдем

$$dW_{\mu} = \mu [2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2] dx dy dz = \mu G dx dy dz, \quad (2.43)$$

где G обозначает выражение в квадратных скобках. Эта формула (2.43) впервые получена Стоксом. Энергия же, рассеиваемая в объеме Ω в единицу времени

$$W_{\mu} = \mu \iiint_{\Omega} G dx dy dz.$$

Эта формула имеет общий характер и справедлива для любого движения жидкости. Применим ее к расчету диссипации энергии при плоском волновом движении в вязкой жидкости.

Потенциальные волны бесконечно малой амплитуды свойственны идеальной жидкости, однако они могут существовать и на поверхности вязкой жидкости, если диссипация энергии волн, вызванная вязкостью, будет компенсироваться притоком энергии за счет работы внешних сил, приложенных к поверхности жидкости. Предполагая, что это условие выполнено, посчитаем скорость диссипации энергии в бесконечном глубоком вертикальном столбе жидкости с единичным основанием.

Отклонение свободной поверхности и орбитальные скорости частиц в рассматриваемых волнах подчиняются уравнениям (2.13), (2.16):

$$\begin{aligned} \zeta &= a \cos(kx - \omega t), \\ u &= a \omega e^{kz} \cos(kx - \omega t), \\ w &= a \omega e^{kz} \sin(kx - \omega t). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения для u и w в уравнение (2.43) и интегрируя по всему объему столба, получим

$$W_{\mu} = 2 \mu g a^2 k^2 = 2 \pi^2 g \mu \frac{h^2}{\lambda^2}, \quad (2.44)$$

т.е. диссипация энергии прямо пропорциональна квадрату высоты волны и обратно пропорциональна квадрату ее длины.

Если потери энергии волн на внутреннее трение не компенсируются, то волны будут со временем затухать. В фиксированной точке жидкости изменение со временем энергии волн равно работе сил вязкости:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho g a^2 \right) = -2 \mu g a^2 k^2,$$

откуда

$$a = a_0 e^{-\frac{2\mu}{\rho} k^2 t} = a_0 e^{-8\pi^2 \frac{\mu t}{\rho \lambda^2}}. \quad (2.45)$$

Затухание волн происходит тем быстрее, чем больше вязкость жидкости и короче длина волн. Наиболее быстро затухают капиллярные волны. Для более длинных волн эта формула дает очень медленное затухание. Например, время, необходимое для уменьшения энергии гравитационной волны длиной в один метр в e раз, на воде составляет 8000 периодов волны. Для волны длиной 10 см это время уменьшается до 16 периодов, а для капиллярной волны в 1 см — уже только 4 периода.

При получении формул (2.44) и (2.45) учитывалась только внутренняя диссипация, обусловленная вязкими напряжениями, действующими в волне. Наряду с этим процессом может происходить диссипация энергии волн вследствие трения о дно, которое имеет место, если глубина воды существенно меньше длины волны. Диссипация происходит также из-за трения о стенки русла или лотка и на поверхности воды. Эти дополнительные механизмы диссипации возникают в пограничных слоях, в которых роль сил вязкости возрастает. Как правило, толщина пограничного слоя δ много меньше длины волны λ . Завихренность потока, возникающую в пограничных слоях, с точностью до первого порядка можно рассматривать как вихревое движение, наложенное на потенциальное, т.е. безвихревое волновое движение [12]

$$\underline{V} = \nabla \phi + \underline{V}', \quad (2.46)$$

где \underline{V}' — вихревая составляющая скорости.

Используя выражение для потенциала (2.26) и равенство нулю скорости в реальной жидкости на дне $z = -H$, имеем из (2.46):

$$u' = \left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{z=-H} = \frac{a\omega}{\sinh k H} \cos(kx - \omega t).$$

Для волн малой амплитуды компонента $\text{rot } \underline{V}'$ вдоль оси Oy подчиняется уравнению диффузии [12], которое имеет вид

$$\frac{\partial \text{rot}_y \underline{V}'}{\partial t} = -\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\text{rot}_y \underline{V}'). \quad (2.47)$$

Считая, что

$$\text{rot}_y \underline{V}' = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{\partial u'}{\partial z}, \quad (2.48)$$

найдем решение (2.47):

$$u' = -\omega a \operatorname{csch} k H e^{-\beta(z+H)} \cdot \cos(kx - \omega t), \quad (2.49)$$

где

$$\beta = \left(\frac{\omega \rho}{2\mu} \right)^{1/2}.$$

Так как при увеличении расстояния от дна движение приближается к

безвихревому, $u' \rightarrow 0$. Завихренность ограничена в слое толщиной $\delta = \beta^{-1}$. Флуктуации вертикальной составляющей скорости w' определяются из уравнения неразрывности (1.8) [12]. Вокруг скорости вдоль оси Oy найдем из (2.48), (2.49):

$$\begin{aligned} \text{rot}_y \underline{V}' &= \beta \omega a \operatorname{csch} k H e^{-\beta(z+H)} \times \\ &\times [\cos\{\beta(z+H) + kx - \omega t\} + \sin\{\beta(z+H) + (kx - \omega t)\}]. \end{aligned}$$

Подобным образом можно рассмотреть пограничный слой у свободной поверхности. В случае чистой поверхности завихренность сосредоточена в тонком слое, величина завихренности в нем не превышает скорости деформации в потенциальном волновом движении, поэтому влияние завихренности в поверхностном пограничном слое на диссипацию волн ничтожно. При наличии пленок на поверхности жидкости может возникать сильная поверхностная диссипация, вызываемая отклонением коэффициента поверхностного натяжения a от равновесного значения. Поверхностная диссипация объясняет гашение волн маслом. Малое волновое движение на поверхности порождает изменение коэффициента поверхностного натяжения a . Тангенциальное напряжение на поверхности будет равно $P_{xz} = -\partial a / \partial x$ и может значительно превышать тангенциальное напряжение внутреннего трения $P_{xz} = -2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}$. В этом случае поверхностная диссипация в приповерхностном пограничном слое будет превосходить внутреннюю диссипацию. Например, при наличии несжимаемой пленки на поверхности завихренность возрастает в $(\frac{\omega \rho}{\mu k^2})^{1/2}$ раз.

Средняя скорость диссипации волновой энергии на единицу площади в пограничном слое равна [12]

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\mu \int_{-H}^0 \text{rot}_y^2 \underline{V} d\eta.$$

Основной вклад в этот интеграл дают области вблизи дна ($\eta = -H$) и у поверхности ($\eta = 0$), если у поверхности находится пленка. Коэффициент затухания волн определяется следующей формулой подобно коэффициенту затухания осциллятора с трением:

$$\gamma = -\frac{\frac{\partial E}{\partial t}}{2E}. \quad (2.50)$$

При учете только внутренней диссипации коэффициент затухания найдем из (2.44) и (2.50):

$$\gamma_\mu = 2 \frac{\mu}{\rho} k^2.$$

При наличии плотной поверхностной пленки коэффициент затухания равен [12]

$$\gamma_s = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu \omega}{2\rho} \right)^{\frac{1}{2}} k \operatorname{ctg} k H.$$

На глубокой воде $\gamma_s = \frac{k}{2} \left(\frac{\mu \omega}{2\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$, т.е. γ_s в $2 \cdot 5/2 \left(\frac{\mu \rho}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ раз больше коэффициента затухания для чистой поверхности $\gamma_\mu = \frac{2\mu}{\rho} k^2$. Коэффициент затухания γ_H из-за донного трения получается из (2.50) с использованием (2.48):

$$\gamma_H = \left(\frac{\mu \omega}{2\rho} \right)^{\frac{1}{2}} k \operatorname{csch} 2kH.$$

На границе раздела воздух-вода существует пограничный слой не только в воде, но и в воздухе. Толщина пограничного слоя в воздухе определяется выражением, подобным для толщины пограничного слоя в воде:

$$\delta_a = \left(\frac{2\mu_a}{\rho_a \omega} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где μ_a – коэффициент вязкости воздуха, ρ_a – его плотность. Масса воздуха M_a , участвующая в вихревом движении, значительно меньше массы воды M_w , участвующей в вихревом движении ниже границы раздела:

$$\frac{M_a}{M_w} = \frac{\delta_a \rho_a}{\rho \delta} = \frac{\rho_a}{\rho} \left(\frac{\mu_a \rho}{\rho_a \mu} \right)^{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{200}.$$

Тем не менее вихревой характер движения именно M_a приводит к диссипации длинных волн.

Пульсации горизонтальной составляющей скорости в приводном слое воздуха приведут к диссипации волновой энергии. Уменьшение волновой энергии при чистой поверхности с учетом диссипации в приводном слое воздуха можно определить через коэффициент затухания [13]:

$$\gamma_{\mu,a} = 2k^2 \left[\frac{\mu}{\rho} + \frac{\mu_a}{\rho} (\delta_a k) \right] - \frac{2k^2 \mu}{\rho} \left[1 + \frac{\mu_a}{\mu} (\delta_a k)^{-1} \right].$$

Роль первого и второго слагаемых в этом выражении меняется в зависимости от длины волн. При длине волны около 55 см оба члена оказываются равными. Диссипация в воздухе преобладает для длинных волн, диссипация в воде ~ для коротких. Например, на длине волн в 0,3 м диссипация в воздухе в 30 раз превышает вязкую диссипацию в воде.

Приведенные выше результаты сформулированы в терминах времени

затухания для бесконечно протяженной цепочки синусоидальных волн. При рассмотрении пространственного затухания волн необходимо учесть, что волновая энергия распространяется с групповой скоростью. Пространственное затухание гравитационных и капиллярных волн рассмотрено в ряде работ, например [14; 15].

При распространении океанских волн наряду с рассмотренными механизмами диссипации уменьшение волновой энергии может происходить вследствие следующих причин: воздействия на волны турбулентного характера движения частиц, обрушения волн при достижении ими предельной крутизны, нелинейных взаимодействий волн разных масштабов и взаимодействия волн и течений, волн и встречного ветра.

Некоторые из указанных причин будут рассмотрены в других разделах.

§ 2.10. Законы сохранения для волн

В данном параграфе мы рассмотрим кинематические и динамические законы сохранения для волн. В самом общем случае волна может быть представлена в форме

$$\zeta = a \exp(i\chi),$$

где a – амплитуда, χ – фаза, ζ – отклонение поверхности от положения равновесия или какая-либо другая характеристика волнового движения. Если волна распространяется в среде, свойства которой меняются во времени или в пространстве, под a следует понимать локальную амплитуду, являющуюся функцией координат и времени. Предполагается, что временные и пространственные масштабы изменения параметров среды много больше временных и пространственных размеров волны. В случае монокроматической волны $\zeta = a \cos(kx - \omega t)$, где $a = \text{const}$. Волновое число k и частота ω определяются через фазу χ следующим образом:

$$k = \frac{\partial \chi}{\partial x}; \quad \omega = -\frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (2.51)$$

Из (2.51) следует

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (2.52)$$

Это выражение является кинематическим уравнением сохранения плотности волн (k – плотность, ω – поток) или уравнением баланса скорости изменения числа гребней волн. Уравнение (2.52) можно получить из баланса скорости изменения числа гребней волн. На участок длиной Δx приходится $\Delta x/\lambda = \Delta x k/2\pi$ гребней. В единицу времени на этот участок приходит $\frac{\omega}{2\pi}$ гребней, а уходит $\frac{1}{2\pi} (\omega + \frac{\partial \omega}{\partial x} \Delta x)$

гребней. При отсутствии источников и стоков волн на участке Δx число гребней волн должно быть неизменным, условие сохранения принимает вид (2.52). Уравнение (2.52) совместно с диспер-

сионным соотношением $\omega = \omega(k)$ определяет геометрию волнового процесса.

Используя определение групповой скорости $c_g = \partial\omega/\partial k$, (2.52) преобразуем к виду

$$\frac{\partial k}{\partial t} + c_g \frac{\partial k}{\partial x} = 0. \quad (2.53)$$

В такой формулировке уравнение сохранения плотности волн показывает, что изменения волнового числа распространяются с групповой скоростью c_g . Волновое число k остается постоянным вдоль характеристических кривых, определяемых на плоскости (x, t) уравнением

$$\frac{dx}{dt} = c_g.$$

Эти кривые представляют собой прямые линии, имеющие наклон c_g , соответствующий данному значению волнового числа. Волновое число k распространяется со скоростью, равной соответствующему значению групповой скорости. Траектория точки, движущейся со скоростью c_g , называется лучом. Вдоль луча распространяется энергия волны и волна с соответствующим волновым числом.

Движение точек волны, находящихся в одной фазе, определяется условием постоянства фазы

$$x(x, t) = \text{const}. \quad (2.54)$$

Скорость движения таких точек, т.е. фазовую скорость волны $c = \frac{dx}{dt}$, найдем, проинтегрировав (2.54) по времени:

$$c \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial t} = ck - \omega = 0.$$

Направление фазовой скорости совпадает с направлением локального волнового числа, поэтому

$$c = \frac{\omega}{k}.$$

Для того чтобы отслеживать данную фазу волны, необходимо двигаться со скоростью c для отслеживания k – со скоростью c_g .

Если среда движется со скоростью $U(x, t)$, являющейся медленно меняющейся функцией координат и времени (медленность изменения на расстояниях порядка длины волны и во времени на длительностях порядка периода волны), то частота волны, измеряемая в не-подвижной системе координат, будет равна [12]:

$$\delta = \omega(k) + kU. \quad (2.55)$$

Частота $\omega(k)$ называется собственной частотой, она связана с k дисперсионным соотношением, δ – так называемая наблюдаемая или кажущаяся частота, kU часто называют допплеровским смещением частоты. Уравнение (2.52) для волн в среде, движущейся со скоростью $U(x, t)$, принимает вид

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\omega(k) + kU] = 0, \quad (2.56)$$

$$\text{или } \frac{\partial k}{\partial t} + (c_g + U) \frac{\partial k}{\partial x} = -k \frac{\partial U}{\partial x}.$$

В случае движения волн в неоднородной среде дисперсионное соотношение может быть функцией координат и времени $\omega(k, x, t)$, например при движении волн в жидкости переменной глубины. В этом случае (2.52) усложняется и принимает вид

$$\frac{\partial k}{\partial t} + c_g \frac{\partial k}{\partial x} = - \frac{\partial \omega(k, x, t)}{\partial x}. \quad (2.57)$$

В неоднородной среде волновой вектор по-прежнему распространяется с групповой скоростью, но его значение изменяется, скорость изменения равна $-\partial \omega(k, x, t)/\partial t$. Уравнение (2.57) можно представить в эквивалентной характеристической форме

$$\frac{dk}{dt} = - \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (2.58)$$

при

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c_g. \quad (2.59)$$

Уравнения (2.58), (2.59) являются уравнениями Гамильтона, в которых роль гамильтониана играет частота, а роль обобщенного импульса и координаты $-k$, x соответственно. Уравнения (2.58), (2.59) описывают движение волнового пакета вдоль характеристик. Если в дисперсионном уравнении $\omega = \omega(k, x, t)$ подставить ω и k , выразив их через фазу из (2.51), то получим

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \omega \left(\frac{\partial x}{\partial x}, x, t \right) = 0.$$

Это уравнение представляет собой уравнение Гамильтона-Якоби с фазой x в качестве действия.

Динамические законы сохранения, описывающие изменение таких волновых параметров, как плотность импульса и энергии, могут быть получены на основе уравнение Эйлера. Такой метод изучения законов сохранения изложен в [3; 12]. В наиболее общей и вместе с тем простой форме законы сохранения можно получить из вариационного принципа, применение которого позволяет рассматривать как линейные, так и нелинейные волны. Такие понятия, как действие, лагранжиан, рассматриваются в курсе теоретической механики [16]. Вариационный принцип утверждает, что в конечной области Ω интеграл, называемый действием, будет стационарным:

$$\delta J = \delta \iint L(Z_t, Z_x, Z) dt dx = 0,$$

где Z, Z_t, Z_x – переменные от x, t и их производные по t и x , L – лагранжиан. Обращение в нуль первой вариации δJ приводит к вариационному уравнению

$$\frac{\partial L_{Z_t}}{\partial t} + \nabla L Z_x - L Z = 0.$$

Для описания медленно меняющихся волн Уизем [17; 18] ввел понятие "усредненного вариационного принципа". Лагранжиан в этом случае осредняется по периоду волны

$$L = \frac{1}{T} \int_0^T L dt.$$

Амплитуда, волновое число и частота могут быть медленно меняющимися функциями в пространстве и времени. Осредненный вариационный принцип дает

$$\delta \iint_{\Omega} L(x_t, x_x, a) dt dx = 0. \quad (2.60)$$

В (2.60) в качестве независимых функций используются амплитуда $a(x, t)$ и фаза $\chi(x, t)$. Соответствующие вариационные уравнения принимают вид

$$\text{для } a: L_a = 0,$$

$$\text{для } \chi: \frac{\partial}{\partial t} L_\chi + \nabla L_{x_\chi} = 0.$$

После получения вариационных уравнений переходят к переменным a и ω, k с использованием (2.51):

$$L_a = 0, \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (L_\omega) - \nabla (L_k) = 0. \quad (2.62)$$

Уравнения (2.61), (2.62) необходимо дополнить уравнением сохранения волн (2.52). Уравнение (2.61) является дисперсионным соотношением между ω, k, a , что следует из того факта, что для волн малой амплитуды L является квадратичной функцией a , т.е. [17]

$$L = G(\omega, k) a^2. \quad (2.63)$$

Уравнение (2.61) принимает вид

$$G(\omega, k) = 0,$$

$G(\omega, k)$ – дисперсионное соотношение вида $\omega - \omega(k) = 0$. Таким образом, для линейных волн из $G(\omega, k) = 0$ следует, что $L = 0$. Из (2.63), в частности, следует, что L для линейных волн может быть получен непосредственно из дисперсионного соотношения (2.27). Для линейных гравитационных волн в жидкости глубиной H имеем

$$L \sim a^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{g k \tanh k H} \right).$$

Так как L представляет собой разность плотностей кинетической и

потенциальной энергий, из $L = 0$ следует равнораспределение кинетической и потенциальной энергии для линейных волн. Уравнение (2.62) имеет форму, характерную для уравнения сохранения некоего параметра, плотность которого равна L_ω , и поток равен L_k . Для волн на воде глубиной H лагранжиан задается следующей формулой [18]:

$$L = -\rho \int_{-H}^H (\phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + gz) dz, \quad (2.64)$$

где ϕ – потенциал скорости. Ограничимся двухмерным случаем. Так как в лагранжиане присутствуют только производные потенциала, наиболее общая форма периодических волн в неоднородной среде имеет вид [18]

$$\left. \begin{aligned} \phi &= Ux - yt + \Phi(\chi, z), \\ \chi &= kx - \omega t, \\ \zeta &= N(\chi), \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

где $\Phi(\chi, z)$, $N(\chi)$ – периодические функции от фазы χ ; U – средняя скорость потока; y – параметр, связанный со средней высотой волны.

Осредненный лагранжиан получается осреднением (2.64) по фазе в пределах периода с использованием (2.65). Опуская ряд математических преобразований, выпишем выражение для L на глубине H :

$$\left. \begin{aligned} L &= \rho \left(y - \frac{U^2}{2} \right) H + \frac{1}{2} \rho g H^2 + \frac{E}{2} \left\{ \frac{(\omega - Uk)^2}{g k \tanh k H} - 1 \right\} - \\ &- \frac{k^2 E^2}{2 \rho g} \left\{ \frac{9 T^4 - 10 T^2 + 9}{8 T^4} \right\} + O(E^3), \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

где

$$E = \frac{\rho g a^2}{2}, \quad T = \tanh k H.$$

Если дно не является горизонтальным, (2.66) необходимо изменить. Пусть средняя поверхность воды $z = b$, а дно $z = -H$, тогда в (2.66) H необходимо заменить на $H+b$, а член $\frac{1}{2} \rho g H^2$ – на $\frac{1}{2} \rho g b^2 - \frac{\rho g H^2}{2}$. Члены U и y можно объединить через псевдофазу $\psi = Ux - yt$, соответственно $y = -\frac{\partial \psi}{\partial t}$, $U = \frac{\partial \psi}{\partial x}$.

Применение вариационного принципа для L дает

$$\delta \iint L(\omega, k, E, y, U, H) dx dt = 0.$$

Вариации для E, χ, H и псевдофазы ψ дают следующие вариационные уравнения:

$$L_E = 0, \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\omega - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_k = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (2.68)$$

$$\mathcal{L}_H = 0, \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_U - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0. \quad (2.70)$$

Дисперсионное соотношение (2.67) имеет вид

$$\frac{(\omega - U k)^2}{g k \tanh k H} = 1 + \frac{9 T_0^4 - 10 T_0^2 + 9}{4 T_0^4} \frac{k^2 E}{\rho g} + O(E^2),$$

где $T_0 = \tanh k H_0$.

Первое из уравнений (2.68) описывает сохранение волнового действия. Плотность волнового действия равна

$$\mathcal{L}_\omega = \frac{E(\omega - U k)}{g k \tanh k H} = \frac{E}{\omega_0} + O(E^2).$$

Поток волнового действия равен

$$- \mathcal{L}_k = \frac{E}{\omega} (U + c_{r0}) + O(E^2),$$

где

$$\omega_0(k) = (g k \tanh k H_0)^{1/2}, \quad c_{r0} = \frac{\omega_0}{2k} \left(1 + \frac{2k H_0}{\sinh 2k H_0}\right)^{1/2}, \quad c_0 = \frac{\omega_0}{k}.$$

Индекс "0" определяет параметры линейных волн на спокойной воде глубиной H_0 . Уравнение сохранения волнового действия (2.68) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{\omega_0} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{E}{\omega_0} (U + c_{r0}) \right] = 0. \quad (2.71)$$

Из (2.66) получим

$$\mathcal{L}_y = \rho H,$$

$$- \mathcal{L}_U = \rho H U + \frac{E}{c_0} + O(E^2).$$

Таким образом, (2.70) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho H) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho H U + \frac{E}{c_0}) = 0,$$

т.е. (2.70) описывает уравнение сохранения массы: плотность равна ρH , поток массы равен \mathcal{L}_U . Член $\frac{E}{c_0}$ определяет волновой вклад в общий поток массы. Скорость потока массы U_m с учетом волнового вклада равна

$$U_m = U + \frac{E}{\rho H c_0}.$$

Уравнение сохранения массы можно записать в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho H) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho H U_m) = 0.$$

Закон сохранения энергии и импульса следует из общих свойств лагранжиана. Закон сохранения энергии соответствует инвариантности лагранжиана относительно сдвига по времени [16; 18]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\omega \mathcal{L}_\omega + \gamma \mathcal{L}_y - \mathcal{L}) + \frac{\partial}{\partial x} (-\omega \mathcal{L}_k - \gamma \mathcal{L}_U) = 0.$$

Выражение для U следует из (2.69).

Опуская ряд преобразований, выпишем выражение закона сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho H U_m^2 + \frac{1}{2} \rho g H^2 + E \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho H U_m \left(\frac{U_m^2}{2} + g H \right) + U_m S + (U_m + c_{r0}) E \right] = 0 \end{aligned}$$

и закон сохранения волновой энергии:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (U_m + c_{r0}) E \right\} + S \frac{\partial U_m}{\partial x} = 0, \quad (2.72)$$

где $S = E \left(\frac{2 c_{r0}}{c_0} - \frac{1}{2} \right)$ — так называемое "радиационное напряжение" или "напряжение излучения". Можно показать эквивалентность (2.71) и (2.72).

Закон сохранения импульса следует из инвариантности лагранжиана относительно сдвига по пространству:

$$\frac{\partial}{\partial t} (k \mathcal{L}_\omega + U \mathcal{L}_y) + \frac{\partial}{\partial x} (-k \mathcal{L}_k - U \mathcal{L}_U + \mathcal{L}) = 0,$$

$$k \mathcal{L}_\omega + U \mathcal{L}_y = \rho H U + \frac{E}{c_0} = \rho H U_m + O(E^2),$$

$$-k \mathcal{L}_k - U \mathcal{L}_U + \mathcal{L} = \rho H U_m^2 + \frac{1}{2} \rho g H^2 + S + O(E^2),$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho H U_m) + \frac{\partial}{\partial x} [\rho H U_m^2 + \frac{1}{2} \rho g H^2 + S] = 0. \quad (2.73)$$

В законах сохранения энергии и импульса нетрудно выделить члены, связанные со средним движением, волновым движением и взаимодействием волны и среднего движения. Подробно рассмотрены члены, входящие в уравнение сохранения, в [12; 19; 20].

Л и т е р а т у р а

1. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. — М.: Мир, 1981.
2. Уизем Дж.Б. Волны с дисперсией и вариационные принципы. — В кн.: Нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
3. Шуляк Б.А. Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости. — М.: Наука, 1971.
4. Gerstner F. Theoric der Wellen Gilberts. — 'An. der Phys.', 1809, 32, 416.
5. Некрасов А.И. О волнах установившегося вида. — "Известия Иваново-Вознесенского политехнич. ин-та", 1925, № 3, 52–65.
6. Levi-Civita T. De'termination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. — 'Math. An.', 1925, 93, 264–314.
7. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. — М.: Наука, 1977.
8. Michelly J.H. The highest waves in water, — 'Phil. Mag.', ser.5, 1893, 36, 430–437.
9. Бенджамин Т.Б. Неустойчивость периодических цугов волн в нелинейных системах с дисперсией. — В кн.: Нелинейная теория распространения волн. — М.: Мир, 1970.
10. Фейр Дж. Некоторые результаты опытов с волновыми импульсами. — В кн.: Нелинейная теория распространения волн. — М.: Мир, 1970.
11. Ламб Г. Гидродинамика. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
12. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
13. Краус Е.Б. Взаимодействие атмосферы и океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1976.
14. Доброклонский С.В. Гашение капиллярно-гравитационных волн на поверхности чистой воды. — "Труды Морского гидрофизического института", 1955, т. 6, 43–57.
15. Van Dorn W.G. Boundary dissipation of oscillatory waves. — 'J. Fluid Mech.', 1966, vol.24, N 4, 769–779.
16. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. — М.: Наука, 1970.
17. Уизем Дж.Б. Вариационные методы и их приложение к волнам на воде. — В кн.: Нелинейная теория распространения волн. — М.: Мир, 1970.
18. Уизем Дж.Б. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
19. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Ч.1 — М.: Мир, 1981.
20. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Ч.2. — М.: Мир, 1981.
21. Лакомб А. Физическая океанография. — М.: Мир, 1974.

ГЛАВА III

СТАТИСТИЧЕСКИЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕТРОВОГО ВОЛНЕНИЯ

§ 3.1. Нерегулярность морского волнения

Рассмотренные выше теории гармонических и трохоидальных волн на поверхности тяжелой жидкости не описывают свойства реальных морских волн, так как хорошо известно, что при любой степени волнения на поверхности моря наблюдаются волны разнообразной формы и размеров. Морские волны имеют разные высоты, длины, скорости и направления распространения. Важнейшей чертой морского волнения является его хаотичность. Регулярные морские волны, существующие в форме зыби, являются исключением. После создания достаточно совершенных методов измерения волн с начала 50-х годов было проведено большое число измерений волн, что позволило ученым-океанологам перейти от констатации факта нерегулярности морского волнения к изучению этой нерегулярности. Изучение нерегулярности происходило по двум направлениям: статистическому и спектральному.

Разнообразие волн, наблюдавших одновременно на поверхности моря, натолкнуло исследователей на мысль применять для анализа волнения методы теории вероятностей и математической статистики, позволяющие характеризовать данное волнение *средними значениями* элементов наблюдаемых волн и *функциями распределения*. Изучение функций распределения элементов наблюдаемых волн составляет главную задачу статистической теории морского волнения. Впервые эмпирические функции распределения элементов волн были построены в 1946 г. Л.Ф. Титовым [1] на основе обработки ряда планшетов стереофотосъемки морских волн. Применение методов статистики к анализу взволнованной поверхности в то время явилось важным шагом вперед. Теоретическим путем функции распределения элементов ветровых волн в глубоком море вывели независимо друг от друга И.С. Бровиков [2] и Ю.М. Крылов [3] в 1954 г. и пришли к совпадающим результатам.

Применение волнографов для измерения возвышения морской поверхности способствовало использованию спектральных методов при анализе волнограмм, отражающих случайный характер колебаний поверхности в фиксированной точке. Следует отметить, что один из частных методов спектрального анализа — гармонический метод Кельвина — уже давно применяется к анализу приливных колебаний. Спектральный метод рассматривает морское волнение как сложный процесс, представляющий собой результат суперпозиции большого числа гармонических волн с разными частотами, амплитудами, фазами и направлениями распространения. Спектральный метод открывает путь для применения к изучаемому явлению результатов классической гидродинамики. В линейной спектральной теории каждая спектральная составляющая рассматривается как волна с бесконечно малой амплитудой, удовлетворяющая всем результатам классической гидродинамики.

Идея представить морское волнение спектром синусоидальных волн была высказана в 1952 г. Пирсоном [4], а также в менее общей форме и другими авторами [5].

Пирсон представил взволнованную поверхность суммой большого числа элементарных волн

$$\zeta = \zeta(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l \Delta \zeta_{ij}(x, y, t),$$

в которой отдельная элементарная волна имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \zeta_{ij}(x, y, t) = & \\ & [S(\omega_i, \Theta_j) \Delta \omega \Delta \Theta]^{\frac{1}{2}} \cos [\omega_i t - \frac{\omega_i^2}{g} (x \cos \Theta_j + y \sin \Theta_j) + \\ & + \varepsilon_{ij}]. \end{aligned}$$

Энергию элементарной волны запишем в форме

$$\Delta E_{ij} = \rho g S(\omega_i, \Theta_j) \Delta \omega \Delta \Theta.$$

Функцию

$$S(\omega_i, \Theta_j) = \frac{\Delta E_{ij}}{\Delta \omega \Delta \Theta \rho g} \cdot \frac{1}{\Delta \omega \Delta \Theta}$$

называют двухмерным "энергетическим спектром" или двумерной спектральной плотностью. $S(\omega_i, \Theta_j)$ характеризует плотность волновой энергии элементарных волн с частотами от ω до $\omega + \Delta\omega$ и направлениями распространения от Θ до $\Theta + \Delta\Theta$.

Морское волнение является нестационарным и неоднородным случайнм процессом. Для удобства анализа обычно процесс считается стационарным и квазиоднородным в пределах некоторого временного и пространственного интервалов. Правомерность этих предположений подтверждается натуральными данными [6]. При построении спектров волнение рассматривается как стационарный случайный процесс, обладающий свойством *эргоидичности*. Эргодичность волнения состоит в том, что среднее значение функции по времени при достаточном

количество последовательных колебаний должно быть равным среднему по множеству одновременных реализаций. В этом случае одна продолжительная запись волнения может служить достаточным материалом для получения всех его статистических характеристик.

§ 3.2. Функции распределения элементов волны в точке в глубоком море

Как известно, ветровые волны являются трехмерными и характеризуются высотой, периодом, длиной волны и длиной гребня. Волнографы же обычно регистрируют не элементы трехмерных волн, а колебания в точке, в которой они расположены. В связи с этим широко применяется определение элементов волн в фиксированной точке моря. Высотой волны в точке называется расстояние по вертикали между следующими друг за другом максимальными и минимальными уровнями. Высота трехмерных волн, проходящих через фиксированную точку, будет в общем случае отличаться от высоты волн в этой точке. Высота волны в точке меньше или равна высоте соответствующей волны. Периодом волновых колебаний в точке называют промежуток времени между двумя последовательными пересечениями взволнованной поверхностью плоскости невозмущенного уровня, происходящими в одном и том же направлении.

Впервые теоретические функции распределения были получены для элементов волн в точке.

Рассмотрим более подробно вывод функций распределения, предложенный Ю.М.Крыловым [7]. Траекторию частицы воды можно записать в полярных координатах r (расстояние частицы от ее положения покоя) и Θ (полярный угол, образуемый радиусом-вектором с горизонтальной осью):

$$x = r(t) \cos \Theta(t),$$

$$z = r(t) \sin \Theta(t).$$

Радиус-вектор частицы r , взятый в произвольный момент времени t , можно рассматривать как случайную величину.

Найдем функцию плотности вероятности для этой величины $f(r)$. В силу случайного характера изменения высот волн естественно предположить, что искомая функция f не будет зависеть от угла Θ . За совокупность случайных величин r возьмем те значения, которые принимает радиус-вектор через определенные интервалы времени, значительно превышающие средние периоды волн. Выделим на плоскости xOz элемент площади, ограниченный концентрическими дугами радиусов r и $r + dr$ и лучами Θ и $\Theta + d\Theta$. Вероятность попадания частицы между концентрическими окружностями радиусов r и $r + dr$ есть $f(r) dr$, а вероятность попадания между лучами Θ и $\Theta + d\Theta$ есть $\frac{d\Theta}{2\pi}$. Вероятность попадания частицы в выделенный элемент

$$dw = f(r) dr \frac{d\Theta}{2\pi}. \quad (3.1)$$

Ту же вероятность dw можно считать пропорциональной площади выделенного элемента $r dr d\Theta$ и функции $g(r^2)$, выражающей вероятность попадания частицы в пределы площадки единичной площади:

$$dw = g(r^2) r dr d\Theta. \quad (3.2)$$

Приравнивая (3.1) и (3.2), получим

$$f(r) = 2\pi r g(r^2). \quad (3.3)$$

Для отыскания функции $g(r^2)$ допустим, что для выбранной генеральной совокупности значений r ее можно представить произведением двух функций $g_1(x)$ и $g_2(z)$. Физически это означает, что компоненты x и z радиуса-вектора являются независимыми случайными величинами:

$$g(r^2) = g_1(x) g_2(z). \quad (3.4)$$

Прологарифмируем, а затем продифференцируем выражение (3.4), помня, что $x^2 = r^2 - z^2$:

$$2 \frac{g'(r^2)}{g(r^2)} (x dx + z dz) = \frac{g'_1(x)}{g_1(x)} dx + \frac{g'_2(z)}{g_2(z)} dz.$$

Приравнивая множители при dx и dz , получим

$$2 \frac{g'(r^2)}{g(r^2)} = \frac{1}{x} \frac{g'_1(x)}{g_1(x)} = \frac{1}{z} \frac{g'_2(z)}{g_2(z)} = -2A^2,$$

где A – постоянная.

Отсюда находим

$$g'(r^2) + A^2 g(r^2) = 0.$$

Тогда решение будет иметь вид

$$g(r^2) = C e^{-A^2 r^2}.$$

Подставим его в (3.3)

$$f(r) = 2\pi C r e^{-A^2 r^2}.$$

Постоянную C найдем из условия, что вероятность принять какое-нибудь значение r в интервале от 0 до ∞ равна 1:

$$\int_0^\infty f(r) dr = 1.$$

Отсюда находим

$$C = \frac{A^2}{\pi} \quad \text{и} \quad f(r) = 2A^2 r e^{-A^2 r^2}.$$

Так как по определению среднее значение радиуса-вектора орбиты частицы воды

$$\bar{r} = \int_0^\infty f(r) r dr,$$

то

$$A^2 = \frac{\pi}{4(\bar{r})^2}.$$

Тогда функция плотности вероятности, или дифференциальная функция распределения, величины радиуса-вектора r будет

$$f(r) = \frac{\pi r}{2r^2} \exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2\right].$$

Интегральную функцию распределения $F(r)$ найдем по формуле

$$F(r) = - \int_{\infty}^r f(r) dr.$$

В нашем случае она примет следующий вид:

$$F(r) = \exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2\right].$$

Поскольку r -радиус орбиты частицы, то высота волн $h = 2r$ и функции распределения высот волн записуются аналогично:

$$f(h) = \frac{\pi}{2h} \cdot \frac{h}{\bar{h}} \exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{h}{\bar{h}}\right)^2\right], \quad (3.5)$$

$$F(h) = \exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{h}{\bar{h}}\right)^2\right]. \quad (3.6)$$

Следовательно, высоты волн удовлетворяют двухмерному нормальному закону распределения. Интегральная функция распределения вероятности, определяемая функцией Рэлея, называется обычно в океанографии обеспеченностью. Обеспеченность выражает вероятность того, что высоты волн имеют значения, не менее заданного значения h .

Графики функций повторяемости $f(h)$ и обеспеченности $F(h)$ приводятся на рис.3.1 и рис.3.2. График функции обеспеченности показывает, что нулевой обеспеченности соответствует бесконечно большая высота волн. Практически это означает, что волны, высоты которых во много раз выше средней, встречаются крайне редко. Волны с высотой в 3 раза больше средней имеют обеспеченность менее 0,1 %, т.е. встречаются очень редко (меньше, чем одна волна из 1000).

Формулу обеспеченности высот волн можно записать и в другом виде:

$$\frac{h}{\bar{h}} = \left(-\frac{4}{\pi} \ln F\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.7)$$

где обеспеченность F принимает значения от 0 до 1. Обеспеченность, рассчитанную по (3.6), можно выразить в процентах. Высоту волн можно выражать в долях не только средней высоты, но и в долях высоты волн с любой фиксированной обеспеченностью, например 50 %. Высоту волн обеспеченностью в 50 % найдем, положив

в (3.7) $F = 0,5$:

$$\frac{h_{50\%}}{\bar{h}} = 2 \left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,938. \quad (3.8)$$

Из (3.7) и (3.8) получим другой вид формулы обеспеченности высот волн:

$$\frac{h}{h_{50\%}} = \left(-\frac{\ln F}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Согласно Ю.М.Крылову [3,7] и И.С.Бровикову [2], функции распределения длин волн совпадают с соответствующими функциями для высот:

$$f(\lambda) = \frac{\pi \lambda}{2\bar{\lambda} \bar{\lambda}} \exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^2\right], \quad (3.9)$$

$$F(\lambda) = \exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^2\right].$$

Функции распределения периодов авторы находят, применяя функции распределения длин и функциональную зависимость между периодом и длиной, известную из гидродинамики синусоидальных или троходельных волн:

$$\lambda = \frac{g T^2}{2\pi}. \quad (3.10)$$

Применение этого соотношения к наблюдаемым ветровым волнам является не вполне законным, так как измерения показывают, что для них имеют место значительные отклонения. Например, сильно изменить распределение длин волн могут течения. При условии выполнимости (3.9) и (3.10) вычисление функции распределения периода сводится к известному правилу нахождения функции распределения случайной величины, связанной функционально с другой случайной величиной, имеющей известный закон распределения. В данном случае

$$F(T) = - \int_{\infty}^{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}^2} \exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^2\right] d\lambda = \exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{T}{T^*}\right)^4\right], \quad (3.11)$$

$$\text{где } T^* = \left(\frac{2\pi\bar{\lambda}}{g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Функция плотности вероятностей определяется так:

$$f(T) = -\frac{dF}{dT} = \frac{\pi}{T^*} \left(\frac{T}{T^*}\right)^3 \exp\left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{T}{T^*}\right)^4\right]. \quad (3.12)$$

Период T^* можно выразить через средний период \bar{T} :

$$\bar{T} = \int_0^\infty f(T) T dT = \pi \int_0^\infty \left(\frac{T}{T^*}\right)^4 \exp\left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{T}{T^*}\right)^4\right] dT.$$

Обозначим $\frac{\pi}{4} \left(\frac{T}{T^*}\right)^4 = 1$ и преобразуем это выражение к виду

$$\bar{T} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4} T^* \int_0^\infty 1^{1/4} e^{-1} dt = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4} \Gamma(5/4) T^*,$$

или

$$T^* = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/4} \frac{\bar{T}}{\Gamma(5/4)}. \quad (3.13)$$

Здесь Г-гамма-функция, причем $\Gamma(a+1) = \int_0^\infty t^{a-1} \exp[-t] dt$.

Учитывая, что $\Gamma(5/4) = 0,9064$, запишем функцию обеспеченности периода (3.11)

$$F(T) = \exp\left[-\Gamma^4(5/4)\left(\frac{T}{\bar{T}}\right)^4\right] = \exp\left[-(0,9064)\left(\frac{T}{\bar{T}}\right)^4\right]. \quad (3.14)$$

Переходя к десятичным логарифмам, преобразуем (3.14):

$$\frac{T}{\bar{T}} = 1,36 (-\lg F)^{1/4}.$$

Величина периода T^* , соответствующего средней длине волны, очень близка к среднему периоду. Заменив в (3.13) коэффициенты их вычисленными значениями, найдем $T^* = 1,038 \bar{T}$.

В ряде исследований проводилась проверка соответствия теоретических функций распределения элементов волн эмпирическим [6; 7; 8; 9].

В [6] показано, что функции распределения элементов волн могут быть представлены в наиболее общей форме распределением Вейбулла

$$F(x) = \exp\left[-A\left(\frac{x}{\bar{x}}\right)^k\right], \quad (3.15)$$

где x – исследуемый элемент волны, \bar{x} – его среднее значение, A, k – параметры распределения. Таким образом, рэлеевское распределение высот и длин волн (3.6), (3.9) и функция распределения периодов волн (3.14) являются частными случаями распределения Вейбулла (3.15).

Эмпирические функции распределения высот волн хорошо согласуются с распределением Рэлея. Исключение составляет случай с явно выраженной нестационарностью волнового процесса, например при резком возрастании скорости ветра. Согласно [6] эмпирические функции периодов волн существенно отличаются от теоретической функции распределения (3.14), наилучшая аппроксимация эмпирических распределений выражением (3.15) достигается при $k = 3$, $A = 0,712$:

$$F\left(\frac{T}{\bar{T}}\right) = \exp\left[-0,712\left(\frac{T}{\bar{T}}\right)^3\right].$$

Такой вид $F(T/\bar{T})$ справедлив для волнового поля, состоящего из одной волновой системы. В случае смешанного волнения данное распределение уже неприменимо.

Распределение длин волн наименее изучено, так как данные о длине волн и длине их гребней получают, как правило, аэрофотосъемкой. Согласно [6] распределение Рэлея согласуется с $F(\lambda/\bar{\lambda})$ только для небольшого интервала изменения длины волн: $0,5 \leq \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \leq 2,0$.

Лучшее согласие с эмпирическим распределением длин волн дает распределение Вейбулла при $k = 2,3$, $A = 0,757$ [6]:

$$F\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right) = \exp\left[-0,757\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^{2,3}\right].$$

Для получения вероятностных характеристик волнения необходимо иметь генеральную совокупность элементов волн или ансамбль реализаций. Однако на практике возможно получение только одной или нескольких реализаций ограниченной длины. При обработке реализации генеральная совокупность элементов волн заменяется выборочной совокупностью элементов, что приводит к получению статистических оценок вероятностных характеристик. Соответствие оценки истинному значению характеристики можно дать только в вероятностном смысле. Для построения кривой распределения какого-либо элемента волн, например высоты, необходимо иметь достаточно длинную непрерывную запись волн. Практически общее количество записанных на ленте волн должно быть не менее ста, обычно же исследователи берут большее количество.

Измеренные с ленты высоты волн располагают в порядке возрастания. Возможные значения высот волн разбивают на интервалы и относят к одному интервалу волны, высоты которых не выходят за его пределы. Высоты волн, находящиеся в данном интервале шириной Δh , обозначают h , а количество волн в интервале – n . Результаты заносят в таблицу (в один из столбцов записывают значения высот h , в другой – число волн в интервале) и представляют графически. При этом по оси абсцисс откладывают высоты волн, а по оси ординат – отношения $\frac{n}{N} \cdot \frac{h}{\Delta h}$, где h – средняя высота волн. При достаточно большом общем числе волн N и числе волн n в интервале отношение $\frac{n}{N} \cdot \frac{h}{\Delta h}$ близко к вероятности появления

волн высотой h . Построенная таким образом кривая является эмпирической кривой плотности вероятности или повторяемости высот волн. Подсчитав среднюю высоту волн \bar{h} , можно откладывать по оси абсцисс графика безразмерные высоты h/\bar{h} .

Помимо эмпирических кривых плотности вероятностей по данным измерений строят и кривые обеспеченности. При этом по оси ординат откладывают n^*/N , где n^* - число волн, высоты которых не менее h . Пример гистограммы распределения длин волн дан на рис. 7.12.

Методы проверки соответствия полученного эмпирического распределения теоретическому, определение параметров эмпирического распределения и их достоверности подробно рассмотрены в [6].

До сих пор мы обсуждали функции распределения элементов волн в глубоком море. На мелководье функции распределения волн существенно изменяются.

Я.Г.Виленский и Б.Х.Глуховский [8] на основе анализа натурных данных предложили аналитическое выражение функции обеспеченности высот и длин волн в море конечной глубины H :

$$F_h = \exp \left[- \frac{\pi}{4(1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\bar{h}}{H})} \left(\frac{h}{\bar{h}} \right)^{\frac{2}{1 - \bar{h}/H - 1}} \right]. \quad (3.16)$$

При большой глубине $H \rightarrow 0$ и (3.16) переходит в выражение (3.6) обеспеченности высот волн в глубоком море. При конечной глубине распределение высот существенно зависит от параметра $\frac{\bar{h}}{H}$ и описывается семейством кривых. Распределение (3.16), являющееся частным случаем распределения Вейбулла (3.15), получено на основе наблюдений в прибрежной зоне глубокого моря со значительными уклонами дна. В случае мелководного моря с малым уклоном дна функции распределения элементов волн оказываются отличными от (3.16). Согласно [10] функции распределения параметров волн в условиях прибойной зоны с малыми уклонами дна должны учитывать амплитуду волн.

Наряду с рассмотренными выше функциями распределения высот, длин и периодов волн в практике судостроения и гидротехники применяются функции распределения крутизны волн, длины гребней волн, числа волн в группе и другие.

Исследование групповой структуры волнения, проявляющейся в циклическом чередовании больших и малых волн, важно для расчета волновых воздействий на суда, буровые установки и т.п. Прибойные биения и явление тягуна в портах также связаны с групповой структурой волнения [11, 12].

Помимо одномерных функций распределения отдельных элементов волн в практике морских исследований применяются также и многомерные функции. Так, например, для характеристики разнообразия волн одновременно и по высоте, и по периоду строятся двухмерные

функции распределения по высоте и периоду. Поскольку относительные высоты и относительные периоды можно считать независимыми случайными величинами, то двухмерные безразмерные функции распределения по высоте и периоду можно рассчитывать как произведения соответствующих одномерных функций.

§ 3.3. Некоторые характеристики функций распределения элементов волн

Числовыми характеристиками функций распределения являются математическое ожидание, или среднее значение случайной величины, дисперсия, коэффициент вариации, коэффициент асимметрии и т.д. Каждая из этих величин характеризует какое-нибудь свойство функции распределения.

Математическое ожидание определяется как первый начальный момент случайной величины

$$\bar{x} = \int_0^\infty f(x)x dx.$$

Этим определением мы уже пользовались в предыдущих параграфах, когда находили среднюю высоту и средний период волн.

Дисперсией называется второй центральный момент случайной величины:

$$\delta^2 = \int_0^\infty (x - \bar{x})^2 f(x) dx. \quad (3.17)$$

Иначе говоря, дисперсией называется средний квадрат отклонения случайной величины от ее среднего значения. Дисперсия характеризует рассеяние значений случайной величины около ее математического ожидания. Дисперсию высот ξ_h^2 и длин δ_λ^2 волн найдем, подставляя в (3.17) функцию повторяемости (3.5) и (3.9):

$$\delta_h^2 = \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \bar{h}^2 = 0,274 \bar{h}^2,$$

$$\delta_\lambda^2 = \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \bar{\lambda}^2 = 0,274 \bar{\lambda}^2.$$

Для вычисления дисперсии периодов волн подставим в (3.17) выражение плотности вероятности (3.12). В результате получим следующее выражение дисперсии периодов волн δ_T^2 :

$$\delta_T^2 = \bar{T}^2 \left[1 + \Gamma^2 \left(\frac{5}{4} \right) \frac{2}{(\pi)^2} \right] = 0,078 \bar{T}^2.$$

Коэффициенты вариации высот k_h и периодов k_T найдем, разделив корень квадратный из дисперсии на среднее значение соответствующих величин:

$$k_h = \frac{\delta_p}{h} = 0,52,$$

$$k_T = 0,28.$$

Для вычисления коэффициента асимметрии нужно подсчитать третий центральный момент и разделить его на дисперсию в степени 3/2. Для высот волн третий момент

$$M_{3h} = \int_0^{\infty} f(h) (h - \bar{h})^3 dh = \left(2 - \frac{6}{\pi}\right) \bar{h}^3$$

$$\text{и коэффициент асимметрии } S_h = \frac{M_{3h}}{\delta^{3/2}} = 0,635.$$

Соответственно коэффициент асимметрии периодов $S_T = -0,01$.

Третий центральный момент характеризует асимметрию функции распределения плотности вероятности. Для симметричной функции все нечетные моменты равны нулю. Сравнивая коэффициенты асимметрии и вариации высот и периодов волн, мы видим, что функция распределения периодов обладает значительно большей симметрией и меньшей дисперсией, чем функция распределения высот.

§ 3.4. Функции распределения высот трехмерных волн

При теоретическом выводе функции распределения высот ветровых волн в точке рассматривалась статистическая совокупность радиальных отклонений частицы воды в вертикальной плоскости xOz , параллельно направлению распространения волн. Было установлено, что эти радиальные отклонения, а вместе с ними и высоты волн, подчиняются двухмерному нормальному закону распределения. При выводе функции распределения высот трехмерных волн учтем, что возвышение гребня трехмерной волны над средним уровнем моря уменьшается в направлении Oy . Примем для радиального отклонения частицы r следующее выражение:

$$r = \frac{1}{2} h^* \cos 2\pi \frac{y}{L} = \frac{1}{2} h^* \cos \phi.$$

Здесь h^* — высота трехмерной волны; L — длина гребня; y — расстояние вдоль гребня волны от вершины волны до данной частицы воды; $\phi = 2\pi y/L$, причем $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. Каждую величину r можно рассматривать как проекцию радиуса-вектора $\frac{h^*}{2}$ на плоскость xOz ; ϕ — случайная независимая величина, поскольку гребень каждой трехмерной волны с равной вероятностью коснется рассматриваемой частицы воды любой своей частью.

В результате приходим к выводу, что высоты трехмерных волн подчиняются трехмерномуциальному закону распределения. Функция плотности вероятностей запишется в виде

- 68 -

$$f(h^*) = Ch^*^2 \exp[-A^2 h^*^2].$$

Из условия $\int_0^{\infty} f(h^*) dh^* = 1$ найдем $C = \frac{4A^3}{\sqrt{\pi}}$, а из условия $\int_0^{\infty} h^* f(h^*) dh^* = \frac{4}{\pi (h^*)^2}$ имеем $A^2 = \frac{4}{\pi (h^*)^2}$.

Запишем в окончательном виде функцию плотности вероятностей:

$$f(h^*) = \frac{32}{\pi^2 h^*} \left(\frac{h^*}{h^*}\right)^2 \exp\left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{h^*}{h^*}\right)^2\right]. \quad (3.18)$$

Проинтегрировав это выражение, найдем функцию обеспеченности высот трехмерных волн:

$$F(h^*) = 1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{h^*}{h^*} \exp\left[-\frac{4}{\pi} \left(\frac{h^*}{h^*}\right)^2\right] - \operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{h^*}{h^*}\right).$$

Напомним, что

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Графики функций $f(h^*)$ и $F(h^*)$ приведены на рис. 3.1. и 3.2. Из графиков видно, что высоты трехмерных волн обладают меньшим разнообразием, чем высоты волн в точке.

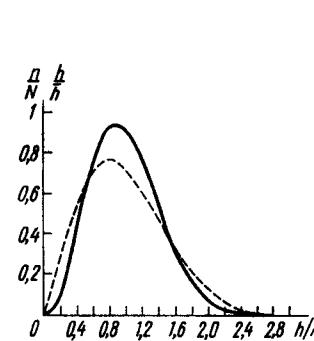


Рис.3.1. Функция повторяемости высот волн в точке (пунктирная линия) и трехмерных волн (сплошная линия)

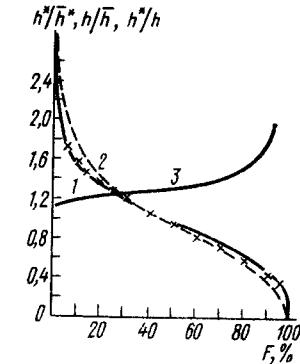


Рис.3.2. Функция обеспеченности высот волн в точке 1 и трехмерных волн 2; кривая 3 изображает обеспеченность отношения h^*/h высот трехмерных волн к высотам волн в точке; x — результаты измерений в натуре

Статистическая связь между высотами трехмерных волн и высотами волн в точке была установлена Ю.М.Крыловым. Для средних высот волн он получил следующее соотношение:

$$\frac{h^*}{h} = \frac{4}{\pi} \approx 1,27.$$

Статистическая связь между высотой трехмерной волны h^* , имеющей любую обеспеченность, и высотой волны в точке h , имеющей ту же обеспеченность, представлена на графике рис.3.2. Отношение h^*/h уменьшается с уменьшением обеспеченности и стремится к единице, когда обеспеченность приближается к нулю. Этот вывод имеет большое практическое значение, поскольку он теоретически обосновывает возможность измерять с помощью волнографов высоты волн, близкие к максимальным высотам трехмерных волн.

Поскольку совокупность длин векторов $\sqrt{h^*}$ удовлетворяет трехмерному нормальному закону распределения (3.18), то совокупность проекций этих векторов на каждую из координатных осей должна удовлетворять одномерномуциальному нормальному закону распределения. В частности, ординаты z взволнованной поверхности над невозмущенным уровнем должны подчиняться одномерному нормальному закону распределения, т.е. закону Гаусса:

$$g_2(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \delta} e^{-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\delta^2}}. \quad (3.19)$$

Здесь δ^2 -дисперсия ординат поверхности.

Тот же закон распределения примем для горизонтальных отклонений частиц воды:

$$g_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \delta} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\delta^2}}. \quad (3.20)$$

Подставим (3.19) и (3.20) в (3.3) и (3.4) и выразим дифференциальную функцию распределения радиусов волновых орбит через дисперсию ординат:

$$f(r) = \frac{r}{\delta^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\delta^2}\right].$$

Отсюда функция повторяемости высот волн в точке

$$f(h) = \frac{h}{4\delta^2} \exp\left[-\frac{h^2}{8\delta^2}\right].$$

Тогда средняя высота волн

$$\bar{h} = \int_0^\infty \frac{h^2}{4\delta^2} \exp\left[-\frac{h^2}{8\delta^2}\right] dh = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \delta, \quad (3.21)$$

т.е. средняя высота волн в точке пропорциональна корню квадратному из дисперсии волновых ординат.

Вывод о том, что распределение смещения свободной поверхности будет гауссовым, следует также из центральной предельной теоремы [13]. В этом случае пренебрегаем взаимодействием волн и область генерации волн должна быть больше области, в которой смещения поверхности коррелированы. Искажения волновых профилей и взаимодействия между волновыми составляющими могут привести к некоторому отклонению распределения смещений поверхности от гауссова [13, 14]. Наличие в волновом поле волн с острыми гребнями и пологими впадинами приводит к тому, что частота появления больших значений ординат выше, чем при гауссовом распределении, а частота появления больших отрицательных значений меньше. Эмпирические функции распределения смещений поверхности имеют положительную асимметрию и лучше описываются распределением в форме ряда Грама-Шарлье, которое в первом приближении сводится к гауссовскому. На рис.3.3 представлены формулы распределения смещений поверхности почти 20 000 отдельных измерений. Для анализа были использованы 13 записей развитого волнения, с каждой записи в среднем было снято около 1500 ординат. Экспериментальные значения лучше описываются распределением Грама-Шарлье, чем распределением Гаусса. Значение критерия χ^2 для нормального распределения при числе степеней свободы, равном 9, оказалось 86, в то время как для распределения Грама-Шарлье – около 19.

Важную информацию о поверхности дает ее наклон.

Наклон поверхности $\zeta(x, y, t)$ в направлении a определяется следующей формулой:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial a} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cos(ax) + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \cos(ay).$$

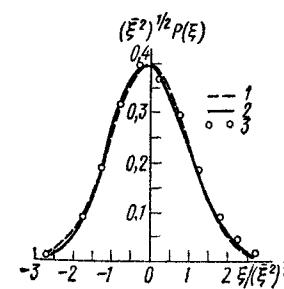
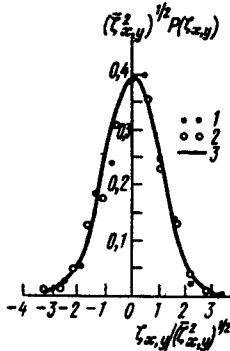


Рис. 3.3. Функция повторяемости возвышений поверхности: 1 – кривая Гаусса, 2 – кривая Грама-Шарлье, 3 – данные измерений.



На рис. 3.4 представлено распределение наклонов взволнованной поверхности в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Ось X совпадает с направлением ветра и волн.

Рис.3.4. Функция повторяемости наклонов поверхности: 1 – вдоль оси x , совпадающей с направлением скорости ветра, 2 – вдоль оси y , 3 – кривая Гаусса

§ 3.5. Спектральные характеристики волновой поверхности

Рассмотрим более подробно спектральные характеристики волновой поверхности.

Пусть возвышение поверхности ζ является стационарной случайной функцией координаты поверхности $\underline{x}(x,y,z=0)$ и времени t . Тогда $\zeta(\underline{x}, t)$ можно представить в виде интеграла Фурье по пространству волновых чисел \underline{k} и частот ω :

$$\zeta(\underline{x}, t) = \int \int \zeta(\underline{k}, \omega) \exp[i(\underline{k}\underline{x} - \omega t)] d\underline{k} d\omega.$$

Пространственно-временная корреляционная функция $R(\underline{x}, t)$ получается осреднением по ансамблю реализаций. В силу эргодичности волнового процесса осреднение по ансамблю можно заменить осреднением по времени и пространству

$$R(\underline{x}, t) = \overline{\zeta(\underline{x}, t) \zeta(\underline{x} + \underline{r}, t + \tau)},$$

где черта означает осреднение по \underline{x} и t . Независимость $R(\underline{x}, t)$ от \underline{x} и t следует из предположения о стационарности и однородности процесса. Частными формами $R(\underline{x}, t)$ являются пространственная корреляционная функция

$$R(\underline{r}) = R(\underline{x}, 0) = \overline{\zeta(\underline{x}, t) \zeta(\underline{x} + \underline{r}, 0)}$$

и временная корреляционная функция

$$R(\tau) = R(0, \tau) = \overline{\zeta(\underline{x}, t) \zeta(\underline{x}, t + \tau)}.$$

Широко используются нормированные корреляционные функции, например, временная корреляционная функция нормируется на средний квадрат возвышения в точке $\zeta^2 = R(0)$:

$$R_0(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)}.$$

Связь между корреляционной функцией и спектром дается теоремой Хинчина–Винера, которая утверждает, что спектр некоторого стационарного эргодичного случайного процесса представляет собой фурье-преобразование корреляционной функции. Спектр волновых чисел и частот является фурье-преобразованием от $R(\underline{x}, t)$:

$$S(\underline{k}, \omega) = (2\pi)^{-3} \int \int \int R(\underline{x}, t) \exp[-i(\underline{k}\underline{x} - \omega t)] d\underline{x} dt.$$

Интегрирование производится по всем значениям \underline{x}, t . Обратное фурье-преобразование имеет вид

$$R(\underline{x}, t) = \int \int \int S(\underline{k}, \omega) \exp[i(\underline{k}\underline{x} - \omega t)] d\underline{k} d\omega.$$

Отсюда следует, что

$$R(0) = \zeta^2 = \int \int S(\underline{k}, \omega) d\underline{k} d\omega. \quad (3.22)$$

Спектр волновых чисел и частот $S(\underline{k}, \omega)$ определяет плотность волновых составляющих ζ^2 на единичный объем пространства волновых чисел и частот. Используя связь между ζ^2 и плотностью волновой энергии $E = \rho g \zeta^2$, можно утверждать, что спектр также определяет (с точностью до постоянного множителя) плотность энергии спектральных составляющих.

Частотный спектр можно получить из $S(\underline{k}, \omega)$ интегрированием по волновым числам

$$S'(\omega) = \int \int \int S(\underline{k}, \omega) d\underline{k}$$

или фурье-преобразованием временной корреляционной функции

$$S'(\omega) = (2\pi)^{-1} \int \int R(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau.$$

Спектр волновых чисел получается из $S(\underline{k}, \omega)$ интегрированием по частотам

$$S(\underline{k}) = \int \int \int S(\underline{k}, \omega) d\omega$$

или из пространственной корреляционной функции

$$S(\underline{k}) = (2\pi)^{-2} \int \int R(\underline{r}) \exp(-i\underline{k}\underline{r}) d\underline{r}.$$

Применение прямого фурье-преобразования к $S'(\omega)$ и $S(\underline{k})$ позволяет получить соответственно

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S'(\omega) \exp(-i\omega\tau) d\omega,$$

$$R(\underline{k}) = \int_{\underline{k}} S(\underline{k}) \exp(i\underline{k}\underline{r}) d\underline{k}.$$

Обычно рассматриваются только положительные частоты, при этом вводится частотный спектр, определяемый следующим соотношением:

$$S(\omega) = \begin{cases} 2S'(\omega), & \omega \geq 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

Тот факт, что компоненты волнового поля удовлетворяют дисперсионному соотношению, позволяет ввести понятие частотно-углового спектра или частотно-направленного спектра [13].

Для гравитационных поверхностных волн в условиях глубокой воды $\omega^2 = gk$. Поэтому спектр $S(\underline{k}, \omega)$ отличен от нуля только на окружности радиуса $k = \omega^2 g^{-1}$. Аргументами спектра $S(\underline{k})$ в декартовой системе координат являются проекции k_x и k_y волнового числа \underline{k} , а в полярных координатах – волновое число k и полярный угол $\Theta = \arctg(k_x/k_y)$. В координатах k и Θ пространственный спектр характеризует распределение дисперсий элементарных волн в зависимости от k и Θ . В линейной модели ветрового волнения спектральные компоненты $S(\underline{k})$ рассматриваются как элементарные плоские линейные волны. Такая постановка согласуется с представлением Пирсона, изложенным в § 3.1. При переходе от волнового числа к частоте получаем частотно-угловой спектр

$$S(\omega, \Theta) = \frac{2\omega}{g} \left. S(k) \right|_{k=\frac{\omega^2}{g}} = \frac{2\omega}{g} \left. S(k, \Theta) \right|_{k=\frac{\omega^2}{g}}.$$

Частотный спектр через спектр волновых чисел выражается следующим образом:

$$S(\omega) = \frac{2\omega^3}{g^2} \int_{-\pi}^{\pi} S(k, \Theta) d\Theta \Big|_{k=\frac{\omega^2}{g}}.$$

Подробное изложение методов перехода от одного вида спектра к другому дано в [6; 13]. Для получения спектра $S(\omega)$ достаточно записи $\zeta(x, t)$ в фиксированной точке. Для измерения $S(k, \omega), S(k)$

используется система пространственно разнесенных датчиков волнения. Методы измерения пространственного спектра волн, спектрального анализа возвышений поверхности и пространственных производных в нескольких точках, применение интерференционных решеток изложены в недавно изданных монографиях [6; 17; 18]. Для измерения $S(k)$ также используется метод стереофотографии [6] голограммический [19] и радиолокационный [20; 21].

§ 3.6. Оценки спектров случайных процессов

В результате проведения эксперимента обычно получают ограниченную во времени и пространстве реализацию исследуемого процесса, или набор реализаций. Ограничность во времени и пространстве реализаций или ограниченность числа реализаций не позволяет получить истинное значение спектра исследуемого процесса, его корреляционной функции и других вероятностных характеристик. Для получения истинных значений необходимо иметь ансамбль реализаций процесса или (при выполнении условия эргодичности) проводить осреднение по бесконечно большому промежутку времени или пространства. Ограничность реализаций исследуемого процесса позволяет получить только оценки вероятностных характеристик процесса. Оценки вероятностных характеристик, в том числе и спектров, являются случайными величинами. Отличие оценки вероятностной величины (спектра) от истинного значения можно определить только в вероятностном смысле. В настоящее время более широко применяются линейные методы получения оценок вероятностных характеристик случайных процессов. Принципы построения алгоритмов вычисления линейных оценок рассмотрены в [17; 22; 23]. Следуя [17; 22], опишем основные свойства линейных оценок спектра. В основе получения линейных оценок спектра лежит узкополосная фильтрация реализации исследуемого процесса, состоящая в выделении из реализации колебаний в узком частотном диапазоне. Величина сигнала на выходе узкополосного фильтра принимается за оценку спектра на частоте настройки фильтра. Набор таких узкополосных фильтров обеспечивает получение спектральной оценки.

Линейную оценку спектра по реализации $\zeta(t)$ длительностью T можно получить двумя способами. Первый способ состоит в вычислении амплитудного спектре-реализации, т.е. в получении фурье-преобразования $\zeta(t): T$

$$C_T(\omega) = \int_0^T \zeta(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

Квадрат модуля амплитудного спектра является периодограммой, или несглаженной оценкой спектра

$$S_T(\omega) = \frac{1}{2\pi T} |C_T(\omega)|^2.$$

Для получения сглаженной оценки спектра периодограмму сглаживают по частоте ω с помощью сглаживающей функции $Q(\omega)$:

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{-\infty}^{\infty} S_T(\omega) Q(\omega - \omega_1) d\omega_1.$$

Сглаживающая функция (частотное окно) $Q(\omega)$ близка к единице в полосе пропускания частот $\Delta\omega$ и близка к нулю вне этой полосы. Для полосы $\Delta\omega$ выполняется следующее неравенство: $\Delta\omega > \frac{1}{T}$. Сглаживающая функция необходима для уменьшения дисперсии оценки спектра $S_T(\omega)$. Наряду со сглаживанием по частотам для уменьшения дисперсии оценки спектра иногда применяется осреднение по независимым реализациям.

Описанная последовательность операций, называемая фильтрацией, реализуется в числовых вычислительных машинах при помощи быстрого преобразования Фурье и в аналоговых анализаторах спектра. В линейный анализатор спектра входят узкополосный фильтр, квадратичный детектор, осредняющее устройство (осреднение в пределах длительности реализации T). Деление на ширину полосы $\Delta\omega$ можно осуществить путем соответствующей калибровки шкалы. Изменением центральной частоты полосы пропускания фильтра получают график зависимости величины спектра от частоты. В некоторых анализаторах используется набор смежных по частоте узкополосных фильтров, которые охватывают весь диапазон анализируемых частот. В этом случае для получения спектра нет необходимости в развертке по частоте.

При втором (корреляционном) способе получения оценки спектра сначала вычисляется оценка корреляционной функции

$$\hat{R}(r) = p(r) \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} \zeta(t) \zeta(t + r) dt = p(r) R_T(r).$$

В этом выражении $\hat{R}(r)$ – оценка корреляционной функции на полном интервале сдвигов, равном удвоенной длине реализации $2T$; $p(r)$ – весовая функция (временное окно), равная единице при $r = 0$ и нулю при $|r| > r_0$. Фурье-преобразование корреляционной функции дает оценку спектра. При расчетах обычно выполняется соотношение $r_0 < T$, что позволяет проводить интегрирование только в диапазоне $|r| < r_0$. Оценку функции корреляции можно получить при помощи аналогового или цифрового коррелятора. Применение весовой функции $p(r)$ вызвано тем, что истинная корреляционная функция, которая для стационарного случайного процесса должна быть положительно-определенной и непрерывной для всех моментов времени, заменяется функцией $R_T(r)$, которая определена только в ограниченном интервале времени и разрывна на краях этого интервала. Разрывность $R_T(r)$ может приводить к отрицательным оценкам спектральной плоскости, что не имеет физического смысла. Применение $p(r)$, плавно спадающей при $|r| \rightarrow r_0$, позволяет уменьшить появление отрицательных значений спектра.

Фильтровый и корреляционный способы получения оценок спектра

отличаются моментом перехода от временной координаты к частоте. Несглаженная оценка спектра $S_T(\omega)$, полученная фильтровым способом, и оценка функции корреляции для полного интервала сдвига $R_T(r)$ связаны между собой фурье-преобразователем. Если сглаживающая функция $Q(\omega)$ и весовая функция $p(r)$ связаны преобразованием Фурье, то оба способа получения оценок спектров (фильтровый и корреляционный) дают одну и ту же оценку. Рис. 3.5 поясняет фильтровый и корреляционный методы вычисления сглаженных спектральных оценок. Линейные методы получения оценок спектров дают хорошие результаты при достаточно длинных реализациях. Систематические и случайные ошибки оценок спектра рассмотрены в [17; 22].

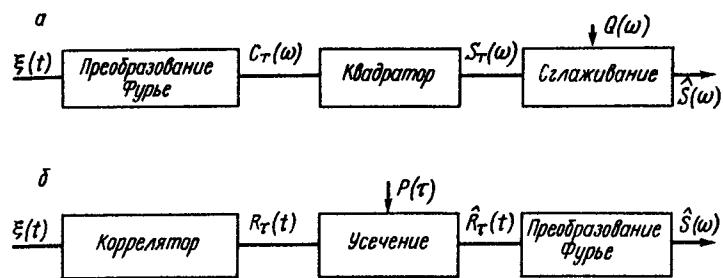


Рис.3.5. Фильтровый (а) и корреляционный (б) способы вычисления сглаженной оценки спектра [17]

Большинство исследуемых процессов имеет непрерывный характер, однако при измерении или при обработке непрерывных реализаций на цифровых ЭВМ производится превращение непрерывного процесса в дискретные числа. Такое представление основано на теореме Ко-тельникова, согласно которой временной процесс можно полностью описать набором дискретных значений этого процесса в моменты времени, разделенные определенным интервалом.

Превращение непрерывного сигнала в набор чисел состоит из двух основных частей. Первая часть – дискретизация, т.е. определение точек, в которых производится измерение. Вторая часть – квантование, или запись измеренных значений в численной форме. Интервал дискретности Δt должен быть достаточно малым, чтобы сохранить информацию о высокочастотных составляющих процесса, с другой стороны, он должен быть достаточно большим, чтобы измерения в соседних точках не были коррелированы между собой. На рис.3.6 дан пример превращения непрерывного сигнала в дискретную эквидистантную выборку, т.е. временной интервал Δt постоянен. Если интервал между соседними отсчетами равен Δt , то число отсчетов в секунду равно $1/\Delta t$. При этом полезная информ-

мация может быть получена от нулевой частоты до частоты, равной $f_H = \frac{1}{2\Delta t}$ (частоты наложения, или частоты Найквиста), так как составляющие с частотами, большими f_H , будут неотличимы от более низких частот. Это легко понять, например, из рассмотрения гармонической функции в моменты времени $t = \frac{n}{2f_H}$:

$$\cos 2\pi f t = \cos 2\pi(2nf_H \pm f_H) \frac{1}{2f_H} = \cos \frac{\pi f}{f_H}$$

($n = 1, 2, \dots$), т.е. при дискретности отсчетов $\Delta t = \frac{1}{2f_H}$ значения $\cos 2\pi f t$ для частот f и $2nf_H \pm f$ будут одинаковы. За счет этого эффекта, называемого эффектом маскировки или свертывания частот, происходит искажение спектра. Для исключения этого искажения нужно выбрать частоту f_H настолько большой, чтобы она превышала частоты всех составляющих в исследуемом процессе. Второй способ состоит в высокочастотной фильтрации исходного процесса.

Второй частью процесса превращения непрерывного процесса в набор дискретных чисел является квантование. Квантование состоит в замене значения непрерывной величины $\zeta(t)$ в момент отсчета на число. Точность такой замены зависит от числа уровней квантования, приходящихся на весь диапазон измеряемых значений. Ошибка возникает при замене $\zeta(t_0)$ на n или $n+1$. Согласно [22] при числе уровней квантования, равном 256, отношение среднеквадратичных

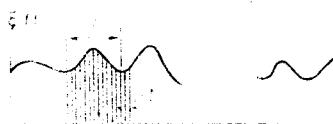


Рис. 3.6. Методика обработки волнограммы. Дискретное представление непрерывной реализации

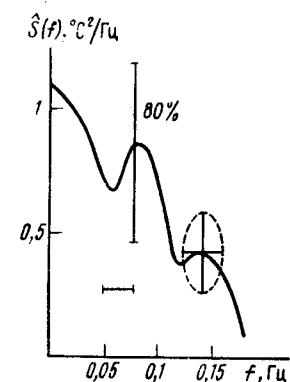


Рис. 3.7. Оценка спектра, доверительные интервалы (вертикальные линии), интервалы разрешения (горизонтальные линии) и эллипс рассеяния [17]

значений шума и сигнала $\approx 0,001$. Для большинства задач ошибка квантования пренебрежимо мала.

Таким образом, в результате обработки ограниченной реализации получают оценку спектра (рис. 3.7). Ошибка в величине спектральной плотности характеризуется дисперсией случайной ошибки. Ошибка в положении спектральных составляющих определяется интервалом разрешения. Интервал разрешения и дисперсия определяют область рассеяния оценки вокруг истинного значения (эллипс рассеяния). Практически область рассеяния оценки строится вокруг оценки спектра, так как истинное значение спектра неизвестно. Часто для характеристики качества оценки спектра используют доверительный интервал. Оценка спектра попадает в пределы доверительного интервала с заданной вероятностью. На графике доверительный интервал располагают относительно полученного значения оценки спектра, величина доверительного интервала пропорциональна оценке спектра и зависит от заданной величины вероятности. Методы определения доверительных интервалов и дисперсий оценок изложены в [22; 23]. Таким образом, исходные данные будут представлены в виде N значений ряда y_n , $n = 0, \dots, N-1$, полученных в интервале времени $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, (N-1)\Delta t$. Если прибор, с помощью которого были произведены измерения величины ζ , обладает линейной характеристикой и имеет чувствительность q , то от измеренных значений $y_n(n\Delta t)$ легко перейти к соответствующим значениям $\zeta_n = \frac{y_n}{q}$.

Оценки основных статистических характеристик получают по следующим формулам. Выборочное среднее значение равно

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_n.$$

Ряд ζ_n обычно приводят к виду, при котором его среднее значение равно нулю: $x_n = \zeta_n - \bar{\zeta}$. В случае записи возвышений поверхности воды среднее значение соответствует положению невозмущенной поверхности воды, а колебания поверхности относительно этого невозмущенного уровня соответствуют x_n .

Оценка дисперсии равна

$$\delta_T^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x_n^2}{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\zeta_n - \bar{\zeta})^2}{N-1}.$$

Оценка автокорреляционной функции при сдвиге $n\Delta t$:

$$\hat{R}_n = \hat{R}(n\Delta t) = \frac{1}{N-n} \sum_{r=0}^{N-n} x_r x_{r+n}, \quad r = 0, 1, \dots, m.$$

Величина $m\Delta t$ определяет максимальный временной сдвиг корре-

ляционной функции. Обычно $\frac{m}{N} \leq \frac{1}{10}$. Методика выбора m и Δt при обработке записей поверхностного волнения подробно рассмотрена в [6].

Оценка спектра может быть получена через корреляционную функцию

$$\hat{S}(\omega) = 2\Delta t [R_0 + 2 \sum_{m=1}^{m-1} R_m \cos(\omega r \Delta t) + R_m \cos(\omega \Delta tm)].$$

$\hat{S}(\omega)$ определяется для $(m + 1)$ дискретных частот

$$\omega_i = \frac{i 2\pi f_H}{m}, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Выражение для оценки спектра можно переписать так:

$$\hat{S} \left(\frac{i \omega H}{m} \right) = 2 \Delta t [R_0 + 2 \sum_{r=1}^{m-1} R_r \cos \frac{\pi r i}{m} + (-1)^1 R_m] .$$

Как уже говорилось, спектр процесса может быть получен посредством фурье-преобразования реализации, в данном случае ряда x_n . Фурье-представление ряда x_n имеет вид

$$x_n = x_n(n\Delta t) = \sum_{r=0}^{N-1} a_r \exp(i\omega_r n\Delta t),$$

где $n = 0, 1 \dots, N-1$, $\omega_r = \frac{2\pi r}{NAt}$,

$$a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \exp(-i\omega_r n\Delta t).$$

Оценку спекгра получаем по формуле

$$\hat{S}(\omega_r) = \frac{\Delta t}{2\pi N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n(n\Delta t) \exp(-i\omega_r \Delta t n) \right|^2.$$

Методы практической реализации расчетов спектров на ЭВМ изложены в [22; 23; 24; 25]. Результат расчета спектра представляется обычно графиком зависимости $\hat{S}(\omega)$ от частоты ω . Если диапазон изменения $\hat{S}(\omega)$ велик, по оси ординат откладывается $\lg \hat{S}(\omega)$. График $\lg \hat{S}(\omega)$ от $\lg (\omega)$ особенно удобен, если между $\hat{S}(\omega)$ и ω существует связь вида $\hat{S}(\omega) \sim \omega^a$. В этом случае график имеет форму прямой.

Опишем некоторые общие свойства оценок корреляционной функции и спектра. Осцилирующей корреляционной функции соответствует

спектр, имеющий форму узкого пика. Такой спектр, называемый узкополосным, можно получить, например, при анализе записи звука. Косинусоида является предельной формой осциллирующей корреляционной функции, соответствующий спектр имеет вид дельта-функции. Если корреляционная функция монотонно спадает с увеличением временного сдвига, соответствующий спектр также будет монотонно спадать по частоте. Такой спектр называется широкополосным. Автокорреляционная функция случайного процесса, энергия которого равномерно распределена по частотам (белый шум), имеет вид дельта-функции. Частота осциллирующей корреляционной функции примерно соответствует частоте максимума спектрального пика.

Временной интервал, при котором значение корреляционной функции резко уменьшается, является мерой корреляции данного процесса. Если $R(\tau)$ не пересекает нулевого значения и при максимальном сдвиге τ_{\max} , то это указывает на отсутствие в исследуемом процессе составляющих с периодами, меньшими τ_{\max} .

§ 3.7. Спектр ветрового волнения

Частотный спектр ветровых волн является наиболее изученной и наиболее широко используемой формой спектра. Частотный спектр обычно подразделяется на несколько интервалов, различающихся преобладающим действием различных физических механизмов, определяющих форму спектра в пределах каждого интервала. К этим интервалам относятся: гравитационный интервал, гравитационно-капиллярный, капиллярный и вязкий. Как следует из названия интервалов, они определяются соотношением гравитационных, капиллярных и сил вязкости. Основная часть энергии приходится на гравитационный интервал, энергия этого интервала определяет параметры видимых волн. На долю остальных более высокочастотных колебаний приходится не более 1 % общей энергии. Однако эти коротковолновые составляющие спектра играют определяющую роль в отражении радиоволн и света. Поэтому изучение высокочастотной части спектра важно для развития неконтактных методов исследования морской поверхности.

Форма частотного спектра в гравитационном интервале характеризуется резким возрастанием спектра при увеличении частоты от низких к частоте максимума спектра ω_0 . При увеличении частоты выше ω_0 спектральная плотность убывает более медленно. В гравитационном интервале обычно выделяют две области. Область основных энергосодержащих частот, включающая в себя частоты максимума спектра и более низкие частоты, содержит 70–80 % энергии волн гравитационного интервала. На область равновесия, находящуюся на частотах выше ω_0 , приходится 20–30 % энергии. Число между областю основных энергонесущих частот и областью равновесия выделяют переходную область [6; 26]. Такая форма спектра является наиболее простой и реализуется при простейших условиях волнообразования. При наличии нескольких волновых систем картина может сильно исказиться. Например, волны зыби могут привес-

ти к образованию дополнительного максимума в области частот ниже частоты максимума спектра ветровых волн.

При определенных условиях волнообразования одновременно генерируются две системы волн, соответственно в частотном спектре волн формируются два максимума [27; 28]. Вопрос о физических механизмах, приводящих к одновременной генерации двух волновых систем, будет рассмотрен в следующей главе.

В настоящее время получено значительное число формул, аппроксимирующих частотный спектр ветровых волн. Большинство формул, описывающих спектр без разделения на отдельные области, может быть записано в форме

$$S(\omega) = A\omega^{-s} \exp[-B\omega^{-n}], \quad (3.23)$$

где A, B – размерные, а s, n – безразмерные параметры. Обычно s, n считаются константами, а A, B зависят от параметров волнообразования или статистических параметров видимых волн. Подробное описание различных формул $S(\omega)$, предложенных до 1966 г., дано Г.Е. Кононковой [29], более поздние виды формул приведены в [6; 30]. Ограничимся поэтому только некоторыми видами $S(\omega)$.

Для полностью развитого волнения в спектре Китайгородского–Пирсона–Московица константы в (3.23) равны

$$A = 8,1 \cdot 10^{-3} g^2, \quad B = 0,74 \left(\frac{g}{V} \right)^4, \quad n = 4, \quad s = 5,$$

где V – средняя скорость ветра, измеренная на высоте 10 м.

В спектре, предложенном Ю.М. Крыловым, параметры A, B выражаются через средние элементы наблюдаемых волн [7]:

$$A = 0,0795 \frac{\bar{h}^2 (2\pi)^7}{(\bar{T})^6}, \quad B = 0,785 \left(\frac{2\pi}{\bar{T}} \right)^4, \quad n = 4, \quad s = 7.$$

Следует отметить спектр, предложенный на основе анализа данных международного эксперимента в Северном море JONSWAP [31]:

$$S(\omega) = a_p g^2 \omega^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-4}\right] \gamma^r, \quad (3.24)$$

где $r = \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\delta^2 \omega_0^2}\right]$, средние значения параметров равны: $\delta = 0,07$ для $\omega < \omega_0$ и $\delta = 0,09$ для $\omega > \omega_0$, $\gamma = 3,3$, $a_p = 1,2 \cdot 10^{-2}$. Величина a_p изменяется при изменении скорости ветра и разгона (разгон – расстояние от точки наблюдения до берега или наветренной границы шторма). Эта формула является примером многопараметрического задания спектра: его вид определяют пять параметров (a_p, γ, ω_0 , два значения δ).

Некоторые авторы, например И.Н. Давидан [26], предлагают аппроксимацию для различных областей гравитационного спектра.

Гипотезу о существовании на частотах, больших ω_0 , равновесной области выдвинул О.Филлипс [13]. Он исходил из предположения, что процесс диссипации волн, прежде всего обрушение гребней волн при

достижении ими предельно устойчивой конфигурации, определяет форму спектра в этой области. Из соображений размерности Филлипс предложил следующую формулу частотного спектра:

$$S(\omega) = a_p g^2 \omega^{-5}, \quad \omega_0 \ll \omega \ll \omega_b, \quad (3.25)$$

и спектра волновых чисел:

$$S(k) = \beta_p k^{-3}, \quad k_0 \ll k \ll k_b, \quad (3.26)$$

где a_p, β_p – универсальные безразмерные постоянные.

Согласно Филлипсу, частоты в равновесной области много больше частоты максимума спектра ω_0 . Верхняя граница области равновесия определяется частотой и волновым числом, на которых начинает скажаться влияние сил поверхностного натяжения:

$$\omega_b = \left(\frac{\rho g^3}{a} \right)^{1/4}; \quad k_b = \left(\frac{g}{a} \right)^{1/2}$$

(a – коэффициент поверхностного натяжения).

Филлипс предлагает также выбирать верхнюю границу области равновесия такой, чтобы влиянием дрейфовых течений, сопровождающих ветровое волнение, можно было пренебречь. Многочисленные измерения подтверждают наличие равновесной области. Однако до настоящего времени нет единого мнения о величине константы a_p , частоте нижней границы равновесной области ω_n и даже о величине показателя степени. Так, В.В. Ефимов [18] считает, что равновесная область расположена на частотах, больших $3\omega_0$, так как на частоте $2\omega_0$ в спектре часто проявляется дополнительный максимум, возникающий вследствие нелинейных взаимодействий. Этого же мнения придерживаются Барнетт и Кенион [32]. Вопрос о влиянии течений на форму спектра в равновесной области будет рассмотрен в гл. У.

Согласно другим исследователям, равновесная область начинается практически для частот $\omega > \omega_0$. Так, в [6] для начальной стадии развития волнения считается $\frac{\omega_n}{\omega_0} = 1,12$. Зависимость $\frac{\omega_n}{\omega_0}$ от скорости ветра и частоты максимума аппроксимируется следующей формулой [6]:

$$\frac{\omega_n}{\omega_0} = 2 \left(\frac{\omega_0 V}{g} \right)^{-0.7}, \quad \frac{\omega_0 V}{g} \leq 2,3,$$

где V – средняя скорость ветра.

Если $\frac{\omega_0 V}{g} > 2,3$, $\frac{\omega_n}{\omega_0} = 1,12$. Величина $a_p = 7,8 \cdot 10^{-3}$. Однако при таком подходе в спектре практически выбирается участок, соответствующий аппроксимации

$$S(\omega) = 7,8 \cdot 10^{-3} g^2 \omega^{-5}.$$

Согласно [31] a_p не является универсальной константой, а изменяется с изменением Xg/V_*^2 :

$$a_p = 0,076 \left(\frac{Xg}{V_*^2} \right)^{0,22},$$

Таблица 3.1

Зависимость параметра α_p от безразмерного разгона

N группы спектров	\hat{X}	Число спект- ров в группе	$\alpha_p \cdot 10^3$
1	$3,5 \cdot 10^5$	5	23
2	$2,5 \cdot 10^5$	5	24
3	$2,3 \cdot 10^5$	3	29
4	$8 \cdot 10^5$	6	15
5	$1,0 \cdot 10^6$	3	15

где V_* -динамическая скорость ветра.

Данные ряда исследователей [31, 33] подтверждают существование такой зависимости. Измерения авторов, проведенные на Белом море, даны в табл. 3.1. С увеличением безразмерного разгона $X = \frac{Xg}{V_*^2}$ величина α_p уменьшается.

Спектр в интервале гравитационно-капиллярных волн согласно [34] аппроксимируется следующей формулой:

$$\cdot S(\omega) = a' g' \omega^{-4}, \quad 35 < \omega < 85 \text{ рад/с}, \quad (3.27)$$

где $a' = 0,012$, $g' = g + \frac{\alpha k^2}{\rho}$

Согласно некоторым измерениям спектральная плотность в гравитационно-капиллярном интервале является функцией скорости ветра, т.е. не существует насыщения. В [35] предлагается следующая формула спектра:

$$S(\omega) = 0,062 g V_* \omega^{-4}. \quad (3.28)$$

Подробный обзор исследований высокочастотной части спектра выполнили Митцуяси и Хондо [36]. Авторы разбивают спектр на 5 интервалов: гравитационный, интервал Китайгородского, интервал Лейкина-Розенберга, капиллярный и вязкий. В каждом интервале предлагается свой вид зависимости спектра.

Важнейшим свойством ветрового волнения является его трехмерность. Распределение спектральных составляющих по направлениям может быть описано в линейном приближении при помощи частотно-углового спектра $S(\omega, \Theta)$. Для получения оценки $S(\omega, \Theta)$ производят измерения решеткой волнографов [17]. Измерение пространственных спектров путем стереофотосъемки не получило широкого распространения из-за сложности проведения измерений и трудоемкости обработки материалов. Обычно измерения проводят с двух самолетов, на борту которых расположены синхронизированные фотоаппараты [6]. Оценки $S(\omega, \Theta)$ могут быть получены также при помощи анализа

синхронных измерений возвышений поверхности и наклонов в нескольких точках [37; 38; 39; 40]. Перспективны оптические и радиолокационные методы получения пространственных характеристик волнения [19; 20; 21]. Ясно, что вид частотно-углового спектра волнения зависит от стабильности ветра. Изменения величины и направления скорости ветра приводят к изменению распределения составляющих спектра. Как показывают наблюдения и измерения, основные энергонесущие компоненты спектра имеют направление, совпадающее с генеральным направлением скорости ветра Θ_0 . Более коротковолновые составляющие обладают большей изотропией в распределении направлений. В линейном приближении частотно-угловой спектр (иногда его называют частотно-направленным) выражается в виде произведения частотного спектра $S(\omega)$ и функции углового распределения $G(\omega, \Theta)$:

$$S(\omega, \Theta) = S(\omega) G(\omega, \Theta).$$

$G(\omega, \Theta)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(\omega, \Theta) d\Theta = 1.$$

Функция углового распределения $G(\omega, \Theta)$ определяет распределение волновой энергии в заданном интервале частот по направлениям. Функция углового распределения $G(\omega, \Theta)$ имеет резко выраженный максимум, совпадающий с генеральным направлением ветра Θ_0 . Ширина функции углового распределения зависит от частоты и, по некоторым данным, от скорости ветра. Как показывают измерения, функция углового распределения очень чувствительна к изменению скорости ветра [18; 39]. Функция углового распределения обычно аппроксимируется формулой вида

$$G(\omega, \Theta) = A(r) \left[\cos \frac{\Theta - \Theta_0}{2} \right]^{2r} \quad (3.29)$$

или $G(\omega, \Theta) = A(n) \left[\cos (\Theta - \Theta_0) \right]^n$, (3.30)

причем параметры r, n являются функциями частоты, а в некоторых формулах — и скорости ветра. В [12] предлагается следующая функция углового распределения, которая была получена на основе трехточечных измерений:

$$G(\omega, \Theta) = 2 \frac{\Gamma[2(1+r)]}{\Gamma^2[(1+r)]} \left[\cos (\Theta - \Theta_0) \right]^r,$$

где $r = \frac{1,8 \omega}{\omega_0}$, Γ — гамма-функция.

Эта формула хорошо описывает разницу в угловом распределении различных частот. Для низких частот ($\omega/\omega_0 \approx 0,6$) функция углового распределения пропорциональна $\cos^3(\Theta - \Theta_0)$. Для частот около максимума спектра ($\omega/\omega_0 \approx 1$) $G(\omega, \Theta) \sim \cos^2(\Theta - \Theta_0)$, для высокочастотных составляющих ($\omega/\omega_0 \sim 2$) функция углового распределения

пропорциональна $\cos(\Theta - \Theta_0)$. Согласно измерениям [18] угловое распределение энергии гораздо более узкое: так, в области спектрального максимума $G(\omega, \Theta) \sim [\cos(\Theta - \Theta_0)]^{12}$, на более высоких частотах $G(\omega, \Theta) \sim [\cos(\Theta - \Theta_0)]^6$. При осреднении $G(\omega, \Theta)$ в полосе частот $\omega \leq 2\omega_0$ частотно-угловой спектр имеет вид

$$S(\omega, \Theta) = 1,3 S(\omega) [\cos(\Theta - \Theta_0)]^{10}$$

$$\text{при } |\Theta - \Theta_0| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Такая высокая направленность оценок $G(\omega, \Theta)$ может быть объяснена устойчивостью ветра во время измерений и применением для получения оценок функции углового распределения метода максимального правдоподобия, обладающего высоким разрешением. В [40] предложена следующая зависимость параметра r , входящего в (3.29), от частоты и скорости ветра V :

$$r = \begin{cases} 11,5 \left(\frac{\omega_0 V}{g} \right)^{-7,5} \left(\frac{\omega V}{g} \right)^5, & \omega \leq \omega_0, \\ 11,5 \left(\frac{\omega V}{g} \right)^{-2,5}, & \omega > \omega_0. \end{cases}$$

Большой объем оценок $S(\omega, \Theta)$, полученных стереофотосъемкой и на основе многоточечных измерений возвышений поверхности, обобщен в [6]. Авторы предложили следующий вид функции углового распределения:

$$G(\omega, \Theta) = \left[2^n \frac{\Gamma^2 \left(\frac{n+1}{n} \right)}{\Gamma(n+1)} \right]^{-1} [\cos(\Theta - \Theta_0)].$$

Зависимость n от ω_0 и ω дается в форме таблицы.

В условиях мелкой воды спектральные характеристики ветровых волн изменяются. Это очевидно хотя бы из того, что в мелком море низкочастотные составляющие спектра не могут развиваться из-за влияния данного трения. Например, частотные спектры ветровых волн на Рыбинском водохранилище обеднены в области спектрального максимума и завышены в области высоких частот по сравнению со спектрами морского волнения, полученными в условиях глубокого моря [14]. Изменяется форма спектра и в области равновесия. Согласно [41] на глубине H спектр в равновесной области имеет вид

$$S(\omega) = BH\omega^{-3},$$

где $B = \text{const.}$

§ 3.8. Связь спектра ветровых волн с элементами наблюдаемых волн

Зная форму спектра ветровых волн, можно определить элементы наблюдаемых волн. Соотношения, дающие такую связь, приводятся в работах Лонге - Хиггинса [42], Ю.М.Крылова [7]. При этом средние параметры волн выражаются через моменты различных порядков спектра. Используются следующие моменты:

$$m_i = \int_0^\infty \omega^i S(\omega) d\omega,$$

$$m_{ij} = \int \int (k_x \cos \Theta + k_y \sin \Theta)^i S(k_x, k_y) dk_x dk_y,$$

$$m_{ij} = \int \int S(k, \Theta) k^{i+j} (\sin \Theta)^i (\cos \Theta)^j k dk d\Theta.$$

Рассмотрим прежде всего высоты волн. Согласно (3.21)

$$\delta^2 = \frac{\bar{h}^2}{2\pi}.$$

С другой стороны, дисперсия волновых ординат выражается через момент нулевого порядка спектра (3.22):

$$\delta^2 = \int_0^\infty S(\omega) d\omega = m_0,$$

$$\text{или } \delta^2 = m_{00}.$$

Таким образом, получаем

$$\bar{h} = [2m_0\pi]^{\frac{1}{2}} = [2\pi \frac{E}{\rho g}]^{\frac{1}{2}}.$$

Средняя высота волн, а следовательно и высота волны любой обеспеченности, зависит только от плотности энергии волн E . Средний период определяется подсчетом количества точек пересечения линии $\zeta(t)$ на волнограмме со средней линией, соответствующей положению невозмущенной поверхности:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\int_0^\infty S(\omega) d\omega}{\int_0^\infty \omega^2 S(\omega) d\omega}}^{1/2}.$$

Средняя длина волны $\bar{\lambda}$ и средняя длина гребня \bar{L} определяются через моменты спектра $S(k, \Theta)$. Рассмотрим профиль взволнован-

ной поверхности в произвольном направлении Θ , отсчитываемом от главного направления распространения волн. Среднее число нулей N_0 ординат волнового профиля (число пересечений волновой поверхностью среднего уровня поверхности) на единицу длины, согласно Лонге - Хиггинсу, равно

$$N_0 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{m_2(\Theta)}{m_0(\Theta)} \right]^{1/2}.$$

Число нулей на единицу длины имеет максимум N_{\max} в некотором направлении и минимум N_{\min} в перпендикулярном к нему направлении. Средняя длина волны определяется как величина, обратная максимальному числу нулей:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{N_{\max}} = 2\pi \left[\frac{m_0}{[m_2(\Theta)]_{\max}} \right]^{1/2},$$

а средняя длина гребня

$$\bar{L} = \frac{1}{N_{\min}} = 2\pi \left[\frac{m_0}{[m_2(\Theta)]_{\min}} \right]^{1/2}.$$

Экстремальные значения $m_2(\Theta)$ равны [6]

$$\left[\frac{m_2(\Theta)}{m_{\max}} \right] = \frac{1}{2} \left\{ (m_{02} + m_{20})^2 \pm [(m_{20} - m_{02})^2 + 4m_{11}]^{1/2} \right\}.$$

Отношение

$$\left\{ \frac{m_2(\Theta)_{\max}}{m_2(\Theta)_{\min}} \right\}^{1/2} = \frac{\bar{L}}{\bar{\lambda}}$$

называется показателем трехмерности. Вычислив средние элементы волн и используя функции обеспеченности, можно найти элементы волн любой обеспеченности.

Л и т е р а т у р а

1. Т и т о в Л.Ф. Ветровые волны. Л.: Гидрометеоиздат, 1969.
2. Б р о в и к о в И.С. Статистические характеристики элементов ветровых волн. - "Труды ГОИН", 1954, вып. 26, 147-194.
3. К р и л о в Ю.М. Теория и расчет ветровых волн глубокого моря. - "Труды ГОИН", 1954, вып. 26, 95-146.
4. П и р с о н В. Дж. Ветровые волны. - В кн.: Ветровые волны. - М.: ИЛ, 1962, с. 42-124.
5. Кононкова Г.Е. Зарождение ветровых волн на поверхности воды. - "Труды МГИ АН СССР", 1953, вып. 3, 3-29.
6. Д а в и д а н И.Н., Л о п а т у х и н Л.И., Р о ж к о в В.А. Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс. - Л.: Гидрометеоиздат, 1978.
7. К р и л о в Ю.М. Спектральные методы исследования и расчета ветровых волн. - Л.: Гидрометеоиздат, 1966.
8. В и л е н с к и й Я.Г., Г л у х о в с к и й Б.Х. Некоторые закономерности ветрового волнения. - "Труды ГОИН", 1955, вып. 29, 5-35.
9. Г л у х о в с к и й Б.Х. Исследование морского ветрового волнения. - Л.: Гидрометеоиздат, 1966.
10. Е щ е н к о Л.А. Функции распределения параметров морских волн в прибрежной зоне отмелых побережий. - "Труды ГОИН", 1980, вып. 151, 66-74.
11. Б ы ч к о в В.С., С т р е к а л о в С.С. Морские нерегулярные волны. - М.: Наука, 1971.
12. К р и л о в Ю.М., С т р е к а л о в С.С., Ц и п л у х и н В.Ф. Ветровые волны и их воздействие на сооружения. - Л.: Гидрометеоиздат, 1976.
13. Ф и л л и п с О.М. Динамика верхнего слоя океана. - Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
14. Кононкова Г.Е., Кузнецова В.В. Основные статистические характеристики ветрового волнения в прибрежной зоне. - "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1975, т. II, № 12, 1309-1313.
15. Кононков Е.А., Кононкова Г.Е., К у к л и н А.К., Корнева Л.А., Поборчая Л.Б. Исследование составляющих наклонов взволнованной поверхности по измерениям в море. - "Водные ресурсы", 1979, № 2, 183-189.
16. Wu J. Directional slope and curvature distributions of wind waves. - "J. Fluid Mech.", 1977, vol.79, N 3, 463-480.
17. Ко н я е в К.В. Спектральный анализ случайных океанических полей. - Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
18. Е ф и м о в В.В. Динамика волновых процессов вграничных слоях атмосферы и океана. - Киев: Наукова думка, 1981.
19. Sugimori J. Dispersion of the directional spectrum of short gravity waves in the Kuroshio Current. - Deep-Sea Research, 1973, vol.20, N 8, 747-756.
20. Ко н я е в К.В., Р о з е н б е р г А.Д. Радиолокационные наблюдения ветровых волн в море. - "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1982, т. 18, № 2, 211-216.
21. З а г о р о д н и к о в А.А. Использование допплеровского спектра радиолокационного сигнала для измерения некоторых параметров морского волнения. - "Метеорология и гидрология", 1971, № 1, 65-72.
22. Б е н д а т Дж., П и р с о л А. Измерение и анализ случайных процессов. - М.: Мир, 1971.

23. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложение. — М.: Мир, вып. 1, 1971; вып. 2, 1972.
24. Дрейер А.А., Черепеникова Ю.Н. Автоматизированная система статистической обработки материалов измерений на ЭЦВМ "Сетунь". — М.: Изд. ВЦ МГУ (ротапринт), 1969.
25. Курьянов Б.Ф., Медведева Л.Е. Гармонический анализ стационарных случайных процессов (с использованием быстрого преобразования Фурье). — М.: Изд. ВЦ МГУ (ротапринт), 1970.
26. Давидан И.Н. Исследование вероятностной структуры волн по натурным данным. — "Труды ГОИН", 1980, вып. 151, 8–26.
27. Кононкова Г.Е., Кузнецов В.В. Исследование зарождения ветровых волн на поверхности водохранилища. — "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1973, т. 9, № 12, 1303–1311.
28. Крылов Ю.М., Кузнецов В.В., Стрекалов С.С. Системы поля ветровых волн. — ДАН СССР, 1973, т. 208, № 4, 958–961.
29. Кононкова Г.Е. Динамика морских волн. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969.
30. Абусяров З.К. Морское волнение и его прогнозирование. — Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
31. Hasselmann K. Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North sea wave Project (JONSWAP) 'Deutsch. Hydrogr. Institut'. — Hamburg, 1973.
32. Barnett T.P., Kenyon K.E. Recent advances in the study of wind waves. — 'Report on progress in physics', 1975, vol.38, N 6, 667–729.
33. Кононкова Г.Е., Показеев К.В. Спектры ветровых волн на приливных течениях. — Деп. ВИНИТИ АН СССР, № 2818 – 17, РЖ Геофизика, 1977, 12B165.
34. Mitsuyasu H. Measurement of the hight frequency spectrum of ocean surface waves. — 'J. Phys. Oceanogr.', 1977, vol.7, N 6, 882–891.
35. Тоба J. Local balance in the air-sea boundary process. P.3. — 'J. Oceanogr. Soc. Japan', 1973, vol.29, 209–220.
36. Mitsuyasu H., Honda T. The high frequency spectrum of wind generated waves. — 'Report of Research Institute for applied Mechanics of Kyushu University', 1975, vol.22, N 71, 327–355.
37. Кубланов Я.М. Об определении двумерного спектра ординат морского волнения с помощью самоориентирующегося волномерного буя. — "Труды ЦНИИ им. А.И.Крылова", 1972, вып. 269, 3–20.
38. Трубкин И.П. Определение направленных энергетических характеристик ветрового волнения. — "Труды ГОИН", 1980, вып. 151, 108–115.
39. Davis R.E. Observations of the power and directional spectrum of ocean surface waves. — 'J. Marine Res', 1977, vol.35, N 3, 433–451.
40. Mizino S., Okkusum., Honda M., Rikishi K., Mitsuyasu H., Takai F., Suhura S. Observations of the directional spectrum of ocean waves by a clover-leaf buoy. — 'J. Phys. Oceanogr.', 1975, vol.5., N 4, 750–760.
41. Thornton E.B. Rederivation of the saturation range in the frequency spectrum of the wind-generated gravity waves. — 'J. Phys. Oceanogr.', vol. 7, N 2, 137–140.
42. Longuet-Higgins M.S. The statistical geometry of random surface. — 'Proc. Sump. Appl. Math', 1962, vol.13, 105–143.

ГЛАВА IV

ГЕНЕРАЦИЯ И РАЗВИТИЕ ВЕТРОВЫХ ВОЛН

§ 4.1. Исторический очерк развития учения о генерации волн ветром

В описанных в гл. II гидродинамических теориях волнение рассматривалось как установленвшееся. Влияние воздушной среды, находящейся над поверхностью воды, не принималось во внимание, т.е. не учитывалось влияние ветра как волнообразующей силы. Естественно, что при таком подходе к изучению волн на поверхности воды физическая природа их оставалась неизученной.

Первая попытка дать физическое объяснение явлению зарождения и развития волн на воде была предпринята братьями Вебер [1]. Их рассмотрение вопроса было чисто качественным, однако некоторые высказанные ими идеи представляют интерес до настоящего времени. Возникновение волн под действием ветра они представляли себе следующим образом. Ветер производит удары о поверхность воды. Сила воздействия ветра составляет некоторый угол с поверхностью воды. Эту силу можно разложить на горизонтальную и вертикальную составляющие. Горизонтальная составляющая, или сила трения, увлекает частицы воды в направлении ветра. Поскольку эта сила неодинакова в различных точках поверхности воды и непостоянна во времени, она нарушает гладкую поверхность воды, создавая на ней неровности.

Вертикальная составляющая силы ветра вызывает кратковременные понижения (или повышения) поверхности и, подобно брошенному камню, создает круговые волны. Части этой круговой волны, распространяющиеся в направлении ветра, усиливаются им; части круговой волны, движущиеся навстречу ветру, гасятся им. Это они объясняют тем, что в случае, когда направления ветра и волн совпадают, передний склон волны, находящийся в состоянии подъема, испытывает меньшее давление со стороны ветра, чем задний, находящийся в

состоянии опускания. Благодаря этому ветер способствует опусканию заднего (наветренного) склона волны и в значительно меньшей степени препятствует повышению переднего (зашвартованного) склона. Обращенные к ветру склоны как бы защищают противоположные склоны от влияния ветра.

В 1871 г. ту же мысль о меньшем давлении ветра на зашвартованный склон высказал Кельвин [2] и объяснил его вихреобразованием за гребнем волны, а в 1925 г. Джейфрис [3] облечил ее в математическую форму.

В дальнейшем эта идея была развита в работах В.В.Шулейкина [4], П.Л.Капицы [5].

Первое теоретическое решение проблемы зарождения волн дал Кельвин [2]. Он решал задачу об устойчивости относительного волнового движения поверхности раздела двух тяжелых идеальных жидкостей разной плотности, движущихся с различными скоростями поступательно и параллельно друг другу. Принимая условие, что движение потенциальное, а волны двухмерные синусоидального профиля, он нашел, что поверхность раздела становится неустойчивой относительно волнового движения, начиная с некоторой минимальной скорости верхнего потока относительно нижнего. Несколько позднее появилась работа Гельмгольца [6], в которой он рассматривает вопрос о возбуждении волн ветром тоже как задачу об устойчивости.

Остановимся более подробно на рассуждениях Кельвина.

Пусть на поверхности раздела воды и воздуха возникло квазипериодическое возмущение ζ , амплитуда которого очень мала и которое может быть приближенно представлено в виде волны

$$\zeta = a \sin(kx - \omega t).$$

Поверхность раздела может оказаться неустойчивой относительно этого движения, т.е. амплитуда возмущения начнет возрастать. Это нарастание амплитуды первоначального возмущения Кельвин и понимает под зарождением волны. Очевидно, что если частота γ окажется комплексной, то амплитуда волны окажется экспоненциальной функцией времени. Именно если $\gamma = \omega + i\varepsilon$, где ω и ε действительно величины, то

$$\zeta = a \frac{e^{\omega t} + e^{-\varepsilon t}}{2} \sin(kx - \omega t).$$

Кельвин получил следующее выражение для частоты γ , которую он считает основной характеристикой волнообразования:

$$\gamma = k \frac{\rho V + \rho_a V_a}{\rho + \rho_a} \pm \sqrt{\frac{gk(\rho - \rho_a) + \alpha k^3}{\rho + \rho_a} - \frac{k^2 \rho \rho_a (V_a - V)^2}{(\rho + \rho_a)^2}}.$$

Здесь ρ — плотность воды, ρ_a — плотность воздуха, V — скорость воды, V_a — скорость воздуха, k — волновое число, α — коэффициент поверхностного натяжения. Глубина воды и высота воздушного слоя приняты

бесконечно большими. В случае отрицательного подкоренного выражения γ будет комплексной.

Отсюда следует условие зарождения волны

$$(V_a - V)^2 \geq \frac{\rho + \rho_a}{\rho \rho_a} \left[\frac{g(\rho - \rho_a)}{k} + a k \right], \quad (4.1)$$

т.е. волны данной длины λ будут развиваться только в том случае, если разность скоростей $V_a - V$ больше некоторой величины, зависящей от природы соприкасающихся жидкостей и длины волны.

Кроме того, при некотором определенном значении $k = k_0$ правая часть уравнения (4.1) обратится в минимум и, следовательно, зарождение волн в этом случае будет возможно при самом малом значении скорости воздуха относительно воды.

Из уравнения (4.1) определяется k_0 :

$$k_0 = \left[\frac{g}{a} (\rho - \rho_a) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Условие зарождения волны длиной $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$ выражается так:

$$(V_a - V)^2 \geq \frac{2(\rho + \rho_a)}{\rho \rho_a} [g a (\rho - \rho_a)]^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда находятся численные значения критической скорости ветра и критической длины волны λ_0 . Величина критической скорости ветра оказывается равной 660 см/с, критическая длина волны $\lambda_0 = 1,8$ см, скорость ее распространения $C_0 = 23$ см/с.

Эти результаты резко противоречат наблюдениям, которые можно сделать в природе. Зарождение волны наблюдается при значительно меньших скоростях ветра, а именно при скоростях ветра порядка 100 см/с, а длины волн при этом значительно большие. На несовпадение полученных им результатов с наблюдаемыми указывал уже сам Кельвин и видел причину этого несовпадения в пренебрежении вязкостью.

Случай вязких жидкостей рассмотрел Джейфрис [3] (1925 г.), но основные идеи, использованные в его работе, были высказаны еще братьями Бебер, а затем Кельвингом. В указанной работе Кельвинг говорит, что волна не обтекается потенциальным потоком воздуха, так как за гребнем волны происходит вихреобразование вследствие вязкости воздуха. В результате этого давление на склон волны, обращенный к ветру, должно быть больше, чем на противоположный склон, защищенный от ветра. Эту идею под названием "гипотезы экранирования" использовал Джейфрис в своей работе. При этом для той части давления ветра, которая существенна для его решения, Джейфрис принимает следующее распределение вдоль профиля волны:

$$p' = s \rho_a V_a^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

где p' - переменное давление, V_a - скорость ветра, ρ_a - плотность воздуха, s - коэффициент экранирования, ζ - отклонение воды от спокойного уровня.

Таким образом, кривая давления p' смещена на $\pi/2$ относительно волны, т.е. максимумы давления совпадают с наветренным склоном, минимумы - с подветренным (или заветренным).

Ряд исследователей проводил измерения распределения давления вдоль профиля твердой модели волны, обдуваемых ветром в аэrodинамической трубе [4; 7]. В опытах Шулейкина [4] при помощи микроманометра измерялась разность давлений $p'' - p'$ в парах точек $M_1 - N_1$, $M_2 - N_2$ и других (рис. 4.1), лежащих на наветренном и заветренном склонах волны на одинаковой высоте над подошвой. Твердые модели волн, с которыми проводились опыты, имели профиль, весьма близкий к профилю реальных морских волн. Вдоль рабочей части аэродинамической трубы укладывались пять волн, причем вход воздушного потока на модель и сход с нее осуществлялись на подошвах волн. Согласно измерениям Шулейкина,

$$p'' - p' = \chi \rho_a V_a^2. \quad (4.2)$$

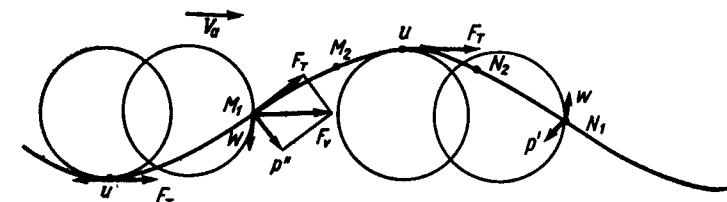


Рис. 4.1. Схема воздействия ветра на частицы воды в различных фазах их движения по круговым орбитам

Параметр χ зависит от крутизны волны h/λ . Для значения $\bar{\chi}$ осредненного от впадины до гребня, было получено

$$\bar{\chi} = 0,4 \frac{h}{\lambda} = 0,006.$$

В ряде экспериментов были получены подобные зависимости, которые дали значительно меньшие величины коэффициентов экранирования, чем предполагал Джейфрис ($s = 0,3$).

При действии "механизма экранирования" происходит передача энергии уже возникшим волнам, что связано с обратным влиянием волн на структуру воздушного потока в приводном слое.

Сила воздействия ветра F_v (рис. 4.1) на единицу поверхности

волны может быть представлена в виде нормальной составляющей p (давление) и тангенциальной составляющей F_T (сила трения). Ветер передает энергию волне посредством как давления, так и трения. Пусть направления ветра и скорости волны совпадают. На наветренном склоне частицы воды движутся вниз. Ветер, оказывая на них давление, совершает при этом положительную работу. На за- ветренном склоне, где частицы воды движутся вверх, сила давления производит отрицательную работу. Поскольку давление p'' на наветренный склон воды, как показывают опыты с твердыми моделями, больше, чем давление p' на заветренный, то положительная работа ветра оказывается больше по абсолютной величине, чем отрицательная. Следовательно, сила давления совершает над волной положительную работу, благодаря которой возрастает энергия волны.

Пусть две "парные" частицы (рис. 4.1), одна из которых находится на наветренном склоне, а другая на заветренном, переместятся по вертикали на dz . При этом возникает прирост энергии волны [4] $dE = (p'' - p') \cos \alpha dz$,

где α -угол между рассматриваемым элементом поверхности волны и горизонтальной плоскостью. Обычно этот угол мал, поэтому в дальнейшем для упрощения примем, что $\cos \alpha \approx 1$. Полный прирост энергии волны, вызванный перемещением поверхности воды от подошвы до вершины и обратно, выразится интегралом от 0 до h :

$$E = \int_0^h (p'' - p') dz.$$

Прирост энергии происходит за период волны T . За одну секунду прирост энергии

$$W_a = \frac{1}{T} \int_0^h (p'' - p') dz.$$

Подставляя сюда (4.2), получим

$$W_a = \frac{\rho_a V_a^2}{T} \int_0^h \bar{x} dz = \bar{x} \rho_a V_a^2 \frac{h}{T}.$$

Здесь \bar{x} —осредненное от впадины до вершины волны значение x . Для волн на поверхности воды, движущихся со скоростью c , эффективной скоростью ветра является величина $V_a = c$. Запишем окончательное выражение для средней за период величины мощности, передаваемой волне ветром посредством нормального давления:

$$W_a = \bar{x} \rho_a (V_a - c)^2 \frac{h}{T}.$$

Подобные выражения применялись Джейфрисом, Капицей, Мотцфельдом, Свердрупом и другими исследователями.

Сила трения оказывается максимальной на гребне волны, где она совпадает по направлению со скоростью частиц и совершает положи-

тельную работу. Во впадине волны сила трения меньше, чем на гребне, поскольку над впадиной меньше скорость ветра. Поэтому отрицательная работа, совершаемая силой трения во впадине волны, меньше по абсолютной величине ее работы на гребне. Суммирование работы, производимой силой трения над частицами воды, находящимися в разных точках волнового профиля, даст некоторую положительную величину, которая также переходит в энергию волны. Согласно современным представлениям энергия, передаваемая волнам посредством сил трения, много меньше энергии, передаваемой пульсациями давления [12, гл. II].

Возникающие на поверхности воды под действием ветра волны в дальнейшем могут либо развиваться, расти, либо затухнуть. Дальнейшая судьба зародившихся волн зависит от того, будет ли поступающая к ним от ветра энергия превышать потери на внутреннее трение и трение о дно, или же она окажется недостаточной, чтобы восполнить ежесекундные потери энергии. В первом случае волны будут расти, во втором — затухать.

Б.М. Маккавеев впервые составил уравнение баланса энергии при волнении в его наиболее общем виде [8]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = W_a - W_\mu - \frac{\partial}{\partial x} (c_g E), \quad (4.3)$$

где E — волновая энергия в бесконечно глубоком вертикальном столбе воды с единичным основанием; W_a — мощность, передаваемая ветром единице поверхности жидкости; W_μ — энергия волнового движения, переходящая за единицу времени в рассматриваемом столбе воды в другие виды движения; c_g — групповая скорость волн; x — координата в направлении распространения волн.

Уравнение (4.3) является формой записи закона сохранения энергии (2.72), в которой учтены источники и стоки волновой энергии.

Метод рассмотрения баланса энергии при волнении стал основой для расчета развития и затухания ветровых волн. Однако применение уравнения баланса энергии к решению конкретных задач динамики ветровых волн требует знания составляющих этого уравнения: W_a , W_μ и $\frac{\partial}{\partial x} [c_g E]$. В настоящее время уравнение (4.3) записывается для спектра ветровых волн. Спектральная форма (4.3) будет рассмотрена в § 4.6.

Для развития теории генерации волн большое значение имели измерения величины энергии W_a , поступающей от ветра к волнам. Впервые измерил W_a Шулейкин, производя опыты в созданной им гигантской волновой лаборатории — штормовом бассейне. Штормовой бассейн представляет собой большое замкнутое кольцо, внешний диаметр которого 40 м, внутренний — 38 м, высота от дна до крыши — 5,6 м. Путь волн, распространяющихся по кольцу, не имеет ни начала, ни конца, а ветер воздействует на них непрерывно на всем его протяжении, вызывая рост волн подобно тому, как это происходит в море.

Ветровой поток создается с помощью центробежных вентиляторов,

установленных на крыше. Скорость ветра в бассейне можно доводить до 19 м/с и получить достаточно большие волны (высотой до 1,5 м, длиной до 15 м и периодом до 4 с). Во всей толще воды при этом развивается дрейфовое и волновое течение, скорость которого на поверхности достигает 50 см/с.

В одном секторе этого канала застеклены внутренняя и наружная стекла, благодаря чему создана возможность производить фото- и киносъемки зарождающихся, развивающихся и затухающих волн. На поверхности воды при включении ветра сначала появляется мелкая рябь и вместе с ней начинает развиваться ветровое течение. Волны растут, крутизна их увеличивается. Затем волны, продолжая расти по длине и высоте, уменьшаются по крутизне. В дальнейшем их развитие идет до предельных размеров установленного волнения при данных скорости ветра и глубине воды. После выключения вентиляторов и прекращения ветра происходит затухание волн и течения.

Величину энергии, передаваемой волне ветром, Шулейкин находил из уравнения баланса волновой энергии (4.3), которое применительно к условиям кольцевого канала принимает следующий вид:

$$\frac{dE}{dt} = W_a - W_\mu - W_{ct}.$$

Это уравнение отличается от (4.3) тем, что в нем отсутствует производная потока энергии по координате и появляется новая величина W_{ct} , выражющая мощность, теряемую вследствие трения воды о стенки и дно канала. Величину $\frac{dE}{dt}$ можно найти непосредственно

по кривым нарастания среднеквадратичной высоты волны (рис. 4.2). Нужно еще знать $W_\mu + W_{ct}$, чтобы из уравнения баланса найти W_a . Сумму потерь энергии $W_\mu + W_{ct}$ Шулейкин нашел по кривым спада энергии волн, т.е. по исходящим ветвям кривых на рис. 4.2. При не слишком сильном ветре совпадение между теоретическим и опытным значениями было достаточно хорошее. По мере усиления ветра опытные значения начинают все больше превышать теоретические. По мнению Шулейкина, это расхождение вызвано появлением крутых волн высоких порядков на поверхности основных, что должно усилилось асимметрию в распределении давления над волнами.

§ 4.2. Зарождение волн под действием ветра

По представлениям большинства исследователей, процесс образования ветровых волн ветром происходит посредством механизма Филлипса [12, гл. II] состоящего в воздействии турбулентных пульсаций давления ветрового потока на водную поверхность.

Идеи, развитые Филлипсом, ранее высказывались Г.Е. Кононковой [5, гл. III] и Эккартом [9]. Рассмотрим, следуя работам Г.Е. Кононковой, зарождение ветровых волн на начальной стадии.

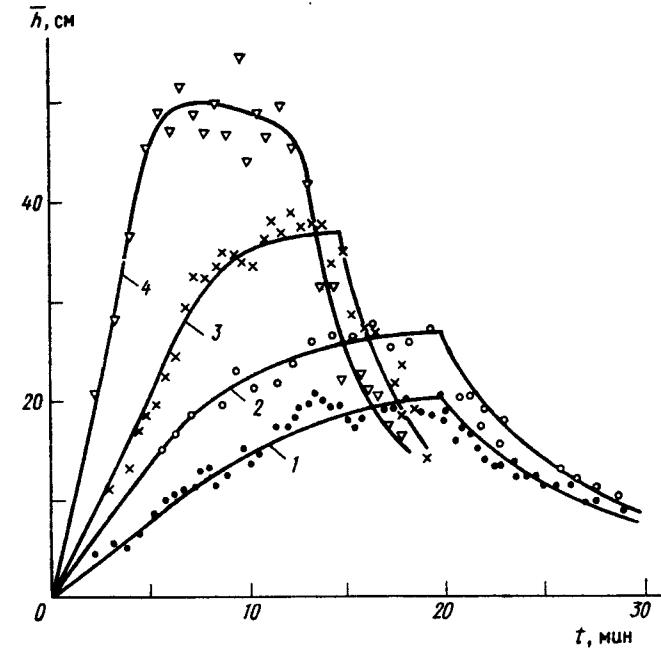


Рис. 4.2. Развитие и затухание волн в штормовом бассейне: средняя квадратичная высота волн в зависимости от длительности действия ветра, имеющего скорости соответственно 8, 10, 13, 17 м/с

В основу исследований положены эксперименты, проведенные в аэродинамической трубе Черноморского отделения Морского гидрофизического института АН СССР, имеющей длину 350 см и площадь поперечного сечения рабочей части 50x50 см, и в аэродинамической трубе, созданной по указаниям Н.Е. Жуковского в 1906 г. Эта труба имела длину 12 м и диаметр поперечного сечения рабочей части 1,2 м. В трубах помещались лотки, наполненные водой. При воздействии ветра на воду на ее поверхности возникали волны, периоды и амплитуды которых измерялись оптическим методом. С помощью специальной установки производилась регистрация колебаний поверхности воды в фиксированной точке.

Опыты показали, что на поверхности воды, обдуваемой ветром, возникает спектр волн, а не последовательность волн одного и того же периода. При этом на характер колебаний поверхности воды оказывает огромное влияние турбулентность ветрового потока, т.е. между турбулентностью воздушного потока и колебаниями поверхности воды существует определенная связь. Для выяснения этой связи были зарегистрированы с помощью специально сделанного

чувствительного манометра пульсации давления в фиксированной точке потока при различных средних скоростях ветра. Были рассчитаны спектры пульсаций давления при скоростях ветра от 100 см/с до 650 см/с (рис. 4.3). Сравнение спектров турбулентных пульсаций

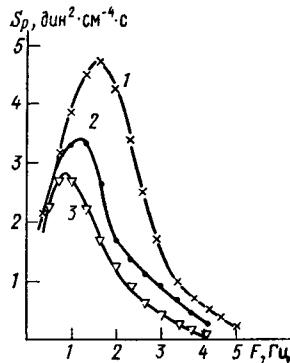


Рис. 4.3. Спектры турбулентных пульсаций давления в воздушном потоке при значениях скорости ветра, равных: 1 - 388, 2 - 329; 3 - 290 см/с.

максимальными по амплитуде в спектре волн максимумы амплитуд колебаний будут соответствовать тем же частотам, что и максимумы турбулентных пульсаций. Однако эксперимент этого не подтверждает. На начальной стадии зарождения при малом разгоне волн, когда амплитуды их еще настолько малы, что волны невидимы глазом, максимумы амплитуд в спектрах волн падают на более высокие частоты (~3 Гц), чем максимумы в спектрах турбулентных пульсаций давления (0,5-1,0 Гц). Намечающееся здесь противоречие является кажущимся. В действительности сдвиг максимумов, о котором идет речь, только подтверждает правильность сделанных предположений.

Для того чтобы показать это, воспользуемся исследованиями Ламба [11, гл. II] о действии на воду давления, изменяющегося во времени и пространстве по гармоническому закону, и обобщим их на случай давления, локализованного на некотором участке поверхности воды.

Пусть к поверхности воды приложено давление $\tilde{p}(\tilde{k}, t)$, заданное в виде следующей функции координаты и времени:

$$\tilde{p}(\tilde{k}, t) = C(\tilde{k}) e^{i\omega t} \cos \tilde{k}x = C(\tilde{k}) e^{i\omega t} \frac{e^{i\tilde{k}x} + e^{-i\tilde{k}x}}{2}, \quad (4.4)$$

- 100 -

давления со спектрами волн показало их сходство. Начальные колебания поверхности воды являются, по-видимому, некоторыми отражениями вертикальных импульсов, непрерывно действующих на воду вследствие турбулентности воздушного потока. Турбулентные пульсации давления можно представить в виде непрерывного спектра гармонических колебаний. Каждая гармоническая составляющая с этой точки зрения действует как вынуждающая сила, колеблющаяся со временем по гармоническому закону и сосредоточенная на некотором участке поверхности. Эта сила, очевидно, вызывает колебания поверхности воды с периодом, равным ее собственному. То же можно сказать о действии каждой гармонической составляющей в спектре пульсаций давления. Следовательно, спектр пульсаций давления в воздушном потоке вызывает спектр колебаний поверхности воды. При этом, казалось бы, максимальные амплитуды должны иметь те колебания поверхности воды, которые вызваны давлениями. Следовательно, можно было ожидать, что в спектре волн максимумы амплитуд колебаний будут соответствовать тем же частотам, что и максимумы турбулентных пульсаций. Однако эксперимент этого не подтверждает. На начальной стадии зарождения при малом разгоне волн, когда амплитуды их еще настолько малы, что волны невидимы глазом, максимумы амплитуд в спектрах волн падают на более высокие частоты (~3 Гц), чем максимумы в спектрах турбулентных пульсаций давления (0,5-1,0 Гц). Намечающееся здесь противоречие является кажущимся. В действительности сдвиг максимумов, о котором идет речь, только подтверждает правильность сделанных предположений.

где C – функция только \tilde{k} , имеющего смысл волнового числа, и не зависит от x , y , z ; ось Ox совпадает с направлением распространения возникающих волн и лежит в плоскости невозмущенной поверхности воды, а ось Oz направлена вертикально вверх.

При отсутствии сил трения рассматриваемая задача оказывается неопределенной, поскольку к получаемому частному решению может быть добавлено дополнительное волновое движение так, что найденное общее решение удовлетворит условиям задачи. Чтобы избежать этой неопределенности, присущей, как это подробно показано Л.Н.Сретенским [7, гл. II] многим задачам о волновых движениях, нужно устранить упомянутые посторонние волны. Это достигается введением небольших сил трения. Ламб, следуя Рэлею, принимает силы трения пропорциональными скоростям частиц:

$$x = -\mu u, \quad z = -\mu w.$$

При таком введении сил трения не нарушается потенциальный характер движения воды, но изменится давление:

$$p = \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - gz + \mu \phi \right).$$

Тогда, положив на поверхности воды $z = \zeta$, где ζ – бесконечно малое отклонение поверхности воды от спокойного уровня, получим

$$\zeta = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \frac{p}{\rho g} + \frac{\mu}{g} \phi_0. \quad (4.5)$$

Причем индекс "0" обозначает значение величин на поверхности.

С другой стороны,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0}. \quad (4.6)$$

Это позволяет найти отклонение ζ поверхности воды от невозмущенного уровня под действием приложенного к ней давления, заданного уравнением (4.4).

Запишем решение для потенциала скорости в виде следующей функции:

$$\phi = A C e^{i\omega t} e^{\tilde{k}z} \frac{(e^{i\tilde{k}x} + e^{-i\tilde{k}x})}{2}, \quad (4.7)$$

удовлетворяющей условию неразрывности. Из соотношений (4.6) и (4.7) находим

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -A \tilde{k} C e^{i\omega t} \frac{(e^{i\tilde{k}x} + e^{-i\tilde{k}x})}{2},$$

или

$x - 1142$

$$\zeta = -\frac{A \tilde{k}}{i \omega} C e^{i \omega t} \frac{e^{i \tilde{k} x} + e^{-i \tilde{k} x}}{2}$$

Из (4.5) с учетом (4.7) тоже найдем ζ , а именно

$$\zeta = \frac{C e^{i \omega t}}{g} \cdot \frac{(e^{i \tilde{k} x} + e^{-i \tilde{k} x})}{2} [A(i \omega + \mu) - \frac{1}{\rho}] .$$

Сопоставляя последние два выражения, найдем постоянную A :

$$A = \frac{i \omega}{\rho(g \tilde{k} - \omega^2 + i \omega \mu)} .$$

Учитывая, что $\frac{\omega^2}{g} = k$, и обозначив $\frac{\omega \mu}{g}$ через m , получим окончательное решение:

$$\zeta = -\frac{\tilde{k} C e^{i \omega t}}{\rho g [\tilde{k} - (k - im)]} \frac{e^{i \tilde{k} x} + e^{-i \tilde{k} x}}{2} . \quad (4.8)$$

Решение (4.8) для случая, когда давление приложено к бесконечно-му участку поверхности воды и является гармонической функцией координаты x , может быть обобщено посредством интеграла Фурье для произвольно заданного давления, например для давления, локализованного на некотором конечном участке поверхности воды.

В наших рассуждениях в качестве периодического во времени давления, приложенного к поверхности воды, рассматриваются составляющие спектра турбулентных пульсаций давления в фиксированной точке измерения. Очевидно, что пульсирующие давления приложены в этом случае к определенным участкам поверхности воды, размеры которых должны быть порядка размеров турбулентных неоднородностей в воздушном потоке.

Зададим распределение давления вдоль участка поверхности воды в виде следующей функции:

$$\tilde{p}_b = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \cdot \frac{b}{b^2 + x^2} e^{i \omega t} = \tilde{p}_b^0 e^{i \omega t}, \quad (4.9)$$

где $\tilde{p}_b^0 = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \cdot \frac{b}{b^2 + x^2}$ — амплитуда давления.

Здесь \mathcal{P} — интегральное давление, приложенное к воде, b — постоянная, имеющая размерность длины и характеризующая размеры неоднородностей.

Выражение (4.9) может быть представлено в другом виде:

$$\tilde{p}_b = \frac{\mathcal{P}}{\pi} e^{i \omega t} \int_0^\infty e^{-\tilde{k} b} \cos \tilde{k} x d\tilde{k},$$

или

$$\tilde{p}_b = \frac{\mathcal{P} e^{i \omega t}}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\tilde{k} b} (e^{i \tilde{k} x} + e^{-i \tilde{k} x}) d\tilde{k}. \quad (4.10)$$

Это уравнение является обобщением соотношения (4.4). Величина C в соотношении (4.4) соответствует $\frac{\mathcal{P}}{\pi} \exp(-\tilde{k} b)$.

Если давление задается уравнением (4.10), то вместо решения (4.8) получим следующее:

$$\zeta = -\frac{\mathcal{P} e^{i \omega t}}{2\pi \rho g} \int_0^\infty \frac{\tilde{k} e^{-\tilde{k} b} (e^{i \tilde{k} x} + e^{-i \tilde{k} x})}{\tilde{k} - k + im} d\tilde{k},$$

или

$$\zeta = \frac{\mathcal{P} i e^{i \omega t}}{2\pi \rho g} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-\tilde{k} b + i \tilde{k} x}}{\tilde{k} - (k - im)} d\tilde{k} - \int_0^\infty \frac{e^{-\tilde{k} b - i \tilde{k} x}}{\tilde{k} - (k - im)} d\tilde{k} \right]. \quad (4.11)$$

Интегралы в последнем выражении можно преобразовать, применяя методы теории вычетов. Для этого введем комплексную переменную $\tilde{k} + i\tilde{m}$, где \tilde{k} и \tilde{m} обозначают прямоугольные координаты переменной точки на комплексной плоскости. Точка этой плоскости с координатами $(k, -m)$ является особой. Интегралы в (4.11) преобразуются к виду:

$$\int_0^\infty \frac{e^{(ix-b)\tilde{k}}}{\tilde{k} - (k - im)} d\tilde{k} = \int_0^\infty \frac{e^{-(x+ib)\tilde{m}}}{\tilde{m} + (ki + m)} d\tilde{m},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(ix+b)\tilde{k}}}{\tilde{k} - (k - im)} d\tilde{k} = \int_0^\infty \frac{e^{-\tilde{m}(x-bi)}}{\tilde{m} - (ik + m)} d\tilde{m} - 2\pi i e^{-i(k-im)(x-bi)}.$$

Полученные выражения интегралов подставим в выражение (4.11). Оно является решением для ζ при наличии сил трения. Чтобы получить решение первоначально поставленной задачи, нужно перейти к пределу при $m \rightarrow 0$. В результате найдем окончательное решение:

$$\zeta = \frac{ik}{\rho g} \mathcal{P} e^{-kb} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{\mathcal{P} e^{i \omega t}}{\rho g \pi} \int_0^\infty \frac{k \cos \tilde{m} b + \tilde{m} \sin \tilde{m} b}{m^2 + k^2} \tilde{m} e^{-\tilde{m} x} d\tilde{m}. \quad (4.12)$$

Нас интересует случай положительных x , так как положительное направление оси Ox совпадает с направлением ветра.

Интеграл в (4.12) быстро убывает при возрастании x , и отклонение ζ на некотором расстоянии от центра приложения давления определяется так:

$$\zeta = - \frac{k\varPhi}{\rho g} e^{-kb} \sin(\omega t - kx). \quad (4.13)$$

Это и есть уравнение прогрессивной волны длиной $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ и амплитудой

$$a = \frac{k\varPhi e^{-kb}}{\rho g} = \omega^2 \frac{\varPhi}{g^2 \rho} \exp\left[-\frac{\omega^2 b}{g}\right]. \quad (4.14)$$

Уравнение (4.13) показывает, что частота прогрессивной волны, возникающей на поверхности воды под действием приложенного к ней давления, изменяющегося во времени по гармоническому закону, равна частоте колебания давления. Амплитуда волны пропорциональна величине интегрального давления, приложенного к поверхности воды, квадрату частоты колебания давления и величине $\exp\left[-\frac{\omega^2 b}{g}\right]$. Следовательно, если к поверхности воды приложен спектр пульсаций давления, то в возникающем на поверхности воды спектре волн максимальной амплитудой будет обладать волна той частоты, которой соответствует максимум величины

$$\frac{\varPhi \omega^2}{g} \exp\left[-\frac{\omega^2 b}{g}\right].$$

Очевидно, что эта частота совсем не обязана совпадать с частотой, на которую приходится максимум в спектре колебаний давлений. Таким образом, объясняется экспериментальный факт, что амплитудный максимум в спектре волн и амплитудный максимум в спектре пульсаций давления при одной и той же скорости ветра приходится на различные частоты.

По найденным спектрам пульсаций давления в воздушном потоке аэродинамической трубы были вычислены начальные спектры волн, вызываемых этими пульсациями. При этом произвольную постоянную b , влияющую на ширину полосы приложения давления к поверхности воды, положили равной 1 см.

Проведенные расчеты показали, что при $b = 1$ см эффективный размер турбулентных неоднородностей составлял ~ 10 см. Этот размер наиболее вероятен в аэродинамической трубе, размеры ячеек которой равнялись 5×5 см [29, гл. III].

Вычисленные спектры близки к экспериментальным. Максимум их падает на одну и ту же область частот ~ 3 Гц. При возрастании скорости ветра высокочастотные составляющие турбулентных пульсаций растут, и спектры волн значительно расширяются в сторону больших частот. В частотном отношении те и другие спектры обнаруживают достаточно хорошее совпадение. Но амплитуды волн, вычисленные

по спектрам пульсаций давления, оказываются значительно меньше измеренных амплитуд волн.

Причина этого заключается, по-видимому, в том, что те волны, которые измеряются в какой-то точке поверхности воды, проходя путь от начала лотка до этой точки, успевают получить дополнительную энергию от ветра и увеличить при этом свои амплитуды. Поэтому вычисленные спектры волн ближе всего совпадают со спектрами волн, возникающими у самого начала лотка (у наветренного берега), так как эти волны, будучи вызванными турбулентными пульсациями в ветровом потоке, не успевают заметно измениться под влиянием последующей передачи им энергии ветра.

В экспериментах в аэродинамической трубе измерения периодов и амплитуд волн производились в трех точках на расстояниях 70, 380, 670 см от начала лотка. Рис. 4.4 показывает, что средние длины волн при возрастании скорости ветра вначале уменьшаются, а потом, когда скорость ветра достигает некоторого значения, определенного для каждого разгона, начинают возрастать. Это объясняется тем, что начальные колебания поверхности воды создаются турбулентными пульсациями давления в ветре.

При возрастании скорости ветра частота турбулентных пульсаций растет, а вместе с ней растет и частота начальных колебаний поверхности воды (длина волны уменьшается). Возрастание длины волны при возрастании скорости ветра, начиная с некоторого значения, определенного для данного разгона, объясняется доминирующей ролью волн, образовавшихся у начала лотка и успевших развиться за время своего распространения до точки наблюдения.

В рассматриваемой работе впервые спектр зарождающихся волн приводится в связь с турбулентностью ветра. Позднее эта идея получила развитие в работах Эккарта [19] и Филлипса [12, гл. II].

§ 4.3. Измерение в море величины энергии, передаваемой ветром поверхности волн

Опыты с твердыми моделями волн, обдуваемыми в аэродинамических трубах, дали полезные сведения относительно характера распределения давления вдоль волнового профиля. Однако совершенно очевидно, что условия обтекания твердых недеформируемых моделей волн в аэродинамической трубе неидентичны природным условиям обтекания морских волн ветром. Поэтому особо важное значение

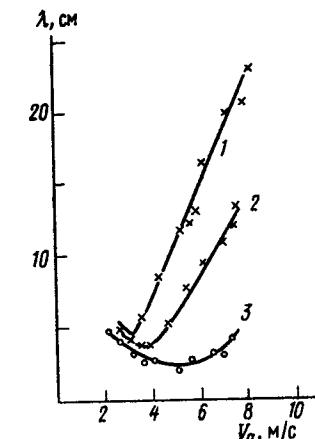


Рис. 4.4. Зависимость длины волн от скорости ветра при расстояниях от входа в канал, равных: 1 - 670; 2 - 380; 3 - 70 см

имеют прямые измерения в натуре давления ветра на поверхность волн. Такие измерения выполнили впервые А.Г.Колесников и Г.Е.Конюкова в Черном море прямым инструментальным методом [10].

Метод определения энергии, передаваемой нормальным давлением ветра поверхности морских волн, заключался в одновременной регистрации профиля волн и давления ветра на их поверхность при помощи специально разработанной аппаратуры. На поверхности волн в виде поплавка плавал датчик ветрового давления (рис. 4.5). На длин-

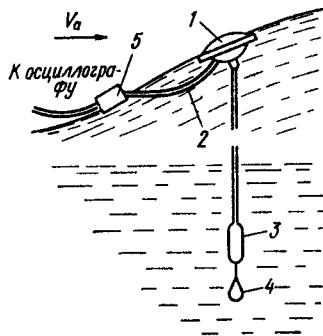


Рис. 4.5. Схема расположения приборов при регистрации волн и давления ветра

ном тросе (2) к нему был подведен датчик подводного давления (3) с добавочным грузом (4). Плавая на волне, поплавок совершал вертикальные колебания с амплитудой и фазой волны. Обычно датчик подводного давления находился на достаточно большой глубине, где амплитуда волнового движения ничтожно мала, поэтому выходной сигнал с датчика давал сведения о колебании поверхности воды на фиксированной вертикали. Этот сигнал, а также сигнал от поплавкового датчика ветрового давления подавались на магнитоэлектрический осциллограф по легкому проводу. Измерения давления ветра на поверхность волн в море связаны со многими трудностями. Прежде всего датчик ветрового

давления не долженискажать аэродинамики профиля волн, а значит не должен заметно возвышаться над их поверхностью. Но в то же время необходимо предусмотреть, чтобы датчик не заливался водой. Воспринимающая давление ветра поверхность датчика должна полностью следовать за поверхностью воды, колеблющейся как с большими периодами (волны зыбы), так и с малыми, меньшими 1 с. Движение поплавка на поверхности моря складывается из собственных вертикальных и боковых колебаний. Очевидно, что поплавок тем точнее будет отражать колебания поверхности моря, чем ближе совпадает амплитуда и фаза вынужденных колебаний с амплитудой и фазой волны. Последнее наблюдается, когда периоды собственных колебаний поплавка малы по сравнению с периодами волн. В этом случае собственные колебания поплавка при достаточно регулярном волнении быстро застухают.

Для того чтобы период собственных вертикальных колебаний поплавка был мал, необходимо, чтобы он имел малую массу при большом поперечном сечении. Однако при этом диаметр поплавка должен быть мал по сравнению с длиной волны.

Помимо трудностей, связанных с особенностями поведения поплавка на волне, сложность измерения заключается и в том, что из-

меряемая величина давления ветра чрезвычайно мала (миллиметры водяного столба и их десятые доли).

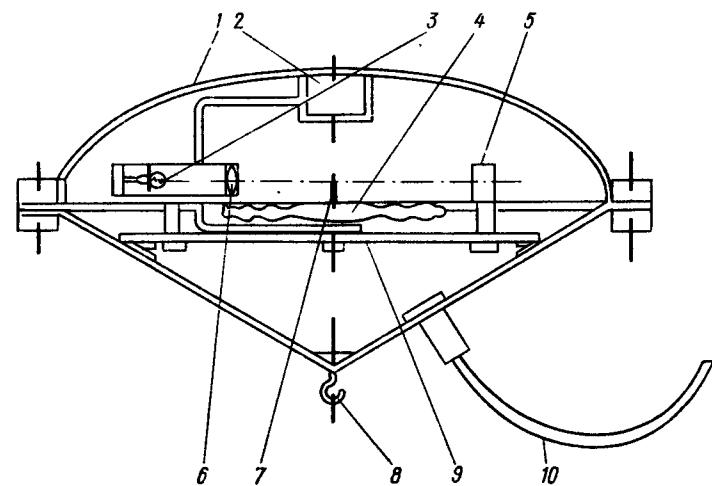


Рис.4.6. Датчик давления

Общий вид датчика ветрового давления представлен на рис. 4.6. Он состоит из поплавка хорошо обтекаемой формы диаметром 30 см. Период собственных колебаний его на воде невелик и составляет 0,5 с. Подбором груза достигалось, что над водой возвышалась только верхняя обтекаемая часть поплавка. Внутри корпуса 1 находятся мембранный коробка высокой чувствительности 4, светильник 3 и фотоэлемент 5. Измеряемое давление, отличающееся от среднего атмосферного на небольшую величину, подается через малое отверстие в верхней части корпуса и соединяющую трубку внутрь мембранный коробки. Во избежание попадания воды в это отверстие поверхность датчика вблизи него покрывается гидрофобным веществом. Наружное давление на мембранный коробку благодаря утечке 9 поддерживается равным среднему атмосферному на поверхности моря. Поэтому перемещения центра коробки пропорциональны разности между мгновенным и средним значениями давления на поверхность волн. К центру коробки припаяна фольговая шторка 7, частично перекрывающая поток света, идущий от светильника к фотоэлементу. При колебаниях давления, подаваемого в мембранный коробку, пластинка модулирует световой поток, падающий на фотоэлемент, соединенный со шлейфом магнитоэлектрического осциллографа. Отклонения светового указателя на ленте осциллографа пропорциональны измеряемому давлению, т.е. характеристика прибора линейна. Чувствительность прибора существенно зависит от тока накала лампочки и изменялась от 47 до 16 мм/мм вод.ст. при чувствительности шлейфа $2 \cdot 10^{-8}$ а/мм. Та-

кая чувствительность прибора оказалась вполне достаточной для измерений в море.

Поскольку датчик ветрового давления несколько возвышается над поверхностью волны, его показания могут, вообще говоря, отличаться от давления, приложенного непосредственно к поверхности волны. Чтобы проверить, вносит ли датчик искажения в поле давления, были проведены специальные опыты в аэродинамической трубе. В рабочей части ее сечением 160×160 см² была установлена твердая модель волны трохоидального профиля высотой 18, длиной 120 см. Производилось одновременное измерение давления микроманометром и нашим датчиком вначале на наветренный склон волны, затем на гребень, подветренный склон и подошву. Микроманометр соединялся шлангом с небольшим отверстием в поверхности волновой модели, несколько смещенным от оси аэродинамической трубы к ее стенке. Второй вход микроманометра соединялся с сосудом, давление в котором было постоянным и равным среднему атмосферному.

Симметрично указанному отверстию относительно оси трубы было сделано второе отверстие, к которому снизу подводился датчик давления. Датчик был установлен относительно поверхности модели волны так же, как он располагался на поверхности моря, т.е. слегка возвышаясь над ней, но сохраняя ее наклон. При этом ось датчика была перпендикулярна к прилегающему к нему участку поверхности. Поскольку в условиях опыта измеряется стационарное давление, утечка в датчике давления была наглухо закрыта, и давление внутри него оставалось постоянным. Таким образом, смещение центра мембранный коробки пропорционально разности между каким-то постоянным давлением, действующим на нее снаружи, и давлением, подаваемым внутрь и изменяющимся в зависимости от скорости ветра и положения точки измерения на профиле волны. Давление в корпусе микробарографа может отличаться от давления в сосуде, однако величина этой разности постоянна. Наличие ее не сказывается на результатах измерений, поскольку положение светового луча на ленте осциллографа, соответствующее при нулевой скорости ветра разности давлений в корпусе датчика и среднего атмосферного, принимается за нулевое. Таким образом, нули микроманометра и микробарографа совпадали. Оба прибора измеряли разность между средним атмосферным давлением и давлением на поверхности волновой модели. Измерения проводились при скоростях ветра, последовательно возрастающих от 0 до 20 м/с, и затем при убывании скорости ветра до нуля (одна серия измерений). В каждой точке модели серии таких измерений повторялись по три раза.

В результате опытов было установлено, что показания датчика ветрового давления соответствуют истинным значениям давления на поверхности волны. Величина разности показаний микробарографа и микроманометра, отнесенная к показанию последнего, составляет около 14 %.

Заметим, что опыт производился на крутой ($h/\lambda = 0,15$) и короткой моделях волны, т.е. при неблагоприятных условиях, когда высота возвышающейся над волной части микробарографа (2 см) соиз-

мерима с размерами волны. В случае реальных морских волн (более длинных) искажение будет меньше.

Точность измерений колебаний давления микробарографом зависит от возвышения его над поверхностью волны, утечки и точности отсчета смещения светового луча на ленте осциллографа. Ошибка, вызванная возвышением датчика над волной, была уже оценена. Наличие утечки в приборе может привести к искажению как амплитуды, так и фазы регистрируемых колебаний давления. Однако величина утечки может быть выбрана таким образом, чтобы искажения эти были минимальными при достаточно быстром выравнивании среднего давления в приборе. При выборе величины утечки мы воспользовались расчетом, проведенным С.В.Добросклонским [11], который нашел, что если измеряемое давление колеблется относительно среднего \bar{P} по гармоническому закону: $P = P_0 \cos \omega t$, то прибор регистрирует давление

$$P' = \frac{P_0 \cos(\omega t + \psi)}{\left(1 + \frac{q \omega \Omega}{\bar{P}}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

причем угол сдвига фаз ψ определяется из соотношения

$$\tan \psi = \frac{\bar{P}}{q \omega \Omega},$$

где q - сопротивление утечки, Ω - объем прибора.

Таким образом, утечка действует подобно фильтру высокой частоты, т.е. искажения, вносимые ею, тем значительнее, чем меньше частота измеряемых колебаний. Величина утечки была подобрана экспериментально так, что амплитуда колебаний с периодом 10 с регистрировалась с ошибкой 5 %. При этом сдвиг фаз ψ для колебаний с тем же периодом 10 с составлял 10°. Для колебаний же с периодом 2 с, представляющим наибольший интерес (он совпадает со средним периодом волн в дни измерений), ошибка в амплитуде составляла меньше 1 %, а ошибка в фазе - всего 4°.

При наличии сильного течения датчик волнографа может оказаться не на одной вертикали с датчиком ветрового давления, что также должно внести ошибку в измерения. Однако в условиях проведения наших наблюдений скорость течения не превышала 4-5 см/с, а угол отклонения троса от вертикали - 10-15°. Это обстоятельство могло привести к ошибке в амплитуде до 5 %. На мембранный коробку оказывало наибольшее влияние ускорение, с которым двигался датчик давления на волне. Максимальное значение ускорения в условиях наших измерений составляло 300 см²/с². Лабораторные опыты показали, что при таком ускорении световой указатель осциллографа дает смещение 3 мм. Среднее же смещение светового указателя на ленте во время измерений составляло 40 мм. Следовательно, максимальная ошибка, обусловленная влиянием ускорения на мембрану, не превышает 7,5 %.

Таким образом, суммарная ошибка не будет превосходить 20 %.

Инерционность прибора весьма мала, ибо собственный период колебаний шлейфа составляет 0,05 с, собственный период колебаний мембранные не превышает 0,01 с, трубка, соединяющая отверстие в датчике с мембранный коробкой, искажений не вносит, так как связанный с ней коэффициент инерции составляет 10^{-4} с.

Измерения ветрового давления на поверхности волн производились в прибрежной зоне Черного моря.

Было обработано 20 записей при различных скоростях ветра, изменяющихся от 1 до 9,3 м/с, разных направлениях ветра и при различных стадиях волнения (развивающемсяся, установившемся, затухающем). Высота волн не превышала 1 м, периоды составляли 2–3 с. На рис. 4.7. приводятся образцы записей пульсаций давления и волн. Анализ осциллограмм показывает, что колебания давления определяются как возмущениями, вносимыми волнами, так и турбулентными флуктуациями ветра. Колебания давления в значительной степени имеют случайный характер и содержат периоды от 0,2 до 20 с. Это позволяет применить для обработки осциллограмм аппарат случайных функций.



Рис. 4.7. Пример записи волн и пульсаций давления ветра

Назовем флуктуацией нормального давления разность между истинным (в момент времени t) и средним за промежуток времени значениями давления, т.е. $p'(t) = p(t) - \bar{p}$, где

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt.$$

В результате обработки полученных записей волнения и флуктуаций давления ветра были вычислены коэффициенты корреляции:

$$R = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T p'(t) w'(t) dt}{(\overline{p'^2} - \overline{w'^2})^{1/2}}, \quad (4.15)$$

где $w'(t)$ – вертикальная скорость поверхности воды в точке измерения давления: $w' = \frac{d\zeta(t)}{dt}$, $\zeta(t)$ – изменение уровня поверхности моря в той же точке. Величина коэффициента корреляции для отдельных наблюдений колебалась от 0,014 до 0,04. Малые значения коэффициента корреляции говорят о том, что флуктуации давления ветра являются в достаточной мере случайной функцией времени.

Далее была вычислена величина средней энергии, передаваемой

ветром волне на единицу поверхности моря, которая определялась в виде осредненного произведения флуктуаций давлений на флуктуации вертикальной скорости:

$$W_a = \frac{1}{T} \int_0^T p'(t) w'(t) dt. \quad (4.16)$$

Полученные значения энергии W_a (Вт/м²) приведены в табл. 4.1.

Там же помещены значения W'_a , полученные по формуле Шулейкина:

$$W'_a = (0,4 \frac{h}{\lambda} - 0,006) \rho_a (V_a - c)^2 \frac{h}{T}.$$

Сопоставление экспериментальных значений с другими теоретическими выражениями можно найти в [29, гл. III]. На основании (4.14) и (4.15) будем иметь

$$W_a = R [\overline{p'^2} - \overline{w'^2}]^{1/2}.$$

Полученное соотношение показывает, что знак потока энергии определяется знаком коэффициента корреляции. Отрицательная корреляция свидетельствует о том, что ветер, встречный либо затухающий, забирает энергию от волн. Такие случаи действительно наблюдались.

Особый интерес в этом отношении представляют измерения, проведенные 16 июля 1958 г. В этот день был юго-восточный ветер, создавший волнение того же направления. Скорость ветра была 5,1 м/с, скорость волн – 2,65 м/с. В 17 ч 12 мин была произведена запись волн и нормального давления ветра. Рассчитанная по этим записям величина оказалась положительной. Это означает, что возрастает энергия волн за счет работы ветра. Вскоре ветер начал стихать и в 18 ч 02 мин его скорость оказалась равной 1 м/с. Скорость распространения волн по-прежнему была 2,65 м/с. Величина корреляции в этих условиях оказалась отрицательной, что свидетельствует о начавшемся гашении волн.

Таким образом, непосредственные измерения в море подтвердили мнение некоторых исследователей о том, что если скорость волн больше скорости обдувающего их ветра, происходит гашение им волн. Позже направление ветра изменилось на западное, а направление распространения волн оставалось прежним. При этом средняя высота волн убывала. Корреляция между давлением и вертикальной скоростью частиц в волне осталась отрицательной, т.е. встречный ветер забирал энергию волн и способствовал их гашению.

§ 4.4. Воздушный поток над волнами

Ветер, дующий над морской поверхностью, является источником энергии и импульса для ветровых волн. Ветровые волны, возникающие на первоначально неподвижной волновой поверхности, сами оказывают значительное влияние на ветровой поток, который является турбулентным вследствие больших градиентов скорости в пограничном слое.

Таблица 4.1

Дата и время измерений	V_a , м/с	c , м/с	$V_a - c$, м/с	h , см.	T , с	$\frac{h}{\lambda}$	Энергия W_a , вычисленная по формуле Шулек- кина	W_a , B_T/m^2	R
16/VII 17 ч 12 мин	5,1	2,65	2,45	33	1,7	0,071	0,031	0,042	0,019
16/VII 18 ч 02 мин	1,0	2,65	-1,65	26,5	1,7	0,059	-0,009	-0,029	-0,024
17/VII 18 ч 45 мин	-3,10	2,81	-5,91	14,6	1,8	0,029	-0,030	-0,056	-0,040
18/VII 10 ч 30 мин	9,3	4,15	5,15	72,0	2,65	0,066	0,170	0,460	0,044
21/VII 11 ч 00 мин	4,75	2,78	1,97	20,0	1,8	0,040	0,005	0,012	0,014

Если рассматривать приводный слой, высота которого много меньше его горизонтальных размеров, характер движения слоя будет определяться не массовыми силами, а силой трения на подстилающей поверхности, поток импульса в пределах пограничного слоя будет постоянен [13, гл. II]. Напряжение Рейнольдса в пограничном слое выражают следующим образом:

$$\frac{w' u'}{\rho_a} = \frac{r_0}{\rho_a} = V_*^2 = C_z V^2(z), \quad (4.17)$$

где V_* – динамическая скорость или скорость гребня, C_z – коэффициент сопротивления, $V(z)$ – средняя скорость ветра на высоте z , w' и u' – вертикальная и горизонтальная составляющие пульсаций скорости.

Обычно в океанологии используют коэффициент сопротивления C_{10} , связывающий V_* со скоростью ветра на высоте 10 м над невозмущенной водной поверхностью.

В случае потока над гладкой поверхностью в пограничном слое можно выделить два подслоя. В вязком подслое, прилегающем к подстилающей поверхности, движение определяется молекулярной вязкостью. В этом подслое

$$\frac{r_0}{\rho} = V_*^2 = \nu \frac{\partial V}{\partial z},$$

где $\nu = \mu / \rho_a$ – коэффициент кинематической вязкости воздуха. Отсюда получаем линейный профиль скорости

$$V(z) = \frac{V_*^2}{\nu} z. \quad (4.18)$$

Во втором подслое, расположенным выше вязкого, характер движения определяется турбулентностью. Из соображений размерности следует

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{V_*}{\alpha z},$$

где $\alpha = 0,40$ – постоянная Кармана.

Интегрирование этого соотношения дает логарифмический закон изменения скорости от z :

$$V(z) = \frac{V_*}{\alpha} \ln z + \text{const.} \quad (4.19)$$

Из условия сшивки (4.18) и (4.19) на высоте $z = \delta$ можно определить константу в (4.19):

$$V(z) = \frac{V_*}{\alpha} \ln \frac{z}{\delta} + (Re_{kp})^{1/2},$$

где $Re_{kp} = \frac{V \delta}{\nu}$ – критическое число Рейнольдса, при котором

происходит переход вязкого ламинарного потока в турбулентный.

Приведенные выше соотношения справедливы при обтекании пото-

ком жидкости или газа поверхности, все неровности которой расположены в вязком подслое. Если шероховатости поверхности вызывают отрыв пограничного слоя, поверхность считается гидродинамически или аэродинамически шероховатой. Для потока над шероховатой поверхностью (4.19) записывается в виде

$$V = \frac{1}{\alpha} V_* \ln \frac{z}{z_0}, \quad (4.20)$$

где z_0 – параметр шероховатости, определяющий высоту, начиная с которой можно применять (4.20).

Из (4.17) и (4.20) следует связь между параметром шероховатости z_0 и коэффициентом сопротивления C_z

$$C_z = \left(\frac{V_*}{V_z} \right)^2 = \left(\frac{\alpha}{\ln \frac{z}{z_0}} \right)^2.$$

Вопрос о зависимости C_z и z_0 от скорости ветра и параметров волн еще не решен [12]. Некоторые исследователи считают, что с хорошей точностью выполняется соотношение [13, гл. II]

$$C_{10} = \text{const} \sim 2 \cdot 10^{-3}; \quad z_0 = \text{const}.$$

Согласно другим, при учете данных, полученных в условиях нейтральной стратификации, обнаруживается зависимость C_z от скорости ветра [12, гл. II]. Так, в [13] коэффициент сопротивления C_z изменяется от $0,78 \cdot 10^{-4} \cdot V_2^{1,24}$ до $9,6 \cdot 10^{-4} \cdot V_2^{0,54}$, где V_2 – скорость ветра на высоте 2 м, измеренная в м/с. Коэффициент сопротивления растет более интенсивно в стадии зарождающегося волнения, чем в последующей стадии развивающегося. Коэффициент сопротивления C_z и параметр шероховатости z_0 также зависят от разгона или продолжительности действия ветра.

Обтекание водной поверхности может происходить как обтекание аэродинамически гладкой, так и шероховатой поверхности. Для аэродинамически гладкой поверхности [12, гл. II]

$$z_0 \sim \nu V_*^{-1},$$

а для аэродинамически шероховатой выполняется формула Чарнока

$$z_0 \sim V_*^2 g^{-1}. \quad (4.21)$$

Коэффициент сопротивления соответственно в первом случае убывает с ростом динамической скорости ветра, а во втором возрастает. Процесс обтекания взволнованной морской поверхности значительно сложнее, при малых скоростях ветра велико влияние стратификации. Однако для $V_{10} < 5$ м/с коэффициент сопротивления близок к C_{10} для аэродинамически гладкой поверхности. При увеличении V_* растет плотность высокочастотных составляющих волнения и происходит переход от гладкой к аэродинамически шероховатой поверхности. Коэффициент сопротивления значительно возрастает.

Согласно большинству натурных и лабораторных измерений логарифмический профиль скорости (4.20) хорошо выполняется достаточно высоко над гребнями волн (рис. 4.8). На меньшей высоте поле ветра деформируется низкочастотными составляющими волнения. При учете этого искажения в (4.20) появляется член, зависящий от спектрального состава ветровых волн [12, гл. II]. По натурным данным однозначной связи z_0 с высотой волны не установлено [12]. В лабораторных условиях между z_0 и среднеквадратичным отклонением поверхности σ существует простая зависимость [25]:

$$z_0 = A \frac{V_* \sigma}{\nu}, \text{ где } A = \text{const}.$$

На рис. 4.9 приведены данные, полученные нами в аэрогидроканале. Зависимость z_0 от V_* удовлетворяет формуле (4.21) (рис. 4.10). Пропорциональность z_0 первой степени V_* и одновременная выполнимость (4.21) указывают на то, что дисперсия колебаний поверхности пропорциональна квадрату динамической скорости. Это тоже подтверждается экспериментами [29]. При увеличении разгона наблюдается рост z_0 и коэффициента сопротивления [14].

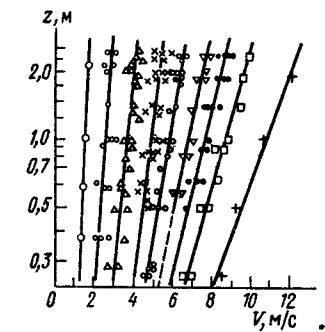


Рис. 4.8. Профили средней скорости ветра по измерениям на озере Вселуг

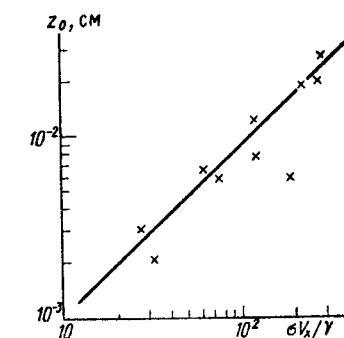


Рис. 4.9. Зависимость z_0 от V_*/ν по измерениям в аэрогидроканале

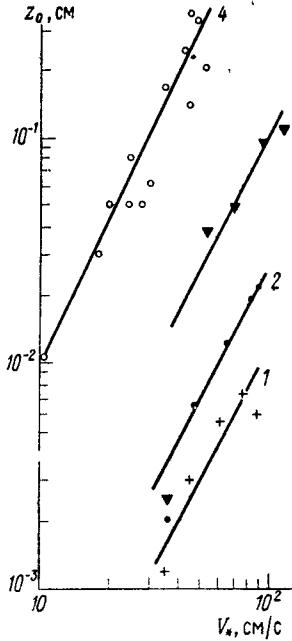


Рис. 4.10 Зависимость параметра шероховатости от динамической скорости ветра:
1-3 - измерения в аэрогидроканале, разгон равен 1,3; 3,6; 9,0 м соответственно;
4 - измерения на озере Всегул

§ 4.5. Теория генерации волн Майлса-Филлипса

В конце 50-х годов появились теории генерации волн Филлипса и Майлса. Механизм Филлипса описывает генерацию поверхностных волн путем резонанса между турбулентными пульсациями давления в воздушном потоке и волнами. Идеи, развитые Филлипсом, ранее высказывались в [5, гл. III; 9]. Механизм Майлса описывает генерацию ветровых волн посредством их взаимодействия с пульсациями давления в воздухе, вызванными волнами. Этот механизм представляет собой дальнейшее развитие идей Джейфриса о взаимовлиянии волн и воздушного потока. Обе теории генерации волн впоследствии были объединены Филлипсом в единую теорию [12, гл. III], краткое изложение которой здесь будет приведено.

Ограничимся рассмотрением потенциальных линейных волн малой амплитуды, используя результаты § 2.2, 2.8. Волновое движение будет определяться уравнением Лапласа

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.22)$$

с граничными условиями при $z = \zeta \approx 0$

$$\frac{p}{\rho} + g\zeta - \frac{a}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right) + \dot{\phi} \Big|_{z=0} = 0, \quad (4.23)$$

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (4.24)$$

При $z \rightarrow \infty \phi \rightarrow 0$.

Если представить смещение поверхности в виде интеграла Фурье-Стильтьеса $\zeta(\underline{x}, t) = \int dA(\underline{k}, t)$,

то в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны, потенциал скорости с учетом (4.24) примет вид

$$\phi(\underline{x}, z, t) = \int \frac{k^{-1} e^{kz}}{k} dA(\underline{k}, t) e^{ikx}.$$

Здесь $\underline{x}(x, y)$ - вектор в горизонтальной плоскости. Подставив это выражение в (4.23), получим

$$d\ddot{A}(\underline{k}, t) + (gk + \frac{a}{\rho} k^3) dA(\underline{k}, t) + \frac{k}{\rho} dP = 0, \quad (4.25)$$

где dP определяется из $P(\underline{x}, t) = \int \frac{e^{ikx}}{k} dP(\underline{k}, t)$.

В линейной теории амплитуда Фурье-Стильтьеса пульсаций давления может быть представлена суммой составляющей dP' , вызванной атмосферной турбулентностью, и составляющей, индуцированной волной dP_w , $dP'(\underline{k}, t) + dP_w(\underline{k}, t) = dP(\underline{k}, t)$.

Составляющую dP_w , возникающую вследствие возмущающего влияния волн на приводный пограничный слой, авторы теории считают пропорциональной весу столба воды высотой dA :

$$dP_w = (\mu_\zeta + i\mu_s) \rho c^2 k dA(\underline{k}, t). \quad (4.26)$$

Коэффициенты μ_ζ и μ_s - малые величины ($|\mu_\zeta| \ll 1$ и $|\mu_s| \ll 1$), причем $\mu_\zeta < 0$. Представление dP_w в виде комплексной величины позволяет выделить в индуцированном давлении составляющие, находящиеся в фазе с наклоном волны $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ и в фазе (или в противофазе) со смещением ζ .

Энергия, передаваемая ветром волнам в единицу времени, определяется выражением (4.16). При учете касательного напряжения это выражение принимает вид

$$W_a = -P\zeta \frac{d\zeta}{dt} + \overline{zV\zeta} = cP\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \overline{zV\zeta}.$$

Однако, согласно мнению большинства ученых, вклад касательных напряжений в поступление энергии к волнам много меньше вклада от поверхностного давления и его можно не учитывать. Поскольку $\mu_\zeta < 0$, то составляющая давления, пропорциональная μ_ζ ,

сдвинута по фазе на π относительно возвышения волновой поверхности. Это приводит к понижению давления над гребнями волн и увеличению над впадинами. Такое распределение давления над волнами было получено еще Кельвином [2]. Оно приводит к росту амплитуды волны, но не может привести к изменению волнового импульса вследствие симметричности распределения давления относительно гребня.

Составляющая давления, пропорциональная μ_s , сдвинута по фазе на $\pi/2$ относительно ζ и синфазна наклону и вертикальной составляющей орбитальной скорости волны. Она и приводит к росту волновой энергии и импульса.

Для dP с учетом (4.26) получаем выражение

$$dP(\underline{k}, t) = dP'(\underline{k}, t) + (\mu \zeta + i \mu_s) \rho c^2 k dA(\underline{k}, t),$$

которое подставим в (4.25):

$$d\ddot{A}(\underline{k}, t) + N^2 dA(\underline{k}, t) = -\frac{k}{\rho} dP'(\underline{k}, t), \quad (4.27)$$

где комплексная частота

$$N = \omega [1 + \mu \zeta + i \mu_s]^{\frac{1}{2}}, \quad \omega = (gk + \frac{\alpha}{\rho} k^3)^{\frac{1}{2}}.$$

Предполагая, что частота вынужденных волн не изменяется под действием ветра, в первом приближении получим

$$N \approx \omega [1 + i \frac{\mu_s}{2}].$$

Таким образом, мнимая часть N пропорциональна составляющей амплитуды пульсаций давления Фурье-Стильтьеса, синфазной наклону волны.

Решением (4.27) при начальных условиях, соответствующих неподвижной жидкости, $dA(\underline{k}, t) = d\ddot{A}(\underline{k}, t) = 0$, является

$$dA(\underline{k}, t) = \frac{k}{\rho N} \int_0^t dP'(\underline{k}, \tau) \sin N(t - \tau) d\tau.$$

Используя это решение, можно получить спектр поверхностных волн:

$$S(\underline{k}, t) = \frac{dA(\underline{k}, t) dA^*(\underline{k}, t)}{d \underline{k}} = \frac{1}{2 \rho^2 c^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \mu_s \omega t}{\mu_s \omega} \int_{-\infty}^t S_p(\underline{k}, \tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (4.28)$$

где dA^* — величина, комплексно-сопряженная с dA ,

$$S_p(\underline{k}, \tau) = \frac{dP'(\underline{k}, \tau) [dP'(\underline{k}, \tau)]^*}{d \underline{k}}$$

—спектр турбулентных пульсаций давления.

Переход к последнему равенству в (4.28) справедлив при исключении из рассмотрения самой начальной стадии генерации волн, т.е., если $\omega t \gg 1$ и $t > T(k)$, где $T(k)$ — характерное время корреляции между турбулентными составляющими. Если поле турбулент-

ных пульсаций статистически стационарно, то, используя спектр волновых чисел и частот

$$S_p(\underline{k}, \omega) = \frac{1}{2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_p(\underline{k}, t) e^{i \omega t} dt,$$

перепишем (4.28) в виде

$$S(\underline{k}, t) = \frac{\pi S_p(\underline{k}, \omega)}{\rho^2 c^2} \left(\frac{\operatorname{sh} \mu_s \omega t}{\mu_s \omega} \right). \quad (4.29)$$

Значение $S_p(\underline{k}, \omega)$ определяется на частоте

$$\omega = (gk + \frac{\alpha}{\rho} k^3)^{\frac{1}{2}}.$$

При $\mu_s \omega t \ll 1$ формула (4.29) описывает резонансную стадию развития волн:

$$S(\underline{k}, t) = \frac{\pi S_p(\underline{k}, \omega)}{\rho^2 c^2} t. \quad (4.30)$$

Средняя высота волн растет пропорционально $t^{\frac{1}{2}}$. На этой стадии рост спектра волн происходит линейно во времени под действием только турбулентных пульсаций давления, индуцированные составляющие не играют роли. Этот механизм воздействия турбулентных пульсаций давления на водную поверхность называют резонансным механизмом Филиппса. $S_p(\underline{k}, \omega)$ имеет максимум при $\omega = \frac{k}{V}$, где V — средняя скорость ветра, переносящего турбулентные пульсации с волновым вектором \underline{k} . Следовательно, и реакция водной поверхности будет максимальна для тех частот и волновых чисел, фазовая скорость которых совпадает с V . Если бы когерентность между давлением и волновой реакцией сохранялась, то амплитуда увеличивалась бы пропорционально t , а энергия росла бы пропорционально t^2 [12, гл. II]. Вследствие турбулентного характера пульсаций давления резонансное воздействие происходит не непрерывно, а носит случайный характер. Даже в том случае, если бы пульсации давления переносились без изменения, рассогласование возникло бы из-за роста волн и увеличения их фазовой скорости. Это явление подробно рассмотрено в [12, гл. III].

Если $\mu_s \omega t \gg 1$, (4.29) принимает вид

$$S(\underline{k}, t) = \frac{\pi S_p(\underline{k}, \omega) e^{\mu_s \omega t}}{2 \rho^2 c^2 \mu_s \omega}, \quad (4.31)$$

т.е. развитие спектра происходит по экспоненциальной зависимости от времени. В этом случае происходит передача энергии от среднего движения воздушного потока к индуцированным волнам возмущениям, которые передают энергию волнам посредством давления, синфазного наклону волны.

Время перехода t_n от линейного к экспоненциальному росту спектра определяется из условия $\mu_s \omega t_n \approx 1$. Более высокочастотные составляющие совершают этот переход быстрее. Если развитие волн ограничивается разгоном, то разгон x_n , на котором происходит переход от линейного роста к экспоненциальному, определяется из условия $x_n = c \tau t_n$. Эти соотношения позволяют получить простейшие оценки μ_s .

Расчет величин, индуцированных волнами давления или параметра взаимодействия μ_s , составляет основную задачу теории Майлса, который определил эти величины для логарифмического профиля средней скорости ветра над волнами [12, гл. III]. Поток импульса равен

$$\begin{aligned} r_w &= p \xi \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\mu_s}{2} \rho c^2 k^2 dA dA^* = \\ &= \frac{-\rho a \pi}{k} \left(\langle \omega^2 \rangle \frac{d^2 V}{dz^2} \right) , \quad z = z_c \end{aligned} \quad (4.32)$$

где w – индуцированная волнами вертикальная составляющая скорости; z_c – высота слоя совпадения, на которой $V = c$, т.е. фазовая скорость волны равна средней скорости ветра; угловые скобки означают осреднение по вертикали.

Как следует из этого выражения, профиль скорости ветра в слое совпадения определяет величину потока импульса и энергии к волнам и скорость их роста. Эффективность действия механизма Майлса уменьшается с увеличением фазовой скорости, так как при этом увеличивается высота слоя совпадения z_c и уменьшаются кривизна профиля средней скорости ветра и индуцированная составляющая скорости. Для логарифмического профиля (4.20)

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)^{-1} \sim \exp \left(- \frac{\alpha c}{V_*} \right), \quad (4.33)$$

и, например, при обычной величине $V_* = 30$ см/с, если фазовая скорость изменяется от 2 до 8 м/с, экспонента в (4.33) уменьшается в 3000 раз [13, гл. II]. Теория Майлса не может объяснить существование волн, фазовая скорость которых равна средней скорости ветра на высоте нескольких метров над водой, где влияние кривизны профиля средней скорости ветра и индуцированной составляющей скорости ветра близко к нулю.

Для малых величин $c V_*^{-1}$ слой совпадения уже лежит в вязком подслое с линейным профилем средней скорости ветра (4.18), где турбулентное напряжение много меньше вязких напряжений. Генерация волн обусловливается неустойчивостью ламинарного сдвигового потока, рост волн также происходит экспоненциально. Генерация волн

под действием сдвигового напряжения изучалась Бенджамином, Майлом, Ванензелой. Таким образом, механизм Майлса эффективен в ограниченном интервале фазовых скоростей [12, гл. II] :

$$10 < \frac{c}{V_*} < 20 - 25.$$

§ 4.6. Развитие ветровых волн

В предыдущем параграфе были рассмотрены два механизма, играющие определяющую роль в зарождении и развитии волн. Наряду с этими механизмами действует целый ряд других, влияющих на изменение поля ветровых волн. Учет этих механизмов можно сделать в уравнении баланса волновой энергии, которое в спектральной форме имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{d \underline{x}}{dt} \cdot \frac{\partial S}{\partial \underline{x}} + \frac{d \underline{k}}{dt} \cdot \frac{\partial S}{\partial \underline{k}} = Q, \quad (4.34)$$

где Q – функция источника, характеризующая баланс энергии каждой спектральной составляющей, т.е. определяет все потери и поступления энергии на данной частоте; $\frac{d \underline{k}}{dt}$ и $\frac{d \underline{x}}{dt}$ определяются формулами (2.58) и (2.59).

В уравнении (4.34) член $\frac{\partial S}{\partial \underline{k}} \frac{d \underline{k}}{dt}$ имеет значение только на мелководье и в условиях глубокой воды исчезает. В условиях стационарности волнения член $\frac{\partial S}{\partial t}$ в левой час-

ти (4.34) обращается в нуль, а при условии пространственной однородности волнового поля $\frac{\partial \omega}{\partial \underline{k}} \frac{\partial S}{\partial \underline{x}} = 0$. Если вид Q и начальный спектр $S(\underline{k}_0, \underline{x}_0, t_0)$ известны, то можно определить спектр в произвольный момент времени в любой точке пространства $S(\underline{k}, \underline{x}, t) = S(\underline{k}_0, \underline{x}_0, t_0) + \int Q[\underline{k}(\underline{k}_0, \underline{x}_0, t_0), \underline{x}(\underline{k}_0, \underline{x}_0, t_0), t(\underline{k}_0, \underline{x}_0, t_0)] dt$.

Хассельман [15] предложил выражение для функции источника в виде суммы составляющих Q_i :

$$Q = \sum_{i=1}^7 Q_i.$$

Составляющие Q_i определяются следующим образом. Q_1 определяет воздействие турбулентности воздушного потока на водную поверхность, т.е. действие механизма Филлипса

$$Q_1 = \frac{\pi S_p(\omega)}{\rho^2 c^2},$$

и не зависит от времени и спектра волн. Член Q_2 функции источника определяет линейное взаимодействие волн с воздушным потоком

посредством механизма Майлса, рассмотренного в предыдущем параграфе

$$Q_2 = \beta_w' S(k, t). \quad (4.35)$$

Остальные члены Q_i описывают нелинейность и турбулентность при взаимодействии воздушного потока с волнами, взаимодействие волн и течений, процессы диссипации и обрушения волн и, наконец, взаимодействие между самими спектральными составляющими.

Учет воздействия молекулярной вязкости на волны производится при помощи соотношений (2.44) и (2.45). Однако волновое движение обычно является турбулентным. Диссипация энергии под действием турбулентных напряжений рассчитывается по тем же формулам, что и диссипация энергии из-за молекулярной вязкости путем замены коэффициента молекулярной на коэффициент турбулентной вязкости (1.19). Величина $\mu_{\text{турб}}$, зависящая от статистических характеристик волнения и скоростей ветра, обычно на два порядка превышает коэффициент молекулярной вязкости. В [29, гл. II] приведен подробный обзор экспериментальных и теоретических исследований коэффициента турбулентной вязкости. Член Q_3 , учитывающий диссипацию из-за молекулярной и турбулентной вязкости, можно представить в форме

$$Q_3 = -4k^2(\mu + \mu_{\text{турб}})S(k).$$

В [18, гл. III] для стационарного волнения получена связь между коэффициентом турбулентной вязкости $\mu_{\text{турб}}$ и параметром взаимодействия μ_s теории Майлса

$$\frac{\mu_{\text{турб}}}{\rho} = \frac{\mu_s}{2} (g)^{1/2} k^{-3/2}. \quad (4.36)$$

Нами произведены расчеты $\mu_{\text{турб}}$ по этой формуле с использованием μ_s , найденных по экспериментальным данным о росте спектральных составляющих вдоль разгона в аэрогидроканале [14]. Например, для $\mu_s = 0,03$, $k = 0,5 \text{ см}^{-1}$ получаем $\mu_{\text{турб}} = 1,42 \text{ г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$. Полученные таким образом величины оказались близкими к значениям $\mu_{\text{турб}}$, рассчитанным на основе экспериментов, выполненных ранее в том же аэрогидроканале [29, гл. III]. Соотношение (4.36) определяет условие равновесия между поступлением и диссипацией волновой энергии и характеризует отличие волнового движения от потенциального. В случае активно развивающегося ветрового волнения параметр $\mu_s \neq 0$ и, соответственно, коэффициент турбулентной вязкости велик. Если поток энергии к волнам мал, $\mu_{\text{турб}}$ тоже мало — этот случай соответствует волнам звби, загужание которых ничтожно. Как показывают измерения фазовых сдвигов между волновыми составляющими скорости, возышения поверхности волны звби близки к потенциальным поверхностным волнам, а ветровые волны существенно отличаются от них [18, гл. III, 16]. Это отличие объясняется турбулентностью волнового движения и влиянием приповерхностных дрейфовых скоростей [18, гл. III].

$$\text{Член } Q_4, \text{ определяющий нелинейную передачу энергии между спектральными составляющими, определяется следующим выражением [15]:}$$

$$Q_4 = \int \int \int [T_1 S(k) S(k') S(k - k' - k'') - T_2 S(k) S(k') S(k - k - k'')] dk dk' dk'',$$

где T_1, T_2 — алгебраические комбинации волновых чисел, удовлетворяющие условию резонансного взаимодействия между ними. Q_4 не изменяет общей волновой энергии, а приводит только к перераспределению энергии между отдельными составляющими спектра. Численные расчеты показали, что составляющие, расположенные на частотах около максимума спектра, передают энергию к низкочастотным и высокочастотным составляющим. Этим перераспределением энергии можно объяснить, что в ряде измерений рост спектральных составляющих на частотах ниже максимума спектра происходит более быстро, чем это следует из механизма Майлса. Приток энергии из-за нелинейных взаимодействий к высокочастотным составляющим компенсируется диссипацией их энергии.

Уравнение (4.34) показывает, что для анализа развития волн необходимы данные о пространственной структуре волнения и ветра. Единственным экспериментом подобного рода является международный эксперимент в Северном море JONSWAP, во время которого датчики были установлены вдоль 160-километровой прямой по нормали к береговой линии. Сравнение эволюции спектров в разных точках пространства позволило получить функцию источника $Q = Q_w + Q_n + Q_d$, где Q_w — член, определяющий поступление энергии от ветра; Q_n определяет перераспределение энергии из-за нелинейных взаимодействий; Q_d — член, определяющий диссипацию энергии. Схема баланса волновой энергии на основе эксперимента JONSWAP показана на рис. 4.11. Как следует из схемы, рост низкочастотных составляющих спектра происходит в основном из-за Q_n .

Однако согласно другим оценкам [18, гл. III; 16] роль нелинейных взаимодействий не так велика. Вопрос о роли нелинейных взаимодействий в уравнении баланса волновой энергии еще изучается. Численные расчеты, проведенные для спектра Пирсона — Московица — Китайгородского, спектра JONSWAP и спектра затухающих волн [17], показали, что параметры исходного спектра, прежде всего острота спектрального пика, функция углового распределения, сильно влияют на функцию нелинейного перераспределения энергии. При изменении ширины исходного спектра происходит смещение областей поступления и диссипации энергии. Факт передачи энергии от частот максимума спектра к более вы-

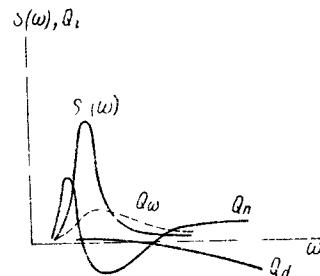


Рис. 4.11. Схема баланса волновой энергии. $S(\omega)$ — волновой спектр, Q_w, Q_n — члены функции источника, определяющие поступление энергии от ветра, вклад нелинейных взаимодействий и диссипации соответственно

сокочастотным составляющим подтвержден в лабораторных экспериментах [18]. Диссипация энергии на частотах максимума играет не значительную роль.

Рассмотрим развитие волн в более простых условиях. К таким условиям относятся развитие волн в условиях большого разгона при ограниченной продолжительности действия внезапно возникающего ветра [19]. На рис. 4.12 представлены спектры, полученные 11 августа 1974 г. в Кандалакшском заливе Белого моря. Средняя скорость ветра нарастала от 3 до 9 м/с в течение 1,5 ч, а затем в течение около 10 ч колебания средней скорости ветра были не более 1,5 м/с.

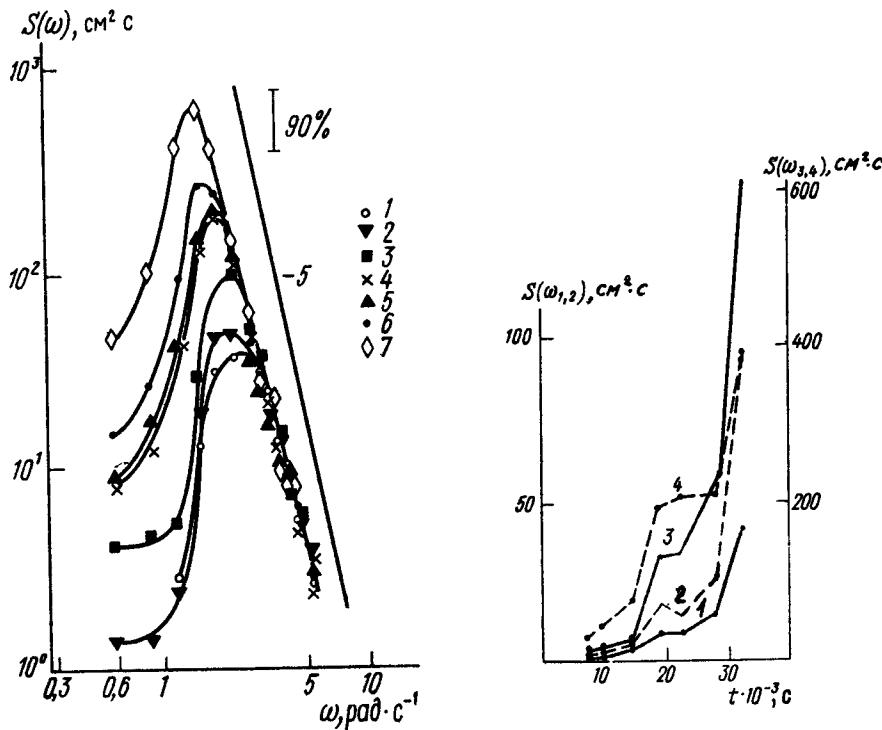


Рис. 4.12. Спектры развивающегося волнения. Цифры 1-7 соответствуют следующим моментам времени: 12.00; 12.45; 14.00; 15.15; 16.15; 18.00; 19.15.

Прямая соответствует зависимости $S(w) \sim w^{-5}$

На рис. 4.13 показано развитие во времени отдельных спектральных составляющих. Продолжительность действия ветра отсчитывалась от момента установления средней скорости ветра, т.е. от 10 ч. На на-

чальной стадии развитие можно считать линейным, а далее – экспоненциальным. При этом переход на меньшей частоте к экспоненциальному росту происходит позднее, чем на более высокой. На частотах выше 2 рад/с спектральные составляющие к 14 ч достигли насыщения. Принимая условие пространственной однородности волнового поля и пренебрегая диссипацией и линейным переносом (согласно оценкам Филиппса [12, гл. II] он мал при $X g V_*^{-2} < 10^7$), уравнение баланса волновой энергии (4.34) для частотного спектра можно записать в форме

$$\frac{\partial S(\omega)}{\partial t} = Q'_1 + \beta_w S(\omega).$$

По начальному линейному участку развития спектральных составляющих можно определить величину Q'_1 , по участку экспоненциального роста – параметр $\mu_s = \beta_w \omega^{-1}$:

$$\mu_s = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{S(\omega)} \cdot \frac{\partial S(\omega)}{\partial t}.$$

Полученные значения Q'_1 согласуются по величине со значениями, измеренными другими авторами [6, гл. III]. Измерения μ_s , проведенные в диапазоне $10 < cV_*^{-1} < 40$ (точки 1 на рис. 4.14), показали, что изменения μ_s в зависимости от cV_*^{-1} гораздо меньше, чем следует из теории. В диапазоне $10 < cV_*^{-1} < 25$ средняя величина μ_s изменяется мало и равна $2 \cdot 10^{-4}$, что согласуется с данными [20].

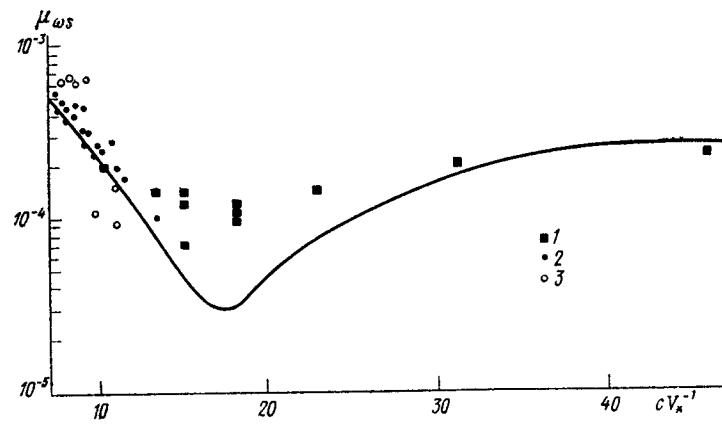


Рис. 4.13. Развитие во времени спектральных составляющих с частотами: 1 – 0,6; 2 – 0,9; 3 – 1,5; 4 – 1,8 рад/с

Рис. 4.14. Параметр взаимодействия μ_{ws} в зависимости от безразмерной фазовой скорости: 1 – данные по спектрам, приведенным на рис. 4.12; 2 – по измерениям на озере Всегут; 3 – по измерениям в прибрежной зоне Белого моря

Развитие спектров ветровых волн определяется соотношением составляющих функции источника Q . На начальной стадии генерации волн, вероятно, преобладает резонансный механизм Филиппса. При малых ветрах согласно [21], когда механизм Майлса еще неэффективен, равновесный спектр ветровых волн определяется равновесием действия резонансного механизма и молекулярной вязкости. Затем по мере развития волн становится эффективным и механизм Майлса.

Рассмотрим результаты исследования зарождения и развития волн, полученные на Рыбинском водохранилище в условиях стационарного ветра, дующего с берега [27, гл. III]. Регистрация возвышений поверхности производилась в 9 точках разгонами от 17 до 320 м при постоянных скоростях ветра (колебания не превышали 10 %), характеризуемых значениями динамической скорости $V_* = 23$ и 11 см/с.

На рис. 4.15 представлены спектры волн, измеренные при нескольких разгонах. На всех спектрах присутствуют два максимума. При $V_* = 23$ см/с фазовая скорость составляющих низкочастотного максимума равна 3,3 м/с, а средняя скорость ветра на высоте 10 м над водной поверхностью – 3,6 м/с. При динамической скорости ветра $V_* = 11$ см/с фазовая скорость составляющих низкочастотного максимума была около 2 м/с, а скорость ветра на высоте 10 м равна 1,7 м/с. Таким образом, фазовая скорость спектральных составляющих низкочастотного максимума с учетом ошибки измерений равна средней скорости ветра на уровне 10 м. При постоянном ветре и увеличении разгона частота этого максимума не изменяется, а величина его спектральных составляющих линейно растет. Приведенные факты говорят о том, что развитие этой части спектра происходит в соответствии с резонансным механизмом Филиппса.

Высокочастотный максимум при увеличении разгона смещается с 14 рад/с на разгоне 17 м до 7,5 рад/с на разгоне 320 м при $V_* = 23$ см/с. При $V_* = 11$ см/с максимум смещается с частоты $\omega_0 = 18$ рад/с на разгоне 50 м до $\omega_0 = 13$ рад/с на разгоне 200 м. Рост спектральных составляющих происходит при этом по экспоненциальному закону в соответствии с механизмом неустойчивости. При дальнейшем развитии волн оба максимума сливаются.

На начальной стадии развития волн действием диссипации и нелинейными взаимодействиями можно пренебречь. Тогда из (4.34) для развития частотных спектров в пространстве в условиях стационарности получим

$$c_T \frac{\partial S}{\partial x} = Q_1 + \beta_w S. \quad (4.37)$$

Для низкочастотного максимума рост спектра с разгоном X происходит по линейному закону

$$S(\omega) = \frac{Q_1 X}{c_T}.$$

Второй член в правой части (4.37) обуславливает экспоненциальный рост энергии спектральных составляющих. Время перехода от линей-

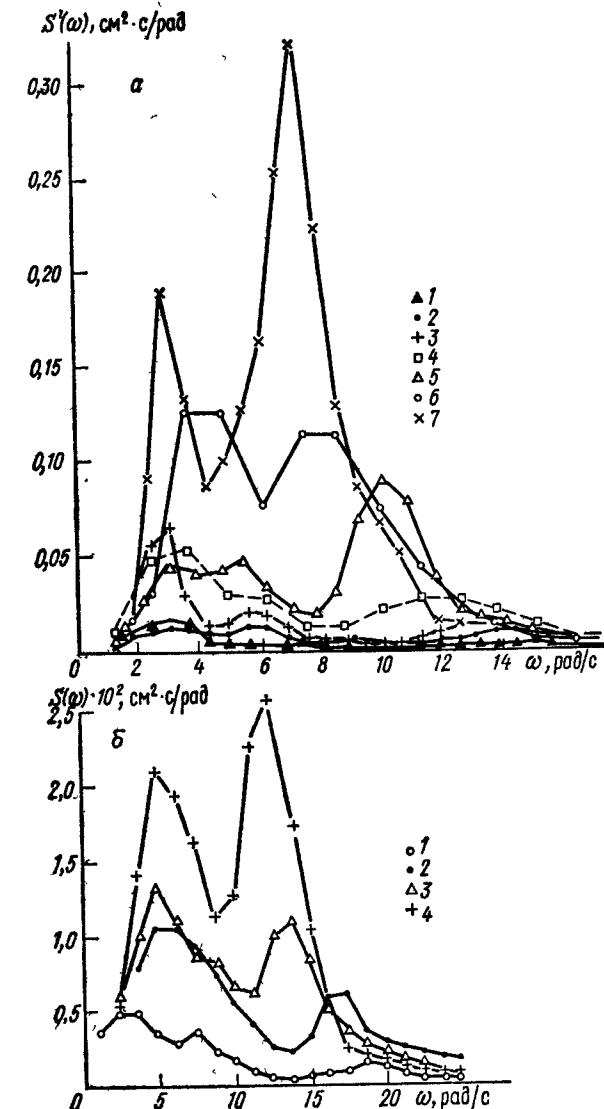


Рис. 4.15. Спектры развивающегося ветрового волнения при постоянной скорости ветра, дующего с берега: а) разгон равен 17, 35, 50, 100, 150, 200, 320 м (цифры соответствуют 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; $V_* = 23$ см/с); б) разгон равен 50, 100, 150, 200 м (цифры соответствуют 1, 2, 3, 4; $V_* = 11$ см/с)

ного к экспоненциальному росту определялось из

$$\mu_s \omega_p t_n = 1.$$

Частота перехода ω_p принималась равной частоте максимума спектра. Используя значение μ_s , даваемое теорией Майлса, для безразмерной частоты перехода получена зависимость

$$\frac{\omega_p V_*}{g} = \text{const} (X g V_*^{-2})^{-1/4},$$

хорошо согласующаяся с измерениями. Этот результат указывает также на незначительную роль нелинейного переноса энергии для низкочастотного участка спектра при данных разгонах.

Таким образом, развитие волнения можно представить следующим образом. На первоначально неподвижной поверхности воды возникают волны под действием резонансного механизма. Далее следует их сравнительно медленное развитие, спектр волн растет пропорционально времени. Затем наступает фаза экспоненциального роста. Высокочастотные составляющие растут быстрее низкочастотных и первыми достигают насыщения. В отдельных случаях происходит развитие двух волновых систем: резонансной и дорезонансной. Развитие составляющих спектра на частотах выше частоты максимума происходит с преувеличением равновесного значения: спектральная составляющая достигает максимума, затем уменьшается до минимума и, наконец, выходит на равновесное значение. Этот эффект называется эффектом превышения. Он обнаружен как в натуральных, так и в лабораторных измерениях [12, гл.11]. Равновесие наступает в результате обрушения волн и их диссипации. Крутой передний участок спектра формируется вследствие экспоненциального роста его спектральных составляющих. На больших разгонах начинает сказываться механизм нелинейного перераспределения энергии, приводящий к более интенсивному росту спектра на низких частотах.

§ 4.7 Применение методов теории подобия и размерностей к описанию спектров ветрового волнения

Методы теории подобия и размерностей используются для получения зависимости статистических характеристик волнения от внешних параметров волнообразования и являются основой эмпирических методов расчета волнения. Систематическое изложение применения теории подобия и размерностей для описания ветрового волнения дано в [12].

В самом общем случае пограничный слой вода – воздух определяется большим числом параметров. Для ограничения числа определяющих параметров используется ряд предположений о характере волновых движений, о механизме передачи энергии от ветра к волнам и о связи между характеристиками атмосферной турбулентности и измеряемыми параметрами ветрового потока. Так предположение о безвихревом характере движения позволяет пренебречь молекулярной вязкостью воды, а ограничение только гравитационными волнами

позволяет пренебречь поверхностным натяжением. При рассмотрении развития только основных энергонесущих составляющих спектра можно не учитывать влияние вязкого подслоя на процесс энергоснабжения ветровых волн и, следовательно, исключить коэффициент молекулярного трения воздуха из числа определяющих параметров. В качестве характеристики воздушного потока нельзя использовать среднюю скорость ветра на верхней границе пограничного слоя, так как обычно в измерениях получают только среднюю скорость на одном из стандартных горизонтов ($z = 6, 10, 12, 20$ м). Поэтому используется предположение о логарифмической зависимости скорости ветра от z . Характеристикой потока, не зависящей от z , будет динамическая скорость V_* .

При этих предположениях число внешних параметров, определяющих развивающееся ветровое волнение, невелико: g , V_* , разгон X и время действия ветра на первоначально неподвижную водную поверхность t .

Введем безразмерные величины:

$$\hat{S}(\omega) \approx \frac{S(\omega)}{V_*^5} g^3, \quad \hat{\omega}_0 = \frac{\omega_0 V_*}{g},$$

$$\hat{\sigma} = \sigma g V_*^{-2}, \quad \hat{t} = t g V_*^{-1}, \quad \hat{X} = X g / V_*^2.$$

Безразмерные характеристики частотного спектра являются функциями безразмерных внешних параметров:

$$\hat{S}(\omega) = \hat{S}(\hat{\omega}, \hat{t}, \hat{X}),$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\hat{t}, \hat{X}),$$

$$\hat{\omega}_0 = \hat{\omega}_0(\hat{t}, \hat{X}).$$

В предельном случае развитого волнения при $gt/V_* \rightarrow \infty$ (4.38) принимают наиболее простую форму:

$$\hat{S}(\omega) = \hat{S}(\hat{\omega}),$$

$$\hat{\sigma} = C_1,$$

$$\hat{\omega}_0 = C_2.$$

Значения констант C_1, C_2 были найдены на основе спектров полностью развитого волнения, отобранных Пирсоном и Москвицем из большой серии измерений в Северной Атлантике: $C_1 = 3,94 \cdot 10^1, C_2 = 3,2 \cdot 10^{-2}$. Они же предложили аналитическое выражение, описывающее эти спектры:

$$\frac{S(\omega) g^3}{V_*^5} = 4,05 \cdot 10^{-3} \left(\frac{V_{20} \omega}{g} \right)^{-5} \exp[-0,74 \left(\frac{V_{20} \omega}{g} \right)^{-4}],$$

где V_{20} – средняя скорость ветра на высоте 20 м.

Соотношения (4.38) могут быть упрощены. На поверхности моря, прилегающей к подветренному берегу, статистические характеристики ветровых волн при достаточно большом времени действия ветра зависят только от разгона и не зависят от времени t . На другой части

морской поверхности (мористой) характеристики ветрового волнения зависят уже только от времени \hat{t} . Поверхность моря с установившимся волнением отделяется от области развивающегося волнения фронтом установившегося волнения. Положение фронта установившегося волнения меняется с течением времени. Для области установившегося волнения соотношения (4.38) принимают вид

$$\begin{aligned}\hat{S}(\omega) &= S'(\hat{\omega}, \hat{X}), \\ \hat{\sigma} &= \sigma'(\hat{X}), \\ \hat{\omega}_0 &= \omega_0'(\hat{X}),\end{aligned}$$

для области развивающегося волнения:

$$\begin{aligned}\hat{S}(\omega) &= S''(\hat{\omega}, \hat{t}), \\ \hat{\sigma} &= \sigma''(\hat{t}), \\ \hat{\omega} &= \omega_0''(\hat{t}).\end{aligned}$$

Проверка соотношений установившегося волнения проводится сравнением параметров развивающихся волн на разных расстояниях от подветренного берега. При больших \hat{X} разгон определяется путем анализа синоптических условий над поверхностью океана. Точность определения \hat{X} в этих условиях, конечно, зависит от стационарности и однородности ветрового поля над океаном. Для проверки соотношений развивающегося волнения в фиксированной точке необходимо проводить измерения в течение длительного времени с начала момента генерации волн. Ввиду трудности таких измерений часто используют связь $X = \frac{ct}{2}$, в этом соотношении в связи с частотной зависимостью $c = c(\omega)$ соотношение между \hat{X} и \hat{t} будет различным для разных частот спектра.

При описании зарождения и начальной стадии роста ветровых волн в число определяющих параметров необходимо включить коэффициент кинематической вязкости воздуха v_a . Соотношения (4.38) преобразуются к виду [12, гл. III]

$$\begin{aligned}\hat{S} &= \hat{S}(\hat{\omega}, \hat{t}, \hat{X}, \hat{V}_*), \\ \hat{\sigma} &= \hat{\sigma}(\hat{t}, \hat{X}, \hat{V}_*), \\ \hat{\omega}_0 &= \hat{\omega}_0(\hat{t}, \hat{X}, \hat{V}_*),\end{aligned}$$

где $\hat{V}_* = V_* (g V_0)^{-1/3}$.

Анализ соотношений, полученных методами подобия, и размерностей, проводился во многих работах [12; 19; 1, гл. III] и др. Например, согласно [31, гл. III]

$$\hat{\sigma}^2 = 1,6 \cdot 10^{-4} \hat{X}, \quad (4.39)$$

$$\hat{\omega}_0 = 6,0 \cdot \hat{X}^{-1/3}. \quad (4.40)$$

Формула (4.40) хорошо подтверждается данными измерений в широком диапазоне изменений \hat{X} (10^1 – 10^7). Филипп [12, гл. II] зависимость частоты максимума от разгона предлагает подобным же образом:

$$\hat{\omega}_0 = 2,2 \cdot \hat{X}^{-1/4}.$$

Отличие этой зависимости от (4.40) объясняется тем, что он не рассматривает данные лабораторных экспериментов, полученные при безразмерных разгонах $\hat{X} < 10^3$. В [22] анализировались безразмерные соотношения для развивающегося шторма и были предложены следующие соотношения:

$$\hat{\omega}_0 = 1,21 \cdot \hat{X}^{-0,24},$$

$$\hat{\omega}_0 = 0,225 \cdot \hat{\sigma}^{-0,28},$$

$$\hat{\sigma}^2 = 3,2 \cdot 10^{-5} \cdot \hat{t}^{1,2}.$$

Аналитическое выражение для $\hat{S}(\omega)$, определяемое из соображений подобия, на частотах выше максимума спектра имеет вид

$$\frac{S(\omega) g^3}{V_*^5} = \text{const.}$$

Вопрос о правомерности такого представления обсуждался в § 3.7.

В работе [12] для частот ниже максимума спектр представлен в виде

$$\lg \frac{S(\omega) \omega^5}{g^2} = a + b \frac{\omega V_*}{g}, \quad (4.41)$$

где a, b – безразмерные параметры.

Проверка соотношения (4.41) проводилась рядом исследователей, в [23] найдены значения параметров: $a = -8,78$, $b = 1,71 (\hat{X})^{0,273}$.

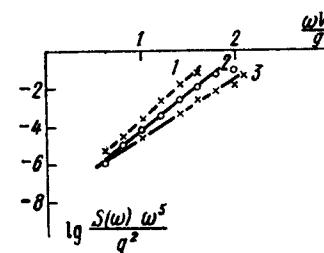


Рис. 4.16. Нормированные низкочастотные участки спектра. \hat{X} равен: 1 – 86, 2 – 55, 3 – 23. Последние точки соответствуют максимумам спектров

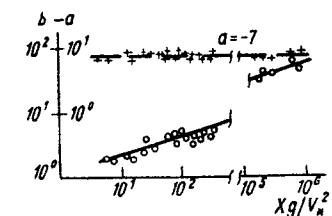


Рис. 4.17. Зависимость параметров a, b входящих в (4.41), от безразмерного разгона. Значения при $\hat{X} < 10^3$ получены в лабораторных условиях; при $10^5 \leq \hat{X} \leq 10^6$ – в натурных

Спектры, полученные нами как в лабораторных условиях при $\hat{X} \sim 10^1 - 10^3$, так и на Белом море при разгонах до 10^6 , удовлетворяют зависимости (4.41) [24]. На рис. 4.16 приведены нормированные низкочастотные участки спектров, полученные в лабораторных условиях, на рис. 4.17 – полученные значения а, б.

§ 4.8. Исследование ветрового волнения в лабораторных условиях

Широкое распространение получили лабораторные исследования ветровых волн. Проведение лабораторных экспериментов имеет целый ряд очевидных преимуществ перед натурными измерениями. Это прежде всего возможность контроля условий эксперимента и целенаправленного их изменения, применение более тонкой методики измерений. Обычно лабораторные измерения проводят в линейных аэрогидроканалах. Аэрогидроканал представляет собой совмещение аэродинамической трубы с гидроканалом. Одна из стенок аэродинамической трубы ограничена водной поверхностью. Ветровой поток, воздействуя на поверхность воды, приводит к образованию волн в канале. Иногда применяются кольцевые аэрогидроканалы. Уникальным кольцевым аэрогидроканалом является штормовой бассейн Шулейкина, описанный в § 4.1.

Наши измерения в основном проводились в аэрогидроканале гидрофизической лаборатории физического факультета МГУ. Длина канала 25 м, ширина 1,23 м, глубина 1,5 м. Высота рабочей части аэродинамической трубы 1,5 м. Уровень воды в канале может изменяться перемещением подвижного дна. Схема аэрогидроканала дана на рис. 4.18. Вдоль канала расположены пять смотровых окон, кроме

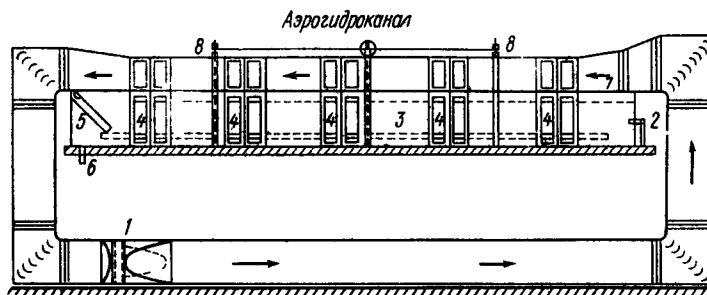


Рис. 4.18. Схема аэрогидроканала: 1 – вентилятор, 2 – кран, 3 – подвижной пол, 4 – смотровое окно, 5 – волногаситель, 6 – сливное отверстие, 7 – сопло, 8 – подъемный механизм

того, остеклена часть крыши. В головной части канала расположен

щитовой волнопротектор для создания регулярных волн. В концевой части канала установлен волногаситель. Венгилятор, создающий ветровой поток, имеет прямое и обратное вращение, что позволяет изменять направление ветра и ветровых волн. Скорость ветра в канале изменяется от 3 до 15 м/с. Для измерения средней скорости ветра применяется трубка Пито с микроманометром. Измерение пульсаций скорости ветра проводится с помощью механотронных датчиков и термоанемометрами. Наличие окон позволяет проводить кино- и фотосъемку. Возвышения поверхности измеряются волнографами струнного или емкостного типа, расположеннымными вдоль оси канала. Для измерения наклонов волн используются струнные датчики, разнесенные на расстояние 0,5–2,0 см, для измерения волновых скоростей – механотронные датчики. Сливная труба большого диаметра позволяет создавать в канале дополнительные течения.

Большинство исследователей считают правомерным исследование начальной стадии генерации ветровых волн и механизмов ветроволнового взаимодействия в аэрогидроканалах [25; 26; 27]. В этом убеждает прежде всего то, что безразмерные характеристики ветровых волн в натурных и лабораторных условиях описываются практически одинаковыми зависимостями. Существенное различие в натурных и лабораторных условиях заключается в толщине приводного пограничного слоя. В море голлина пограничного слоя имеет порядок длины волны, т.е. достигает десятков метров. А в аэрогидроканалах толщина пограничного слоя равна [25]:

$$\delta = 0,3 \frac{V_* X}{V},$$

т.е. составляет лишь несколько сантиметров или десятков сантиметров, что равняется длине капиллярных или гравитационно-капиллярных волн. Таким образом, в аэрогидроканале возможно исследование только начальной стадии генерации ветровых волн. Значительно большую роль в аэрогидроканалах по сравнению с природными условиями играет вязкий подслой, толщина которого, примерно равная $\frac{5}{V_*}$, соизмерима с амплитудой волн [25]. В этом случае механизм энергоснабжения ветровых волн будет зависеть не только от волновых индуцированных возмущений и турбулентности воздушного потока, но и от вязкого подслоя. В лабораторных установках $\frac{a V_*}{\nu} = 1 + 10$ (а – амплитуда волны), а в природных $\frac{a V_*}{\nu} = 10^4 - 10^5$. Подробный обзор ла-

бортарных исследований ветроволнового взаимодействия приведен в [25].

Исследование ветровых волн в аэрогидроканалах обычно проводят по тем же направлениям, что и в природных условиях: изучение статистических закономерностей волнения, структуры приводного слоя, развитие волнения по разгону или во времени. Наши исследования проводились по всем указанным направлениям. Так, в [27; 28] проведено исследование статистических характеристик ветрового волнения в

аэрогидроканале. Распределение возвышений поверхности является Гауссовым, распределение высот и перисдов близко к релеевскому. Связь между средней высотой наблюдаемых волн \bar{h} и дисперсией возвышений поверхности σ имеет вид $\bar{h}^2 = 2\pi \sigma^2$. Однако ветровое волнение в канале является более регулярным видом движения, чем в море.

Исследование зависимости безразмерной частоты максимума спектра $\hat{\omega}_0 = \omega_0 / g$ и безразмерной дисперсии $\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 / g^2$ от безразмерного разгона $\hat{X} = X g V_*^{-2}$ проводилось нами до $\hat{X} \sim 10$.

Точки, соответствующие лабораторным данным, ложатся на единую для всех разгонов кривую (4.40) (рис. 4.19). Некоторое превышение лабораторных величин $\hat{\omega}_0$ может быть скорректировано учетом прейфовых течений, которые в аэрогидроканале имеют значения одного порядка с фазовой скоростью спектральных составляющих на частоте максимума $\hat{\omega}_0$. Зависимость (4.39) на начальной стадии генерации волн не выполняется, появляется дополнительная зависимость от V_* , что хорошо видно на рис. 4.20. Введение безразмерной динамической скорости $\hat{V}_* = V_*(g\nu)^{-1/3}$ позволяет привести все экспериментальные значения к единой зависимости

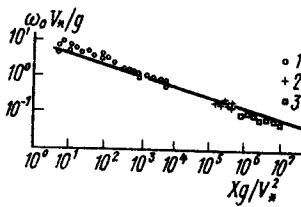


Рис. 4.19. Зависимость безразмерной частоты максимума спектра от разгона. Данные измерений: 1 - в аэрогидроканале, 2 - в прибрежной зоне Белого моря, 3 - Судовые измерения. Прямая соответствует зависимости (4.40)

Важнейшей характеристикой ветровых волн является спектр, который в лабораторных условиях имеет некоторые отличия от спектров волн в море: он более узок, на частотах, кратных $\hat{\omega}_0$, как правило, прослеживаются дополнительные максимумы. При аппроксимации спектра на частотах $\omega > \hat{\omega}_0$ формулой $S(\omega) \sim \omega^{-n}$ выясняется зависимость показателя n от V_*, X [24, 30]:

$$n = 14 - 4,5 \cdot 10^{-5} \left(\frac{X V_*}{\nu} \right),$$

где $\frac{X V_*}{\nu}$ изменяется от 0 до $2,2 \cdot 10^5$. При больших значениях $\frac{X V_*}{\nu}$ $n = 4$, т.е. частотная зависимость спектра переходит к виду

(3.28). Согласно (3.28) спектр пропорционален V_* , на начальной стадии генерации волн эта зависимость более сильная; $S(\omega) \sim V_*^n$,

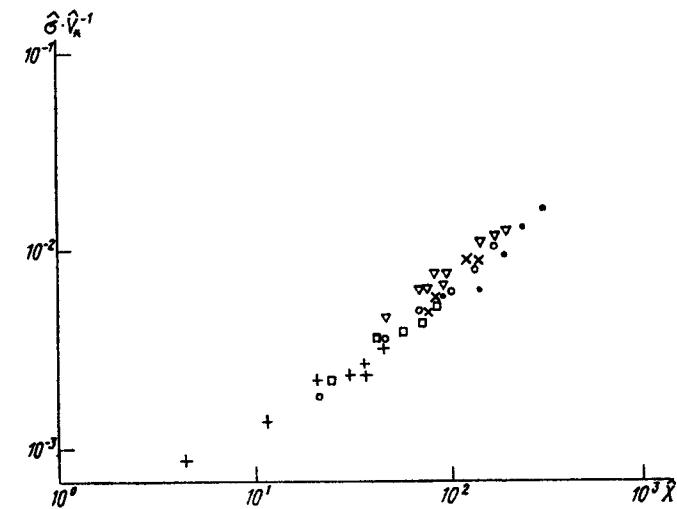
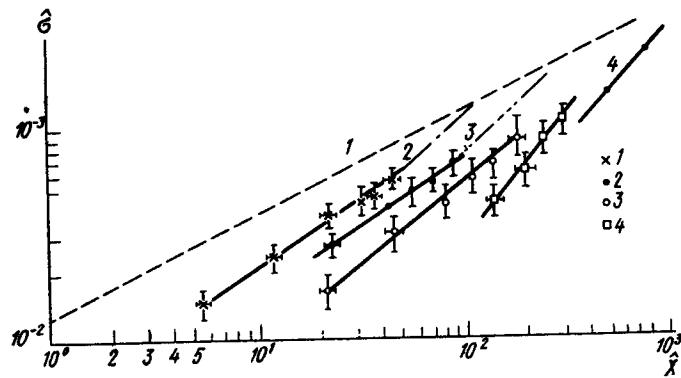


Рис. 4.20. а) Зависимость $\hat{\sigma}$ от \hat{X} в аэрогидроканале. Точки соответствуют следующим значениям \hat{V}_* : 17; 12,3; 8,7; 6,8 (1,2,3,4 соответственно). Прямые обозначают: 1 - формулу (4.39), 2,3,4 - соответственно. б) Зависимость σ от λ . Точки соответствуют данным рис. 4.20, а

где τ изменяется от 1 до 3. На частотах ниже максимума спектр удовлетворяет зависимости (4.41). Значения констант a, b спектров для $5 \leq X \leq 10^3$ ложатся на одну прямую со значениями a, b при $X = 10^5 \div 10^6$ (рис. 4.17), полученными на Белом море.

Анализ пространственного развития спектров волнения проведен в [14]. Спектральные составляющие переднего фронта спектра изменяются с разгоном по экспоненциальному закону:

$$\frac{S(\omega, X_2)}{S(\omega, X_1)} = \exp [\Delta(X_2 - X_1)],$$

где Δ – показатель, характеризующий скорость ветра спектральных составляющих по разгону.

Чаще используют временной параметр скорости роста спектральных компонент, входящий в (4.37): $\beta_w = \frac{\Delta}{c_r}$. Вычисление величины β_w на основе кривых роста спектральных составляющих было проведено для ряда частот. При расчете скорости роста необходимо вводить коррекцию на дрейфовое течение. При этом

$$c_r = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k(\omega)} \right)^{1/2} + 0,6 V*,$$

где

$$k(\omega) = \left(\frac{4\omega^2}{g} \right) [1 + (1 + 2,4 V* \omega g^{-1})^{1/2}]^{-2}.$$

Это соотношение было получено на основе взаимного спектрального анализа синхронных измерений возвышений поверхности в нескольких точках. На рис. 4.21 представлены полученные значения β_w , которые

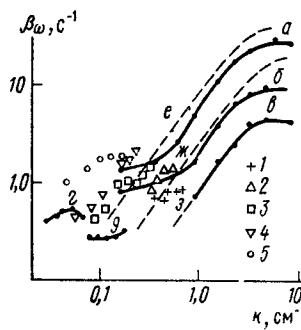
согласуются с эмпирической зависимостью [31]

$$\beta_w = 0,04 \left(\frac{V_*^2 k}{c} \right) - 4 \nu k^2. \quad (4.42)$$

Следует отметить, что зависимость β_w от $V*$ близка к квадратичной. В некоторых работах получены другие зависимости. Например, $\beta_w \sim V_*^n$, где $n = 0,376$ [32], $n = 1,484$ [33]. Из модели Майлса можно получить оценку скорости экспоненциального роста, близкую в (4.42):

$$\beta_w \approx 0,027 \left(\frac{V_*^2 k}{c} \right).$$

Рис. 4.21. Зависимость параметра β_w от k . Данные авторов при $V_* = 1-35, -46, 3-65, 4-83, 5-90$ см/с. Кривые а, б, в – данные [31] при V_* , равных: 85, 45, 27 см/с; г, д – данные [32] при значениях V_* , равных 89, 4; 30, 6 см/с. Кривые е, ж, з – расчет по (4.42) при V_* , равных 85, 45, 27 см/с



- 136 -

Большой интерес представляет развитие волнения на начальной стадии, прежде всего возникновение ветровых волн на водной поверхности, и исследование перехода от линейной скорости роста волн к экспоненциальному. Нами был поставлен эксперимент, в котором изучалась зависимость дисперсии колебаний поверхности σ_z^2 и наклонов σ_{Vz}^2 от скорости ветра V и разгона X . Как показали исследований пульсаций давления на малых разгонах и при слабых ветрах, величина индуцированных волной пульсаций скорости ветра была не более 10% от средней скорости ветра. При фиксированной величине X зависимость $\sigma_z(V)$ и $\sigma_{Vz}(V)$ имеет характерный вид (рис. 4.22): сначала наблюдается медленный рост колебаний возвышений и наклонов поверхности с увеличением скорости ветра, затем, после достижения определенного значения скорости ветра, которое зависит от разгона, наблюдается значительно более интенсивный рост. Аналогичное изменение ветрового волнения при увеличении скорости ветра наблюдалось в [34]. Величину скорости, при которой происходит резкое возрастание зависимости σ от V , мы определили как критическое значение скорости ветра V_k . Характер записи возвышений поверхности также резко меняется после достижения скоростью ветра критического значения. Запись принимает ярко выраженный групповой характер, становится более регулярной (рис. 4.23).

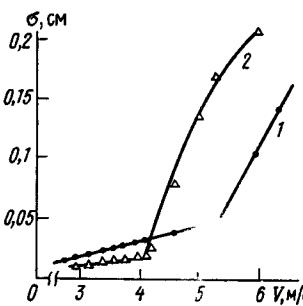


Рис. 4.22. Зависимость среднеквадратичных колебаний поверхности от скорости ветра. Разгон равен: 1 – 120; 2 – 280 см

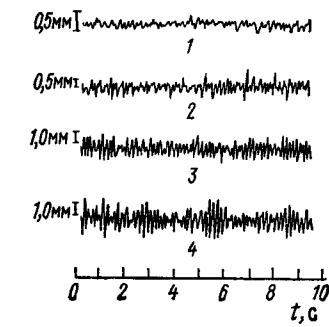


Рис. 4.23. Пример записи возвышений поверхности. Разгон равен: 1 – 120; 2 – 220; 3 – 340; 4 – 455 см

В [35] была предложена следующая зависимость амплитуды ветровой волны на начальной стадии волнообразования: $a \sim [(V - V_c) V_c^{-1}]^{1/2}$, где V_c – пороговая скорость ветра, определяемая величиной диссиляции волн на поверхности воды. При скорости ветра ниже V_c волны затухают. Нами были построены зависимости $\sigma_z \sim \sigma_z [(V - V_k) V_k^{-1}]$. Для всех серий экспериментов зависимость σ_z от V достаточно хорошо описывается функцией вида $\sigma_z \sim A [(V - V_k) V_k^{-1}]^{1/2}$. Величина A несколько изменяется для разных серий экспериментов и разгонов.

- 137 -

Формальное отождествление экспериментальных значений V_k с пограничной скоростью V_c позволяет считать, что в наших экспериментах выполняется зависимость амплитуды волны от скорости, предложенная в [35]. Дисперсия наклонов $\sigma_{V\zeta}$ удовлетворяет логарифмической зависимости от V^* , полученной в [36]: $\sigma_{V\zeta} \approx \ln \rho_a \frac{v}{a} V^*$, где a – коэффициент поверхностного натяжения, ρ_a – плотность воздуха.

Величина V_k в пределах одного эксперимента зависит от величины разгона, уменьшаясь с его ростом. Кроме того, величина несколько менялась в различных сериях экспериментов, что, вероятно, связано с постепенным загрязнением поверхности. Экспериментальные значения V_k для разных разгонов и разных экспериментов приведены на рис. 4.24. Следует отметить, что значения V_k , полученные в наших экспериментах, значительно больше величины критической скорости ветра $V_c = 1,3$ м/с, приведенной в [12, гл. II] для больших разгонов и чистой поверхности воды. Возрастание критической скорости ветра возможно вызвано относительно малым разгоном и загрязнением поверхности. Частота волновых колебаний изменяется с изменением разгона и скорости ветра. Средняя частота колебаний f возрастает при увеличении скорости ветра для малых разгонов, для больших разгонов она достигает максимума, а затем начинает уменьшаться (см. рис. 4.25). Максимум наблюдается на скоростях, близких к критическому значению для данного разгона.

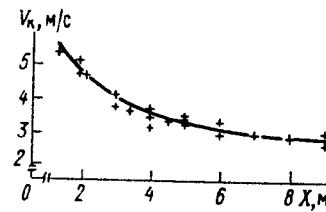


Рис. 4.24. Зависимость критической скорости ветра (на высоте 1 м от невозмущенной поверхности воды) от разгона

Уменьшение средней частоты волны или возрастание среднего периода волны с увеличением скорости ветра и разгона для относительно больших разгонов является хорошо известным фактом. Большой интерес представляет возрастание частоты с увеличением скорости ветра на малых разгонах. Такое возрастание частоты волн при увеличении скорости ветра может быть объяснено тем, что с ростом скорости ветра разность между инкрементом роста волн и вязким декрементом становится положительной для более высоких частот, что и приводит к развитию более высокочастотных ветровых волн. Такое изменение частоты согласуется с зависимостью длины зарождающихся волн от скорости ветра, описанной в 4.2.

Исследования приводного слоя включают изучение средних па-

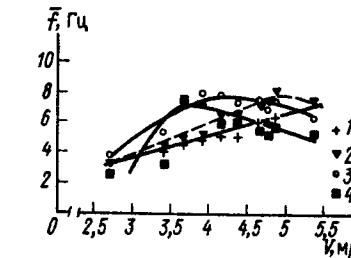


Рис. 4.25. Зависимость средней частоты колебаний поверхности от скорости ветра. Разгон равен: 1 – 120; 2 – 220; 3 – 340; 4 – 455 см. Значения критической скорости ветра равны соответственно 5,4; 4,8; 4,2; 3,7 м/с

метров, таких, как профиль средней скорости ветра $V(z)$, параметра шероховатости z_0 , коэффициента сопротивления c , V_* . Некоторые сведения об этих величинах даны в § 4.4. В аэрогидроканале профили средней скорости ветра удовлетворяют логарифмической зависимости (4.20). Некоторые отличия от логарифмического закона в нижнем слое наблюдаются над механически генерируемыми волнами, обдуваемыми ветром.

Результаты лабораторных экспериментов на начальной стадии генерации волн, когда, вероятно, преобладает резонансный механизм, изложены в § 4.2. По мере того как волны растут, они начинают оказывать заметное влияние на структуру воздушного потока в приводном слое. В [37] приводились синхронные измерения двух составляющих скорости воздушного потока и возвышения поверхности. В нижней части слоя взаимодействия в спектрах составляющих скорости и в их ко- ω ктире имеется максимум, приходящийся на частоту максимума спектра ветровых волн. Ко-спектр продольной и вертикальной составляющих скорости, характеризующий поток импульса к волнам, показывает, что основная передача импульса происходит на частоте максимума волнового спектра.

В [38] проводились исследования пульсаций давления над волнами на высотах 6; 10; 14; 19; 29,5 см при трех разгонах: 5,8; 10,5; 13,5 м, что позволило проследить развитие слоя взаимодействия ветер – волна по мере роста волн и разгона. Регистрация пульсаций давления проводилась системой, подробно описанной в § 4.3. Приемное отверстие датчика было расположено в центре горизонтального диска, который препятствовал образованию вихрей вследствие отрыва воздушного потока. Для проведения синхронных измерений вертикальной скорости поверхности воды использовался метод, основанный на явлении электромагнитной индукции: в катушке перемещался магнит, связанный с поверхностным поплавком. Индуцируемая в катушке ЭДС

была пропорциональна вертикальной скорости поверхности

$$w = \frac{\zeta d}{dt}$$

Спектр w имеет ярко выраженный максимум. С увеличением разгона и уменьшением высоты над средним уровнем воды в спектре пульсаций давления p' появляется максимум на частоте максимума вертикальной скорости. По измерениям p' и w был рассчитан коэффициент корреляции

$$R = \frac{p' w}{[(p')^2 w^2]^{1/2}}. \quad (4.43)$$

Пульсации давления на любом горизонте можно представить в виде суммы турбулентной составляющей $R_{\text{турб}}$, индуцированной составляющей и синфазной вертикальной скорости:

$$p' = R_{\text{турб.}} + p_\zeta + p_w. \quad (4.44)$$

Из (4.43) и (4.44) можно получить

$$R [(\bar{p}')^2 \bar{w}^2]^{1/2} = (\bar{p}_w^2)^{1/2} (\bar{w}^2)^{1/2} = R_{\text{турб}} (\bar{p}_{\text{турб}}^2)^{1/2} (\bar{w}^2)^{1/2},$$

где учтено, что вследствие сдвига на $\pi/2$ между p_ζ и w (что справедливо вследствие узости спектра) их коэффициент корреляции равен нулю. Из последнего выражения, считая, что среднеквадратичные турбулентные пульсации давления не зависят от высоты, можно определить величину R_w . В предложении статистической независимости $R_{\text{турб.}}$,

$$p_\zeta, p_w \quad \text{из (4.44) следует} \quad (\bar{p}')^2 = \bar{p}_{\text{турб}}^2 + \bar{p}_w^2 + \bar{p}_\zeta^2,$$

откуда можно найти величину $(\bar{p}_\zeta^2)^{1/2}$. Проведенные расчеты позволили оценить толщину слоя взаимодействия в половину длины волны, соответствующей частоте максимума спектра вертикальной составляющей скорости. Индуцированные составляющие давления убывают с высотой экспоненциально.

§ 4.9. Фазовая скорость ветровых волн

В линейной спектральной теории ветровых волн считается, что для каждой гармонической составляющей спектра выполняется дисперсионное соотношение, полученное в теории свободных потенциальных волн бесконечно малой амплитуды $\omega^2 = gk$ или $c = \frac{g}{\omega}$. Однако имеется

целый ряд причин, которые осложняют описание волн как свободных и приводят, в частности, к изменению дисперсионного соотношения. К этим причинам относятся: вызванное ветром дрейфовое течение, течения, созданные орбитальным движением других более низкочастотных спектральных составляющих, нелинейность волновых движений, угловое распределение ветрового волнения, ветровое давление, действующее на волновую поверхность. Роль перечисленных факторов неодинакова и из-

меняется на различных стадиях ветрового волнения. Например, для океанских волн влияние дрейфа и скоростей орбитального движения будет сказываться только на высокочастотных составляющих спектра. В лабораторных условиях дрейфовое течение будет играть уже существенную роль даже для энергонесущих компонент спектра. Влияние ветрового давления, вероятно, много меньше остальных перечисленных факторов [18, гл. III]. При учете составляющей давления воздушного потока, синфазной возвышению поверхности, дисперсионное соотношение примет вид

$$\omega^2 = gk(1 + b).$$

Однако величина коэффициента b , учитывающего эту поправку, пропорциональна отношению плотностей воздуха и воды, т.е. ею можно пренебречь.

Влияние конечной величины высоты волны на ее дисперсионное соотношение обсуждалось в § 2.8. Фазовая скорость предельно крутых волн превышает соответствующее значение фазовой скорости волны бесконечно малой амплитуды примерно на 10 %. Для ветровых волн в океане влияние конечной высоты волны будет малым, так как крутизна волн, как правило, гораздо меньше предельной.

Проверку дисперсионного соотношения для составляющих ветровых волн можно проводить различными методами. Один из методовкосвенной проверки состоит в сопоставлении частотного спектра возвышения поверхности $S_\zeta(\omega)$ и частотных спектров наклонов в двух взаимно перпендикулярных направлениях $S_{xx}(\omega)$ и $S_{yy}(\omega)$ [39]. Используя определение наклона (§ 3.4) и предположение о линейности, легко получить

$$S_\zeta(\omega) = k^{-2}(\omega) [S_{xx}(\omega) + S_{yy}(\omega)],$$

$$\text{или} \quad k(\omega) = [S_{xx}(\omega) + S_{yy}(\omega)]^{1/2} [S_\zeta(\omega)]^{-1/2}.$$

Измерения, проведенные в натурных условиях, показали справедливость линейного дисперсионного соотношения для энергонесущих частот спектра [39]. На рис. 4.26 приведен спектр возвышений поверхности, полученный из записи ординат и рассчитанный через спектры наклонов [39]. Аналогичный метод проверки дисперсионного соотношения состоит в сопоставлении спектров вертикальных составляющих скорости $S_w(\omega, z_1), S_w(\omega, z_2)$, полученных на двух различных расстояниях от поверхности z_1, z_2 , или в сопоставлении спектров возвышения поверхности и вертикальной составляющей скорости. Связь между возвышением поверхности и вертикальной составляющей скорости дается (2.13), (2.16), а соотношение между спектрами:

$$S_w(\omega, z) = \omega^2 e^{-2kz} S_\zeta(\omega),$$

откуда можно получить величину волнового числа:

$$k(\omega) = \frac{1}{2\Delta z} \ln \left[\frac{S_w(\omega, z)}{S_\zeta(\omega, z) \omega^2} \right],$$

$$k(\omega) = \frac{1}{2\Delta z} \ln \left[\frac{S_w(\omega, z_2)}{S_w(\omega, z_1)} \right].$$

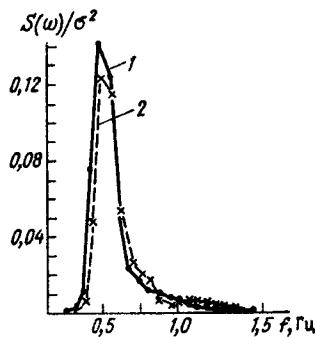


Рис.4.26. Нормированный частотный спектр возвышений поверхности, рассчитанный по одновременной записи уклонов (1) и ординат (2)

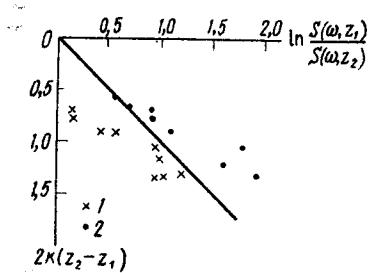


Рис.4.27. Изменение с глубиной спектров продольной (1) и вертикальной составляющих скорости (2). Прямая соответствует теории потенциальных волн

На рис.4.27 показано изменение с глубиной спектров вертикальной и продольных составляющих скорости по измерениям в аэрогидроканале [16]. Для частот максимумов спектра наблюдается хорошее совпадение с теоретической зависимостью. Однако при этом методе проверки дисперсионного соотношения велика роль турбулентных составляющих скорости.

Наибольшее распространение получил метод, основанный на проведении синхронных измерений возвышений поверхности в нескольких точках и проведении взаимного спектрального анализа полученных записей [27; 40; 18, гл.III]. Если бы волна была гармонической, то,

очевидно, величину фазовой скорости и волнового числа можно было бы определить из следующих соображений. Пусть колебания поверхности, вызванные волной, в точках x_1 и $x_2 = x_1 + l$ в момент времени t равны соответственно

$$\zeta_1 = a \cos \omega (t - \frac{x_1}{c}) = a \cos (\omega t - kx_1),$$

$$\zeta_2 = a \cos \omega (t - \frac{x_1 + l}{c}) = a \cos [\omega t - k(x_1 + l)].$$

Разность фаз колебаний $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ в точках x_1 и x_2 в момент времени t равна $\Delta \phi = \frac{\omega l}{c}$. Отсюда следуют выражения для фазовой скорости

$$c = \frac{\omega l}{\Delta \phi}$$

и волнового числа

$$k = \frac{\Delta \phi}{l}.$$

Эти соотношения неоднократно использовались для определения фазовой скорости и волнового числа поверхностных волн, генерируемых волнопродуктором. Для определения фазовой скорости и волнового числа спектральных составляющих ветрового волнения выполним взаимный спектральный анализ записей колебаний поверхности $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$, получим фазовый спектр $\phi_{\zeta\zeta}(\omega)$. Он представляет собой разность фаз спектральных составляющих процессов $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ на частоте ω . Тогда фазовая скорость и волновое число на этой частоте могут быть определены по формулам

$$c(\omega) = \frac{\omega l}{\phi_{\zeta\zeta}(\omega)}, \quad (4.45)$$

$$k(\omega) = \frac{\phi_{\zeta\zeta}(\omega)}{l}^{-1}. \quad (4.46)$$

Экспериментальная проверка метода вычисления $c(\omega)$ и $k(\omega)$ производилась следующим образом. Колебания поверхности создавались волной, генерируемой волнопродуктором, который создавал почти синусоидальные волны малой амплитуды. Для таких волн хорошо выполняются соотношения $c = (g/k)^{1/2}$ и $c = g/\omega$ [41]. Расчеты, проведенные с использованием формул (4.45), (4.46) и соотношений линейной теории, дали хорошее совпадение.

Ветровое волнение в аэрогидроканале сопровождается значительными дрейфовыми течениями. В [42] показано, что в широком диапазоне динамических скоростей воздуха скорость дрейфового течения на границе вода – воздух может быть определена по формуле

$$U_* = 0,6 V_*, \quad (4.47)$$

где V_* – динамическая скорость в воздухе.

С.В.Доброклонский и Б.М.Лесников [43] провели тщательное исследование структуры дрейфовых течений в этом же аэрогидроканале при близких значениях динамических скоростей. Согласно их экспериментальным данным, соотношение (4.47) хорошо выполняется для скорости дрейфового течения на глубине 0,2 мм от невозмущенного уровня поверхности. Введем эту скорость в дисперсионное соотношение:

$$\omega = (gk)^{1/2} + 0,6 V_* k.$$

Решив это уравнение относительно k , получим дисперсионное соотношение в следующем виде:

$$k(\omega) = 4 \omega^2 g^{-1} [1 + (1 + 2,4 V_* \omega g^{-1})^{1/2}]^{-2} \quad (4.48)$$

Эта формула описывает семейство кривых, соответствующих различным значениям динамической скорости V_* . При $V_* = 0$ из (4.48) получается $\omega^2 = gk$. Используя (4.48), фазовую скорость можно записать как функцию частоты ω и динамической скорости V_* :

$$c(\omega) = \frac{g}{2\omega} [1 + (1 + 2,4 V_* \omega g^{-1})^{1/2}] + 0,6 V_* \quad (4.49)$$

Экспериментальное определение $c(\omega)$ и $k(\omega)$ выполнено для трех ветровых режимов (динамические скорости равны 20,8; 63; 99 см/с). Значения $c(\omega)$, $k(\omega)$ по формулам (4.45), (4.46) вычислялись на частотах около максимума спектра ветровых волн при высоком значении коэффициента когерентности $\gamma^2(\omega)$. На рис.4.28. показаны

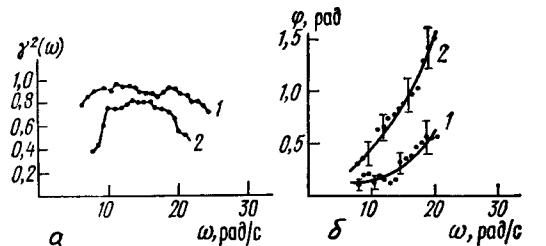


Рис. 4.28. Функции когерентности (а) и фазового сдвига (б) колебаний поверхности в двух точках на расстояниях, равных: 1 - 3,8; 2 - 9,8 см

функции когерентности $\gamma^2(\omega)$, функции фазового сдвига $\phi(\omega)$ для различных расстояний между датчиками. При вычислении фазовой скорости $c(\omega)$ и волнового числа $k(\omega)$ производилось осреднение по значениям, полученным при различных значениях расстояния между датчиками. На рис. 4.29 показаны измеренные значения фазовой скорости и полученные по (4.49), которые неплохо согласуются с экспериментальными значениями. Однако наблюдается некоторое систематическое отклонение экспериментальных значений от расчетных, увеличивающееся при росте $\frac{\omega}{\omega_c}$, где ω_c - частота максимума спек-

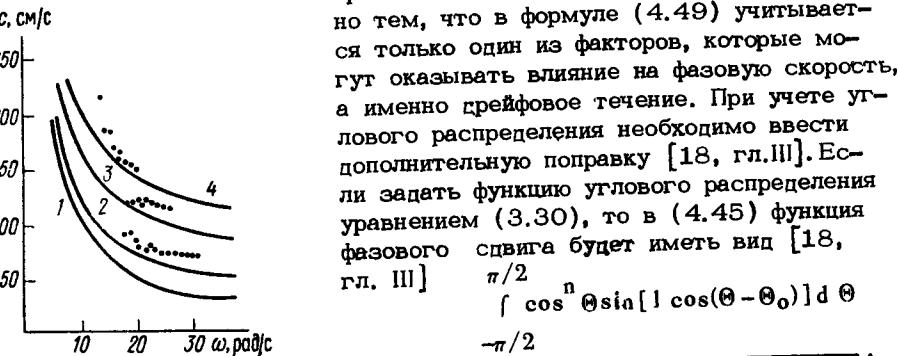


Рис. 4.29. Зависимость $c = c(\omega)$ Кривые соответствуют расчету по (3.39) при $V_* = 0$; 20,8; 63; 99 см/с (цифры равны 1,2, 3,4)

тра. Это отклонение может быть объяснено тем, что в формуле (4.49) учитывается только один из факторов, которые могут оказывать влияние на фазовую скорость, а именно дрейфовое течение. При учете углового распределения необходимо ввести дополнительную поправку [18, гл. III]. Если задать функцию углового распределения уравнением (3.30), то в (4.45) функция фазового сдвига будет иметь вид [18, гл. III]

$$\phi_{\zeta\zeta} = \arctg \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \Theta \sin[1 \cos(\Theta - \Theta_0)] d\Theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \Theta \cos[1 \cos(\Theta - \Theta_0)] d\Theta}$$

Учет углового распределения приводит к увеличению фазовой скорости по сравнению с $c = \frac{\omega}{\omega_c}$.

В [44] проведен эксперимент, в котором измерение фазовой скорости ветровых волн проводилось без дрейфовых течений. Специальная постановка эксперимента позволила устранить воздействие ветра на ту часть волновой поверхности, в которой проводились измерения. Согласно [44] в области частот $\frac{\omega}{\omega_0} \leq 1,8$ поправка к фазовой скорости за счет углового распределения составляет от 3 до 15 %, что близко к разнице между нашими экспериментальными и расчетными значениями.

В нашем эксперименте фазовая скорость спектральных составляющих определялась в узком диапазоне частот около максимума спектра:

$$0,7 \leq \frac{\omega}{\omega_0} \leq 1,3.$$

В [44; 45; 27; 18, гл. III] измерение фазовой скорости ветровых волн проводилось в более широком диапазоне частот - до $\omega > 2\omega_0$. Эти измерения представляют интерес для выявления влияния нелинейности на фазовую скорость. Как хорошо известно, ветровые волны не являются гармоническими, их гребни более острые по сравнению с гармонической волной, а впадины пологие. Такое изменение формы волны должно приводить к появлению ряда гармоник, распространяющихся с фазовой скоростью основной гармоники, как в волне Стокса. Наличие дополнительных максимумов на частотах, кратных частоте основного максимума спектра ω_0 , является проявлением такой нелинейности. Приведенные на рис.4.30 измерения фазовой скорости в аэрогидроканале [46] показывают, что все составляющие с частотой выше максимума спектра движутся с одинаковой скоро-

тью, равной фазовой скорости основной волны. В [45] были проведены измерения фазовой скорости составляющих слабо и сильно модулированной нелинейной периодической волны. Составляющие слабо модулированной волны удовлетворяют линейному дисперсионному соотношению. Спектр сильно модулированной нелинейной волны подобен спектру ветровых волн, а фазовая скорость его составляющих на частоте $\omega > \omega_0$ неизменна и равна $\frac{g}{\omega_0}$. Эти измерения

показывают, что ветровые волны в аэрогидроканалах на частотах $\omega > \omega_0$ являются вынужденными волнами и отражают отличие профиля от гармонического. Свободные волны, которые должны удовлетворять дисперсионному соотношению линейной теории, на частотах $\omega > 2\omega_0$ полностью подавляются. Измерения [18, гл. III] показывают, что в природных условиях частотный диапазон свободных волн гораздо шире. На частотах основных энергонесущих составляющих основное влияние на фазовую скорость оказывает угловое распределение спектральных составляющих. На частотах $\omega > \omega_0$ наряду со свободными волнами присутствуют вынужденные волны, которые и приводят к увеличению средней фазовой скорости на фиксированной частоте. В натурных условиях величина превышения фазовой скорости составляет 20–30 %.

Влияние соотношения свободных и вынужденных волн на величину фазовой скорости описано в [43]. Рассмотрим волну

$$\zeta(x, t) = A(\omega) \exp\left\{i\left(\frac{\omega^2}{g}x - \omega t\right)\right\} + B(\omega) \exp\left\{i\left(\frac{\omega^2}{2g}x - \omega t\right)\right\}, \quad (4.50)$$

где $A(\omega), B(\omega)$ – некоррелированные амплитуды свободной и вынужденной волн соответственно. Член $B(\omega) \exp\left\{i\left(\frac{\omega^2}{2g}x - \omega t\right)\right\}$

представляет собой вторую гармонику свободной волны вида

$$A\left(\frac{\omega}{2}\right) \exp\left\{i\left[\frac{1}{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 x - \frac{\omega}{2}t\right]\right\},$$

имеющую фазовую скорость, в два раза большую фазовой скорости свободной волны в (4.50). Вычислив фазовый спектр $\phi\zeta\zeta$ по записям волны (4.50) на расстоянии l , имеем из (4.45) нормированное выражение фазовой скорости

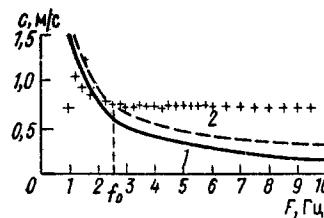


Рис. 4.30. Фазовая скорость ветровых волн по измерениям в аэрогидроканале [46]. f_0 – частота максимума спектра. Кривая 1 соответствует линейному дисперсионному соотношению, 2 – то же с учетом дрейфовой скорости. Крестики соответствуют экспериментальным значениям

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\omega_0^2}{g} \arctg \left\{ \frac{\sin \frac{\omega_1}{g} + b \sin \frac{\omega_1}{2g}}{\cos \frac{\omega_1}{g} + b \cos \frac{\omega_1}{2g}} \right\},$$

где $c_0 = \frac{g}{\omega_0}$, $b = \frac{B^2(\omega)}{A^2(\omega)}$ – отношение энергии вынужденной волны

к энергии свободной. Зависимость $\frac{c}{c_0}$ от b приведена на рис. 4.31. Величина $\frac{c}{c_0}$ сильно зависит от соотношения энергии свободных и вынужденных волн на данной частоте.

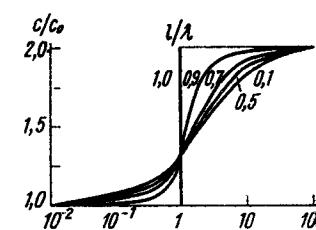


Рис. 4.31. Зависимость $\frac{c}{c_0}$ от b и $\frac{1}{\lambda}$ [44]

На измерениях, выявивших сильную роль нелинейности в ветровых волнах, базируется так называемая нелинейная когерентная модель ветрового волнения [46]. В линейной спектральной модели ветровые волны рассматриваются как ансамбль несвязанных свободных бесконечно малых волн, удовлетворяющих дисперсионному соотношению. В нелинейной когерентной модели система ветровых волн в первом приближении рассматривается как нелинейная волна с частотой, равной частоте максимума спектра ветровых волн. Составляющие на более высокой частоте фактически являются гармониками основной несущей волны и движутся с ее фазовой скоростью. В нелинейной когерентной модели определяющую роль, таким образом, играет нелинейность, а не случайность, как в линейной спектральной системе.

§ 4.10. Волновая энергетика

В последнее время пристальное внимание ученых и конструкторов привлекает использование различных видов энергии Мирового океана. Построены первые приливные электростанции. Разрабатываются методы использования тепловой энергии океана, связанной, например, со значительной разницей температур поверхностного и глубинного слоев океана, достигающей в тропических областях 20°C и более. В общем энергетическом балансе Мирового океана количество механической энергии значительно меньше тепловой.

Рассмотрим некоторые способы использования одной из форм механической энергии океана – энергии морских волн. Средняя

энергия волны определяется формулами (2.22), (2.23). Плотность потока энергии равна произведению плотности энергии на групповую скорость. Например, волна с периодом 10 с и высотой 2 м действует на 1 м берега с мощностью около 37 кВт. Мощные ветры, действующие над значительной частью поверхности океана, создают огромные волны. Интенсивность ветровых систем максимальна в зимнее время, когда потребности в энергии части человечества, проживающей в Северном полушарии, резко возрастают. Полная волновая энергия океанов оценивается в 800×10^{15} Дж, а мощность примерно в 50×10^{12} кВт [47]. Основными недостатками, ограничивающими широкое использование волновой энергии, являются ее сравнительно низкая плотность, сильная изменчивость во времени и высокая стоимость волновых энергетических установок. В настоящее время скоплен значительный объем инструментальных измерений ветрового волнения в Мировом океане. На основе этих данных волновая климатология определяет районы с наиболее интенсивным и постоянным волнением. Потери волновой энергии за счет прибоя для земного шара оцениваются в 2×10^9 кВт. Общая длина береговой линии равна 200 000 км, т.е. в среднем на метр береговой линии приходится 10 кВт [48]. Однако существуют районы побережья, средняя волновая мощность которых значительно выше. Они постоянно подвергаются воздействию океанских волн длиной 50–200 м, высотой 2–5 м и более. Образование этих волн не обязательно связано с действием местных ветров. Волны, возникшие в одной части океана, способны проходить огромные расстояния в сотни и тысячи миль, так как они слабо затухают в глубоком океане. Согласно некоторым оценкам среднегодовая мощность волн, приходящаяся на каждый метр западного побережья Великобритании, достигает 80 кВт [47]. А полная волновая мощность равна 120 ГВт, что примерно в 5 раз превышает современные потребности в электроэнергии в стране. На многих участках шельфовой зоны США и Японии плотность волновой энергии составляет около 40 кВт/м.

Существует три основных типа проектов по извлечению волновой энергии. В первом используется метод повышения концентрации волновой энергии и превращения ее в потенциальную энергию воды. Во втором – тело с несколькими степенями свободы находится у поверхности воды. Волновые силы, действующие на тело, передают ему часть волновой энергии. Основным недостатком такого проекта является уязвимость тела, находящегося под действием волн. В третьем проекте система, поглощающая энергию, находится под водой. Передача волновой энергии происходит под действием волнового давления или скорости.

В ряде волновых установок для повышения эффективности плотность волновой энергии искусственно повышается [49]. Изменяя рельеф дна в прибрежной зоне, можно фокусировать морские волны подобно линзе, фокусирующей световые волны. Если сфокусировать волны с побережья длиной в несколько километров на фронте в 500 м, то высота волн может достигать 30 м. Попадая в специальное со-

ружение, вода поднимается на высоту в 100 м. Около 70 % энергии морских волн можно преобразовать в потенциальную энергию морской воды, поднятой на 100 м над уровнем океана. Энергия поднятой воды может быть использована для работы гидроэлектростанции, расположенной на уровне океана. Волновую электростанцию подобного типа планируется использовать для обеспечения электроэнергией острова Маврикий, не имеющего традиционных источников энергии.

К устройствам второго типа можно отнести плот Коккереля [50], состоящий из трех шарнирно-соединенных понтонов. При прохождении волн понтоны перемещаются друг относительно друга. Из-за взаимного перемещения понтонов при помощи поршней приводится в движение жидкость в гидросистеме. Жидкость же приводит в движении гидромотор.

Ряд устройств по преобразованию волновой энергии использует различные свойства волновых движений: периодические изменения уровня водной поверхности, волнового давления или волновой скорости. Опишем некоторые из таких устройств.

Представим себе сооружение, состоящее из ряда замкнутых камер, соединенных с морем отверстием. Под действием волн уровень воды в камерах периодически изменяется, что вызывает поток воздуха из камер. Воздушный поток из камер можно превратить в пульсирующий по величине, но постоянный по направлению, приводящий в движение воздушную турбину. Процент использования волновой энергии достигает 40 % [51]. Электроэнергия передается на берег по кабелям.

В Японии разрабатывается промышленный образец такой системы, имеющей 9 турбин общей мощностью в 2 МВт. Перед выпуском промышленного образца работа системы воздушных турбогенераторов, схемы крепления станции и методы передачи электроэнергии отрабатываются на плавучей электростанции "Каймей" мощностью 330 кВт [50]. Аналогичные устройства небольшой мощности, в которых движение воды под действием волны происходит в вертикальной трубе, уже используются в Японии для питания электроэнергии океанских буйев. Такая волновая установка в Японии называется столбом Масуды по имени ее изобретателя. В Англии, где был предложен целый ряд усовершенствований установки, она называется осциллирующим водным столбом.

Сила, с которой волны действуют на сооружения в береговой зоне, достигает нескольких тонн на квадратный метр. Это силовое воздействие тоже может быть использовано для преобразования волновой энергии. Возьмем буй с основанием в виде трапеции. Буй за якорен в прибрежной зоне. Широкая сторона трапеции обращена в сторону океана, это позволяет концентрировать волновую энергию. Эта сторона буя открыта для волн. Внутри буй разделен на несколько секций, которые завершаются цилиндрами с поршнями. Волны, действуя на поршни, приводят в движение воздух, который в свою очередь движет воздушную турбину. При размере основания в 350 м и высоте буя в 20 м мощность электростанции составит около 100 000 кВт [52].

Устройства, в которых имеется значительное число подвижных частей, довольно чувствительны к воздействию морской воды и нерегулярных силовых нагрузок. Поэтому предпочтение следует отдать системам с минимальным числом движущихся частей.

Параллельность берегу гребней волн в прибрежной зоне используется в следующей системе [53, 54]. Цилиндр положительной плавучести полностью погружается в воду. Ось цилиндра параллельна гребню падающей волны. На заданной глубине цилиндр удерживается при помощи четырех тросов, обладающих нейтральной плавучестью. К концам тросов крепится пружинная нагрузка. Такая система крепления позволяет перемещаться цилиндру в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Если гребень падающей волны параллелен оси цилиндра, то цилиндр будет совершать движение, подобное тому, которое совершают частицы воды в волне. Расположение дополнительных цилиндров с другими параметрами позволяет расширить диапазон длин волн, в котором происходит эффективное поглощение волновой энергии. Полное заглубление цилиндров повышает надежность системы по сравнению со схемами, в которых движущиеся части расположены на поверхности воды.

Широкая разработка и эксплуатация устройств, использующих волновую энергию, только начинаются. Наиболее интенсивные исследования ведутся в странах, обладающих большими волновыми мощностями – в Англии, Японии, Норвегии. Состоялись первые конференции по использованию энергии волн [55]. В основном проходят испытания опытные и модельные установки. Наряду с рассмотренными существуют другие проекты, использующие тот или иной принцип.

В настоящее время производство 1 кВт электроэнергии на волновых электростанциях в 5–10 раз выше, чем на атомной или тепловой. Однако волновая энергетика не использует ископаемое топливо, стоимость которого непрерывно растет, а запасы ограничены. Перед волновой энергетикой не стоит в острой форме проблема воздействия на окружающую среду. Кроме того, волновую энергетику следует рассматривать как дополнительный к традиционным источникам энергии, который может иметь значение только в некоторых районах мира.

В заключение рассмотрим использование еще одного вида механической энергии океанов – энергии приливов. В прибрежной зоне приливные волны проявляются в периодическом подъеме и опускании уровня. В некоторых местах высота прилива достигает огромной величины, так в Пензинской губе (Тихий океан) максимальная амплитуда прилива равна 12 м, а в заливе Фанди (Канада) – 19,6 м. Энергия приливных волн огромна, например, средняя мощность, переносимая приливной волной через Ла-Манш, равна 180 млн кВт. Из-за донного трения, влияния дна и берегов мощность приливной волны уменьшается на выходе из Ла-Манша до 23 млн кВт [48]. Мощность, рассеиваемая приливами в Мировом океане, составляет 1–2 млрд. кВт. Причем большая часть этой энергии расходуется в мелководных морях, проливах и заливах, т.е. там, где наиболее выгодно гидротехническое строительство.

Человек уже давно начал использовать энергию приливов. Так, приливные мельницы были широко распространены на северо-восточном побережье Канады еще в XVII в. Первые приливные мельницы строились по очень простой схеме. Вода во время прилива наполняла естественный или искусственный водоем. Ворота шлюза, отделяющего этот водоем от моря, закрывались в момент, когда высота прилива достигала наивысшей точки. Когда высота прилива падала, собранную в водоеме воду спускали через шлюз и она вращала мельничное колесо. Однако такие мельницы могут работать только в определенное время суток. Позднее изобретатели поставили мельничное колесо на плот, который был закреплен на якоре и поворачивался в сторону потока. Это приводило к тому, что мельничное колесо вращалось как при приливе, так и при отливе. Оба этих принципа (накопление потенциальной энергии во время прилива и использование приливного и отливного потоков) используются в строительстве современных приливных электростанций. Для эффективной работы как в приливном, так и в отливном потоке созданы реверсивные турбины, поворачивающие лопасти навстречу потоку [48].

В нашей стране в 1968 г. дала ток опытная Кислогубская приливная электростанция, имеющая два гидроагрегата по 400 кВт каждый. В устье реки Ранс (Франция) работает приливная электростанция мощностью 240 МВт. В настоящее время ведется работа над проектами электростанции в Мезенской губе Белого моря мощностью от 6 до 14 ГВт, Пензинской губе Охотского моря на 35 ГВт и некоторыми другими. Использование энергии приливов ограничивается в основном высокой стоимостью сооружения. Например, стоимость строительства приливной электростанции на реке Ранс в 2,5 раза выше, чем стоимость обычной речной электростанции такой же мощности.

Пока приливные электростанции сооружаются в районах с большой высотой прилива. Однако уже сейчас созданы турбины, способные работать при высоте прилива в 1 м, что значительно расширяет районы возможного строительства. Конечно, приливные электростанции не могут заменить ядерную или речную энергетику, однако они имеют некоторые важные преимущества. Приливные электростанции более стабильны и надежны в работе, чем гидроэлектростанции; на них можно легко накапливать энергию и приспособливать ее расход к изменению спроса потребителей, что трудно делать на тепловых станциях.

Л и т е р а т у р а

1. Weber E., Weber W. Wellenlehre auf Experimente gegründet, oder über die Wellen tropfbarer Flüssigkeiten mit Anwendung auf die Schall- und Lichtwellen. – Leipzig, 1925.
2. Kelvin W. On stationary waves in flowing water. – 'Phil. Mag.',

- 1871, ser.4, 42, 362.
- 3 Jeffreys H. On the formation the waves on water by wind. — 'Proc Roy. Soc.', 1925, A107, 189.
4. Шулейкин В.В. Физика моря. — М.: Наука, 1968.
5. Капица П.Л. К вопросу об образовании ветром морских волн. — "ДАН СССР. Новая серия", 1949, т.64, № 4, 12-18.
6. Helmholtz G. Die Energie der Wogen und des Windes. — 'Will. Abhaufl'. Leipzig, 1895, 3, 332-355.
7. Motzfeld H. Die turbulente Strömung an welligen Wänden. — 'Z. angew. Math. Mech.', 1937, 17, N 4, 193-212.
8. Макавеев В.М. О процессах возрастания и затухания волн малой амплитуды и о зависимости их от расстояния по наветренному направлению. — "Труды ГГИ", 1937, вып.5, 17-25.
9. Eckart C. The generation of wind waves over a water surface. — 'J. Appl. Phys.', 1953, 24, 1485-1494.
10. Колесников А.Г., Кононкова Г.Е. Инструментальное определение энергии, передаваемой нормальным давлением ветра поверхности морских волн. — "Изв. АН СССР. Сер. геофизика", 1961, № 10, 1152-1173.
11. Доброкопский С.В. Теория приемников давления с утечкой. — "Тр. МГИ АН СССР", 1956, 8, 63-79.
12. Китайгородский С.А. Физика взаимодействия атмосферы и океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1970.
13. Кононкова Г.Е., Поборчая Л.В. О взаимодействии воздушного потока с развивающимися волнами. — "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1974, т. 10, № 5, 552-556.
14. Кононкова Г.Е., Показеев К.В. О скорости роста спектральных компонент ветрового волнения в аэрогидроканале. — "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1981, т. 17, № 3, 313-318.
15. Hasselmann K. Weak interaction theory of ocean waves. — University of Hamburg, 1967, 112.
16. Кононкова Г.Е., Поборчая Л.В., Показеев К.И. Исследование поля скорости поверхностных волн. — "Метеорология и гидрология", 1973, № 3, 85-87.
17. Masuda A. Nonlinear energy transfer between wind waves. — 'J. Phys. Oceanogr.', 1980, 10, N 12, 2082-2093.
18. Plant W.I. On steady state energy balance of short gravity wave system. — 'J. Phys. oceanography', 1980, 10, N 9, 1340-1352.
19. Кононкова Г.Е., Пивоваров А.А., Показеев К.В. Спектры развивающегося ветрового волнения. — "Водные ресурсы", 1977, № 6, 182-187.
20. Ефимов В.В., Соловьев Ю.П. О развитии спектра ветровых волн. — "Океанология", 1975, т.15, № 3, 409-414.
21. Пелиновский Е.Н. Линейная теория установления и изменения спектра ветрового волнения при слабом ветре. — "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1978, т. 14, № 11, 1167-1176.
22. Макова В.И. Развитие поверхностных волн под действием турбулентного ветра. — "Труды ГОИН", 1974, вып. 121, 55-57.
23. Mitsuyasu H. On the growth of the spectrum of wind-generated waves. — 'Rep. of Research Inst. for Applied Mech.' Kyushu Univ., Japan, 1968, vol.16, N 55, 459-482.
24. Кононкова Г.Е., Пивоваров А.А., Показеев К.В. Генерация ветровых волн на спутном течении при малых разгонах. — "Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия", 1979, т. 20, № 3, 57-63.
25. Макин В.К., Чаликов Д.В. Лабораторное исследование ветрового волнения. — "Океанология", 1980, 20, № 5, 806-817.
26. Китайгородский С.А., Корнева Л.А., Лейкин И.А. Спектральные характеристики ветровых волн в кольцевом аэрогидроканале. — "ДАН СССР", 1977, т. 235, № 2, 298-301.
27. Soantic M., Ramamonyakiso A., Mestayer P., Resch F., Favre A. Wind-water tunnel simulation of small-scale ocean-atmosphere interactions. — 'J. Geophysical Res.', 1981, vol.86, NC7, 6607-6626.
28. Кононкова Г.Е., Никитина Е.А., Поборчая Л.В., Сперанская А.А. Лабораторное исследование статистических характеристик начальной стадии развивающегося волнения. — "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1969, т. 5, № 5, 504-511.
29. Кононкова Г.Е., Никитина Е.А., Поборчая Л.В., Сперанская А.А. О спектрах ветрового волнения при малом разгоне. — "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1970, т.6, № 7, 747-751.
30. Кононкова Г.Е., Показеев К.В. Исследование ветровых волн при малых разгонах. — "Труды ГОИН", 1980, вып. 151, 89-100.
31. Plant W.I., Wright I.W. Growth and equilibrium of short gravity waves in a wind wave tank. — 'J. Fluid Mech.', 1977, vol.82, p. 4, 767-793.
32. Mitsuyasu H., Rikishi K. The growth of duration-limited wind waves. — 'J. Fluid Mech.', 1978, vol.85, p.4, 705-730.
33. Larson I.R., Wright I.W. Wind-generated gravity-capillary waves: laboratory measurements of temporal growth rates using microwave back scatter. — 'J. Fluid Mech', 1975, vol.70, p.3, 417-436.
34. Wu I. A note on minimum wind stress for wave inception. — 'Tellus', 1978, vol.30, 93-96.
35. Фабрикант А.П. О нелинейном развитии ветрового волнения при слабом ветре. — "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1980, 16, № 9, 985-988.

36. Wu I. Laboratory studies of wind-wave interactions. — 'J. Fluid Mech.', 1968, vol.34, № 1, 91--112.
37. Кононкова Г.Е., Никитина Е.А., Поборчая Л.В., Сперанская А.А. Структура воздушного потока вблизи взволнованной поверхности воды. — "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1971, т. 7, № 1, 98-101.
38. Кононкова Г.Е., Попов Г.И. Некоторые результаты исследования распределения давления воздуха над водой в условиях аэрогидроканала. — "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1972, т. 8, № 12, 1289-1296.
39. Кононкова Г.Е., Кузнецов В.В. Регистрация наклонов взволнованной поверхности воды. — "Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия", 1971, № 3, 257-261.
40. Кононкова Г.Е., Показеев К.В. Экспериментальное изучение дисперсионного соотношения для составляющих частотного спектра ветровых волн. — "Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия", 1978, № 1, 121-123.
41. Добролюбский С.В., Конторович Н.В., Худовекова Л.В. Лабораторное исследование фазовой скорости монохроматических волн малой и большой крутизны. — "Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия", 1973, № 2, 131-135.
42. Wu I. Wind induced drift currents. — 'J. Fluid Mech.', 1975, vol.68, p.1, 49-70.
43. Добролюбский С.В., Лесников Б.М. Исследование поверхностного слоя дрейфовых течений в лабораторных условиях. — "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1972, т. 8, № 11, 1175-1187.
44. Mitsuyasu H., Ko Y.Y., Masuda A. On the dispersion relation of random gravity waves. Part 2. An experiment. — 'J. Fluid Mech.', 1979, N 92, p. 4, 731-749.
45. Lake B.M., Yuen H. A new model for nonlinear wind waves. Part 1. Physical model and experimental evidence. — 'J. Fluid Mech.', 1978, vol.68, p.1, 33-62.
46. Юэн Г., Лейк Б. Теория нелинейных волн в приложении к волнам на глубокой воде. — В кн.: Солитоны в действии. — М.: Мир, 1981, с. 103-137.
47. Panicker N.V. Energy from ocean surface waves. — 'Ocean Energy Resour.' Energy Tech. Conf. Houston, 1977, 43-67.
48. Лакомб А. Энергия моря. — Л.: Гидрометеоиздат, 1972.
49. Mehlem E., Slammes I. Power production based on focusing of ocean swells. — 'Ist. Sump. Wave Utiliz.', Gotheburg, 1979, Göteborg, s.a., 29-35.
50. Рощ Д. Энергия волн. — Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
51. Moody G.W. The NEL oscillating water column: recent developments. — 'Ist. Sump. Wave Utiliz.', Gotheburg, 1979, Göteborg, s.a., 283-297.
52. Петрович Н. Человечество и энергетический барьер. — "Техника - молодежи", 1978, № 9, 7-9.
53. Evans D.V., Davis I.R., Srokosz M.A. A system of efficient submerged wave-energy absorbers. — 'Mech. Wave Induced Forces Cylinders. Sump. Bristol, 1978', San Francisco, e.a., 1979, 673-683.
54. Lighthill I. Fluid mechanical aspects of wave energy projects. — 'J. Soc. Underwater Technol.', 1978, 4, N 2, 12-13.
55. Power from sea waves. — Marchwood Engineering laboratories, Southampton, 1981.
56. Мапаков В.Ч. Измерение пульсаций скорости ветра над поверхностью воды на озере Всегул. — В кн.: Экспресс-информация, № 7, ВНИИГМИ. ОНТИ. Обнинск. С. 5-14.

ГЛАВА V.

ВОЛНЫ НА ТЕЧЕНИЯХ

§ 5.1. Волны на стационарном потоке, создаваемые препятствием

В некоторых случаях стационарный поток, обтекающий препятствие, может приводить к образованию волн. Эти волны, синусоидальные в пространстве, неподвижны относительно системы отсчета, связанной с препятствием. Аналогичная картина волн возникает при движении препятствия в неподвижной воде. Следуя [1, гл. II], рассмотрим одномерный стационарный поток, распространяющийся со скоростью U вдоль оси Ox . Картина волн будет стационарной только в том случае, если фазовая скорость образующихся волн равна скорости потока: $c = U$. Согласно (2.28) фазовая скорость поверхностных гравитационно-капиллярных волн имеет минимум c_m , равный 23,1 см/с при $k_m = \frac{2\pi}{\lambda_m}$ ($\lambda_m = 1,74$ см). Таким образом, стационарная картина волн возникает, только если скорость потока будет превышать c_m . При $U < c_m$ начальные возмущения затухают вдали от препятствия. Если $U > c_m$, уравнение $U = c(k)$ будет иметь два корня (см. рис. 2.7). Первый корень соответствует гравитационной ветви $c(k_g)$, второй — капиллярной ветви $c(k_a)$. Фазовые скорости $c(k_g)$, $c(k_a)$ определяются (2.28), а групповые $c_r(k_g)$ и $c_r(k_a)$ — (2.29). Для волновых чисел k_g , k_a выполняется следующее соотношение: $k_g < k_m < k_a$. Групповая скорость гравитационных волн $c_r(k_g)$ меньше фазовой скорости $c(k_g) = U$, а групповая скорость капиллярных волн больше скорости $c(k_a) = U$. Поэтому энергия более длинных гравитационных волн переносится вниз по потоку. Энергия капиллярных волн будет распространяться вверх по потоку. Из-за дисперсии создаваемые препятствием гравитационные и капиллярные волны будут расположены по разные стороны от препятствия. Ввиду того что скорость затухания

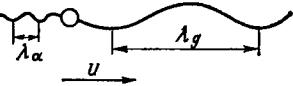


Рис. 5.1. Картина волн, созданных на поверхности потока препятствием. Капиллярные волны λ_a распространяются вверх по течению, гравитационные λ_g вниз по течению

гравитационных волн существенно меньше, чем капиллярных, они могут распространяться на значительно большее расстояние, чем капиллярные. Волновая картина волн, образуемых препятствием в потоке, изображена на рис. 5.1. Волновая поверхность $\zeta(x)$ на больших расстояниях от препятствия в случае импульсного воздействия $f(x) = \delta(x)P$, где $\delta(x)$ — дельта-функция, $P = \text{const}$, имеет вид [2, гл. II]

$$\zeta(x) \sim \begin{cases} \frac{-2P\rho}{(k_a - k_g)} \sin k_g x, & x > 0, \\ \frac{-2P\rho}{(k_a - k_g)} \sin k_a x, & x < 0. \end{cases}$$

Мощность, расходуемую препятствием на образование системы волн, легко получить [1, гл. II]. Плотность энергии гравитационных волн равна E_g , эта энергия переносится вниз по потоку со скоростью $U - c_r(k_g)$. Плотность энергии капиллярных волн равна E_a . Эта энергия распространяется вверх по потоку со скоростью $c_r(k_a) - U$. Мощность, расходуемая препятствием на образование системы капиллярных и гравитационных волн на единицу ширины потока:

$$P_w = [U - c_r(k_g)] E_g + [c_r(k_a) - U] E_a.$$

Полученное соотношение позволяет объяснить явление резкого уменьшения сопротивления движению корабля в узком и мелком канале при его движении со скоростью $U > (gH)^{\frac{1}{2}}$. В этом случае максимальная скорость поверхностных волн равна $(gH)^{\frac{1}{2}}$, но так как корабль движется с большей скоростью, волнообразование не происходит. Мощность на волнообразование не расходуется, корабль тратит энергию только на совершение работы против сил трения и на образование небольших наклонных волн, возникающих по бокам корабля [1, гл. II].

§ 5.2. Волны на неоднородном стационарном потоке

Рассмотрим распространение волн на стационарном потоке [12, гл. II]. Скорость потока по вертикали неизменна. Изменение скорости $U(x)$ вдоль оси Ox может происходить, например, вследствие изменения глубины потока $H(x)$. Пусть волны распространяются вдоль Ox .

Изменение параметров волн можно получить на основе законов сохранения, изложенных в § 2.10. Вследствие стационарности процесса частота волн в неподвижной системе координат будет неизменна. Так как $\frac{\partial k}{\partial t} = 0$, из (2.56) имеем

$$\omega(k) + kU(x) = \omega_0 = \text{const}, \quad (5.1)$$

где ω_0 – частота волн в точке $U = 0$, $\omega(k)$ – частота волн в сопровождающей системе координат.

Сопровождающей мы называем систему координат, движущуюся со скоростью потока. Из (2.14) и (5.1) частота волн в сопровождающей системе координат на глубокой воде равна

$$\omega^2 = g|k| = [\omega_0 - kU(x)]^2. \quad (5.2)$$

Используя $\omega = ck$, (5.1) запишем в виде

$$k(c + U(x)) = k_0 c_0. \quad (5.3)$$

Применяя выражение фазовой скорости гравитационных волн на глубокой воде $c = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2}$, $c_0 = \left(\frac{g}{k_0}\right)^{1/2}$, из (5.3) получаем

квадратное уравнение для $\left(\frac{c}{c_0}\right)$:

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 = \frac{k_0}{k} = \frac{c}{c_0} + \frac{U}{c_0},$$

решение которого

$$\left(\frac{c}{c_0}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4U}{c_0}\right)^{1/2} \quad (5.4)$$

при $U = 0$ должно обращаться в равенство $c = c_0$ [3]. Как следует из (5.4), волны не распространяются в область $|U(x)| > \frac{c_0}{4}$.

В критической точке $U = -\frac{c_0}{4} = -\frac{c}{2}$. Групповая скорость

волн на потоке $U(x)$ определяется из (5.1):

$$c_r = U(x) + \frac{\partial \omega}{\partial k},$$

т.е. групповая скорость волн в неподвижной (лабораторной) системе координат c_r равна сумме скорости течения и локальной групповой скорости $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ в сопровождающей системе координат. Скорость

$U(x)$ сносит волну по течению. В критической точке групповая скорость волн c_r равна нулю, т.е. энергия не может распространяться против течения. Филлипс [12, гл. II] полагал, что это предельное кинематическое условие не достигается, и волны разрушаются раньше из-за роста их крутизны. В [1; 2; 3] было показано, что в точке $c_r = 0$ может происходить не только остановка, но и отражение волн. Эта точка называется точкой поворота или блокировкой. Как показыва-

ет рассмотрение дисперсионного соотношения гравитационных волн на встречном потоке (5.2), частоте ω соответствуют две волны, бегущие вправо (1.2) [1]. Им соответствуют различные волновые числа и фазовые скорости:

$$c_{1,2} = \frac{g \pm (g^2 - 4\omega_0 g U)^{1/2}}{2\omega_0},$$

$$k_{1,2} = \frac{\omega_0}{c_{1,2} + U(x)}.$$

График $\omega(k)$ для волн на встречном потоке показан на рис. 5.2.

По сравнению с графиком $\omega(k)$ без течения ветви кривой поворачиваются по часовой стрелке. Рассмотрим волны, бегущие вправо ($\omega > 0$). Частоты $-\omega_0$ соответствуют две волны, бегущие влево. Как видно из рис. 5.2, хотя частота волн 1,2 в неподвижной системе координат равна ω_0 , их фазовые скорости совпадают по направлению, групповые скорости направлены в противоположные стороны. Для волны 1 $c_r > 0$, для волны 2 $c_r < 0$. В точке блокировки (Б) c_r обращается в нуль. Волна 1 соответствует прямой или падающей волне, волна 2 – отраженной. В отраженном волновом пакете гребни волн бегут навстречу потоку ($c > 0$), а огибающая пакета движется вниз по потоку. Ветвь АБ соответствует прямой волне, ветвь БС – отраженной, в точке Б возможен переход прямой волны в отраженную. Волновой пакет, движущийся из области неподвижной жидкости

навстречу потоку, в точке Б отражается и превращается в отраженный. Изменение длины волны на неоднородном течении определяется из соотношений (5.3) и (5.4)

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{4} \left[1 + \left(1 + \frac{4U}{c_0}\right)^{1/2} \right]^2. \quad (5.5)$$

В точке, где

$$U = \frac{c_0}{4}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{4}.$$

Изменение амплитуды волны на неоднородном течении можно получить из уравнения сохранения волнового действия (2.71), которое в последствие стационарности обращается в

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{E(U + c_g)}{\omega(k)} \right] = 0.$$

Учитывая, что на глубокой воде для гравитационных волн

$$c_g = \frac{c}{2}, \quad \omega = \frac{g}{c},$$

получаем

$$E(U + \frac{c}{2})c = \frac{E_0 c_0^2}{2} = \text{const}, \quad (5.6)$$

откуда изменение амплитуды волны

$$\frac{a}{a_0} = \frac{c_0}{[c(c + 2U)]^{1/2}}, \quad (5.7)$$

где E_0, a_0 определяют плотность энергии и амплитуду волны при $U = 0$.

Из (5.5) и (5.7) видно, что на спутном течении ($U > 0$) длина волны возрастает, а амплитуда уменьшается, на встречном ($U < 0$) — амплитуда растет, длина волны уменьшается. Уравнение сохранения волнового действия не содержит в явной форме член, описывающий взаимодействие волн с течениями. В уравнении баланса волновой энергии (2.72), аналогичном (2.71), взаимодействие волн и течений описывается при помощи радиационного напряжения.

Изменение амплитуды волны на неоднородном течении с учетом эффекта их взаимодействия было получено Лонгем-Хиггинсом и Стюартом [4; 5]. В более ранних работах, например [7] использовалось уравнение баланса волновой энергии без учета взаимодействия волны и течения, и закон изменения амплитуды получался иным. Экспериментальную проверку законов изменения амплитуды и длины волны на неоднородном течении выполнили Хьюз и Стюарт [6] и получили хорошее согласие с теорией.

Изменение амплитуды волн на неоднородных течениях происходит в ряде районов Мирового океана. Это явление используется для гашения поверхностных волн в пневматических или пузырьковых волноломах [7]. В волноломах этого типа гашение происходит под действием течений, возникающих при всплытии пузырьков воздуха.

В случае жидкости конечной глубины уравнение (5.1) принимает вид

$$\omega_0 = kU(x) + [gk + th kH(x)]^{1/2} = \text{const},$$

а уравнение баланса волновой энергии [8]

$$\frac{\partial}{\partial x} [E(U + c_g)] + E \left(\frac{2c}{c_g} - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Изменение длины волны определяется по-прежнему (5.5), а изменение амплитуды

$$\frac{a}{a_0} = \left[\frac{1 + G_0}{\left(\frac{\lambda}{\lambda_0} - \frac{U}{c_0} \right) (1 + G) + \frac{2U}{c_0}} \left(1 - \frac{\lambda_0 U}{\lambda c} \right) \right]^{1/2},$$

где

$$G = \frac{2kH}{sh 2kH}$$

$$G_0 = \frac{2kH_0}{sh 2kH_0}.$$

Примеры расчетов λ/λ_0 и a/a_0 в зависимости от U/c_0 и kH_0 приведены на рис. 5.3.

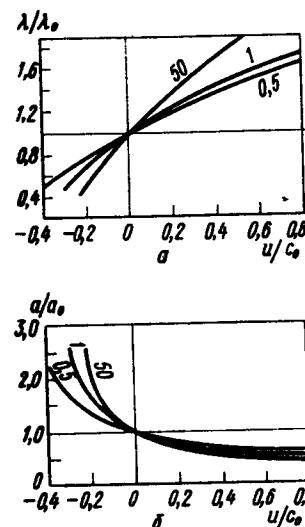


Рис. 5.3. Изменение λ/λ_0 (а)
и a/a_0 в зависимости
от U/c_0 в жидкости конечной

глубины. Цифры у кривых обозначают величины $k_0 H_0$ [11]

Используя приведенные выше соотношения, можно получить закон изменения спектра волн на неоднородном течении [9]. Используя спектральную форму уравнения (5.6), имеем

$$\left(\frac{c}{2} + U \right) c S(\omega, U) d\omega = \frac{1}{2} c_0^2 S(\omega, 0) d\omega,$$

где $S(\omega, U), S(\omega, 0)$ — спектры волн на течении и при $U = 0$ соответственно. Так как частота инвариантна, получим выражение для спектра волн на течении $S(\omega, U)$ через спектр на неподвижной воде $S(\omega, 0)$:

$$S(\omega, U) = \frac{c_0^2}{\left(\frac{c}{2} + U \right) c} S(\omega, 0).$$

Используя (5.4), преобразуем выражение для спектра волн на течении к более удобной для расчетов форме

$$S(\omega, U) =$$

$$= 4S(\omega, 0) \left[1 + \left(1 + \frac{4U\omega}{g} \right)^{1/2} \right]^{-1} \left[\left(1 + \frac{4U\omega}{g} \right) + \left(1 + \frac{4U\omega}{g} \right)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (5.8)$$

В [9] при расчетах $S(\omega, U)$ спектр волн, невозмущенный течениями, давался в форме Китайгородского-Пирсона-Маковица

$$S(\omega, 0) = A \omega^{-5} \exp \left[-0,74 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^4 \right],$$

где $A = 8,1 \cdot 10^{-3}$, $\omega_0 = \frac{g}{V}$, V – средняя скорость ветра.

Пример расчета изменения спектров по (5.8) показан на рис.5.4.

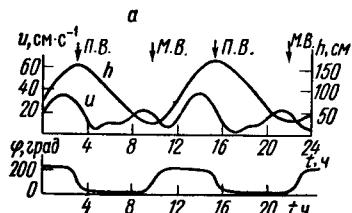
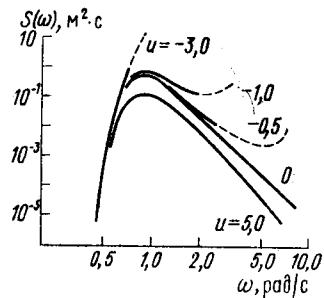


Рис.5.4. Пример расчета изменения спектров на течении по формуле (5.8). Скорость ветра 10 м/с, скорость течения U указана в м/с. Знак минус соответствует встречному течению, плюс – спутному [12]

Рис.5.5. График данных суточной станции наблюдений над течением:
а) зависимость модуля скорости течения U и высоты уровня h от времени; б) зависимость направления течения φ от времени.
П.В. – полная вода, М.В. – малая вода

В [9] получены также формулы для спектра наклонов и спектров волновых чисел при трансформации волн на неоднородных течениях.

Авторами было проведено исследование влияния приливных течений на изменение спектров ветровых волн [10]. Измерение ветрового волнения проводилось в прибрежной зоне, датчики струнного волнографа крепились на неподвижной вехе на расстоянии 200 м от берега на глубине 5,5 м. Измерение скоростей приливных течений проводилось с борта сейнера вертушками типа БПВ-2 и ГР-42 на нескольких станциях вдоль пролива. Было установлено, что скорость течения возрастает при распространении приливной волны вдоль залива. Между временем полной воды и временем максимальной скорости приливного течения существует сдвиг, равный примерно 1–2 ч. Максимальная скорость в фазе прилива больше максимальной скорости при отливе. На рис.5.5 приведены графики модуля скорости, ее направления и уровня, измеренных на суточной станции. Одновременно с измерениями ветрового волнения выполнялись круглосуточные регистрации колебаний уровня воды и профили средней скорости ветра над поверхностью моря. Измерение скоростей течений показало, что они по абсолютной величине невелики, поэтому могут вызывать изменения только относительно

Изменение во времени показателя n , определяющего крутизну спектральной плотности на частотах, выше частоты максимума. Время малой воды – 10.20, время полной воды – 15.50.

Таблица 5.1.

n	5,0	4,0	3,4	3,6	5,2	4,8	5,5	4,5
Время наблюдения, ч	7.30	8.00	10.30	11.40	12.40	13.30	15.40	18.30

высокочастотной части спектра, для которой фазовая скорость спектральных составляющих имеет порядок скорости течения. Пример изменения спектров на приливном течении приведен на рис.5.6. Спектральные плотности $S(\omega)$ в интервале от частоты максимума ω_0 до $\omega = 9$ рад/с аппроксимировались формулой $S(\omega) \approx \omega^{-n}$. В табл.5.1 приведены значения показателя n , полученные в один из дней наблюдений, в течение которого ветер был практически неизменным по величине и направлению. Показатель n изменяется, величина его изменения выходит за пределы ошибок. Наибольшее изменение n происходит, когда волны распространяются на встречном течении (интервал времени около малой воды). Полученные спектры ветрового волнения были объединены в две группы: в первую вошли спектры, полученные на встречном течении, во вторую – спектры, полученные на спутном течении. В группы отбирались спектры волн на максимальных течениях. Для каждой группы был определен средний показатель n , характеризующий крутизну спектра на частотах, больших частоты максимума. На встречном течении $n = 3,3 \pm 0,2$, на спутном – $n = 5,1 \pm 0,2$. Изменение показателя на приливных течениях согласуется с изменением крутизны спектра, следующим из (5.8). Исследование изменчивости ветровых волн под действием приливных течений проводилось в [11; 12; 13] и ряде других работ.

Взаимодействие волн и течений может создавать гигантские волны, опасные даже для современных судов. Особую опасность представляет район Индийского океана между Ист-Лондоном и Дурбаном [15; 16]. Агулья-сово течение, взаимодействуя со штормовыми волнами, вызванными юго-западными ветрами, приводит к обра-

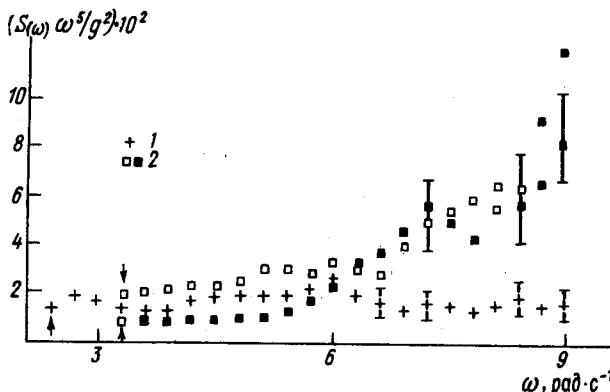


Рис.5.6. Спектры ветрового волнения на приливных течениях: 1 – на спутном течении, 2 – на встречном течении. Стрелкой обозначена величина максимума спектра. Вертикальные отрезки обозначают 90 %-ные доверительные интервалы

зованию особо крутых и высоких волн. Эти волны имели у моряков прошлого и начале этого веков специальное название – кейпроллеры, сейчас волны этого района называют "freak waves" – "уродливые, или ненормальные, волны". Однако эта ненормальность имеет простое научное объяснение.

§ 5.3. Лабораторные исследования регулярных волн на течении

Рассмотрим более подробно результаты экспериментов по распространению волн на течениях, проведенных одним из авторов совместно с А.Д.Розенбергом [16]. В этих экспериментах изучалось распространение регулярных гравитационно-капиллярных волн на однородных и плавно неоднородных вдоль направления распространения волн течениях и явление блокировки. Опыты проводились в стеклянном лотке длиной 670 см, высотой 40 см и шириной 20 см. Волнопродуктор генерировал плоские синусоидальные волны с частотой от 2 до 11 Гц с начальной амплитудой от 0,1 до 10 мм. Импульсный манипулятор, включенный в цепь питания волнопродуктора, позволял генерировать волновые пакеты из 3–10 колебаний основной частоты. Для измерения параметров волн использовалась система электродных волнографов. Профили средней скорости измерялись микровертушками Х-6, скорость поверхности течения – при помощи миниатюрных пенопластовых шариков. Пульсации скорости измерялись термоанемометром. Измерения проводились в трех режимах: на спокойной воде ($U = 0$), на постоянном течении, скорость которого менялась вдоль лотка. Скорость

$U(x)$ изменялась при изменении площади поперечного сечения лотка. Измерения показали, что изменением скорости течения с глубиной в пределах волнового слоя можно пренебречь. В большинстве экспериментов пространственный масштаб изменения скорости течения был много больше длины волны. Это позволяет использовать адиабатическое приближение для волн на отдельных участках течения. Изменяя положение волнопродуктора относительно лотка, можно было создавать волны на спутном и встречном течениях. Групповая скорость может быть получена из временной задержки огибающей волнового пакета, фазовая скорость – по величине фазового сдвига между записями возвышений поверхности двух волнографов, расположенных на расстоянии, соизмеримом с длиной волны. Для повышения точности измерений один из датчиков перемещался, при этом фиксировался момент изменения фазы на 180° на стrobоскопическом осциллографе или с помощью фильтра Лиссажу.

Измерения показывают, что соотношение (5.5) хорошо выполняется для синусоидальных волн на постоянных спутных или встречных течениях (рис.5.7, а). При распространении волн на плавно неоднородном течении измерения хорошо согласуются с расчетами, проведенными в адиабатическом приближении. На рис. 5.7, б приведены данные об изменении длин волн разных частот, распространяющихся из области спокойной воды на встречное течение. Величина групповой скорости гравитационно-капиллярных волн на течении скоростью U равна

$$c_g = U + \frac{g + \frac{3a}{\rho}}{2(gk + \frac{a}{\rho}k^{3/2})} k^2$$

Пример измерения и расчетов c_g показан на рис.5.8. Характерным свойством зависимости c_g от частоты является наличие минимума. С увеличением скорости встречного течения величина минимума групповой скорости уменьшается. Вследствие капиллярности на встречном неоднородном течении более высокочастотные волны движутся с большей групповой скоростью, чем низкочастотные (рис.5.8, б).

При учете капиллярности (5.1) преобразуется:

$$(gk + \frac{a}{\rho}k^{3/2})^{1/2} + U(x)k = \omega_0 = \text{const.} \quad (5.9)$$

Семейство кривых, рассчитанных по этой формуле, приведено на рис.5.9, а. Цифры у кривых соответствуют величине скорости в см/с. Положительным значениям частоты соответствуют волны, распространяющиеся против течения, а отрицательным – по течению. Пусть волновой пакет с частотой $F = 1,5$ Гц распространяется на встречном течении, скорость которого плавно растет. Из частоты $F = 1,5$ Гц изображена на рис.5.9, а пунктирной линией. Начальному положению при $U = 0$ (на рисунке не показано) соответствует $\lambda_0 = 70$ см. По мере изменения скорости течения переходим с одной дисперсионной кривой на другую.

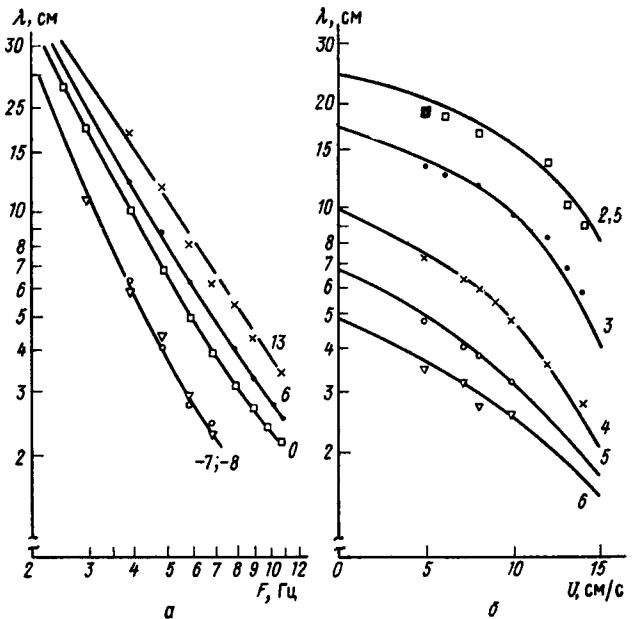


Рис.5.7. Зависимость длин волн от частоты и скорости течений для однородного (а) и неоднородного (б) течений: а) скорость в см/с указана цифрами у кривых, б) частота в Гц нанесена на кривых

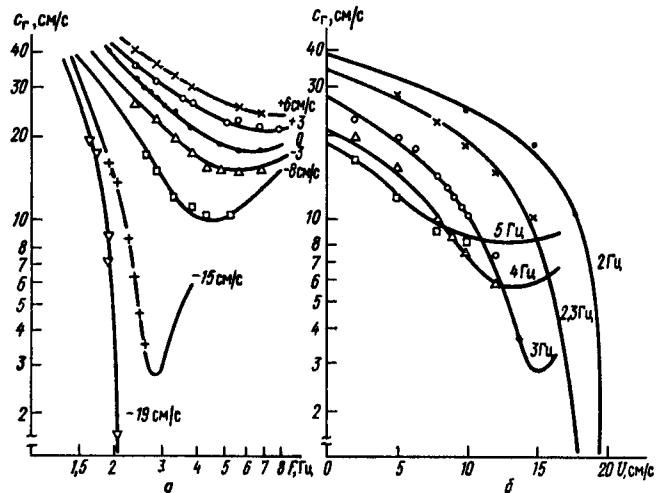


Рис.5.8. Зависимость групповой скорости волн от частоты и скорости течения для однородного (а) и неоднородного (б) течений: а) скорость в см/с указана на рисунке, б) частота в Гц нанесена у кривых

- 166 -

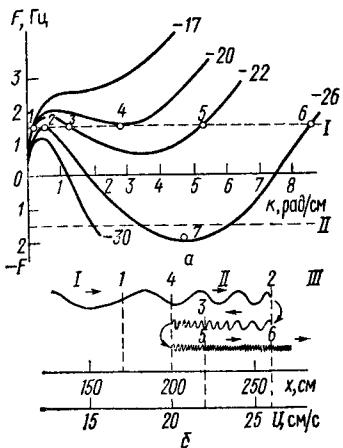


Рис.5.9. а) Дисперсионные кривые волн на встречном течении. Цифры у кривых обозначают скорость в см/с. Пунктир I – изочастота 1,5 Гц. Пунктир II – изочастота -1,5 Гц. 2,4,7 – точки блокировки; б) схематически поясняет трансформацию длин и направлений распространения волн при линейном законе изменения скорости встреч-

ного течения с расстоянием. Видно наличие трех областей. В области I ($|U| < 20$ см/с) существует только прямая волна, соответствующая гравитационной ветви. В области III, где $|U| > 26$ см/с, существует только прямая волна, соответствующая капиллярной ветви. В области II распространяются две прямые и одна отраженная волны. При переходе из области $U = 0$ в область III длина волн изменяется более чем на 2 порядка. Рассматривая последовательное положение точек пересечения изолинии $F = -1,5$ Гц (пунктирная кривая II) с дисперсионными кривыми, можно получить картину трансформации длин волн на спутном течении. В данном случае получаем одну точку блокировки 7. На рис.5.10 приведена фотография волн на встречном течении в области блокировки. Хорошо видны области I и III, область II мала и не видна.

На рис.5.11 представлены зависимости длин волн от скорости течения для нескольких фиксированных частот, полученные в адиабатическом приближении для линейного изменения скорости. Область скоростей $15 \text{ см/с} < U < 20 \text{ см/с}$ на рис.5.11 не изображена. Линии блокировки (геометрические места точек блокировки) нанесены пунктирующими линиями. Линии I,II соответствуют блокировке на встреч-

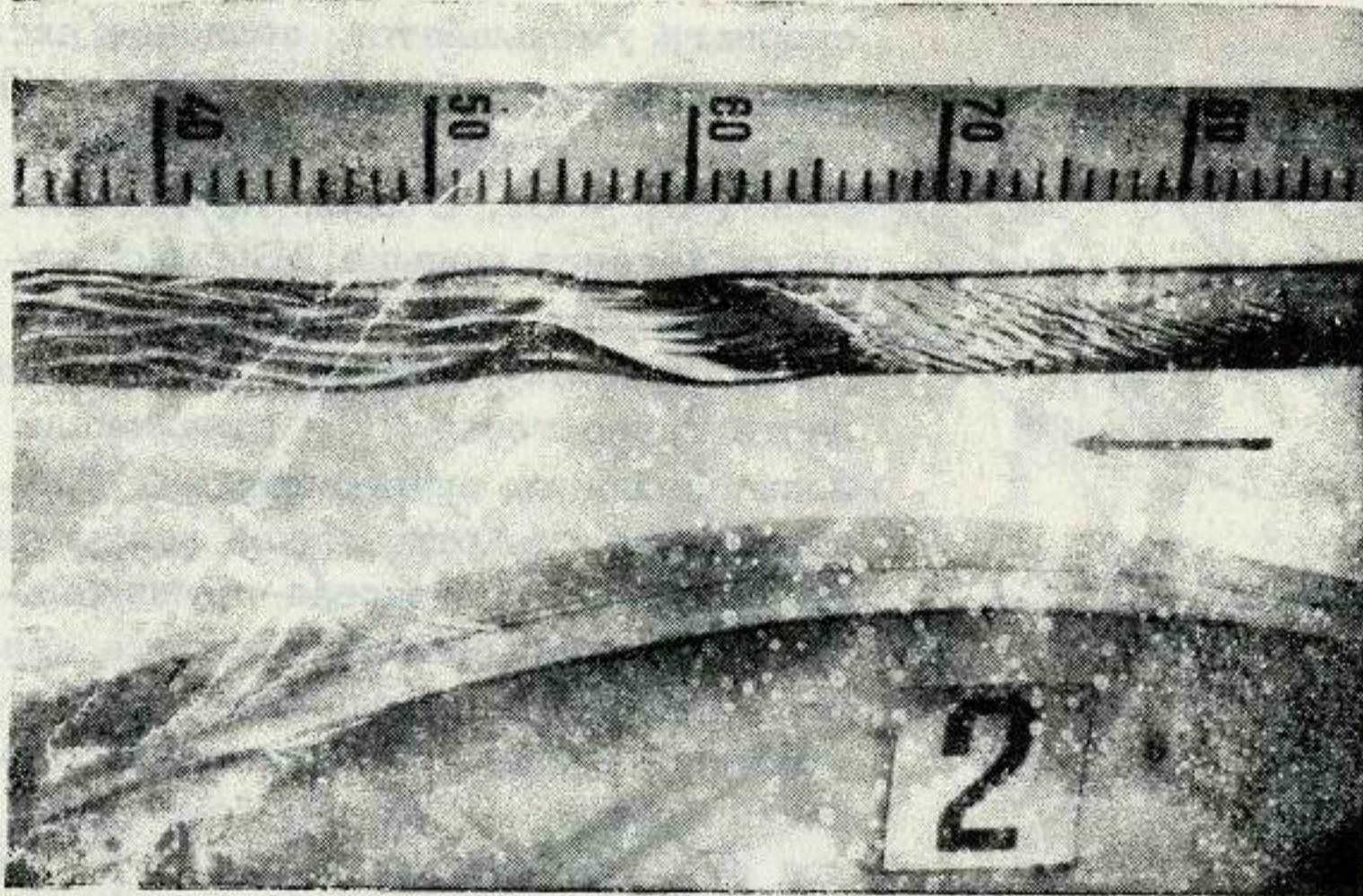


Рис.5.10. Фотография волн в области блокировки. Волнопродуктор размещен слева. Направление скорости указано стрелкой

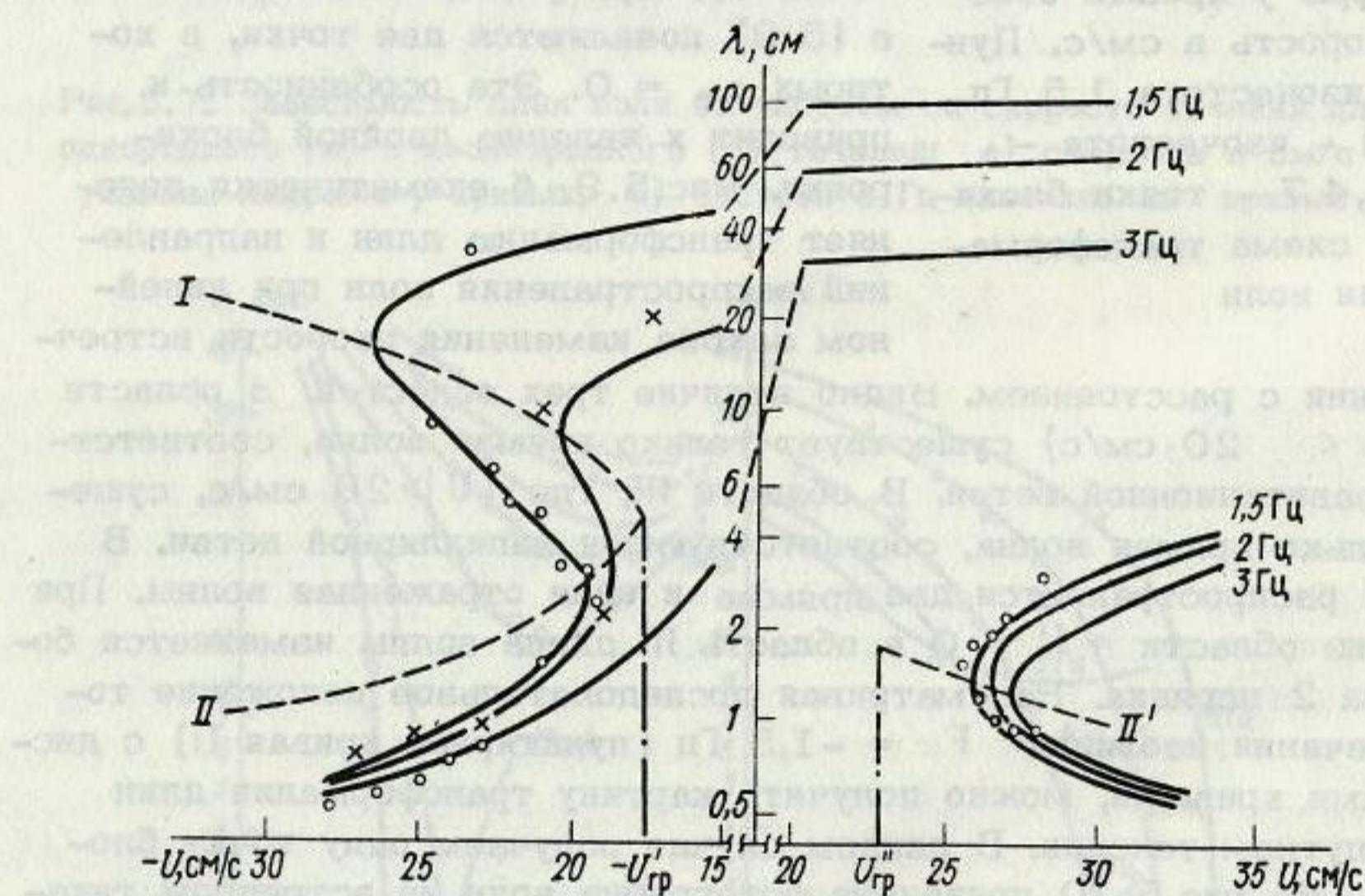


Рис.5.11. Расчетные зависимости $\lambda(U)$ для частот 1,5; 2,0; 3,0 Гц. I, II, II' – линии блокировки. Экспериментальные значения: $\text{Г} = 1,5 \text{ Гц}$ (•), 2 Гц (X), $1,7 \text{ Гц}$ (o)

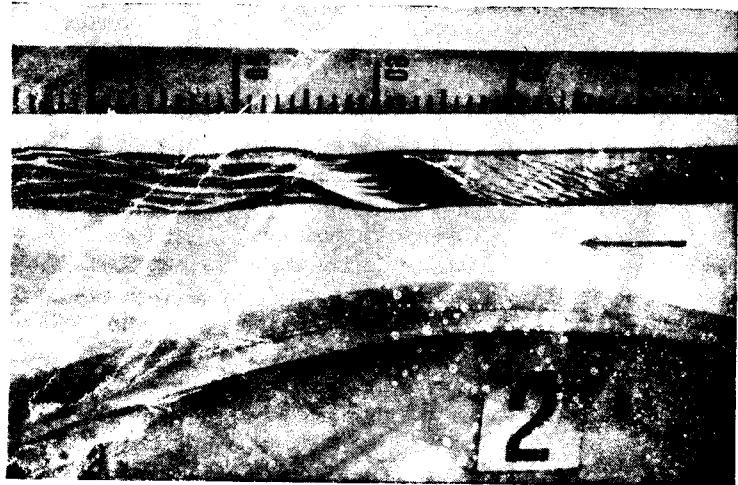


Рис.5.10. Фотография волн в области блокировки. Волнопродуктор размещён слева. Направление скорости указано стрелкой

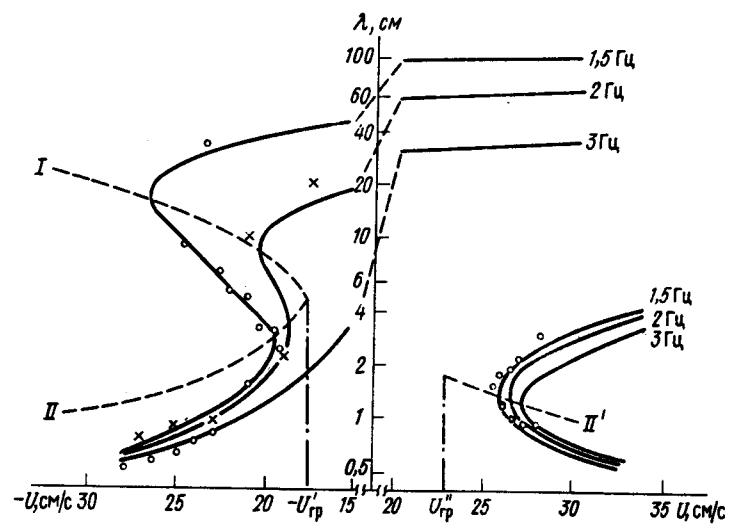


Рис.5.11. Расчетные зависимости $\lambda(U)$ для частот 1,5; 2,0; 3,0 Гц. I, II, II' – линии блокировки. Экспериментальные значения: 1,5 Гц (•), 2 Гц (X), 1,7 Гц (o)

ном, II' – на спутном течении соответственно. На встречном течении при уменьшении скорости и увеличении частоты волны уменьшается ширина области двойной блокировки. Значения $F = 2,65$ Гц и $U = -17,8$ см/с являются предельными: волны с частотой выше 2,65 Гц не блокируются вообще, скорость меньше 17,8 см/с не блокирует никакую частоту.

Таким образом, учет в дисперсионном соотношении (5.9) капиллярности приводит к существенному усложнению явления.

Формула (5.7) не описывает изменение амплитуды волны в точке блокировки, так как при $U = \frac{c}{2}$ отношение $\frac{a}{a_0}$ неограничен-

но возрастает. Соотношения (5.5) и (5.7) описывают изменение амплитуды падающей волны без учета эффекта отражения. Изменение волн в точке блокировки с учетом эффекта отражения изучалось в [1; 2; 3]. Если градиент скорости встречного течения равен $\frac{dU}{dx}$, то вблизи точки блокировки изменение амплитуды описывается функцией $\Phi(z)$ от аргумента

$$z = \left(\frac{4 \left| \frac{dU}{dx} \right|}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} k_b (x - x_b),$$

где x_b – координата точки блокировки, k_b – волновое число в ней. В точке сшивки (5.7) и $\Phi(z)$ амплитуда максимальна:

$$a = a_{\max} \approx 2 a_0 \left(\frac{\omega}{4 \left| \frac{dU}{dx} \right|} \right)^{1/8}.$$

В области блокировки вязкое затухание волн может оказать существенное влияние на изменение их амплитуды. На встречном течении действуют два механизма, определяющих изменение амплитуды волны. Вязкое затухание, возрастающее при увеличении волнового числа, приводит к уменьшению амплитуды волн; с другой стороны, (5.7) дает увеличение амплитуды волн на течении. При учете молекулярной вязкости (2.45) декремент затухания гравитационных волн на встречном течении с градиентом скорости $\frac{dU}{dx}$ равен

$$\gamma = \int_{x_b}^0 \frac{2 \mu k^2}{c_r} dx = - \frac{\mu k_0^2 c_0}{\rho} \left\{ \frac{dU}{dx} \right\}^{-1} \left[1 - \frac{2}{1 + (1 + \frac{4U}{c_0})^{1/2}} \right].$$

Как следует из этого выражения, затухание максимально в точке блокировки и больше затухания на спокойной воде в 15 раз. На рис.5.12 приведены результаты измерения высоты волн различной частоты в окрестности точки блокировки. В низкочастотном участке

рассматриваемого диапазона ($F < 2,5$ Гц) на встречном течении наблюдается рост амплитуд волн до значений (3–4) a_0 вблизи точки блокировки. Иная картина имеет место для более высоких частот, где блокировка невозможна: для частот выше 4 Гц наблюдается быстрое затухание волн, обусловленное ростом волнового числа и уменьшением групповой скорости.

Таким образом, в окрестности точки блокировки для низких частот изменение амплитуды волн определяется в основном взаимодействием волн с течением, на более высоких частотах преобладает диссипация. Действие двух различных механизмов позволяет объяснить значительный разброс экспериментальных значений для волн на встречных течениях, отмеченный, например, в [8]. Указанные механизмы приводят к изменению формы и спектрального состава волнового пакета, распространяющегося со спокойной воды в область блокировки. На рис. 5.13 показано изменение волнового пакета и его спектра на различных расстояниях от волнопродуктора.

На рисунке показаны также профиль скорости течения $U(x)$ и зависимость граничной частоты $F_{\text{гр}}$, на которой происходит блокировка, от координаты x . В случае распространения волнового пакета эффект блокировки выглядит следующим образом: по достижении места, где выполняется условие блокировки для данной спектральной составляющей $F_{\text{гр}}$, она останавливается и отражается; остальные составляющие продолжают движение до очередной блокировки. Такая локальная блокировка отдельных спектральных составляющих приводит к изменению спектрального состава (происходит сдвиг в сторону низких частот). Картину осложняет также разное затухание составляющих спектра. На рис. 5.13 хорошо видно понижение центральной частоты спектра исходного пакета примерно на 20 % после прохождения им области блокировки его энергонесущих составляющих.

§ 5.4. Генерация волн на течениях

Наряду с процессом распространения, или трансформации, волн на неоднородном течении может иметь место генерация волн на поверхности движущегося потока. Это явление может иметь место в некоторых районах Мирового океана, охваченных течениями, на реках

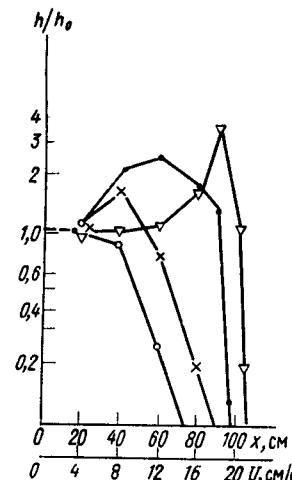


Рис. 5.12. Изменение относительной высоты волн на встречном линейно растущем течении: 2 Гц (∇), 3 Гц (-), 4 Гц (x).

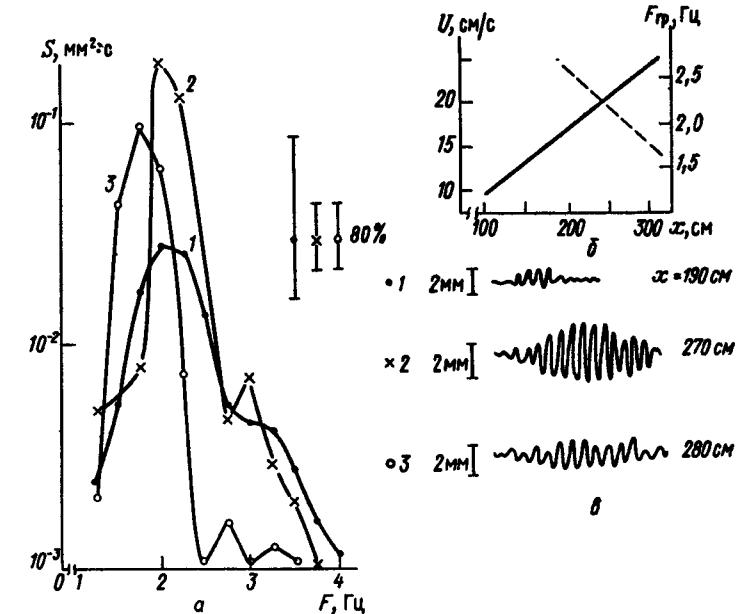


Рис. 5.13. Спектры (а) и волнограммы (в) на разных удалениях от волнопродуктора: б) зависимость $U(x)$ (сплошная кривая) и $F_{\text{гр}}(x)$ (пунктир). Частота $F = 2,1$ Гц

и водохранилищах. Наблюдения ряда авторов подтверждают, что процесс генерации волн на поверхности потока отличается от процесса трансформации волн на неоднородных течениях [10; 11; 12; 17; 18; 19].

При распространении волн на неоднородном вдоль направления их скорости течения период или частота волн в неподвижной системе координат остаются неизменными, амплитуда и длина волн изменяются. Этот процесс хорошо известен как по наблюдениям, так и в лабораторных условиях.

В случае генерации волн на течении характер изменения волновых параметров оказывается другим. Прежде всего частота поверхностных волн изменяется. На спутном течении частота генерируемых волн возрастает, на встречном — уменьшается. На спутном течении как длина, так и амплитуда волн несколько уменьшаются, на встречном наблюдаются возрастание длины и амплитуды. В природных условиях отделить процесс генерации волн на течении от их трансформации бывает трудно. Видимо, поэтому работы, в которых рассматривается процесс генерации волн на течениях, немногочисленны [19]. В лабораторных условиях процесс генерации волн на течениях рассматривался в ряде работ [18–26].

Эксперимент по генерации волн на потоке авторами был поставлен в гидродинамическом лотке [22]. Для создания ветровых волн лоток был оборудован съемной крышкой и вентиляционной установкой. Используемая часть лотка имела следующие размеры: высота 0,5 м; ширина 0,6 м, длина 7,5 м. Скорость течения измерялась микропертушкой Х-10, скорость воздушного потока - нестандартной микропертушкой, колебания водной поверхности - струнным волнографом. Для измерения длины волн использовались кино- и фотосъемка. Измерения скорости течения показали, что на глубинах от 1 до 20 см скорость неизменна, т.е. в пределах волнового слоя скорость практически не зависит от глубины. Эксперименты проводились при средних скоростях течения от -45 см/с до +14 см/с. Скорость воздушного потока над водной поверхностью, изменяющаяся от 2,3 до 6,2 м/с, удовлетворяла логарифмической зависимости. На рис.5.14 приведены экспериментальные значения средних высот, длин и периодов волн в зависимости от скорости течения для двух значений скорости ветра. При неизменной скорости ветра средний период волн \bar{T} зависит от скорости течения. Зависимость \bar{T} от скорости течения близка к линейной, наклон прямой, определяющей эту зависимость, различен для спутного и встречного течений. Влияние встречного течения на все параметры волн является более существенным, чем спутного.

Наблюдения показывают, что на встречном течении происходит образование волн только с периодом, не меньшим некоторого критического значения T_k , зависящего от скорости течения. Из дисперсионного соотношения для гравитационных волн $\omega = (gk)^{1/2} + U$ на потоке скоростью U можно получить критическое значение периода $T_k = -\frac{8\pi}{g} \frac{U}{U}$. При $T < T_k$ дисперсионное уравнение, раз-

решенное относительно k , не имеет действительных корней. Экспериментальное значение минимальных периодов хорошо согласуется со значениями T_k .

По осциллограммам и кинограммам были построены гистограммы распределения высот и длин волн. На начальной стадии развития ветровых волн кривая распределения высот волн отличается от распределения Рэлея меньшим разнообразием высот волн и большей симметрией [42, гл. IV].

Течения существенно изменяют функции распределения высот и длин волн. На рис.5.15 показаны гистограммы распределения волн и длин ветровых волн на встречном течении и без него при неизменной скорости ветра. На встречном течении уменьшается доля высот и длин волн, превышающих средние значения. Значительно изменяются коэффициенты вариации и асимметрии [22]. Наблюдения в природе также показывают, что течения приводят к значительному изменению функций распределения высот и периодов волн [11].

Таким образом, статистические характеристики ветровых волн, генерируемых на течениях, зависят от величины его скорости. Для описания зависимости средней высоты волн \bar{h} , средней длины волн $\bar{\lambda}$ от скорости течения введем коэффициент гидродинамического контрас-

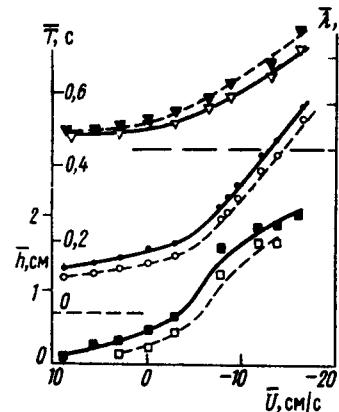


Рис. 5.14. Зависимость $\bar{\lambda}(\nabla, \bullet)$, $\bar{h}(0, \circ)$, $\bar{h}(0, \blacksquare)$ от скорости течения U . Скорость ветра $V = 3,2$ см/с и $3,85$ см/с соответственно

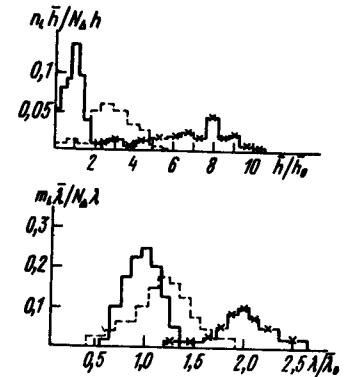


Рис.5.15. Гистограммы распределения высот и длин волн при скорости ветра $3,2$ м/с и скоростях течения равных: (—) $U=0$ (---) $U = -3$ см/с, (-x-) $U = -9,2$ см/с

та

$$R_h = \frac{\bar{h}(\bar{U}, \bar{V})}{\bar{h}(0, \bar{V})},$$

$$R_\lambda = \frac{\bar{\lambda}(\bar{U}, \bar{V})}{\bar{\lambda}(0, \bar{V})},$$

где $\bar{h}(\bar{U}, \bar{V})$, $\bar{\lambda}(\bar{U}, \bar{V})$ - средняя высота и средняя длина волн, генерируемых на течении со средней скоростью \bar{U} при средней скорости ветра \bar{V} ; $\bar{h}(0, \bar{V})$, $\bar{\lambda}(0, \bar{V})$ - средняя высота и средняя длина волн, генерируемых ветром той же скорости и при том же разгоне, но без течения. Для контрастов R_h и R_λ получены следующие выражения:

$$\lg R_h = -1,8 \frac{\bar{U}}{\bar{c}_0},$$

$$\lg R_\lambda = -1,2 \frac{\bar{U}}{\bar{c}_0},$$

где \bar{c}_0 - средняя фазовая скорость волн без течения. Разные величины коэффициентов в зависимостях R_λ и R_h от $\frac{U}{\bar{c}_0}$ указывают на более

сильную зависимость высоты волн от скорости течения, чем длины. Наличие течений также сказывается на форме зависимости безраз-

мерных параметров спектра от безразмерных волнообразующих факторов. Например, зависимость безразмерной частоты максимума спектра ветровых волн без течений в начальной стадии генерации ветровых волн имеет вид [43, гл. 1У; 37, гл. 1У]

$$\frac{\omega_0 V_*}{g} = 5,6 \left(\frac{g X}{V_*^2} \right)^{-0,29} . \quad (5.10)$$

Безразмерный разгон лежит в интервале $5 \leq \frac{g X}{V_*^2} \leq 300$. На

спутном течении при средней скорости течения $U = 10$ см/с коэффициенты в этой формуле изменяются и она принимает следующий вид:

$$\frac{\omega_0 V_*}{g} = 8,0 \left(\frac{g X}{V_*^2} \right)^{-0,3} .$$

Различие между первой и второй зависимостью оценивалось на основе критерия Фишера при уровне значимости 0,05. Выполнимость этого критерия позволяет утверждать, что спутное течение приводит к изменению коэффициентов в зависимости (5.10).

Из того факта, что при одинаковой скорости ветра и одинаковом разгоне на встречном течении высоты волн имеют большие значения, чем без течения или на спутном течении, следует, что скорость роста волн на встречном течении выше, чем без него или на спутном течении.

Специальные эксперименты, в которых измерялось ветровое волнение в его развитии по разгону, показали, что скорость роста спектральных компонент ветрового волнения зависит от скорости течения [20; 21]. На встречном течении скорость роста спектральных компонент ветрового волнения по разгону выше, чем на спокойной воде при той же скорости ветра. На спутном течении, наоборот, скорость роста спектральных компонент меньше. Как без течения, так и на течении развитие компонент по разгону происходит по экспоненциальному закону:

$$S(\omega, X_2) = S(\omega, X_1) \exp [\Delta (X_2 - X_1)],$$

где $S(\omega, X_2)$, $S(\omega, X_1)$ — спектр возвышений поверхности при разгонах X_2 и X_1 соответственно. Влияние течения сказывается в изменении параметра Δ . Изменение скорости роста спектральных компонент на течении может быть объяснено следующим образом. Так как величина динамической скорости воздушного потока V_* не изменяется, можно считать, что поток импульса к волнам не изменяется. На спутном потоке происходит возрастание групповой скорости волн и уменьшение времени взаимодействия волн с воздушным потоком при неизменном разгоне. Это и приводит к уменьшению роста спектральных компонент на спутном потоке. На встречном течении наблюдается противоположная картина: групповая ско-

рость волн уменьшается, растет время взаимодействия волн с воздушным потоком, увеличивается рост спектральных компонент. В табл. 5.2 приведены значения параметра Δ для ряда спектральных компонент на спутном потоке и без него. При генерации ветровых волн на течении наблюдается изменение спектров ветровых волн. На спутном течении крутизна спектральной функции на частоте выше максимума спектра уменьшается по сравнению с крутизной спектральной функции без течения. На встречном течении крутизна спектральной функции возрастает. На частотах, больших частоты спектрального максимума, спектр аппроксимировался формулой $S(\omega) \sim \omega^{-n}$. Показатель n определялся методом наименьших квадратов, проводилось осреднение по ряду измерений. Значения n , полученные по осредненным данным измерений в двух близких точках (с разгонами 3,0 и 3,7 м), приведены в табл. 5.3. Характер изменения высокочастотной части спектров ветровых волн при генерациях на течениях противоположен изменению спектров волн при их трансформации на неоднородном течении, описываемому формулой (5.8). Однако это не должно вызывать удивление, так как следует различать два разных физических явления. Одно состоит в изменении спектра волн при их распространении на неоднородном течении. Другое заключается в генерации волн на однородном течении.

Пренебрегая изменением волнового числа на течении, особенности спектров волн могут быть объяснены различным изменением частоты спектральных компонент из-за допплеровского смещения $k_0 U$. На неподвижной воде частота прохождения определенной фазы волны через датчик совпадает с угловой скоростью ω_0 вращения частицы воды по волновой орбите. На однородном течении со скоростью U частота ω , фиксируемая неподвижным датчиком, равна (2.55)

$$\omega = \omega_0 + U k_0 .$$

Для гравитационных волн на глубокой воде это выражение принимает вид

$$\omega = \omega_0 + \frac{U \omega_0^2}{g} . \quad (5.11)$$

Рассмотрим связное с таким изменением частоты изменение спектра волн. Зададим спектр ветровых волн на спокойной воде в форме (3.23).

$$S(\omega_0) = A \omega_0^{-s} \exp \{ -B \omega_0^{-4} \}, \quad (5.12)$$

где A , B , s — константы.

Выразив ω_0 через ω из уравнения (5.11) и подставив в (5.12), получим выражение для спектра волн на течении со скоростью U :

$$S(\omega, U) = A \left(\frac{g}{2U} \right)^{-s} \left[\left(1 + \frac{4U\omega}{g} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]^{-s} \cdot \exp \left\{ - \frac{16U^4 B}{g^4} \left[\left(1 + \frac{4U\omega}{g} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]^{-4} \right\} . \quad (5.13)$$

Т а б л и ц а 5.2

Скорость роста спектральных компонент Δ при различных ветровых режимах на спокойной воде ($U = 0$)
и на спутном течении ($U = 10$ см/с)

V_* , см/с	35		46			65			88			90			
ω , рад/с	36	39	30	36	39	24	27	30	23,3	25,9	28,5	15,5	18,6	21,7	24
$\Delta \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$, $U = 0$	20	20	21	28	27	13	17,4	23	20	26	38	17,5	19	18	19
$\Delta \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$, $U = 10 \text{ см/с}$	15	17,5	9	12	13	9	11	18	18	14	18,5	8	13	16,5	19

Таблица 5.2

Скорость роста спектральных компонент Δ при различных ветровых режимах на спокойной воде ($U = 0$) и на спутном течении ($U = 10 \text{ см/с}$)

V_* , см/с	35	46	65	88	90
ω , рад/с	36	39	30	36	39
$\Delta \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$, $U = 0$	20	20	21	28	27
$\Delta \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$, $U = 10 \text{ см/с}$	15	17,5	9	12	13

Таблица 5.3

Зависимость показателя n от динамической скорости воздушного потока V_* на спутном потоке (скорость течения $U = 10 \text{ см/с}$) и без него ($U = 0$); δn – среднеквадратичное отклонение n

V_* , см/с	35	46	65	83	90
$U = 0$	10,8	9,8	9,0	6,2	5,0
	0,30	0,36	0,33	0,25	0,22
$U = 10 \text{ см/с}$	8,0	7,6	5,5	4,8	4,5
	0,32	0,23	0,26	0,25	0,21

Расчеты по (5.12) показывают, что на спутном течении максимум в спектрах ветровых волн смещается на более высокие частоты, а высокочастотная ветвь проходит более полого. На встречном течении максимум спектра смещается в сторону более низких частот и увеличивается крутизна высокочастотной части спектра. Такое изменение согласуется с изложенными выше результатами измерений спектров $S(\omega, U)$. Рис.5.16 поясняет различный характер изменения высокочастотной части спектров ветровых волн при их трансформации на неоднородном течении (расчет по формуле (5.8)) и при генерации на течении (расчет по (5.13)). При получении формулы (5.13) мы считали волновое число неизменным. Однако оно изменяется (на спутном течении возрастает, на встречном уменьшается), но изменяется таким образом, что еще усиливает эффект изменения спектра вследствие смещения спектральных компонент. Спектр ветровых волн на течениях исследовался в [24]. Авторы предположили, что в интервале равновесия существует универсальный спектр волновых чисел (3.26) $S(k) = \beta k^3$. Они считали, что и при наличии течений предельная форма спектра определяется условием устойчивости водной поверхности. Частотный спектр $S(\omega)$ находили из $S(k)$ с использованием дисперсионного соотношения и некоторых общих форм функций углового распределения $G(\omega, \theta)$. Для относительно малых скоростей течения ($\frac{\omega U}{g} < 1$) частотный спектр в интервале равновесия принимает вид

$$S(\omega, U) = \alpha_p g^2 \omega^n J\left(\frac{\omega U}{g}, \gamma\right), \quad (5.14)$$

где $\eta = -5$, γ – угол между скоростью течения и направлением распространения волн

$$J\left(\frac{\omega U}{g}, \gamma\right) \approx 1 + 3 p \frac{\omega U}{g} + b \left(\frac{\omega U}{g}\right)^2,$$

$$p = \int_{-\pi}^{\pi} G(\omega, \theta) \cos(\theta - \gamma) d\theta,$$

$$b = \int_{-\pi}^{\pi} G(\omega, \theta) \cos^2(\theta - \gamma) d\theta.$$

Из (5.14) следует, что спектр $S(\omega, U)$ в интервале равновесия уже не является степенной функцией частоты ω . При $\cos \gamma < 0$ (встречное течение) имеет место как бы уменьшение показателя степени ($\eta < -5$), при $\cos \gamma > 0$, т.е. на спутном течении, показатель степени увеличивается: $\eta > -5$. Для мелкого моря $S(\omega) \sim \omega^{-3}$.

Развитие ветрового волнения неразрывно связано с формированием ветрового течения, скорость которого на поверхности составляет 2–3 % от скорости ветра. Это течение способно вызвать изменение спектра в его высокочастотной части или всего спектра ветрового волнения на начальной стадии генерации волн, когда скорость течения соизмерима со скоростью энергонесущих спектральных составляющих.

Согласно [18, гл. III] спектр в интервале равновесия в системе координат, движущейся со скоростью течения U , определяется законом Филлипса (3.25). Относительно неподвижной системы координат $S(\omega) \sim \omega^{-4.3}$.

Все вышесказанное говорит о том, что закон Филлипса (3.25) для формы спектра в равновесной области в общем случае несправедлив. Поверхностные течения стороннего происхождения приводят к значительным изменениям спектра. Поверхностные дрейфовые течения также приводят к некоторому изменению формы спектра.

§ 5.5. Изменение поверхностного волнения под действием приповерхностной турбулентности

Интенсивность поверхностных волн зависит от турбулентных пульсаций в приповерхностном слое. При определенных условиях турбулент-

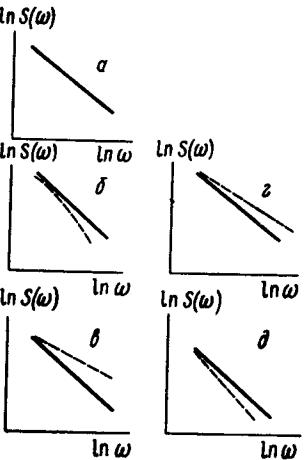


Рис. 5.16. (а) высокочастотная ветвь спектра без течения. То же на спутном (б) и встречном (в) течениях согласно расчету по формуле (5.8). (г, д) – высокочастотные ветви спектров, рассчитанных по (5.13) при генерации ветровых волн на спутном и встречном течениях соответственно

ность может вызывать значительное затухание поверхностных волн. Следуя [25], рассмотрим действие сильной турбулентности на поверхностное волнение. Под сильной турбулентностью понимается турбулентность, энергия которой больше энергии волны. Для естественной морской турбулентности справедливо обратное соотношение, поэтому она исключается в данной постановке задачи.

Турбулентные пульсации скорости, нормальные поверхности, создают вертикальное перемешивание жидкости, вследствие вертикальной неоднородности волнового поля возникает поток волновой энергии в глубь жидкости, приводящий к затуханию поверхностных волн.

Рассмотрим поверхностную волну длиной λ . В случае отсутствия сильной турбулентности практически вся энергия волнового движения заключена в поверхностном слое толщиной $\frac{\lambda}{2}$, так называемом

волновом слое. Смещение поверхности гравитационной волны удовлетворяет уравнению гармонического осциллятора

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \omega^2 \zeta = 0,$$

где $\omega^2 = gk$. Волновой слой представляет собой консервативную систему, в которой кинетическая энергия периодически переходит в потенциальную.

Пусть теперь, кроме волнового движения, жидкость приводится в турбулентное движение. Вне волнового слоя элементы жидкости участвуют только в турбулентном движении, в волновом слое энергия частиц воды выше, так как они участвуют одновременно в волновом и турбулентном движении. Вертикальные пульсации турбулентной скорости будут приводить к переходу частиц жидкости из волнового слоя вглубь и наоборот. Так как энергия частиц в слое больше, чем вне его, возникает поток волновой энергии из слоя. Энергия волны будет уменьшаться. Консервативность волнового слоя нарушится. Флуктуации горизонтальных составляющих скорости турбулентного движения не нарушают консервативности волнового слоя. Смещение волновой поверхности в этом случае должно удовлетворять уравнению осциллятора с затуханием:

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\zeta}{dt} + \omega^2 \zeta = 0.$$

Коэффициент затухания γ определяется параметрами турбулентности, интенсивностью вертикальных пульсаций скорости и их спектром. Пусть турбулентные пульсации имеют пространственный масштаб L и частоту Ω , а поверхностные волны соответственно масштабы λ и ω . Очевидно, что наиболее эффективный поток волновой энергии из волнового слоя будут создавать пульсации, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\Omega > \omega, \quad L \geq \lambda.$$

Величина коэффициента затухания γ будет зависеть от соотношения частот и длин поверхностной волны и турбулентных пульсаций.

Рассмотрим поток энергии, пронизывающий единичную горизонталь-

ную площадку $d\sigma$, находящуюся на глубине z . Пусть точка A находится на расстоянии $L = \frac{2\pi}{s}$ выше над этой площадкой. Масштаб L соответствует спектральной составляющей турбулентного движения с частотой $\Omega(s)$ и вертикальной пульсации скорости $dW(s)$. Энергия волнового движения в точке A равна $E(z - \frac{2\pi}{s}, t)$. Участвуя одновременно в волновом и турбулентном движении, частица проходит элемент $d\sigma$ — возникает поток энергии, направленный вниз. Элемент A', расположенный симметрично A относительно $d\sigma$, обладает энергией $E(z + \frac{2\pi}{s}, t)$, которая меньше волновой энергии в точке A вследствие затухания волновой энергии с глубиной. Поток энергии, проносимый через площадку $d\sigma$ скоростью $dW(s)$, равен

$$d\Theta d\sigma = dW(s) [E(z - \frac{2\pi}{s}, t) - E(z + \frac{2\pi}{s}, t)] d\sigma.$$

Так как частицы находятся на расстоянии $\frac{2\pi}{s}$ от площадки $d\sigma$,

они пройдут через нее в момент времени $t + \tau$, где τ — время прохождения элементом жидкости расстояния $\frac{2\pi}{s}$. Для нахождения ре-

зультирующего потока энергии Θ через $d\sigma$ необходимо просуммировать по всем элементам $dW(s)$:

$$\Theta d\sigma = \int_0^\infty dW(s) [-E(z + \frac{2\pi}{s}, t) + E(z - \frac{2\pi}{s}, t + \tau)] d\sigma.$$

Скорость турбулентного движения $dW(s)$ выражим через пространственный спектр турбулентности $\varphi(s)$:

$$dW(s) = \varphi^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds. \quad (5.15)$$

Осредним поток энергии по времени Θ , удовлетворяющему условию

$$\frac{2\pi}{\omega} > \Theta > \frac{2\pi}{\Omega},$$

и, используя выражение (5.15), получим осредненный поток энергии, создаваемый всем спектром турбулентности через площадку $d\sigma$:

$$\Theta d\sigma = \int_0^\infty [\bar{E}(z, t) - \bar{E}(z + \frac{2\pi}{s}, t)] \varphi^{+\frac{1}{2}}(s) s^{-\frac{1}{2}} ds d\sigma.$$

Поток волновой энергии из волнового слоя Θ определяет затухание волн. Опуская некоторые преобразования Θ , получим коэффициент затухания волн [25]:

$$\gamma(k) = \frac{k}{2} (\bar{U}^2)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \varphi^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds [1 - e^{-2\pi k/s}].$$

- 180 -

Он определяется интенсивностью турбулентности $(\bar{U}^2)^{\frac{1}{2}}$, ее пространственным спектром $\varphi(s)$ и соотношением масштабов $\frac{k}{s}$ турбулентности и поверхности волны. Мелкомасштабные турбулентные флюктуации ($s \gg k$) не дают вклад в коэффициент затухания, так как $1 - e^{-2\pi k/s} \approx 0$.

Основное затухание волны обеспечивают длинные турбулентные пульсации ($s \ll k$), для которых $1 - e^{-2\pi k/s} \approx 1$. Коэффициент затухания волн вследствие молекулярной вязкости обратно пропорционален квадрату длины волны (см. § 2.9). Полученный коэффициент затухания волн под действием турбулентности обладает более сложной зависимостью от длины поверхности волны.

В [25] получено, что для спектра $\phi(s)$, созданного турбулентной струей, ν изменяется как λ^{-2} для длинных волн и как λ^{-1} для коротких волн.

Подобные соображения о характере воздействия турбулентности на спектр поверхностного волнения позволили получить следующее выражение для гидродинамического контраста [31, гл. 1У]:

$$R = \frac{S[k, (\bar{U}^2)^{\frac{1}{2}}]}{S(k)} \approx [1 - \frac{(\bar{U}^2)^{\frac{1}{2}} L^{-1}}{\nu}],$$

где $S[k, (\bar{U}^2)^{\frac{1}{2}}]$ и $S(k)$ — спектры поверхности волны под действием турбулентности и без нее, ν — коэффициент кинематической вязкости.

Рассмотренный механизм качественно объясняет воздействие турбулентности, созданной кораблем, на поверхностные волны. Это явление известно под названием "аэркальной дорожки", возникающей за движущимся кораблем. Турбулентность, созданная кораблем, оказывает гасящее действие на высокочастотные волны, что и приводит к выглаживанию поверхности.

В [26] описаны эксперименты в аэрогидроканале по воздействию турбулентного потока, созданного заглубленной струей, на ветровое волнение. Поверхностные волны создавались скоростью ветра от 8,3 до 14,5 м/с на высоте 20 см от невозвышенной поверхности воды. Ось струи располагалась на глубинах 10 и 20 см под поверхностью спокойной воды. Измерения проводились на расстоянии 6 м от места истечения струи, где скорость на оси потока в разных опытах была 10 и 25 см/с. Число Рейнольдса, определяемое по скорости потока на оси струи и глубине воды, изменялось от $7 \cdot 10^5$ до $1,5 \cdot 10^6$. Отдельно исследовались случаи чисто ветрового волнения, турбулентного потока и совместного действия волн и потока.

Анализ изменения спектра поверхностных волн $S(\omega)$ под действием турбулентного потока показал, что в основном гасятся высокочастотные составляющие спектра. Сравнение изменения дисперсии скорости по глубине для трех указанных режимов показывает, что происходит перераспределение энергии по глубине. Дисперсия пульса-

ций скорости потока имеет максимум на его оси. При ветровом волнении она убывает с глубиной. При совместном действии ветрового волнения и турбулентного потока наблюдается некоторое возрастание дисперсий пульсаций скорости по сравнению со случаем чисто ветрового волнения на оси потока и некоторое уменьшение в приповерхностном слое (рис.5.17). Характерно, что на этих горизонтах сумма дисперсий пульсаций скорости при ветровом волнении и турбулентном потоке, взятых отдельно, меньше энергии пульсаций скорости при совместном действии волн и потока. Отмеченное перераспределение энергии по глубине и приводит к затуханию волн на поверхности турбулентного потока.

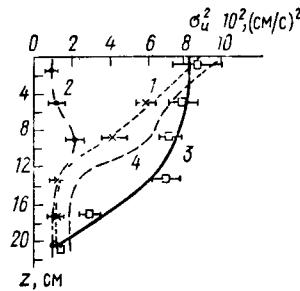


Рис.5.17. Дисперсии пульсаций модуля скорости в воде при: 1 – волнении, 2 – потоке, 3 – потоке и волнении, кривая 4 изображает сумму дисперсий при волнении и потоке, взятых отдельно

§ 5.6. Взаимодействие поверхностных волн различных масштабов

Рассмотрим взаимодействие двух волновых систем, временные и пространственные масштабы которых значительно различаются. Ограничимся гравитационными волнами на глубокой воде, распространяющимися в одном направлении. Взаимодействие поверхностных и внутренних волн обсуждается в гл.УП. Вопросы взаимодействия поверхностных волн изучались в [1; 2; 3; 4; 5; 6; 27].

Пусть для пространственных и временных масштабов длинных и коротких волн выполняются следующие соотношения:

$\Omega < \omega$; $K < k$; $C > c$,
где строчные буквы обозначают частоту, волновое число и фазовую скорость длинных волн, а прописные – соответствующие параметры коротких волн. Таким образом, поверхность волны распространяется на медленно меняющемся течении, образованном горизонтальной составляющей орбитальной скорости длинной волны с амплитудой A : $U = -AK \cos(\Omega t - KX)$. Смещение поверхности, создаваемое длинной волной $\zeta = A \cos(\Omega t - KX)$, будем считать малым. Практически достаточно, чтобы длины волн различались в 10, а частоты в 3 раза [3].

Рассмотрим короткие волны в сопровождающей системе координат, движущейся с фазовой скоростью c длинной волны. В этой системе координат течение жидкости стационарно, скорость его равна $-C + U$. При $U = 0$ частота коротких волн равна ω_0 , а волновое число – k_0 . Дисперсионное соотношение (5.2) для коротких волн в сопровождающей системе координат принимает вид

$$[\omega_0 - k_0 C - k(-C + U)]^2 = g |k| = (\omega')^2. \quad (5.16)$$

Уравнение (5.16) перепишем в несколько другом виде:

$$(g k_0)^{1/2} - k_0 C = (gk)^{1/2} - (C - U)k = \text{const.}$$

Отсюда, учитывая соотношение между фазовыми скоростями волн $\frac{c}{C} < 1$,

получим в первом приближении изменение волнового числа короткой волны:

$$\begin{aligned} k \approx \bar{k} \left(1 + \frac{U}{C} \right) &= \bar{k} \left[1 + \frac{A\Omega}{C} \cos(\Omega t - KX) \right] = \\ &= \bar{k} [1 + AK \cos(\Omega t - KX)], \end{aligned}$$

где \bar{k} – средненное по фазе длиной волны волновое число короткой волны.

Из закона сохранения волнового действия (2.71), принимающего в сопровождающей системе координат вид

$$\frac{E}{\omega} (c_T + U - C) = \text{const}$$

(ω' – частота коротких волн в сопровождающей системе координат), следует в первом приближении

$$E = \bar{E} [1 + KA \cos(\Omega t - KX)], \quad (5.17)$$

\bar{E} – энергия коротких волн, среднененная по периоду длиной волны.

Выражение для плотности энергии поверхностных волн

$$E = \frac{1}{2} \rho g \zeta^2$$

будет справедливым только в том случае, если смещением ζ поверхности, вызываемым длиной волной, можно пренебречь. Это приближение хорошо выполняется для внутренних волн. При конечном наклоне длиной волны необходимо учесть ускоренный характер движения сопровождающей системы координат, величину g заменить на

$$g' = g + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}. \quad (5.18)$$

Учет изменения дисперсионного соотношения (5.16) при замене g на g' согласно (5.18) выполнил Филлипс [12, гл.II], однако в первом приближении закон изменения k не нарушается. Энергия волн будет равна [7; 34]

$$E = \frac{1}{2} \rho \left(g + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right) a^2. \quad (5.19)$$

Из (5.17) и (5.19) получим выражение для изменения амплитуды короткой волны относительно среднего значения в зависимости от фазы длиной волны

$$a = \bar{a} [1 + AK \cos(\Omega t - KX)].$$

Таким образом, на гребнях длинных волн короткие волны становятся выше и короче, во впадинах – ниже и длиннее. Наклон коротких волн изменяется как

$$ak \sim [1 + 2AK \cos(\Omega t - KX)].$$

Из соотношения

$$(\omega')^2 = \left(g + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)k = gk[1 - AK \cos(\Omega t - KX)]$$

и выражения для k следует, что в первом приближении $\omega' = \text{const}$. Изменение параметров волн при их распространении под некоторым углом друг к другу рассмотрено в [4]. При учете эффектов диссипации, генерации волн ветром, капиллярности и поверхностного дрейфа взаимодействие волн значительно осложняется.

Взаимодействие коротких и длинных поверхностных волн позволяет объяснить зависимость величины спектральной плотности коротких волн от разгона [20, гл. II]. В § 3.7 показано, что согласно измерениям параметр a_p в (3.25) или величина спектральной плотности в интервале равновесия являются функцией разгона или времени генерации волн. Короткие волны в интервале равновесия при наличии длинных волн будут разрушаться на их гребнях, без длинных волн такое разрушение коротких волн происходит повсеместно. Так как энергия коротких волн максимальна на гребнях при наличии длинных волн, величина средней энергии коротких волн будет ниже, чем без длинных. По мере развития ветрового волнения развиваются длинноволновые составляющие и уменьшается площадь морской поверхности, на которой короткие волны достигают предельного значения, уменьшается a_p .

В этой главе рассмотрены только некоторые вопросы взаимодействия волн и течений, волны различных масштабов. Вопросы влияния вертикального профиля течения на поверхностные волны, в том числе на их генерацию, устойчивости волн на течениях, влияния поверхностных волн на течения или на волны более крупных масштабов, взаимодействия волн и созданных ими береговых течений изложены в прекрасном обзоре Перегрина [3] и других работах (см. обширную библиографию в [3; 20, гл. II]).

Л и т е р а т у р а

1. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. — М.: Мир, 1981.
2. Уизем Дж.Б. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
3. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
4. Thomson I.A., West B.I. Interaction of small-amplitude surface gravity waves with surface currents. — "J. Physical Oceanogr.", 1975, vol. 5, N 5, 736–749.
5. Басович А.Я., Таланов В.И. О трансформации коротких поверхностных волн на неоднородных течениях. — "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1977, т. 13, № 3, 766–773.

6. Peregrine D.H. Interaction of water waves and currents. — 'Adv. Appl. Mech.', vol.16, New York e.a., 1976, 9–117.
7. Longuet-Higgins M.S., Stewart R.W. Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents. — 'J. Fluid Mech.', 1960, vol.8, p.4, 565–583.
8. Longuet-Higgins M.S., Stewart R.W. The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents. — 'J. Fluid Mech.', 1961, vol.10, p.4, 529–549.
9. Hughes B.A., Stewart R.W. Interaction between gravity waves and shear flow. — 'J. Fluid Mech.', 1961, vol.10, p.3, 385–400.
10. Evans I.T. Pneumatic and similar break waters. — 'Proc. Roy. Soc.', 1955, ser.A, vol.231, N 1187, p.457–466.
11. Brevik I., Aas B. Flume experiment on waves and currents I. Replicated bed. — 'Coast. Eng.', 1980, vol.3, N 2, 149–177.
12. Huang N.E., Chen I.G., Tung C.C., Smith I.R. Interaction between nonuniform current and gravity waves with applications for current measurements. — 'J. Phys. Oceanogr.', 1972, vol.2, N 10, 420–431.
13. Кононкова Г.Е., Показеев К.В. Спектры ветровых волн на приливных течениях. Деп. ВИНИТИ АН СССР, 1977, № 2818–77.
14. Кононкова Г.Е., Показеев К.В. Исследование ветровых волн при малых разгонах. — "Труды ГОИН", 1980, вып. 151, 89–100.
15. Жевноватый В.Т. Изменение параметров ветровых волн на приливных течениях. — Сб. трудов Мурманской ГМО, 1969, № 2, 45–51.
16. Барбер Н. Поведение волн на приливных течениях. — В кн.: Основы предсказания ветровых волн, зыби и прибоя. — М.: ИЛ, 7, 1951, 174–190.
17. Vincent C.E. The interaction of wind-generated sea waves with tidal currents. — 'J. Phys. Oceanogr.', 1979, vol.9, N 4, 748–755.
18. Показеев К.В., Розенберг А.Д. Лабораторное исследование эффекта блокировки поверхностных волн малой амплитуды на неоднородных течениях. — В кн.: Тезисы докл. П. Всесоюзного съезда океанологов. — Севастополь, 1982. Вып.2, с. 44–45.
19. Isozaki I. The effect of Kuroshio-current on northeasterly wind waves over the Southward sea area off Kanto-District. — 'J. of Meteorological Research', 1958, vol.10, N 3, p.205–211.
20. Francis I.R.D., Dugeron C.R. An experimental study of wind generated waves on a water current. — 'Quarterly J. Royal meteorol Society', 1967, vol.93, N 396, p.247–253.
21. Кононкова Г.Е., Показеев К.В. Исследование ветровых волн на течениях. Деп. ВИНИТИ АН СССР, 1978, № 696–78.

22. Кононкова Г.Е., Поборчая Л.В., Показе-
ев К.В. Лабораторное исследование генерации ветровых волн
на спутном потоке. - "Изв. АН СССР. ФАО", 1977, 13, № 9,
991-993.
23. Показеев К.В. Лабораторное исследование воздействия те-
чения на свойства ветровых волн. - В кн.: Комплексные исследо-
вания Мирового океана. Тезисы доклада Всесоюз. конф. моло-
дых ученых-океанологов. Актуальные проблемы океанологии. Т.2.-
М.: 1979, с. 193-196.
24. Кононкова Г.Е., Пивоваров А.А., Показе-
ев К.В. Генерация ветровых волн на спутном течении при ма-
лых разгонах. - "Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия",
1979, т. 20, № 3, 57-63.
25. Кононкова Г.Е., Показеев К.В., Тара-
сов Л.А. Ветровые волны сантиметрового диапазона на тече-
ниях. - "Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия", 1981,
т. 22, № 1, 35-100.
26. Kato H., Sato S. An attempt of measuring power spectra of wind-
generated waves on currents. - "Fundam. Tools used Environ. Probl. 16th
Congr., São Paulo", 1975, proc. vol.1, São Paulo, 1975, 288-295.
27. Кононкова Г.Е., Никитина Е.А., Побор-
чая Л.В., Сперанская А.А. О спектрах ветрового
волнения при малых разгонах. - "Изв. АН СССР, ФАО", 1970,
т. 6, № 7, 747-751.
28. Kitaigorodskii S.A., Krasitskii W.P., Zaslavskii M.M.
On Phillips theory of equilibrium range in the spectra of wind-gene-
rated gravity waves. - 'J. Phys. Oceanogr.', 1975, vol. 5, N 3, 410-420.
29. Ефимов В.В. Динамика волновых процессов в пограничных
слоях атмосферы и океана. - Киев: Наукова думка, 1981.
30. Боеев А.Г. О гашении поверхностных волн сильной турбулент-
ности. - "Изв. АН СССР, ФАО", 1971, т. 7, № 1, 50-59.
31. Пелиновский Е.Н. Линейная теория установления и
изменчивости ветрового волнения при слабом ветре. - "Изв. АН
СССР, ФАО", 1978, т. 14, № 11, 1167-1176.
32. Кононкова Г.Е., Поборчая Л.В., Карушева-
ва Т.И., Петровская Т.П., Показеев К.В.,
Разумов В.А. Воздействие турбулентного потока на вет-
ровое волнение. - "Водные ресурсы", 1974, № 1, 179-183.
33. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Ч.2. - М.:
Мир, 1951.
34. Garrett C., Smith I. On the interaction between long and short
surface waves. - 'J. Physical Oceanogr.', 1976, vol. 6, N 6, 925-930.
35. Dawson I. Freak ocean waves are episodic. - 'New scientist',
1977, vol. 73, N 1033, p. 7-9.
36. Дмитриев Г. Волны-убийцы. - В кн.: Человек и стихия. -
Л., Гидрометеоиздат, 1975, с. 132-133.

ГЛАВА VI

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ

§ 6.1. Явление внутренних волн

Слоистое строение вод океанов и морей, а также озер и водохра-
нилищ приводит к замечательному явлению - возникновению внутрен-
них волн, достигающих громадных размеров. Периоды их составляют
от нескольких минут до нескольких суток, высоты до 100 м, а длины
до 100 км. Внутренние волны были впервые обнаружены Нансен-
ном во время экспедиции на "Фраме" (1894-1897 гг.). Обнаружен-
ное им явление "мертвой воды" было связано с генерацией внутрен-
них волн тихоходным судном.

Объяснение этого явления было дано Экманом и Сретенским. Фи-
зический механизм образования внутренних волн является простым.
Если в устойчиво стратифицированной жидкости возникло возмущение,
которое вывело ее частицу из положения равновесия, то под дейст-
вием сил тяжести и силы Архимеда эта частица будет совершать
колебания относительно положения равновесия. Подобные колебания,
распространяющиеся в океане, и представляют собой внутренние вол-
ны.

Несмотря на то что явление внутренних волн было известно с на-
чала нашего века, интенсивное исследование его началось в 60-х
годах, когда появилась необходимая измерительная техника. О внут-
ренних волнах судят по колебаниям температуры, солености, плотнос-
ти и скорости в толще океана.

Внутренние волны, повсеместно встречающиеся в толще Мирового
оcean, оказывают огромное влияние на протекающие в нем процессы.
Они играют важную роль в горизонтальном и вертикальном обменах.
Изучение внутренних волн необходимо для гидроакустики, гидробиоло-
гии, гидрооптики, подводного плавания и т.д. Этим объясняется зна-

чительный интерес к исследованию внутренних волн в последние годы. В настоящее время имеется значительное число монографий, в которых рассмотрены внутренние волны [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7]. Наиболее полное обобщение и систематизация современных данных о внутренних волнах и изложение физической теории этого явления даны в [5].

Форма внутренних волн может быть самой разнообразной. Длинные внутренние волны имеют почти синусоидальную форму. Иногда, преимущественно на мелководье, внутренние волны имеют форму уединенной волны. Короткие внутренние волны часто имеют форму, отличную от синусоидальной, и распространяются пугами, или группами. Амплитуда внутренних волн максимальна в толще океана. На поверхности амплитуда и скорости частиц, вызванные внутренней волной, малы. Однако эти колебания поверхности и поверхностной скорости могут быть зарегистрированы и использованы для индикации внутренних волн. Об этом будет рассказано в следующей главе.

Многочисленные измерения внутренних волн были получены на одной вертикали при помощи зажженной гирлянды или цепочки термисторов, размещенных на разных уровнях. В результате вертикального перемещения изотерм возникают сигналы, регистрируемые термисторами. Однако вследствие того что фазовая скорость внутренней волны может быть соизмеримой со скоростью течения, возникают значительные трудности при интерпретации сигнала.

Измерение пространственной структуры внутренних волн сопряжено со значительными трудностями, так как для проведения таких измерений требуется сеть буйковых станций. Для получения пространственных характеристик внутренних волн часто применяют буксировку датчиков кораблем, например цепочки термисторов. Если скорость буксировки значительно больше скорости внутренних волн, полученные регистрацией подобны мгновенному пространственному разрезу. Если фазовая скорость внутренних волн соизмерима со скоростью корабля, регистрация внутренних волн искажается. Методика определения истинных параметров внутренних волн по параметрам, искаженным вследствие движения датчика, описана в [5; 8; 9].

В последние годы широкое распространение получили такие приборы, как поплавки нейтральной плавучести, свободно падающие датчики, распределенные датчики температуры. Поплавок нейтральной плавучести, свободно дрейфуя по течению, совершает вертикальные перемещения под действием внутренних волн и измеряет при этом температуру и глубину. Иногда используется поплавок, отслеживающий данную температуру. При буксировке поплавок регистрирует глубину заданной изотермы. Распределенный датчик температуры представляет собой вертикальный изолированный длинный проводник, длина его подбирается такой, чтобы он пересекал слой наибольшего изменения температуры. Сопротивление датчика зависит от средней температуры в слое погружения. Распределенный датчик обладает высокой чувствительностью к колебаниям нижней моды внутренних волн и практически не реагирует на тонкую структуру.

При интерпретации результатов измерений пространственных и временных флуктуаций гидрологических полей возникает вопрос о разде-

лении внутренних волн и турбулентности [5; 10]. Дело в том, что зарегистрированные флуктуации гидрологических характеристик могут быть вызваны прохождением через место измерения как случайного цуга внутренних волн, так и совокупности турбулентных вихревых систем. Если внутренние волны слабо нелинейны, они удовлетворяют дисперсионному соотношению, которое близко к линейному. Определив эмпирически дисперсионное соотношение, можно в принципе отличить внутренние волны от турбулентности, которая не удовлетворяет дисперсионному соотношению.

Разделение турбулентности и внутренних волн производят также на основе фазовых соотношений (спектров сдвига фаз) между флуктуациями различных составляющих скорости и скалярных полей. Фазовые соотношения во внутренних волнах фиксированы, а в турбулентных вихревых системах произвольны. Однако вопросы эффективного выделения внутренних волн из общего фона записей требуют дальнейших исследований.

§ 6.2. Уравнения Буссинеска для стратифицированной жидкости

Ввиду важности понятия стратификации рассмотрим его более подробно. Морская вода представляет собой сложную многокомпонентную среду, которую можно лишь с некоторым приближением рассматривать как состоящую из воды и соли. Плотность морской воды ρ зависит от давления p , температуры T , солености s . Зависимость плотности от этих параметров называется уравнением состояния: $\rho = \rho(T, p, s)$. При изменении температуры, давления и солености во всем возможном для океана диапазоне плотность изменяется от 1,00 до 1,04 г/см³. В океанологии широко используются эмпирические уравнения состояния, полученные для всего возможного диапазона изменения T, p, s . Дифференциальная форма уравнения состояния имеет вид

$$dp = -\alpha(T, p, s) \rho dT + \beta(T, p, s) \rho dp + \gamma(T, p, s) \rho ds,$$

где α – коэффициент термического расширения, β и γ – коэффициенты барической и соленостной сжимаемости соответственно.

Стратификацией называется распределение по вертикали слоев воды различной плотности в поле силы тяжести. В зависимости от роли температуры и солености в формировании распределения плотности различают термическую, халинную и термохалинную стратификации. Внутренние волны возникают только при наличии стратификации.

Пусть задано распределение плотности $\rho(z)$ в неподвижной жидкости. Условие равновесия жидкости в поле силы тяжести имеет вид

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g,$$

где g – ускорение свободного падения, ось z направлена вверх. Если пренебречь зависимостью плотности от давления, то условие устойчивости стратификации имеет вид $\frac{dp}{dz} < 0$, т.е. более тяжелые частицы жидкости расположены под более легкими. Если $\frac{dp}{dz} > 0$,

стратификация неустойчива. При учете зависимости плотности от давления вопрос об устойчивости стратификации усложняется.

При рассмотрении внутренних волн основные уравнения гидродинамики часто применяются в несколько видоизмененной форме, полученной Буссинеском для стратифицированной жидкости.

В океанологии обычно сравнивают фактическое состояние жидкости с некоторым стандартным состоянием, в котором энтропия η и соленость s постоянны, а жидкость неподвижна. Переход от фактических величин к величинам в стандартных условиях можно описать при помощи потенциальной температуры Θ и потенциальной плотности ρ_{pot} с использованием соотношений

$$\Theta = T - \int \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{\eta, s} dp,$$

$$\rho_{\text{pot}} = \rho - \int \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\eta, s} dp = \rho - \int \frac{dp}{c_3^2},$$

где c_3 -скорость звука.

Потенциальная температура Θ равна температуре жидкой частицы, приведенной адиабатически при постоянной солености от фактического давления p к стандартному p_0 , которое обычно принимают равным однородной атмосфере. Аналогично определяется ρ_{pot} . Из условия равновесия неподвижной жидкости в поле силы тяжести

$$\frac{dp}{dz} = - \rho_g g \quad (6.1)$$

и предположения постоянства энтропии и солености следует распределение плотности жидкости $\rho_g(z)$ в стандартном состоянии

$$\rho_g(z) = \rho_0 \exp \left[-g \int_z^0 \frac{dz}{c_3^2} \right], \quad (6.2)$$

где ρ_0 – стандартная плотность на свободной поверхности $z=0$, индекс g обозначает стандартное состояние. Пренебрегая изменением энтропии элемента жидкости в океане при изменении его глубины, имеем $\frac{dp}{dz} = c_3^{-2} \frac{dp}{dt}$. Учитывая условие равновесия (6.1), получаем

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{g \rho}{c_3^2} \cdot \frac{dz}{dt} = - \frac{\rho g}{c_3^2} w. \quad (6.3)$$

Заменяя в уравнении неразрывности (1.8) $\frac{dp}{dt}$ согласно (6.3), получим $\nabla \underline{u} = \frac{g}{c_3^2} w$. Его с высокой степенью точности для большинства движений в океане можно заменить на

$$\nabla u = 0.$$

(6.4)

Вычитая из динамического уравнения (1.13), записанного с учетом силы Кориолиса, (6.1), получим

$$\frac{du}{dt} + 2 \Omega \underline{x} \underline{u} + \nabla(p - p_g) - (\rho - \rho_g) g = \nu \nabla^2 \underline{u}. \quad (6.5)$$

В океане разница между фактической плотностью ρ и стандартной ρ_g очень мала, и величина $(\rho - \rho_g) \rho_g^{-1}$ имеет порядок не более 10^{-3} . Кроме того, так как стандартная плотность ρ_g мало отличается от ее постоянного значения ρ_0 в инерционных членах уравнения (6.5), ρ можно заменить не только на ρ_g , но и на ρ_0 . После введения таких упрощений уравнение (6.5) сводится к виду

$$\frac{du}{dt} + 2 \Omega \underline{x} \underline{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p} - \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} g = \nu \nabla^2 \underline{u}, \quad (6.6)$$

где \tilde{p} – разность между фактическим давлением и гидростатическим давлением в покоящейся жидкости при плотности ρ_0 .

Выражения (6.3), (6.4), (6.6) представляют собой уравнения движения в приближении Буссинеска. Условия применимости приближения Буссинеска следующие: фактическое распределение плотности должно мало отличаться от стандартного, вертикальный масштаб движений должен быть мал по сравнению с масштабом глубины c_3^2 , число Маха w/c_3 должно быть много меньше единицы. В океане все эти условия хорошо выполняются.

Введя плавучесть единичного объема жидкости $\tilde{b} = -g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$, преобразуем (6.6) к виду

$$\frac{du}{dt} + 2 \Omega \underline{x} \underline{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p} - \tilde{b} \underline{t} = \nu \nabla^2 \underline{u},$$

где \underline{t} – единичный вектор, направленный вертикально вверх. Эта форма уравнения подчеркивает, что приближение Буссинеска допускает пренебрежение влиянием изменения плотности на инерцию, однако существенно учитывает плавучесть.

§ 6.3. Внутренние волны малой амплитуды

При рассмотрении внутренних волн малой амплитуды используем приближение Буссинеска без учета вращения Земли и вязкости воды. Плотность ρ можно рассматривать как сумму средней плотности $\bar{\rho}(z)$ и флуктуаций $\rho'(x, t)$: $\rho = \bar{\rho} + \rho'$. Аналогично плавучесть можно представить в виде суммы среднего значения $\bar{b}(z)$ и флуктуаций b' : $\tilde{b} = \bar{b}(z) + b'$. Уравнение импульса напишем раздельно для горизонтальных (q_α , где $\alpha = 1, 2$) и вертикальной (w) составляющих [3]:

$$\frac{\partial q_a}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_a} = - u_j \frac{\partial q_a}{\partial x_j}, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = b - u_j \frac{\partial w}{\partial x_j}. \quad (6.8)$$

Продифференцировав (6.7) по z и (6.8) по x_a и вычитая одно из другого, исключим \tilde{p} и получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q_a}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x_a} \right) + \frac{\partial b}{\partial x_a} = \frac{\partial}{\partial x_a} \left(u_j \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(u_j \frac{\partial q_a}{\partial x_j} \right).$$

Дифференцируя полученное выражение по времени и используя (6.7) и (6.8), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial q_a}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x_a} \right) - \frac{\partial \bar{b}}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x_a} &= \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_a} \left(u_j \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(u_j \frac{\partial q_a}{\partial x_j} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_a} \left(u_j \frac{\partial b}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

Вычисляя горизонтальную дивергенцию последнего уравнения, имеем следующее уравнение для вертикальной скорости:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w) + N^2(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x_a^2} = Q(x, t).$$

В правой части объединены нелинейные члены, которыми для бесконечно малых возмущений можно пренебречь:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w) + N^2(z) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_a^2} \right) = 0. \quad (6.9)$$

Величина

$$N = \left[- \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} - \frac{g}{c_3^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.10)$$

— частота Брента-Вайсяля или частота плавучести. Она является собственной частотой колебаний, возникающих при небольшом отклонении вертикального столбика жидкости от положения равновесия. В случае гидростатической устойчивости среднего распределения плотности $\rho(z)$ частота $N(z)$ будет вещественной. Зависимость $N(z)$ от глубины в океане определяется распределением $\rho(z)$. Под $\rho(z)$ понимается стационарное распределение, полученное осреднением по длительным интервалам времени. В верхнем слое океана существует слой примерно постоянной плотности, формирование этого квазиоднородного слоя происходит под действием интенсивных мелкомасштабных турбулентных движений. Глубина квазиоднородного слоя равна 20–100 м. Ниже квазиоднородного слоя расположен слой скачка плотности, или слой сезонного термоклина, в пределах этого слоя происходит резкое

возрастание плотности. Слой резкого изменения плотности называется также пикноклином, а солености — галоклином. Сезонный термоклин опускается до 50–200 м. В пределах термоклина частоту Брента-Вайсяля можно аппроксимировать выражением

$$N = \left(\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В сезонном термоклине происходит резкое затухание интенсивности мелкомасштабной турбулентности, на его нижней границе интенсивность пульсаций мала. Глубже сезонного термоклина расположен главный термоклин, плотность в котором монотонно нарастает за счет понижения температуры. Нижняя граница главного термоклина H имеет глубину около 1 км. Ниже главного термоклина температура воды и плотность практически не изменяются.

Изменение $N(z)$ происходит в соответствии с описанным распределением $\rho(z)$. В квазиоднородном слое $N(z)$ мало. Резкое изменение $N(z)$ происходит в слое скачка, в котором частота Брента-Вайсяля имеет четко выраженный максимум. Численное значение максимума частоты для океана составляет в среднем $2 \cdot 10^{-2}$ Гц. Частота колебаний в главном термоклине еще ниже.

Наряду с описанным изменением плотности имеет место мелкомасштабная изменчивость плотности, так называемая тонкая структура [11], а в сантиметровом масштабе — микроструктура.

Будем искать решение (6.9) для малых возмущений $w(z)$ в форме элементарных волновых мод

$$w = A(z) \exp \{ i (kx - \omega t) \}, \quad (6.11)$$

где $k(k_1, k_2)$ — горизонтальный волновой вектор, ω — частота. Подставив (6.11) в (6.9), получим уравнение для $A(z)$:

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} + \left\{ \frac{N^2(z) - \omega^2}{\omega^2} \right\} k^2 A = 0. \quad (6.12)$$

Границные условия для A принимают следующий вид. На дне ($z = -D$) согласно условию непротекания

$$A = 0. \quad (6.13)$$

На поверхности ($z = 0$) кинематическое и динамическое условия имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + g \rho_0 w = \frac{\partial p_a}{\partial t},$$

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

где p_a — давление атмосферы. Условие постоянства атмосферного давления приводит граничное условие к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) - g \frac{\partial^2 w}{\partial x_a^2} = 0,$$

подставив в которое (6.11), имеем

$$\omega^2 \frac{dA}{dz} - g k^2 A = 0. \quad (6.14)$$

Уравнение (6.12), аналогичное уравнению Шредингера в квантовой механике, обладает тем математическим свойством, что оно не при любых значениях $\frac{N^2(z) - \omega^2}{\omega^2} k^2$ имеет конечные однознач-

ные и непрерывные решения, т.е. решения, имеющие физический смысл. При заданном профиле $N(z)$ уравнение (6.12) с граничными условиями ставит задачу на собственные значения, в которой нужно найти возможные моды и частоты $\omega(k)$ малых колебаний.

Если $\omega > N$, единственными модами данного уравнения будут поверхностные волны, в которых амплитуда скорости максимальна на поверхности и монотонно падает до нуля ($A = 0$ при $z = -D$). Если $\omega < N_{\max}$, то в некотором интервале глубин (6.12) представляет собой волновое уравнение, описывающее стационарный волновой процесс. Заданной частоте $\omega < N_{\max}$ соответствует бесконечное множество собственных функций для бесконечного множества дискретных значений k . Наименьшему волновому числу соответствует поверхностная волна, всем модам с большими значениями k соответствуют внутренние волны.

Низшая мода внутренней волны имеет максимум функции $A(z)$ в области термоклина, при прохождении волны низшей моды вся область термоклина перемещается вверх и вниз. Вторая мода внутренней волны имеет два экстремума $A(z)$ в области термоклина. Подробное описание вида $A(z)$ для разных мод и некоторых форм $N(z)$, моделирующих реальные распределения с той или иной точностью, можно найти в [1; 3; 10].

Простейший вид решения (6.12) принимают при $N = \text{const}$ [12]:

$$A = A_0 \sin \frac{\pi n z}{D}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (6.15)$$

Подстановка (6.15) в (6.12) позволяет получить соотношения между фазовой скоростью $c = \frac{\omega}{k}$, частотой ω и номером моды n

$$c^2 \left(\frac{\pi n}{D} \right)^2 + \omega^2 = N^2.$$

Семейство данных кривых на плоскости k, ω имеет вид, показанный на рис. 6.1. При фиксированной частоте фазовая скорость уменьшается с ростом номера моды n . Число мод, имеющих данную фазовую скорость, конечно. Зависимость $\omega(k)$ позволяет легко определить фазовую и групповую скорости. Фазовая скорость c в точке A определяется углом наклона OA , а групповая скорость $c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ — углом наклона касательной CD .

Кроме решений (6.15) существует множество других форм волновых движений, которые могут быть получены суперпозицией гармонических решений.

Приближение $N = \text{const}$ непригодно для анализа внутренних волн в верхнем слое океана, оно может иметь смысл для глубинных слоев, где N изменяется незначительно.

Рассмотрим ситуацию, когда $N(z)$ имеет конечное значение только в узком интервале глубин [3]. Этой ситуации соответствует резкий термоклин, разделяющий почти однородные слои. Пусть средняя глубина термоклина равна h , а толщина его равна ε . Вне термоклина, где $N(z) = 0$, уравнение (6.12) принимает вид

$$\frac{d^2 A}{dz^2} = k^2 A. \quad (6.16)$$

если рассматривать низшую внутреннюю моду, изменение $A(z)$ внутри термоклина мало и имеет место примерное равенство

$$A(-h_+) \approx A(-h_-), \quad (6.17)$$

где $-h_+$ и $-h_-$ верхняя и нижняя границы термоклина.

Изменение $A(z)$ в пределах термоклина можно найти интегрированием уравнения (6.12) по глубине в пределах ε . С учетом

$$N^2 \approx - \frac{g \cdot \rho}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

имеем

$$\frac{dA(-h_+)}{dz} - \frac{dA(-h_-)}{dz} \approx$$

$$\approx k^2 A(-h) \int_{-h}^{0} \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) dz = k^2 A(-h) \left(\varepsilon - \frac{g \delta \rho}{\omega^2 \rho_0} \right), \quad (6.18)$$

где $\delta \rho$ — разность плотностей воды ниже и выше термоклина. Решения уравнения (6.16) вне термоклина имеют вид

$$A(z) = A_0 \operatorname{sh} kz, \quad 0 > z > -h, \\ A(z) = B \operatorname{sh} k(z + D), \quad -h > z > -D. \quad (6.19)$$

Из (6.17) имеем соотношение между A_0 и B :

$$\frac{A_0}{B} = - \frac{\operatorname{sh} k(D - h)}{\operatorname{sh} kh}. \quad (6.20)$$

Подставив (6.19), (6.20) в (6.18), получим дисперсионное уравнение для низшей моды внутренней волны:

$$\omega^2 = gk \left(\frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) \left\{ k\varepsilon + \operatorname{cth} kh + \operatorname{cth} k(D - h) \right\}^{-1}. \quad (6.21)$$

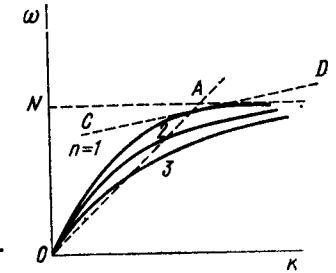


Рис. 6.1. Дисперсионная кривая $\omega(k)$ при $N = \text{const}$

Наиболее длинные внутренние волны имеют длину, много большую толщины термоклина, поэтому $k \xi \ll 1$ и

$$\omega^2 = gk \left(\frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) \{ \operatorname{cth} kh + \operatorname{cth} k(D-h) \}^{-1}. \quad (6.22)$$

Максимальную частоту имеют колебания, длина которых мала по сравнению с толщиной термоклина ($k \xi \gg 1$):

$$\omega^2 = \frac{g \delta \rho}{\varepsilon \rho_0}.$$

Описанный случай тонкого термоклина, разделяющего почти однородные слои, есть предельный случай трехслойной модели стратификации. Рассмотрим еще один пример трехслойной модели стратификации, являющейся достаточно простой и вместе с тем хорошо отражающей реальное распределение плотности в океане. Пусть плотность ρ_0 постоянна в верхнем слое толщиной h , в термоклине толщиной d она экспоненциально возрастает до значения ρ_d , которое сохраняется неизменным в слое ниже термоклина. Распределение плотности и частоты Брента-Вайсля имеют вид [5]

$$N^2 = \begin{cases} 0, & 0 \geq z > -h, \\ \mu_0, & -h \geq z \geq -(h+d), \\ 0, & -(h+d) > z \geq -H, \end{cases}$$

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0, & 0 \geq z \geq -h, \\ \rho_0 \exp \left\{ -\frac{\mu_0}{g}(z+h) \right\}, & -h \geq z \geq -h-d, \\ \rho_d = \rho_0 \exp \left\{ \frac{\mu_0 d}{g} \right\}, & -h-d \geq z \geq -H. \end{cases}$$

В этом случае решение задачи (6.12) на собственные функции имеет вид

$$A(z) = \begin{cases} A_0 \operatorname{sh} kz, & 0 \geq z \geq -h, \\ (c \sin lz + D \cos lz) \exp \frac{\mu_0 z}{2g}, & -h \geq z \geq -h-d, \\ B \operatorname{sh} [k(h+H)], & -h-d \geq z \geq -H, \end{cases}$$

где

$$l^2 = k^2 \frac{\mu_0^2 - \omega^2}{\omega^2}.$$

Из условия сшиваемости решений при $z = -h$ и $z = -(h+d)$ мож-

но получить дисперсионное соотношение, которое мы здесь не приводим ввиду его громоздкости [5]. Общие свойства решений аналогичны рассмотренным выше. Функции $A(z)$ образуют счетное множество, частоты внутренних волн ω_n изменяются от нуля до частоты Брента-Вайсля.

Волновое движение низшей моды, распространяющейся в тонком термоклине, удобно выразить через вертикальное смещение ζ термоклина [3]. Пусть $\zeta = a \exp \{i(\underline{k}x - \omega t)\}$. (6.23)

Вертикальная скорость в слое термоклина связана со смещением приблизительным соотношением $w = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$, поэтому

$$w = -i a \omega \exp \{i(\underline{k}x - \omega t)\} = A(z) \exp \{i(\underline{k}x - \omega t)\}.$$

Аналогично для горизонтальной составляющей скорости можно записать $u = U(z) \exp \{i(\underline{k}x - \omega t)\}$.

Амплитуды $U(z)$ и $A(z)$ связаны соотношением нераэрывности

$$\frac{d A(z)}{d z} = -i k U(z).$$

Выражения для $w(z)$ и $u(z)$ показывают, что внутренние волны являются вихревыми. Если выбрать ось x по направлению распространения волны, амплитуда ротора скорости будет равна

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{i}{k} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - k^2 A \right).$$

Ротор скорости равен нулю на поверхности океана и отличается от него в глубине, например в слое термоклина. Из (6.16) следует, что вне тонкого термоклина вихрь равен нулю. Безвихревой характер движения позволяет ввести потенциал скорости в областях выше и ниже термоклина

$$\varphi = \frac{-i a \omega}{k} \cdot \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kh} \exp \{i(\underline{k}x - \omega t)\}, \quad 0 > z > -h, \quad (6.24)$$

$$\varphi = \frac{-i a \omega \operatorname{ch} k(D+z)}{k \operatorname{sh} k(D-h)} \exp \{i(\underline{k}x - \omega t)\}, \quad -h > z > -D.$$

Строение прогрессивной внутренней волны на границе раздела двух слоев бесконечной толщины изображено на рис.6.2. На гребне волны в верхнем слое частицы движутся в направлении, обратном направлению распространения волны. Ниже границы раздела на гребне частицы движутся в направлении распространения волны. В подошве в нижней жидкости частица движется против направления распространения волны, в верхней жидкости — в направлении волны. На переднем склоне волны выше границы раздела находится область дивергенции, а под границей — область конвергенции. На заднем склоне волны выше границы раздела находится область конвергенции, ниже — область дивергенции. Частицы движутся по круговым траекториям, амплитуда которых экспоненциально уменьшается с увеличением расстояния от по-

верхности раздела. Горизонтальные составляющие скорости максимальны на гребне и подошве волны. При переходе через границу раздела нормальная компонента непрерывна, а тангенциальная изменяет знак на обратный. Потенциальные течения в верхнем и нижнем слоях разделены вихревым слоем, градиент в котором максимальен на гребне и подошве волны.

С помощью полученных уравнений можно оценить проявление низшей моды внутренней волны на поверхности. Смещение поверхности создается изменениями давления, индуцированными внутренней волной на поверхности: $\zeta_0 = \frac{p_{z=0}}{\rho_0 g}$. Учитывая, что $p = - \int \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} dx$

и согласно (6.24) $\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{i a \omega \exp[i(kx - \omega t)]}{sh kh}$, получим

$$\zeta_0 = - \frac{a \omega^2}{g k sh kh} \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (6.25)$$

Смещение ζ_0 изменяется в противофазе с вертикальным смещением термоклина (6.23). Величина смещений на поверхности значительно меньше смещений в слое термоклина

$$\left| \frac{\zeta_0}{\zeta} \right| = \frac{\omega^2}{g k sh kh} \approx \frac{\delta \rho}{\rho_0}.$$

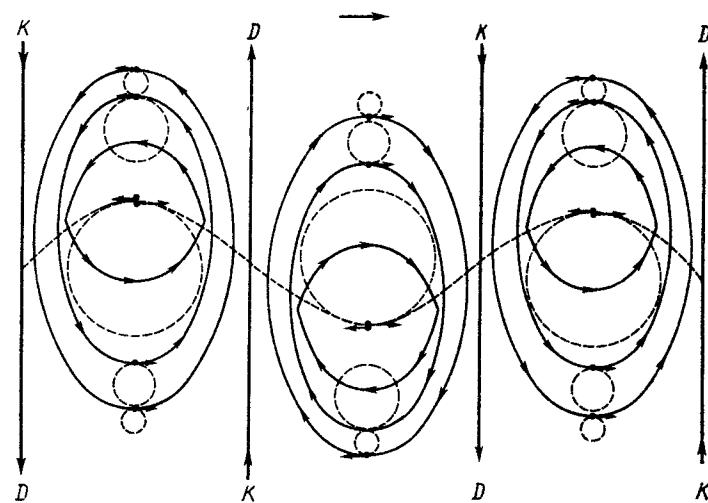


Рис.6.2. Линии тока и орбиты в прогрессивных бегущих внутренних волнах. Волна бежит слева направо по поверхности раздела двух слоев бесконечной толщины. К - зона конвергенции, Д - зона дивергенции

Горизонтальная скорость на поверхности, создаваемая внутренней волной, равна

$$u = - \frac{a \omega}{sh kh} \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (6.26)$$

В поле горизонтальной скорости имеются зоны конвергенции, расположенные в точках с нулевыми смещениями (рис.6.2). Амплитуда смещений поверхности ζ_0 и амплитуда горизонтальной скорости $\frac{a \omega}{sh kh}$,

создаваемые внутренней волной, малы, однако эти колебания в поверхностном слое могут быть зарегистрированы и приводят к таким явлениям, как колебания льдин в Арктическом бассейне [13] и образование сливов [14].

Используя (6.22), найдем фазовую скорость волны первой моды

$$c = \frac{\dot{\omega}}{k} = \left(\frac{\delta \rho g}{\rho_0 k} \right)^{1/2} \{ \operatorname{cth} kd + \operatorname{cth} k(D-h) \}^{1/2}. \quad (6.27)$$

Скорость внутренней волны примерно в $\left(\frac{\delta \rho}{\rho_0} \right)^{1/2}$ меньше фазовой

скорости поверхности волны с тем же волновым числом. Групповую скорость можно найти из дисперсионного уравнения с помощью известного соотношения $c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$.

Потенциальная энергия первой моды внутренней волны создается смещением термоклина, так как смещением свободной поверхности можно пренебречь. Средняя потенциальная энергия, приходящаяся на единицу площади, равна [3]

$$E_p = \frac{1}{2} \delta \rho g \zeta^2. \quad (6.28)$$

С точностью до членов второго порядка малости плотность полной энергии в два раза больше

$$E = \delta \rho g \zeta^2 = (2k^{-1})^{-1} \rho_0 \omega^2 a^2 \{ \operatorname{cth} kh + \operatorname{cth} k(D-h) \}.$$

Свойства внутренних волн конечной амплитуды рассмотрены в монографиях Тернера и Миропольского.

§ 6.4. Вырождение внутренних волн

Рассмотрим кратко некоторые физические механизмы вырождения внутренних волн. Так как размеры внутренних волн значительны, а волновые числа малы, затуханием внутренних волн в результате действия молекулярной вязкости можно пренебречь. В принципе возможно опрокидывание внутренних волн, подобное тому, которое имеет место в поверхностных волнах, если величина локального ускорения частиц, равная $\omega^2 a$, достигает величины ускорения свободного

падения. Однако вследствие того, что частоты внутренних волн малы, это явление не реализуется [3].

Девисом и Акривосом [15] теоретически была показана возможность разрушения низшей моды внутренней волны вследствие резонансного взаимодействия с другими модами. Проведенные ими лабораторные эксперименты подтвердили возможность такого взаимодействия. Для тройки взаимодействующих мод внутренних волн должны выполняться следующие соотношения синхронизма между частотами и волновыми числами:

$$\underline{k}_3 = \underline{k}_1 + \underline{k}_2, \\ \omega(k_3) = \omega(k_1) + \omega(k_2).$$

Частота и соответствующее волновое число удовлетворяют дисперсионному соотношению для внутренних волн. В рассматриваемых экспериментах распределение плотности удовлетворяло уравнению

$$\rho = \rho_0 \exp\left[\frac{\delta\rho}{\rho_0} \operatorname{th} \frac{2(z-h)}{\varepsilon}\right], \quad (6.29)$$

где ε - толщина пикноклина (переходного слоя), h - глубина этого слоя. Взаимодействие между тройкой волн на границе раздела приводит к передаче энергии от низшей моды более высоким модам. Энергия высших мод может возрастать экспоненциально от малого начального возмущения. Скорость переноса между модами должна превышать по крайней мере вязкую диссипацию. В [15] получено критическое значение крутизны волны низшей моды (ak), необходимое для развития межмодовой неустойчивости

$$(ak)_m > 2\nu \left(g \frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)^{-1/2} \varepsilon^{-3/2} F(m), \quad (6.30)$$

где $F(m)$ -функция, зависящая от наименьшего волнового числа из двух мод, взаимодействующих с низшей модой. С увеличением номера моды $F(m)$ возрастает, что хорошо согласуется с тем, что из всех возможных совокупностей триад реализуются в экспериментах триады с меньшими волновыми числами. Следует отметить, что $(ak)_m \sim \varepsilon^{-3/2}$,

т.е. межмодовые взаимодействия при фиксированной величине (ak) могут появиться только если толщина переходного слоя ε между слоями превысит некоторое значение. Это условие подтверждено в лабораторных экспериментах [15]. Окончательная потеря устойчивости и переход к турбулентности происходят при опрокидывании высших мод на сдвиговом горизонтальном течении, связанном с низшей модой. Время резонансного взаимодействия превышает $\frac{2\pi}{N}$ [6].

А.Г.Воронович [16] показал, что неустойчивость резонансных триад из высших мод может быть на порядок выше, чем неустойчивость резонансных триад, содержащих низшую моду.

Другой тип разрушения внутренних волн связан с неустойчивостью периодических течений, обусловленных орбитальным движением час-

тиц, участвующих в волновом движении. Этот механизм подробно анализировал Филлипс. Достаточное условие устойчивости стационарного стратифицированного течения состоит в том, чтобы локальное волновое число Ричардсона Ri превышало $1/4$ [3]. Устойчивость течения может нарушиться, если для минимального значения Ri выполняется условие

$$Ri < \frac{1}{4}. \quad (6.31)$$

Локальное число Ричардсона равно

$$Ri = \left(\frac{N_{\max}}{\frac{du}{dz}}\right)^2. \quad (6.32)$$

Вертикальный градиент (сдвиг) горизонтальной скорости в термоклине для низшей внутренней моды может быть получен из условия несжимаемости и уравнения (6.12)

$$\frac{du}{dz} = -i\left\{\frac{N^2(z)}{\omega^2} - 1\right\} \omega k a.$$

Максимальный вертикальный сдвиг $\frac{du}{dz}$ достигается при максимальном значении частоты Брента-Вайсяля N_{\max} [3]:

$$\frac{du}{dz}_{\max} = \left\{\frac{N_{\max}^2}{\omega^2} - 1\right\} (\omega k a). \quad (6.33)$$

Подставив (6.33) в (6.32), получим минимальное локальное число Ri , которое достигается на гребне и подошве волны

$$Ri^{-1} = \left\{\frac{N_{\max}}{\omega} - \frac{\omega}{N_{\max}}\right\}^2 (k a)^2. \quad (6.34)$$

Таким образом, потенциально неустойчивыми являются области на гребнях и подошвах внутренних волн при выполнении условия (6.31), которое с учетом (6.34) принимает вид

$$(ak)_c > 2 \left\{\frac{N_{\max}}{\omega} - \frac{\omega}{N_{\max}}\right\}^{-1}. \quad (6.35)$$

Если длина внутренней волны превышает толщину термоклина, предельное значение крутизны волны

$$(ak)_c = \frac{2\omega}{N_{\max}}. \quad (6.36)$$

Это выражение показывает, что при заданной разности плотностей тонкий термоклин (тонкая прослойка между однородными слоями) более неустойчив, так как ему соответствует большее значение N_{\max} . Если

критерий (6.35) будет выполняться в течение достаточно длительного времени, может развиться локальная неустойчивость, что вызовет обрушение волны и образование области мелкомасштабной турбулентности. Этот механизм неустойчивости ограничивает амплитуду внутренней волны.

Согласно [3] условие применимости критерия (6.31), сформулированного для стационарных течений, к анализу устойчивости волнового движения состоит в том, что сдвиг скорости $\frac{du}{dz}$ больше скорости изменения волнового потока

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_{\max} \gg \omega.$$

С учетом (6.33) последнее условие принимает форму

$$\left(\frac{N_{\max}^2}{\omega^2} - 1\right) \quad ak \gg 1. \quad (6.37)$$

Вопрос о выполнимости критерия развития сдвиговой неустойчивости в океане обсуждался в ряде работ [6; 10; 11]. Анализ наиболее крутых и часто встречающихся внутренних волн в океане показал невыполнимость условия (6.35) [11]. В реальном океане часто внутренние волны распространяются на фоне стратифицированных течений. Измерения Беляева и Гезенцевой [17] показали, что при наложении внутренней волны на устойчивый стратифицированный сдвиговый поток наблюдается нарушение критерия устойчивости (6.34) в 30 % случаев. Развитие сдвиговой неустойчивости коротких внутренних волн в неглубоком сезонном термоклине наблюдал Вудс [18]. За счет ветрового перемешивания и ночного охлаждения в сезонном термоклине формировались тонкие слои с большими вертикальными градиентами температуры и плотности. В [18] указывается, что с большими градиентами плотности в этих слоях связаны большие вертикальные градиенты скорости потока. Наложение волнового движения на фоновый поток приводит к потери устойчивости волн в области гребней и подошв.

Так называемая конвективная неустойчивость внутренней волны возникает, если горизонтальная составляющая орбитальной скорости внутренней волны и превысит ее фазовую скорость с [11]. Если $u \geq c$, волна опрокидывается. Этот механизм неустойчивости рассматривался в работе [19], в которой получен следующий критерий развития конвективной неустойчивости:

$$Ri \ll 1 + \frac{k^2}{2}, \quad (6.38)$$

где k_i – соответственно горизонтальная и вертикальная составляющие волнового числа. На первый взгляд условие развития конвективной неустойчивости (6.38) легче осуществимо, чем условие сдвиговой неустойчивости (6.30). Некоторые сопоставления эффективности развития сдвиговой и конвективной неустойчивости в океане приведены в [11]. Согласно оценкам в океане вероятность выполнимости (6.38) выше, чем в (6.31).

Рассмотрим лабораторные эксперименты, проведенные авторами [20; 21], по изучению неустойчивости внутренних волн. Эксперименты проводились в стеклянном лотке длиной 8 м, шириной и высотой 0,6 м. Общая глубина жидкости D была равна 15–22 см. Толщина верхнего пресного слоя составляла от 4 до 11 см. Нижний слой представлял собой раствор соли. Слой переходной солености (пикноклин) подкрашивался. В различных экспериментах его толщина изменялась от 0,5 до 4–5 см. Проводилось измерение профиля плотности $\rho(z)$ до и после эксперимента. Подробно методика создания и измерения внутренних волн дана в следующей главе, где приводится описание эксперимента по взаимодействию поверхностных и внутренних волн. Измерение длин, частот и фазовых скоростей позволило построить дисперсионные кривые для различных случаев плотностной стратификации. В наших экспериментах переходный слой разделяет почти однородные слои жидкости. Профиль $N(z)$ имеет резко выраженный максимум в переходном слое. В этих условиях можно использовать дисперсионное соотношение, полученное для тонкого переходного слоя. Расчеты по (6.21), (6.27) дают хорошее согласие с экспериментальными значениями. Форма волны первой моды зависит от отношения глубины верхнего слоя к длине волны и от соотношения толщины верхнего и нижнего слоев. В случае мелкого пикноклина наблюдается искажение формы волны: гребни уплощаются, подошвы обостряются. Если толщина верхнего слоя больше толщины нижнего, профиль внутренних волн как бы зеркально отражается относительно пикноклина: гребни сужаются и обостряются, подошвы уплощаются. Характерные примеры записей внутренних волн даны на рис. 6.3. Для расчета дисперсионного соотношения второй моды использовалась формула [1]

$$k_2^2 = \frac{3\omega^2}{\varepsilon(\omega^2 - g\Gamma)} \left[-1 + \left(\frac{g\Gamma}{\omega^2} + \frac{1}{9} \left(1 - \frac{g\Gamma}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right], \quad (6.39)$$

где k_2 – волновое число второй моды,

$$\Gamma = \frac{\delta\rho}{\rho_0 \varepsilon \operatorname{ch}^2[2(z-h)\varepsilon^{-1}]}$$

Формула (6.39) получена для жидкости, не ограниченной как сверху, так и снизу. Поскольку волновое движение второй моды локализовано в пикноклине, влиянием свободной поверхности и дна можно пре-небречь. Результаты расчетов по форму-

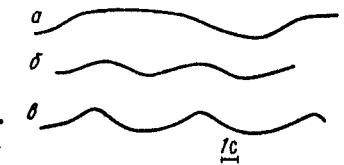


Рис. 6.3. Примеры записи лам (6.21), (6.39) и соответствующие внутренних волн: а) $h < \frac{D}{2}$; б) $h \approx \frac{D}{2}$; в) $h > \frac{D}{2}$. экспериментальные значения с пред-ставлены на рис. 6.4. В некоторых экс-perimentах после создания первой моды наблюдалось разеитие второй моды внутренних волн, представляющей собой чередование сжатий и выпуклостей подкрашенного переходного слоя, распространяющихся вдоль лотка. Первая мода внутренней волны не вызывает де-

Таблица 6.1.

Основные результаты эксперимента по изучению изменения плотности сплошнойированной жидкости при разрушении внутренних волн

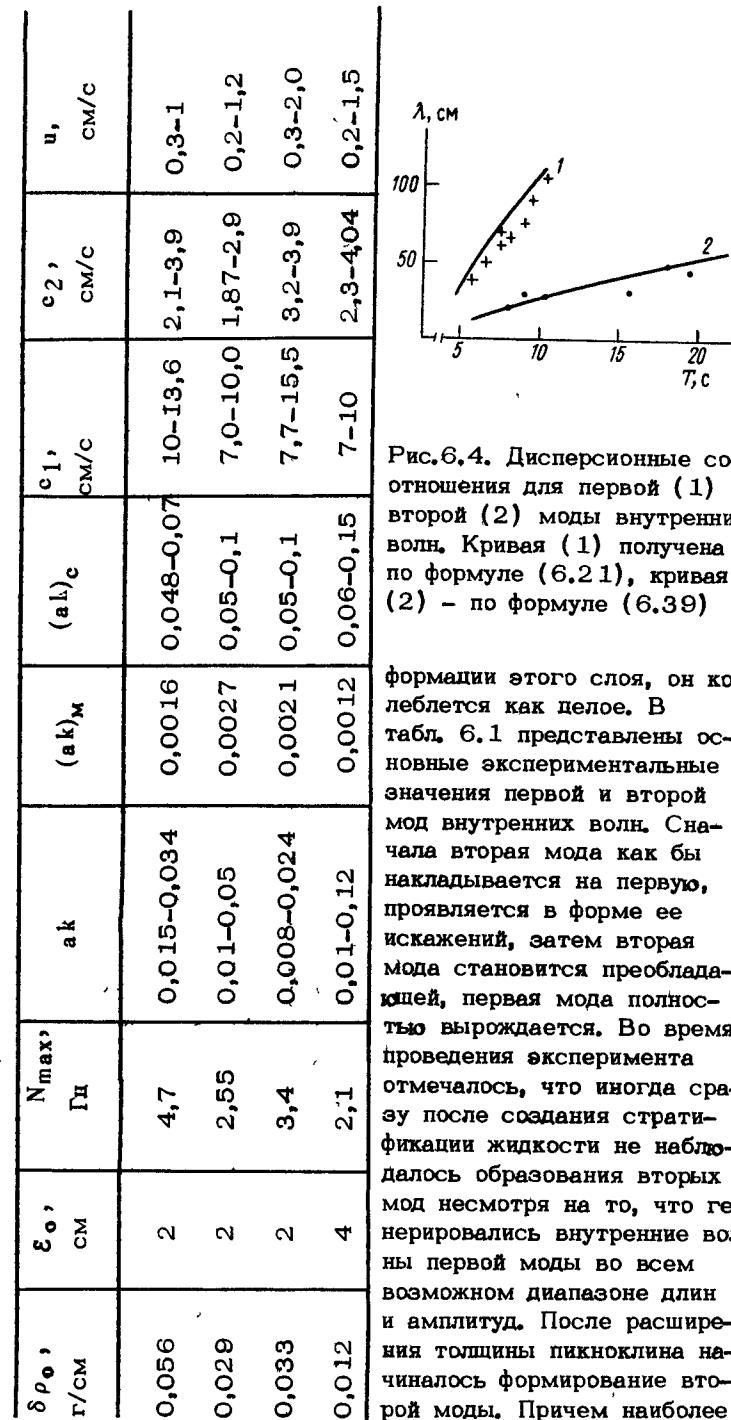


Рис. 6.4. Дисперсионные соотношения для первой (1) и второй (2) мод внутренних волн. Кривая (1) получена по формуле (6.21), кривая (2) – по формуле (6.39)

формации этого слоя, он колеблется как целое. В табл. 6.1 представлены основные экспериментальные значения первой и второй мод внутренних волн. Сначала вторая мода как бы накладывается на первую, проявляется в форме ее искажений, затем вторая мода становится преобладающей, первая мода полностью вырождается. Во время проведения эксперимента отмечалось, что иногда сразу после создания стратификации жидкости не наблюдалось образования вторых мод несмотря на то, что генерировались внутренние волны первой моды во всем возможном диапазоне длин и амплитуд. После расширения толщины пикноклина начиналось формирование второй моды. Причем наиболее

эффективно она образовывалась по мере расширения пикноклина. Таким образом, разрушение первой моды и образование второй происходит, когда толщина переходного слоя превышает некоторое критическое значение. При неизменной крутизне волны критическое значение толщины переходного слоя убывает с увеличением разности плотностей нижнего и верхнего слоев. Можно предположить, что в нашем эксперименте имело место развитие межмодовой неустойчивости внутренних волн. В этом случае энергия первой моды передается модам высшего порядка, которые разрушают моду первого порядка. При создании поверхностных волн процесс развития второй моды происходит быстрее. Профили плотности $\rho(z)$ в нашем эксперименте хорошо аппроксимируются (6.29). Критические значения крутизны волн для развития межмодовой неустойчивости определяются (6.30). Так как в наших экспериментах преобладала вторая мода, то в (6.29) $F(m) = 1,7$ [2]. В табл. 6.1 приводятся теоретические и экспериментальные значения $(ak)_M$. По формуле (6.35) были получены значения крутизны волны $(ak)_C$, необходимые для развития сдвиговой неустойчивости первой моды. Экспериментальные значения (ak) значительно меньше $(ak)_C$. Следует отметить, что в условиях эксперимента выполнялось не условие (6.37), а более слабое соотношение $\frac{N_{\max}^2}{\omega^2} - 1 > (ka)^{-1}$.

Как уже говорилось, развитие второй моды и разрушение первой проходило более эффективно для широких переходных слоев. Как отмечал Тернер [2], сдвиговая неустойчивость наиболее эффективно развивается для тонких переходных слоев, а межмодовые взаимодействия, наоборот, наиболее эффективно развиваются при широких переходных слоях. Это еще раз подтверждает выполнимость в нашем эксперименте условий развития межмодовых взаимодействий. В эксперименте хорошо прослеживались первая и вторая моды. Так как число взаимодействующих мод должно быть равно по крайней мере трем, очевидно наряду с первой и второй модами существовали моды высших порядков, но значительно меньшей амплитуды. Вследствие малости амплитуды и сложной структуры эти моды не наблюдались нами на фоне более интенсивных мод низшего порядка.

На основе экспериментальных данных проверялось условие развития конвективной неустойчивости внутренних волн. Минимальное значение фазовой скорости первой моды c_1 в наших экспериментах равно 7 см/с. Были проведены измерения модуля горизонтальной компоненты скорости орбитального движения первой моды внутренней волны термоанемометром фирмы 'Disa'. Максимальная величина орбитальной скорости в наших экспериментах составляла около 2 см/с. Таким образом, условие конвективной неустойчивости $u \geq c_1$ для первой моды не выполняется.

Фазовая скорость второй моды c_2 значительно меньше c_1 , фазовые скорости высших мод еще меньше. Амплитуда второй моды в экспериментах достигает значений, близких к амплитуде первой моды. Можно предположить, что для второй и высших мод уже выполняется условие конвективного опрокидывания. Кроме того, высшие моды раз-

виваются на фоне сдвиговых течений, образованных первой модой. В этом случае высшие моды, для которых горизонтальная длина волны имеет порядок толщины переходного слоя, являются наиболее быстро растущими возмущениями сдвигового течения [3]. Возможно, что условие развития сдвиговой неустойчивости, которое в наших экспериментах для первой моды не выполняется, будет локально выполняться при наложении волновых движений второй моды на сдвиговое течение, образованное первой модой. Вероятно, что в нашем эксперименте имел место следующий процесс разрушения внутренних волн. Вследствие межмодовых взаимодействий происходит разрушение первой моды и развитие высших мод, прежде всего второй. Сдвиговая или конвективная неустойчивость первой моды не наблюдается. Однако для высших мод условия развития как сдвиговой, так и конвективной неустойчивостей значительно легче. Выполнимость этих условий или одного из них приводит к локальному разрушению второй моды внутренней волны. Разрушение внутренних волн приводит в конечном счете к изменению плотностей стратификации. Разность плотностей нижнего и верхнего слоев уменьшается. Пикноклин расширяется, происходит осолонение верхнего слоя. На рис.6.5 дан пример профилей плотности $\rho(z)$,

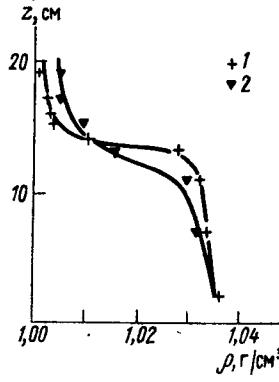


Рис.6.5. Изменение распределения плотности $\rho(z)$ при разрушении внутренних волн: 1 – до эксперимента, 2 – после эксперимента

exp и th в ряд и ограничимся первыми членами. В результате интегрирования (6.40) получаем выражение для плотности потенциальной энергии:

$$E_p = \frac{g \rho_0 D^2}{2} + \frac{D^2 g \delta \rho}{2\epsilon} \left(\frac{h}{2} - \frac{D}{3} \right). \quad (6.41)$$

Для вычисления плотности потенциальной энергии после эксперимента E'_p в формулу (6.41) необходимо поставить значения параметров ρ_0 , h' , ϵ' , $\delta \rho'$, которые аппроксимируют распределение плотности после эксперимента. Разность $E'_p - E_p$ при определен-

ном изменении распределения плотности, например при уменьшении и возрастании ϵ (что и имело место в эксперименте), может быть величиной положительной. Более точный результат дает непосредственное применение формулы (6.40). Численным интегрированием (6.40) получили $E'_p - E_p$. Величина $E'_p - E_p$ составляет от 360 до 600 эрг/см².

Сравним изменение плотности потенциальной энергии с плотностью энергии внутренних волн. Средняя плотность потенциальной энергии первой моды внутренней волны может быть вычислена по формуле (6.28). В экспериментах \bar{E}_p составляет от 2,5 до 10,0 эрг/см². Полная плотность энергии внутренних волн, являющаяся суммой потенциальной и кинетической энергий, будет равна $2\bar{E}_p$. Умножив $2\bar{E}_p$ на j (число внутренних волн, созданных волнопродуктором во время эксперимента), получим суммарную величину плотности энергии внутренних волн, поступившей от волнопродуктора к внутренним волнам. Отношение $(E'_p - E_p)/(2j\bar{E}_p)$ составляет в среднем от 0,03 до 0,10, т.е. от 3 до 10 % энергии внутренних волн превращается в потенциальную энергию стратифицированной жидкости.

На основе проведенных экспериментов можно предположить, что потенциальная энергия стратифицированной жидкости возрастает в результате того, что разрушающиеся внутренние волны совершают работу против сил плавучести. Разрушение первой моды внутренних волн происходит в результате развития межмодовых взаимодействий и передачи энергии первой моды, возбуждаемой внешним источником, к модам высших порядков. Часть энергии первой моды в конечном счете превращается в потенциальную энергию жидкости.

§ 6.5. Генерация внутренних волн

Механизмы генерации внутренних волн очень разнообразны. Внутренние волны в океане развиваются под действием различных атмосферных эффектов, таких, как атмосферные фронты, колебания давления и ветра. Внутренние волны возникают под действием приливообразующих сил, при подвижке участков дна, при резонансном взаимодействии с поверхностными волнами, при обтекании стратифицированным течением неровностей океанического дна и ряда других факторов. Так как диапазон длин и периодов внутренних волн в океане очень широк и они имеют многомодовую структуру, действие различных механизмов генерации изменяется в зависимости от параметров внутренних волн.

Обстоятельный обзор различных механизмов генерации внутренних волн, сравнение скорости роста вызванных им внутренних волн сделал Торп [22]. Мюллер и Олберс [23], Ермаков [24] провели со-поставление некоторых механизмов генерации и диссиляции внутренних волн и предложили схемы баланса энергии внутренних волн. Генерация внутренних волн колебаниями атмосферного давления, лока-

лизованными начальными возмущениями, касательным напряжением ветра, изложена в монографиях Черкесова [4], Миропольского [5]. Следуя [3; 5; 22], опишем основные механизмы генерации внутренних волн.

Под атмосферного давления, перемещающееся над океаном, может содержать волновые числа и периоды, приводящие к резонансному механизму генерации внутренних волн. Такое возбуждение внутренних волн подобно филипповскому механизму генерации поверхностных волн пульсациями атмосферного давления. Для эффективного развития внутренней волны волновое число должно быть меньше или равно величине, обратной средней глубине термоклина [3]. Передача энергии к внутренней волне увеличивается, если скорость перемещения поля атмосферного давления равна фазовой скорости внутренней волны. Фазовые скорости внутренних волн имеют величину около 1 м/с. При скоростях ветра, больших фазовой скорости внутренних волн, последние распространяются почти под прямым углом к ветру.

Внутренние волны могут возбуждаться колебаниями потока плавучести на поверхности океана [5]. Флуктуирующий поток тепла на поверхности или изменение температуры поверхности приводят к изменениям давления на нижней границе экмановского пограничного слоя. Эти изменения давления генерируют внутренние волны в нижележащих слоях.

Генерация внутренних волн происходит под действием перемещающегося касательного напряжения ветра. Согласно [5] за время, равное 10 периодам внутренней волны, ее амплитуда достигает 10 м. Торп [22] показал, что колебания давления, скорости ветра и потока плавучести дают примерно одинаковые скорости роста амплитуды внутренних волн – от 1 до 5 м в сутки. Наиболее интенсивно возбуждаются внутренние волны флуктуациями напряжения трения ветра. Пребывание того или иного механизма атмосферной генерации внутренних волн зависит от конкретной гидрометеорологической ситуации. Наиболее эффективно энергия от атмосферных источников передается к низшим модам внутренних волн, которые, как правило, и преобладают в верхнем слое океана.

Стратифицированный поток, обтекающий неровности дна, образует внутренние волны. Такой механизм генерации внутренних волн действует и в атмосфере [25]. Стационарный поток создает стоячие волны, называемые в метеорологии свободными. Интересные иллюстрации такого механизма генерации приведены в монографии Тернера [2]. Внутренние волны имеют длины порядка характерных неровностей дна. Величину потока энергии к внутренним волнам, генерируемым при обтекании донных препятствий, оценил Белл [26].

Влияние подводного хребта на генерацию внутренних волн под действием периодически движущихся возмущений давления рассмотрено в [27]. При определенной высоте подводного хребта амплитуда внутренних волн резко возрастает не только в слое термоклина, но и на поверхности океана.

Течение со сдвигом скорости по вертикали существенно изменяет условия возбуждения внутренних волн. Во-первых, генерация внутрен-

них волн может происходить вследствие потери устойчивости сдвигового стратифицированного течения. Наиболее эффективно образуются внутренние волны с длинами, равными 6–7 толщинам слоя с максимальным сдвигом скорости [28]. Так как средние толщины слоев с максимальным вертикальным сдвигом скорости достигают нескольких десятков метров, то внутренние волны, возбуждаемые вследствие потери устойчивости, имеют длины порядка сотни метров [24]. Во-вторых, при наличии течения со сдвигом скорости эффективность генерации внутренних волн под действием других факторов возрастает. Например, скорость генерации внутренних волн с малыми волновыми числами на сдвиговом течении пульсациями атмосферного давления увеличивается примерно в 4 раза по сравнению со скоростью генерации без сдвигового течения [5]. Внутренние волны с большими волновыми числами растут экспоненциально; это явление может приводить к образованию локального максимума в спектрах внутренних волн на высоких частотах [5].

В Мировом океане также возбуждаются внутренние волны приливного периода. Энергия волн приливного периода часто преобладает над энергией волн других периодов. Внутренние волны приливного периода генерируются в шельфовой зоне поверхностными приливами [29] и распространяются от берега в сторону океана. В прибрежной зоне внутренние приливные волны существуют в форме стоячих волн, при удалении от берега внутренние волны превращаются в бегущие.

Внутренние волны, распространяясь в верхнем термоклине, подвергаются действию ветрового волнения, которое может как усиливать, так и ослаблять их. Действие поверхностного волнения зависит от соотношения модовой структуры внутренних волн и скорости ветра. Ермаков [24], анализируя баланс энергии низших мод внутренних волн, сделал вывод о его локальности. Локальность баланса энергии заключается в том, что внутренние волны низших мод затухают в том же диапазоне частот и длин волн, в котором в основном происходит их возбуждение. В схему баланса энергии низших мод внутренних волн Ермаковым не включены короткие внутренние волны ($\lambda < 100$ м). Для волн этого диапазона гипотеза локальности баланса энергии не выполняется, так как эти волны могут генерироваться вследствие неустойчивости более длинных волн. В [24] проведено сравнение следующих механизмов затухания внутренних волн: рассеяние на поверхностных волнах, на неровностях дна, рассеяние на среднемасштабной турбулентности, диссипация из-за турбулентной вязкости. Время затухания низших мод внутренних волн вследствие указанных факторов и время их генерации имеют одинаковый порядок.

Изучение вынужденных внутренних волн в стратифицированном море, покрытом льдом, проводили Букатов и Черкесов [30; 31]. Авторы определили роль внутренних волн в формировании колебаний ледяного поля, зависимость модовой структуры внутренних волн от параметров ледяного поля, скорости дрейфа льда.

В заключение рассмотрим возбуждение внутренней волны поверхностными волнами [2, 3]. Пусть на поверхности океана распространяются

две поверхностные волны с частотами ω_1 , ω_2 и волновыми числами k_1, k_2 . Их волновые числа и частоты связаны между собой дисперсионным соотношением вида $\omega_j = \omega_s(k_j)$, где $k_j = 1, 2$. В результате взаимодействия этих двух волн в уравнении, описывающем возвышение поверхности, возникает член вида $\sin(k_1 x - \omega t) \sin(k_2 x - \omega t)$. Этот член описывает волновое возмущение с волновыми числами и частотами, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$k_3 = k_1 + k_2,$$

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2.$$

В частности, может возникнуть ситуация, когда $k_3 = k_1 - k_2$ и $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ будут в свою очередь удовлетворять дисперсионному соотношению для внутренних волн $\omega = \omega_1(k)$. Например, если $|k_1| \approx |k_2|$, то разность частот ($\omega_1 - \omega_2$) будет мала, разность волновых чисел $|k_1 - k_2|$ при этом может быть сравнимой с $|k_1|$ и $|k_2|$. Две поверхностные волны и одна внутренняя образуют взаимодействующую триаду. Процесс взаимодействия двух волн, приводящий к порождению третьей волны, называется взаимодействием второго порядка. Если скорость внутренней волны равна скорости распространения одной из поверхностных волн, наступает резонанс: взаимодействующие волны в течение длительного времени остаются в фазе, происходит непрерывный поток энергии к внутренней волне. В действительности резонансный рост ограничен величиной энергии в поверхностных волнах, вязкой диссипацией и некоторыми другими факторами. После того как возросла энергия внутренней волны, она вместе с одной из поверхностных может составить пару волн, взаимодействие которых порождает другую поверхностную волну. В резонансной триаде происходит передача энергии от поверхностных волн к внутренним и обратно. Резонансный механизм возбуждения внутренних волн поверхностными исследовался Боллом [32], Торпом [33]. Последний получил выражение для скорости роста амплитуды внутренней волны в глубоком океане:

$$\frac{da_1}{dt} \approx \frac{1}{2} (1 + \cos \alpha) \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{(k_1 k_2)^{\frac{1}{2}}} (a_1 k_1)(a_2 k_2) \exp\left\{-|k_1 - k_2| h\right\},$$

где a_1, a_2 – амплитуды поверхностных волн, α – угол между волновыми векторами поверхностных волн. В [34] исследовалось в лабораторных условиях взаимодействие двух стоячих поверхностных волн в стратифицированной жидкости, которое приводило к образованию внутренней волны. На рис. 6.6 изображены условия резонанса двух поверхностных волн, распространяющихся в противоположные стороны [2]. Внутренняя волна распространяется в ту же сторону, что и одна из поверхностных. Поверхностные волны удовлетворяют дисперсионному соотношению, изображенном кривыми OS_1, OS_2 . Дисперсионные кривые внутренних волн изображаются кривыми OJ_1, OJ_2 . Поверхностная волна А может принадлежать только двум триадам AB_1C_1 и AB_2C_2 . Такое ограничение возникает вследствие рассмотрения

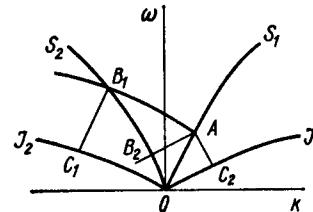


Рис. 6.6. Условие резонансного взаимодействия двух поверхностных и одной внутренней волн. Поверхностная волна А принадлежит двум триадам $A B_1 C_1$ и $A B_2 C_2$ [2]

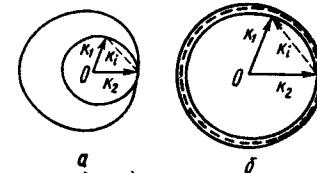


Рис. 6.7. Геометрические места волновых векторов k_1, k_2 поверхностных волн при их резонанском взаимодействии с внутренней волной с волновым вектором k_1 :
а) $|k_1| \neq |k_2|$; б) $|k_1| \approx |k_2|$ [2]

волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Если направление распространения волн не накладывается никаких ограничений, поверхность волна А может уже взаимодействовать с бесконечным набором поверхностных волн. На рис. 6.7 изображено геометрическое место волновых чисел k_1, k_2 поверхностных волн произвольного направления, образующих резонансную триаду с внутренней волной с волновым числом k_1 . Первый случай имеет место, когда частоты поверхностных волн сильно отличаются. Во втором случае частоты и модули волновых чисел приблизительно совпадают. Если поверхности волны имеют различные направления, волновое число возбуждаемой внутренней волны может быть примерно равным $|k_1|$ или $|k_2|$.

При взаимодействии двух поверхностных волн примерно одного направления возбуждаемая внутренняя волна имеет волновое число, много меньшее волновых чисел поверхностных волн и движется примерно под прямым углом к ним. Прямые эксперименты, демонстрирующие взаимодействие бегущих поверхностных волн с внутренними, не были выполнены из-за сложностей, возникающих при нарушении стратификации поверхностными волнами [2]. В [35; 36] исследовано взаимодействие поверхностных и внутренних волн с учетом спектрального состава поверхностных волн и многомодовых взаимодействий. Перенос энергии от спектра поверхностных волн к внутренним рассмотрен в [37]. Коэффициенты взаимодействия поверхностных и внутренних волн автор получил в общей форме из уравнения движения стратифицированной жидкости. Спектральное уравнение переноса, описывающее поток энергии от поверхностных волн к внутренним, для слабо взаимодействующего стохастического ансамбля волн записано в форме Хассельмана. Взаимодействие поверхностных волн с внутренними рассмотрено для трехслойной модели глубокого океана с постоянной частотой Вайселя в промежуточном слое и однородными верхним и нижним слоями. Отклик внутренних волн максимальен для первой моды. Волновой вектор внутренних волн приблизительно

перпендикулярен волновым векторам поверхностных волн. Скорость переноса зависит от разности частот поверхностных и внутренних волн, стратификации, глубины и толщины термоклина, ширины спектра поверхностных волн и интенсивности волнения. Для главного океанического термоклина перенос энергии мал. Для сезонного термоклина разность частот поверхностных и внутренних волн много меньше, коэффициенты взаимодействия и скорость переноса энергии много больше, чем в случае главного термоклина. Для умеренного поверхностного волнения характерное время взаимодействия равно примерно суткам. В глобальном масштабе эффект взаимодействия поверхностных и внутренних волн должен преобладать в высоких широтах, где, несмотря на заглубление термоклина, происходит увеличение взаимодействия из-за увеличения интенсивности волнения.

§ 6.6. Спектральные и статистические характеристики внутренних волн

На основе измерений временных флуктуаций гидрологических элементов (чаще всего температуры и скорости) в фиксированной точке при помощи зажоренных буев можно получить частотные статистические характеристики внутренних волн. Описание спектральных характеристик внутренних волн дано в [3; 5; 6]. Частотные спектры пульсаций температуры и скорости внутренних волн, измеренные в разных областях Мирового океана, обладают определенной общностью. Спектры внутренних волн имеют почти непрерывный вид во всем диапазоне частот без ярко выраженных пиков, кроме инерционной и приливной частот [5; 6]. Энергия на приливной и инерционной частотах больше, чем энергия внутренних волн на других частотах. Спектральные плотности пульсаций температуры $S_T(\omega)$ и скорости $S_u(\omega)$ убывают с ростом частоты по степенному закону $\omega^{-\alpha}$. Для $S_T(\omega)$ величина α лежит в пределах $1 \leq \alpha \leq 4$; для $S_u(\omega)$ — в пределах $1 \leq \alpha \leq 3$ [5]. В спектрах $S_u(\omega)$ пик на инерционной и приливной частотах выражен гораздо сильнее, чем в спектре $S_T(\omega)$. Монотонный характер спектра указывает на то, что в океане обычно присутствует статистический ансамбль внутренних волн со случайными фазами и амплитудами. Одномерные пространственные спектры $S(k)$ обычно имеют монотонный вид, спадающий с ростом k : $S(k) \sim k^{-\beta}$, где $1 \leq \beta \leq 4$. Результаты измерений двухмерной горизонтальной структуры поля внутренних волн весьма различны. Некоторые данные говорят о горизонтальной изотропии поля внутренних волн, в других обнаружена горизонтальная анизотропия [5]. Гарретт и Манк [38] на основе анализа наиболее достоверных спектров предложили модель спектра внутренних волн, представляющую собой аппроксимацию осредненных многочисленных измерений внутренних волн в разных точках Мирового океана при различных условиях. Описание спектра внутренних волн Гарретта и Манка можно найти в [3]. Однако их модель не предполагает реального физического механизма, который формировал бы этот универсальный спектр.

Следует отметить некоторые свойства короткопериодных внутренних волн, распространяющихся в верхнем термоклине [5]. Короткопериодные внутренние волны, как правило, локализованы в пространстве и распространяются отдельными квазисинусоидальными пугами, содержащими от двух до нескольких десятков периодов. Колебания вне пугов волн обладают гораздо меньшей интенсивностью, чем внутри пуга. Частота волн в группе близка к максимальной частоте Брента-Вийсяля. Исследования при помощи распределенных датчиков температуры [39] показывают, что короткопериодные внутренние волны, как правило, одномодовые. Синфазность колебаний на разных уровнях указывает на преобладание низшей моды.

Функции распределения внутренних волн исследованы слабо. Число работ, в которых анализируются эмпирические функции распределения внутренних волн, невелико. Некоторый обобщающий анализ эмпирических функций распределения проведен Миропольским [5]. Обычно строятся гистограммы распределения флуктуаций температуры $p(T)$ (изменение температуры на фиксированном горизонте) и гистограммы распределения изотерм $p(\zeta)$ (изменение глубины фиксированной изотермы). В [40] были построены гистограммы распределения высот внутренних волн, полученные распределения значительно отличаются от закона распределения Рэлея, хорошо выполняющегося для поверхностных волн. В линейном приближении смещение уровня, вызванное внутренней волной, в данной точке можно рассматривать как сумму большого числа независимых величин, имеющих случайные фазы. Вследствие центральной предельной теоремы распределение смещения ζ будет гауссовым [5]. В случае отсутствия неадиабатических эффектов колебания глубины изотерм можно отождествить с колебанием уровня, т.е. распределение $p(\zeta)$ должно быть гауссовым. При этом колебания температуры на фиксированном горизонте тоже должны иметь гауссово распределение, так как в линейных внутренних волнах $T(t)$ связано с $\zeta(t)$ линейным преобразованием $T(t) =$

$$= \zeta(t) \frac{dT}{dz}, \quad \text{где } \frac{dT}{dz} = \text{средний градиент температуры. Одна-}$$

ко полученные эмпирические распределения флуктуаций температур $p(T)$ и изотерм $p(\zeta)$ существенно отличаются от гауссова. Слабая нелинейность внутренних волн может вызвать отклонение функций распределения от нормального закона [5]. Распределение возвышений уровня во внутренних волнах, так же как и в поверхностных волнах, при учете нелинейности дается в форме ряда Грама-Шарлье [5]:

$$p(\zeta) = (2\pi\delta^2)^{-1/2} e^{-f/2} \left[1 + \frac{1}{6}sH_3 + \left(\frac{1}{24}BH_4 + \frac{1}{72}s^2H_6 \right) + \dots \right],$$

где $f = \frac{\zeta}{\delta}$, H_3 , H_4 , H_6 — полиномы Эрмита, s , B — семиинварианты, которые определяются нелинейными взаимодействиями. Для линейных волн $s = B = 0$ и ряд Грама-Шарлье соответствует

обычному закону Гаусса. Эмпирическое распределение гораздо лучше согласуется с законом Грама -Шарлье, чем с нормальным. Таким образом, отклонение эмпирических распределений от нормального закона может быть объяснено нелинейностью внутренних волн.

Л и т е р а т у р а

1. Краусс В. Внутренние волны. - Л.: Гидрометеоиздат, 1968.
2. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. - М.: Мир, 1977.
3. Филипп О.М. Динамика верхнего слоя океана. - Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
4. Черкасов Л.В. Гидродинамика волн. - Киев: Наукова думка, 1980.
5. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. - Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
6. Физика океана. Т.2. Гидродинамика океана. - М.: Наука, 1978.
7. Эккарт К. Гидродинамика океана и атмосферы. - М.: ИЛ, 1963.
8. Лайхтман Д.Л., Леонов А.И., Миропольский Ю.З. Об интерпретации измерений статистических характеристик скалярных полей в океане при наличии внутренних гравитационных волн. - "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1971, т.7, № 4, 448-454.
9. Кац А.В., Спевак И.С. Восстановление спектров морского волнения по измерениям движущимися датчиками. - "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1980, т. 16, № 3, 294-304.
10. Миропольский Ю.З., Филюшкин Б.Н. Исследование флуктуаций температуры в верхнем слое океана в масштабах внутренних гравитационных волн. - "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1971, т.7, № 7, 778-797.
11. Физика океана. Т.1. Гидрофизика океана. - М.: Наука, 1978.
12. Эккарт К. Внутренние волны в океане. - В кн.: Внутренние волны. - М.: Мир, 1964.
13. Смирнов В.Н. Колебания ледяного покрова, обусловленные внутренними волнами Ледовитого океана. - ДАН СССР, 1972, т.206, № 5, 1106-1108.
14. Глинский Н.Т. Внутренние волны. - М.: Наука, 1973.
15. Davis R.E., Acrivos A.M. The stability of oscillatory internal waves. - 'J. Fluid Mech.', 1967, vol.30, p.4, 723-736.
16. Воронович А.Г. Резонансные трехволниевые взаимодействия внутренних волн. - "Океанология", 1975, т.10, № 5, 773-780.
17. Беляев В.С., Гезенцев А.И. О сдвиговой неустойчивости внутренних волн в океане. - "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1978, т. 14, № 6, 634-655.

18. Woods I.D. An investigation of some physical processes associated with the vertical flow of heat through the upper ocean. - 'Meteorol. Mag.', 1968, vol.97, N 1148, p.65-72.
19. Orlansky I., Bryan K. Formation of the thermoclinic step structure by large-amplitude internal gravity waves. - 'J. Geophys. Res.', 1969, vol.74, N 28, p. 6975-6983.
20. Кононкова Г.Е., Показеев К.В. Экспериментальное исследование взаимодействия поверхностных и внутренних волн. - "Океанология", 1980, т. 20, № 6, 1004-1009.
21. Кононкова Г.Е., Показеев К.В., Гонопольский А.В. Взаимодействие внутренних волн и изменение стратификации жидкости. - "Океанология", 1981, т. 21, № 6, 978-982.
22. Thorpe S.A. The excitation, dissipation and interaction of internal waves in deep ocean. - 'J. Geophys. Res.', 1975, vol.80, N 3, p.328-338.
23. Muller P., Olbers D.I. On the dynamics of internal waves in the deep ocean. - 'J. Geophys. Res.', 1975, vol.80, N 27, p.3848-3860.
24. Ермаков С.А. О локальности баланса энергии океанических внутренних волн низших мод. - Горький, Институт прикладной физики АН СССР. 1981, препринт № 27, с. 17
25. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. - М.: Мир, 1978.
26. Bell T.H.Jr. Topographically generated internal waves in the open ocean. - 'J. Geophysical Res.', 1975, vol.80, N 3, p.320-327.
27. Букатов А.Е., Букатова О.М. Волновое движение двухслойной жидкости в канале переменной глубины. В кн.: Поверхностные и внутренние волны. - Севастополь: Изд. МГИ АН УССР, 1978, 157-167.
28. Hasel P. Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows. - 'J. Fluid Mech.', 1972, vol.51, p.1, p.39-61.
29. Ратри М. О возникновении внутренних приливных волн в прибрежной зоне. - В кн.: Внутренние волны. - М.: Мир, 1964.
30. Букатов А.Е., Черкасов Л.В. Влияние ледяного покрова на внутренние волны, генерируемые атмосферными возмущениями в непрерывно стратифицированном море. - "Проблемы Арктики и Антарктики", 1974, вып. 43-44, 106-111.
31. Букатов А.Е., Черкасов Л.В. Неустановившиеся колебания дрейфующего в неоднородном море ледяного покрова, генерируемые периодическими возмущениями. - "Тр. НИИ Арктики и Антарктики", 1979, т. 357, 77-84.
32. Ball K. Energy transfer between external and internal gravity waves. 'J. Fluid Mech.', 1964, vol.19, p.3, 465-478.
33. Thorpe S.L. On the interactions in a stratified fluid. - 'J. Fluid Mech.', 1966, vol.24, p.4, 737-751.
34. Joyce T.M. Nonlinear interactions among standing surface and internal gravity waves. - 'J. Fluid Mech.', 1974, vol.63, p.4, 801-825.
35. Бреховских Л.М., Гончаров В.В., Курте -

- лов В.М., Наугольных К.А. О резонанском возбуждении внутренней волны при нелинейном взаимодействии поверхностных волн. — "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1972, т. 8, № 2, 192–203.
36. Бrehovskikh L.M., Goncharov V.B., Kуртев-пов В.М., Наугольных К.А. О взаимодействии внутренних волн в океане с поверхностными. — "Океанология", 1975, т. 15, № 2, 205–212.
37. Olbers D.I., Hertenich K. The spectral energy transfer from surface waves to the internal waves. — 'J. Fluid Mech.', 1979, vol.92, p.2, 349–379.
38. Garrett C.J., Munk W. Space-time scales of internal waves: A progress report. — 'J. Geophys. Res.', 1975, vol.80, N 3, p.291–297.
39. Brekhovskikh L.M., Konjaev K.V., Sabinin K.D., Sericov N.N. Short period internal waves in the stratified fluid. — 'J. Fluid Mech.', 1966, vol.24, p.4, 737–751.
40. Карсона А., Коллэвей Э. Два частотных спектра короткопериодных внутренних волн близ побережья Южной Калифорнии. — В кн.: Внутренние волны. — М.: Мир, 1964.

ГЛАВА VII

ВОЗДЕЙСТВИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТНЫЕ

§ 7.1. Формы проявления внутренних волн на поверхности океана

Исследования внутренних волн в океане обычными океанографическими методами сопряжены с большими трудностями. В последние годы интенсивно развиваются методы дистанционного исследования внутренних волн по их проявлениям на свободной поверхности океана.

При дистанционном зондировании поверхности используются оптические и радиолокационные методы, а также метод регистрации теплового излучения поверхности океана в инфракрасном диапазоне спектра. Внутренние волны изменяют некоторые характеристики свободной поверхности океана, которые в свою очередь могут быть обнаружены тем или иным дистанционным методом.

Одной из форм проявления внутренних волн являются слики, т.е. участки поверхности океана с относительно слабой интенсивностью коротковолнового ветрового волнения [1,2]. Кроме внутренних волн слики могут вызываться и другими причинами, например циркуляционными ячейками Ленгмюра, загрязнениями поверхности океана поверхностью-активными веществами, течениями. Слики, вызванные внутренними волнами, имеют вид параллельных полос, которые хорошо видны на поверхности. Обычно слики наблюдаются при слабом ветре, скоростью до 5 м/с. Скорость перемещения сливовых полос совпадает с фазовой скоростью волн, вызвавших слики, а расстояние между сликами равно длине внутренней волны. Ширина сливовых полос уменьшается с увеличением скорости ветра. Амплитуды внутренних волн, образующих слики, имеют значения от 1,5 до 8 м, соответствующие значениям горизонтальных скоростей на поверхности равны 5–10 см/с [1;2].

Установить связь сликов с внутренними волнами позволили исследования, в которых производилась их одновременная регистрация. В работе [3] наблюдались слики с пространственными масштабами око-

ло 100 м. Производились и измерения внутренних волн, которые возникали на шельфе при резком изменении глубины. Установлена высокая корреляция между сликами и внутренней волной. Длина первой моды внутренних волн хорошо согласуется с размерами сликсов. В [4] слики на поверхности океана наблюдались из космоса с искусственного спутника оптическими методами. Длины внутренних волн изменялись от 300 до 4000 м. Пространственная ориентация волн и сликсов определялась топографией дна. Так как волны возникали при изменении глубины шельфа, они и вызванные ими слики были параллельны изобатам. В работе приведены впечатляющие фотографии сликсов, полученные из космоса.

При получении оптического изображения поверхности океана определяющую роль играет среднеквадратичный наклон поверхности [5]. Внутренние волны приводят к изменению среднеквадратичного наклона. В пределах сликсов среднеквадратичный наклон уменьшается, поэтому наблюдается выглаживание поверхности. Согласно [6; 7] вариация наклонов $\Delta \delta^2$ поверхности в сликсах под действием внутренних волн (при малой величине отношения орбитальной скорости частиц u к внутренней волне к ее фазовой скорости C) имеет вид

$$\Delta \delta^2 = \delta_0^2 \frac{2A}{C},$$

где δ_0 - дисперсия наклонов поверхности при $u = 0$; A - безразмерный коэффициент, зависящий от скорости ветра и фазовой скорости внутренней волны.

Некоторые результаты исследования сликсов, вызванных внутренними волнами, в 26-м рейсе научно-исследовательского судна "Дмитрий Менделеев" изложены в [2]. Величина составляющих спектра ветровых волн измерялась оптическим спектролонгографом на длинах 3,5; 7; 10; 17 см. Величина спектра поверхностных волн на длине 1,6 см измерялась радиолокатором. Установлено сильное воздействие внутренних волн на величину спектральных составляющих с длинами волн 1-4 см. Изменение величины спектра коррелировано с внутренней волной.

При радиолокационном зондировании поверхности океана в СВЧ диапазоне параметром, определяющим радиолокационное изображение морской поверхности, является высокочастотная поверхность рябь с резонансной длиной волны, т.е. с длиной волны, равной длине волны излучения радиолокатора. Радиоизображение сликсов связано с изменением параметров высокочастотной ряби под действием внутренних волн [1; 8; 9]. Согласно [9] интенсивности радиосигналов, отраженных от сликсов и от поверхности вне сликсов, существенно различаются. На этом различии основан один из методов определения параметров сликсов и вызвавших их внутренних волн радиолокационным методом.

Изменение характеристик поверхности под действием внутренних волн позволяет осуществлять дистанционное зондирование внутренних

волн не только оптическими и радиолокационными методами, но и по собственному тепловому излучению свободной поверхности океана в инфракрасной (ИК) области спектра [10; 11]. В рамках международной программы Jasin = 78 был проведен эксперимент с целью определения возможности обнаружения внутренних волн по тепловому излучению поверхности в ИК диапазоне. Наблюдения за полем внутренних волн выполнялись с дрейфующего судна с помощью трех связок распределенных датчиков температуры. Связки датчиков охватывали верхний квазиоднородный слой и сезонный термоклин. Радиационная температура поверхности океана измерялась с помощью ИК радиометра в диапазоне 8-12 мкм чувствительностью не ниже 0,03 °С. В результате статистической обработки данных измерений внутренних волн и температуры поверхности установлена корреляция колебаний температуры в термоклине и радиационной температуры свободной поверхности океана. При этом показана возможность определения масштабов внутренних волн, зон конвергенции и дивергенции на основе ИК измерений радиационной температуры поверхности океана.

Связь внутренних волн и радиационной температуры опосредована. Дело в том, что изменение радиационной температуры поверхности океана связано с вариациями термодинамической температуры, среднеквадратичного наклона поверхности и коэффициента излучения морской воды [12], которые изменяются под действием внутренних волн. О том, что внутренние волны определяют среднеквадратичный наклон поверхности, уже говорилось. Кроме этого, при измерении ИК излучения изменение площади свободной поверхности океана, обозреваемой ИК радиометром, однозначно связано с вариациями среднеквадратичного наклона поверхности [10]. Рассмотрим, как внутренние волны изменяют термодинамическую температуру и коэффициент излучения морской воды. Термодинамическое состояние тонкого поверхностного слоя океана и термодинамическая температура сильно зависят от высокочастотной части спектра поверхностных волн. Капиллярные волны оказывают значительное влияние на поток тепла и перепад температур в тонком инверсионном слое [10]. Внутренние волны, изменяя высокочастотную часть спектра поверхностных волн, в капиллярном и гравитационно-капиллярном диапазонах приводят к изменению термодинамической температуры. Излучательная способность поверхности океана может изменяться при перераспределении поверхностно-активных веществ скоростным полем внутренней волны [13]. Пленки поверхностно-активных веществ биологического происхождения или как продукт деятельности человека распространены в океане практически повсеместно. Поверхностно-активные вещества играют важную роль в формировании сликсов [14]. Изменение концентрации поверхностно-активных веществ приводит к модуляции коэффициента затухания поверхностных волн. В областях конвергенции поверхности склонности внутренней волны концентрация возрастает, в областях дивергенции она уменьшается. Этот механизм образования сликсов существенно только для сантиметровых волн, так как только для них существенно затухание волн при наличии пленок поверхностно-активных веществ.

Существует еще один вид проявления внутренних волн на поверхности океана. Распространяясь в термоклине, внутренние волны вызывают низкочастотные колебания свободной поверхности. Амплитуда этих колебаний поверхности незначительна (сантиметры и меньше), она пропорциональна амплитуде внутренней волны и величине скачка плотности (см. формулу (6.44)). Тщательно выполненные лабораторные эксперименты доказали связь низкочастотных колебаний поверхности с параметрами внутренних волн [15]. Колебания поверхности, индуцированные внутренней волной, удовлетворяют дисперсионному соотношению для внутренних волн. В принципе по спектру низкочастотных колебаний поверхности можно определить спектр внутренних волн. Анализ измерений колебаний поверхности льдин в арктическом бассейне с применением прецизионных уклонометров показал связь этих колебаний с низшими модами внутренних волн, возникающих в хорошо стабилизованных арктических водах [13, гл. VI]. Механизм влияния внутренних волн на формирование изображений поверхности океана, получаемых дистанционными способами, и формы проявления внутренних волн на поверхности океана могут быть представлены при помощи схемы, изображенной на рис. 7.1. Как следует из ее рассмотрения, динамика воздействия внутренней волны на поверхность играет определяющую роль при использовании любого из дистанционных методов построения изображения морской поверхности. Поэтому исследование воздействия внутренних волн на спектр ветровых волн представляется очень важным. Как уже говорилось, изменения спектра поверхностных волн под действием внутренних обнаружены оптическими и радиолокационными методами.

Натурное измерение ветровых волн, изменяющихся под действием внутренних волн, выполнено в [6; 7]. Измерения проводились в фьорде с ярко выраженной плотностной стратификацией. Внутренние волны возбуждались медленно движущимся кораблем, так как его осадка и скорость движения, глубина слоя скачка были таковы, что возникало явление "мертвой воды". В слике спектр наклонов поверхностных волн для длин, меньших 10 см, значительно ниже спектра вне слик. Однако эта единственная работа не разрешила, а скорее поставила проблему изучения изменения спектров поверхностных волн под действием внутренних волн.

§ 7.2. Влияние внутренних волн на регулярные поверхностные волны

Вопрос воздействия регулярной внутренней волны на регулярные монохроматические гравитационные поверхностные волны впервые был рассмотрен Филлипсом [12, гл. II; 16]. Следуя [12, гл. II], рассмотрим этот процесс. Внутренняя волна, распространяясь в океанском термоклине, создает в поверхностном слое периодическую пространственную структуру течений, обусловленную орбитальными движениями частиц воды во внутренней волне. Длинная внутренняя волна создает поверхно-

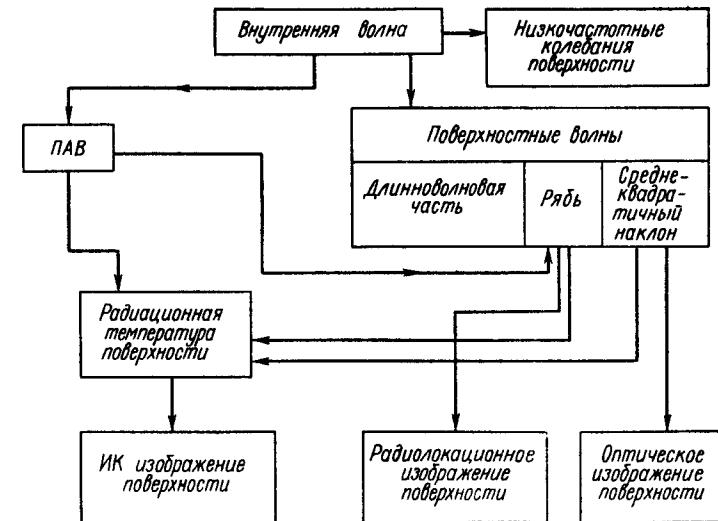


Рис. 7.1. Схема влияния внутренней волны на формирование радиолокационного, оптического и ИК изображения поверхности океана и формы проявления внутренней волны на поверхности

ное течение практически только с горизонтальной составляющей скорости $u = u_0 \sin [K(X - Ct)]$,

где K, C – волновое число и фазовая скорость внутренней волны, u_0 – амплитуда поверхности отной скорости. В дальнейшем в гл. 7 строчные буквы c, k, ω, f обозначают фазовую скорость, волновое число и частоты поверхностных волн, а прописные – C, K, Ω, F – соответствующие параметры внутренней волны. Для коротких гравитационных волн поверхностное течение, индуцируемое внутренней волной, можно считать не зависящим от глубины, поскольку горизонтальные масштабы внутренних волн (сотни метров) значительно превосходят масштабы поверхностных волн (метры и сантиметры).

Таким образом, вопрос о воздействии внутренней волны на поверхность сводится к рассмотрению трансформации поверхностной волны на пространственно неоднородных течениях, индуцированных внутренней волной. Наиболее просто эта задача решается в случае параллельного распространения поверхностных и внутренних волн. При этом можно использовать законы сохранения аналогично тому, как это делается при распространении волн на неоднородном течении. Пусть гравитационная волна распространяется в ту же сторону, что и внутренняя. В системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью внутренней волны C , закон сохранения волновых векторов [12, гл. II] принимает вид

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\omega - k(C - u)] = 0.$$

Для установившихся поверхностных волн

$$\omega - k(C - u) = \text{const} = \omega_0 - k_0 C_0, \quad (7.1)$$

где $\omega_0 = (gk_0)^{\frac{1}{2}}$. Индекс ноль относится к тем значениям параметров поверхностных волн, которые они принимают в точке, где $u = 0$. Используя (7.1) и дисперсионное соотношение для гравитационных волн $c = (gk^{-1})^{\frac{1}{2}}$, $c_0 = (gk_0^{-1})^{\frac{1}{2}}$, имеем следующее уравнение относительно c/c_0 :

$$\frac{k_0}{k} = \frac{c^2}{c_0^2} = \frac{c + u - C}{c_0 - C}.$$

Решая его, получаем

$$\frac{c}{c_0} = \frac{c_0 + (c_0 - 2C)[1 + 4u(c_0 - C)(c_0 - 2C)^{-1}]^{\frac{1}{2}}}{2(c_0 - C)}. \quad (7.2)$$

При $C = 0$ из (7.2) следует $\frac{c}{c_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4u}{c_0}\right)^{\frac{1}{2}}$, что соответствует фазовой скорости волн на течении. Условие вещественности (7.2) имеет вид

$$u > \frac{-(c_0 - 2C)^2}{4(c_0 - C)}.$$

В точках блокировки, где групповая скорость поверхностных волн по отношению к внутренней волне равна нулю, выполняется равенство

$$u + \frac{c}{2} - C = 0. \quad (7.3)$$

При $C = 0$ выражение (7.3) превращается в условие блокировки гравитационных волн на течении со скоростью u . Если фазовая скорость внутренней волны почти равна групповой скорости поверхностных волн, то любая достаточно малая скорость течения u приведет к выполнению (7.3). Это означает, что при $C \approx \frac{c}{2}$ внутренняя волна,

создающая на поверхности течение с малой амплитудой, будет приводить к блокировке поверхностных волн. Распределение энергии поверхностных волн может быть найдено из уравнения баланса энергии или из принципа сохранения волнового действия. В системе отсчета, движущейся со скоростью внутренней волны C , уравнение сохранения волнового действия равно

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{\omega} \right) - \frac{\partial}{\partial x} [(u + c_g - C) \frac{E}{\omega}] = 0, \quad (7.4)$$

где c_g – групповая скорость поверхностных волн. Используя $\omega = g/c$, получаем для стационарного волнения

$$E c \left(u + \frac{c}{2} - C \right) = \text{const} = E_0 c_0 \left(\frac{c_0}{2} - C \right).$$

В точках блокировки из (7.4) имеем $\frac{\partial E}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial x} E$, решение

которого равно $E = E_0 e^{-at}$, где E_0 – энергия в момент времени $t = 0$. Если $a < 0$, волновая энергия монотонно растет к бесконечности, что свидетельствует о неприменимости соотношения (7.4) к анализу изменения волновой энергии в точках блокировки. Выражения для изменения амплитуды a , волнового числа k и наклона поверхности волны m в скоростном поле внутренней волны при условии малости отношения амплитуды скорости внутренней волны на поверхности к ее фазовой скорости ($\frac{u_0}{c} < 1$) получены в [17]

$$\ln \frac{k}{k_0} = - \frac{u_0}{c_{ro} - C} [\sin \phi - \frac{C}{c_{ro}} \sin \Theta], \quad (7.5)$$

$$\ln \frac{a}{a_0} = - \frac{1}{4} \cdot \frac{u_0}{c_{ro} - C} \left[(3 + \frac{c_{ro}}{c_{ro} - C} \sin \phi - \right.$$

$$\left. - \frac{C}{c_{ro}} \{ (4 + \frac{c_{ro}}{c_{ro} - C}) \sin \Theta + \frac{C}{c_{ro}} KX \cos \Theta \}) \right], \quad (7.6)$$

$$\ln \frac{m}{m_0} = - \frac{1}{4} \cdot \frac{u_0}{c_{ro} - C} \left[(7 + \frac{c_{ro}}{c_{ro} - C}) \sin \phi - \right.$$

$$\left. - \frac{C}{c_{ro}} \{ (8 + \frac{c_{ro}}{c_{ro} - C}) \sin \Theta + \frac{C}{c_{ro}} KX \cos \Theta \} \right], \quad (7.7)$$

где ϕ – фаза внутренней волны, $\Theta = \phi - KX (1 - \frac{C}{c_{ro}})$.

На рис. 7.2 дан пример изменения амплитуды и длины поверхностной волны в зависимости от фазы внутренней волны. По формулам (7.5) – (7.7) можно определить положение экстремумов k, a, m относительно фазы внутренней волны. Отметим, что при $\frac{C}{c_{ro}} = 1$ и увеличении KX максимум амплитуды приближается к гребню внутренней волны.

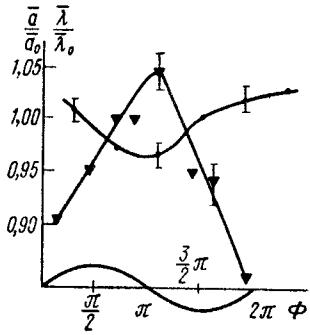


Рис. 7.2. Зависимость относительной амплитуды $\frac{\bar{a}}{\bar{a}_0} (\Delta)$ и длины $\frac{\lambda}{\lambda_0}$ (о) поверхности волны от фазы внутренней волны Φ . a , λ осреднены по участкам внутренней волны одной фазы

Величины k^* и ν^* связаны между собой следующим соотношением [17]:

$$k^* - 2\nu - \frac{u}{c_{tg}} . \quad (7.8)$$

Величина модуляции сильно зависит от соотношения фазовой скорости внутренней волны и групповой скорости поверхностных волн и достигает максимума при их равенстве. При $C = c_{tg} C$ имеет место "резонансное" взаимодействие поверхностных и внутренних волн. Резкое возрастание воздействия внутренней волны на поверхность объясняется тем, что в этом случае пакет поверхностных волн неподвижен относительно внутренней волны ($c_{tg} C$). Величина модуляции возрастает с ростом расстояния взаимодействия KX и величины скорости течения u , индуцированного внутренней волной. В [17] наряду с теоретическим анализом проведены тщательные лабораторные эксперименты, подтвердившие основные теоретические выводы. Однако в [17] исследовалась только начальная стадия взаимодействия поверхностных и внутренних волн, когда величина амплитудной модуляции была не более 30 %, а частотной – не более 2 %. В [18] рассмотрено более сильное "резонансное" взаимодействие поверхностных и внутренних волн, характеризующееся значительным уширением спектра первонально монохроматической волны и ее трансформацией вплоть до образования слизков.

- 224 -

Воздействие внутренней волны на поверхность приводит к амплитудной и частотной модуляциям, а также модуляции уклонов поверхности волны, которые изменяются синусоидально с частотой внутренней волны. Величина модуляции оценивается при помощи соответствующих коэффициентов модуляции амплитуды

$$a^* = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{a_{\max} + a_{\min}},$$

волнового числа

$$k^* = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{k_{\max} + k_{\min}},$$

наклонов

$$m^* = \frac{m_{\max} - m_{\min}}{m_{\max} + m_{\min}},$$

частоты

$$\nu^* = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\max} + \omega_{\min}}.$$

Чены при условии $\frac{u_0}{C} \ll 1$ и малости частотной модуляции $\frac{\Delta c}{C} \ll 1$, т.е. они могут использоваться для описания только слабого воздействия внутренних волн на поверхности. Капиллярность и вязкое затухание, которые не учитывались при получении (7.5) – (7.8), могут привести к изменению зависимостей амплитудной и частотной модуляций от параметров взаимодействия поверхностных и внутренних волн.

Подробно опишем лабораторные эксперименты [18; 19; 20], в которых проведено исследование амплитудной и частотной модуляций поверхностных волн внутренними в широком диапазоне значений $\frac{C}{c_{tg}}$ и $\frac{u_0}{c_{tg}}$.

С. Опыты проводились в стеклянном лотке длиной 8,25 м, высотой 0,6 м, шириной 0,6 м. В лотке создавалась двухслойная жидкость: нижний слой представлял собой раствор поваренной соли (плотность изменялась от 1,013 до 1,16 г/см³ для разных опытов), верхний слой был пресным; для визуализации внутренних волн в нижний слой или в слой промежуточной солености (пикноклин) вводился краситель. Схема опыта и состав аппарата приведены на рис. 7.3. В головной

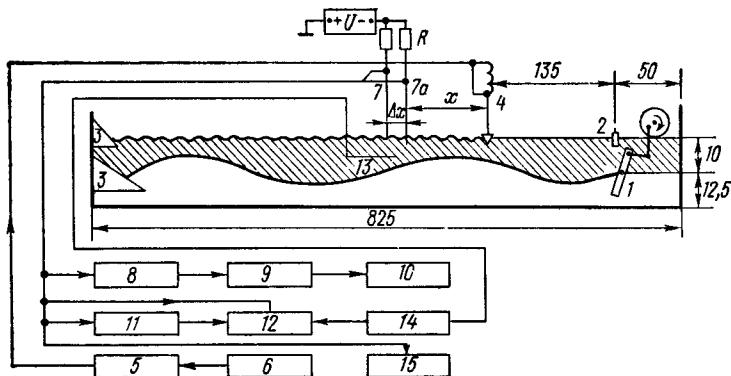


Рис. 7.3. Схема экспериментальной установки: 1 – волнопродуктор ВВ, 2 – экран, 3 – волногасители, 4 – волнопродуктор ПВ, 5 – усилитель мощности, 6 – генератор инфразвуковых частот, 7, 7а – датчики волнографа, 8 – цифровой вольтметр, 9 – преобразователь кода, 10 – магнитный регистратор, 11 – избирательный усилитель, 12 – регистратор, 13 – датчик анемометра, 14 – мостовая схема анемометра, 15 – коррелометр

части лотка размещался волнопродуктор внутренних волн, состоящий из пластины 1, приводимой в колебательное движение мотором через крикошипно-шатунный механизм; горизонтальная ось возбуждающей пластины находилась на границе раздела жидкостей. Изменение скорости вращения двигателя и длины шатуна позволяло менять период и высоту

ту внутренних волн. Откосы 3, размещенные в конце лотка, способствовали гашению возбуждаемых волн.

Для создания поверхностных волн использовался волнопродуктор вибрационного типа, состоящий из соленоида 4, питаемого через усилитель мощности 5 от генератора 6 напряжением переменной частоты. Для измерения временных характеристик как поверхностных, так и внутренних волн был использован один и тот же электродный волнограф 7, состоящий из латунного конического щупа, опущенного на 3–6 мм в воду. При питании постоянным током напряжение на электроде зависит от сопротивления растекания погруженной части щупа, что позволяет регистрировать как возвышения поверхности в точке (изменение глубины погружения), так и профиль внутренних волн (изменение электропроводности, обусловленное изменением локальной солености). Были проведены специальные опыты, подтвердившие возможность регистрации обоих видов волн.

С выхода датчика сигнал поступал на систему цифровой регистрации, состоящую из цифрового вольтметра 8, преобразователя кода 9 и магнитного регистратора 10. Записанный в цифровом коде сигнал (частота квантования – 50 Гц, динамический диапазон записи – 16 тысяч уровней, предельная чувствительность – 10 мкВ) поступал для дальнейшей обработки в ЭЦВМ НР-2000. Для экспресс-обработки с выхода избирательного усилителя 11 сигнал записывался на пятиканальный перьевую регистратор 12. Наличие усилителя 11 с частотной характеристикой, имеющей резкий спад в области низких частот, позволяло раздельно регистрировать временные профили поверхностных и внутренних волн. При регистрации поверхностных волн обеспечивалась линейность не хуже 1 % при измерении возвышений в пределах ± 2 мм, чувствительность волнографа составляла 100 мВ/мм, уровень шумов регистрирующей аппаратуры, приведенный к предельно ощутимому возвышению поверхности, составлял 3–4 мкм для аналоговой системы регистрации, 1–2 мкм для цифровой. Амплитуда поверхностных волн в опытах составляла, как правило, 0,1–0,5 мм. Во время эксперимента проводилась систематическая очистка бассейна от пленки, повышающей затухание ряби. Применение волногасителей, а также естественное затухание поверхностных волн с расстоянием почти полностью исключали возникновение стоячих волн, ибо отражение было очень малым. Например, доля отраженной энергии для волн с частотой 4 Гц не превышала 10 %.

Определение фазовой и групповой скоростей поверхностных волн проводилось по времени запаздывания сигналов (или их огибающей) с двух датчиков, разнесенных в пространстве.

Для определения высот и длин внутренних волн применялась фотокиносъемка через боковую стенку лотка. Регистрация волн производилась универсальным датчиком. Для определения распределения плотности по вертикали брались пробы в 8–10 точках; рассчитанный по измеренным значениям плотности профиль частоты Брента-Вайселя характеризовался резким максимумом в слое скачка, разделяющим два почти однородных слоя. Учитывая, что со временем слой

скакка плотности размывается, перед каждым опытом продолжительностью 2–3 ч производилась полная замена двухслойной жидкости. Амплитуда горизонтальной скорости внутренних волн на поверхности u_0 рассчитывалась по (6.26). Были предприняты также прямые измерения модуля горизонтальной составляющей орбитальной скорости внутренних волн на разных глубинах и разных удалениях от волнопродуктора. Измерения проводились пленочным термоанемометром 13 фирмы "Disa", включенным в уравновешенный самобалансирующийся мост 14 (см. рис. 7.3). Чувствительность прибора составляла 200 мВ/(см с), линейность в исследуемом диапазоне скоростей была не хуже 20 %. На рис. 7.4 приведен профиль модуля горизонтальной составляющей скорости во внутренней волне. Для иллюстрации описанной методики измерений на рис. 7.5 приведены примеры записей поверхностных волн (а), внутренних волн (б), их суммирования до избирательного усилителя (в) и после него (г), а также модуля горизонтальной составляющей скорости, обусловленной наличием внутренних и поверхностных волн. Скорость измерена на глубине 1 см от невозмущенной поверхности. Так как датчик регистрирует только модуль скорости, элементы кривой, соответствующие отрицательным значениям скорости, обращены (рис. 7.5, а). Кривая несимметрична относительно нулевого уровня, что свидетельствует о наличии постоянного спутного течения. Величина скорости спутного течения u_T и модуль орбитальной скорости легко находятся по формулам $u_T = V_b - V_2$, $|u_0| = \frac{1}{2} (V_b + V_2)$, обозначения V_b и V_2 указаны на рис. 7.5. Рис. 7.5

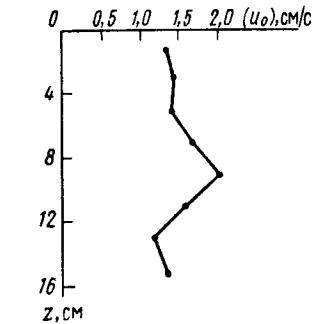


Рис. 7.4. Вертикальный профиль модуля горизонтальной составляющей скорости внутренней волны

подтверждает наличие амплитудной и частотной модуляций поверхностных волн внутренними – моменту прохождения гребня внутренней волны – соответствует увеличение амплитуды и частоты поверхностных волн, впадины – их уменьшение.

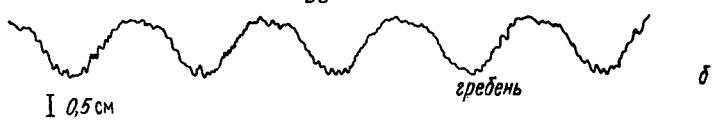
Эксперименты проводились в следующей последовательности. Прежде всего создавались поверхностные волны и тщательно измерялись их амплитуда и частота. Затем генерировались внутренние волны. После того как они устанавливались, производилась запись в течение 1–2 мин поверхностных волн. Для вычисления коэффициентов амплитудной a^* и частотной v^* модуляций предварительно определялись максимальные и минимальные значения амплитуды и частоты поверхностной волны по нескольким периодам внутренней волны. Аналогичным образом израс-

ПВ



I 0,1 мм

ВВ



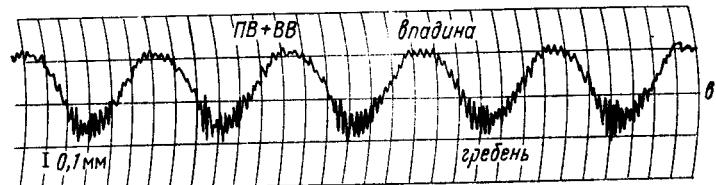
I 0,5 см

б

ПВ + ВВ

впадина

гребень



I 0,1 мм

в

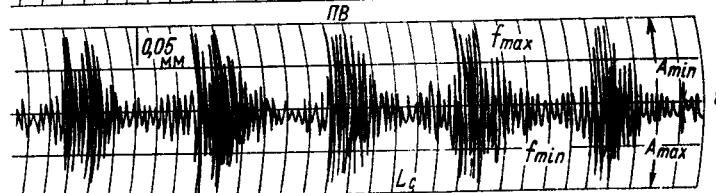
ПВ

f_{\max}

A_{\min}

f_{\min}

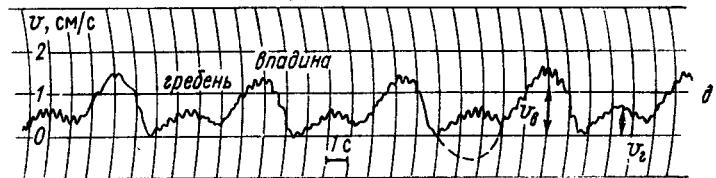
A_{\max}



0,05
мм

3.04.80

$$|\psi| = f(t) \quad x = 150 \text{ см} ; \quad T = 6,5 \text{ с} ; \quad f = 3 \text{ Гц} \\ h = 1 \text{ см}$$



v , см/с

2

1

0

-1

0

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

46

47

48

49

50

51

52

53

54

55

56

57

58

59

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

70

71

72

73

74

75

76

77

78

79

80

81

82

83

84

85

86

87

88

89

90

91

92

93

94

95

96

97

98

99

100

101

102

103

104

105

106

107

108

109

110

111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

123

124

125

126

127

128

129

130

131

132

133

134

135

136

137

138

139

140

141

142

143

144

145

146

147

148

149

150

151

152

153

154

155

156

157

158

159

160

161

162

163

164

165

166

167

168

169

170

171

172

173

174

175

176

177

178

179

180

181

182

183

184

185

186

187

188

189

190

191

192

193

194

195

196

197

198

199

200

201

202

203

204

205

206

207

208

209

210

211

212

213

214

215

216

217

218

219

220

221

222

223

224

225

226

227

228

229

230

231

232

233

234

235

236

237

238

239

240

241

242

243

244

245

246

247

248

249

250

251

252

253

254

255

256

257

258

259

260

261

262

263

264

265

266

267

268

269

270

271

272

273

274

275

276

277

278

279

280

281

282

283

284

285

286

287

288

289

290

Таблица 7.1.

ρ , г/см ³	Параметры ВВ					КХ	u_0 , см/с	$\beta = \frac{u_0}{C}$	f , Ги	$\frac{C}{c_r}$
	высота H, см	период T, с	длина Λ , см	фаз. ск. C, см/с	X, см					
1,018	0,5-3,0	6-10	44-125	8-13	24-382	2-15	0,3-2,0	0,02- 0,2	2,2-10	0,2-0,8
1,026	1,5-3,0	7-12	8-150	11,4-12,5	75-330	6,3-26,0	1-2	0,08- 0,2	3,5-7	0,44-0,67
1,038	0,5-3,0	6-20	70-210	11,3-13,0	82-190	2,5-19,0	0,1-1,7	0,001- 0,2	2,5-8	0,34-0,75
1,054	1,0-3,5	8	134	16,7	50-150	2,4-7,0	0,4-1,5	0,025- 0,09	2,5-9	0,5-1,0
1,08	0,5-2,0	6-15,5	120-330	20-21	82-290	3,4-15,0	0,9-1,2	0,05- 0,06	3,5-7	0,77-1,14
1,12	0,2-2,0	2,7-11,5	40-280	15-24	50-370	2,2-23,5	0,3-1,5	0,02- 0,06	2,5-9	0,5-1,38
1,16	0,2 - 1,2	2,6-8	65-170	16,7-25	100; 150	3,7-14,5	0,3-11,5	0,024- 0,035	3,5-9	0,96-1,67

смотрения суперпозиции поверхностных и внутренних волн с точностью в 15–20° может быть определено положение максимумов и минимумов амплитуды поверхности волны относительно фазы внутренней волны ϕ . В ряде случаев проводилась цифровая обработка записанной на магнитной ленте информации: двухминутная запись показаний универсального датчика вводилась в ЭЦВМ и расфильтровывалась на записи поверхностных и внутренних волн; затем производилось определение текущих значений огибающей и частоты поверхностных волн по участкам длительностью в 1 с с определением фазы каждого участка относительно внутренней волны. В результате обработки таких записей были получены зависимости вида

$$a^* = f\left(f, \frac{C}{c_r}, KX, \frac{u_0}{C}\right),$$

$$\nu^* = f\left(f, \frac{C}{c_r}, KX, \frac{u_0}{C}\right), \quad \phi = f\left(f, \frac{C}{c_r}, KX\right).$$

В табл. 7.1 приведены данные, характеризующие параметры поверхностных и внутренних волн и условий опыта (плотность нижнего слоя ρ , расстояние от волнопродуктора X). Было проведено 15 опытов при различных плотностях нижнего слоя, что позволило менять параметры внутренних волн в широких пределах: $40 \text{ см} \leq \Lambda \leq 330 \text{ см}$; $2,6 \text{ с} \leq T \leq 20 \text{ с}$; $7,5 \text{ см/с} \leq C \leq 28 \text{ см/с}$. Частота поверхностных волн изменялась в пределах от 2,3 до 10 Гц при амплитуде, как правило, в 0,1–0,5 мм. Как видно из таблицы, все это позволило проводить опыты при изменении $\frac{C}{c_r}$ от 0,13 до 1,4, KX от 2

до 34 и u_0 от 0,1 до 2 см/с. Особого упоминания заслуживает контрольный опыт, направленный на проверку возможных неучтенных влияний одних волн на другие через универсальный датчик, поверхность воды, элементы конструкций и т.д. При прочих равных условиях и тех же параметрах внутренних волн волнопродуктор поверхностных волн был размещен так, что он генерировал встречные волны: как и следовало ожидать, эффекта модуляции, подобного тому, который имеет место при спутном распространении поверхностных и внутренних волн, обнаружено не было.

Рассмотрим вначале результаты измерений фазовой скорости C внутренних волн, фазовой c и групповой c_r скорости поверхностных волн, поскольку условия проведения опытов определяются главным образом соотношением этих величин. На рис. 7.6 приведены результаты непосредственных измерений C , c и c_r . В левой части рис. 7.6 представлено семейство кривых $C = f(F)$, рассчитанных по уравнению дисперсии для первой моды внутренней волны (6.31). Точками нанесены измеренные значения C для значений плотности ρ от 0,018 до 0,16, соответствующих всем 15 опытам; видно их удовлетворительное совпадение с расчетом. В правой части рис. 7.6 представлены результаты измерений групповой и фазовой скоростей поверхностных волн для частот от 1,5 до 11 Гц. Сплошными линиями нанесены кривые c_r , c ,

рассчитанные по уравнению дисперсии гравитационно-капиллярных поверхностных волн. Из сопоставления кривых C , c , $c_r = f(f)$ видно, что ряд опытов характеризуется наличием достаточно широких областей, где $C = c_r$ и $C = c_r = c$, что важно для моделирования особенностей взаимодействия поверхностных и внутренних волн. Резонансный характер такого взаимодействия отчетливо виден на графике зависимости коэффициента амплитудной модуляции a^* от ве-

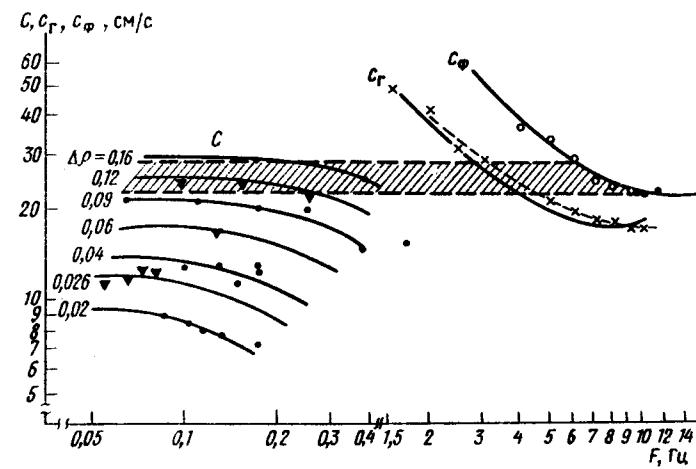


Рис. 7.6. Зависимость фазовой скорости внутренних волн C и фазовой c и групповой c_r скоростей поверхностных волн от частоты: $\Delta\rho = 0,02 - 0,16 \text{ г/см}^3$, заштрихована область, где $C = c = c_r$

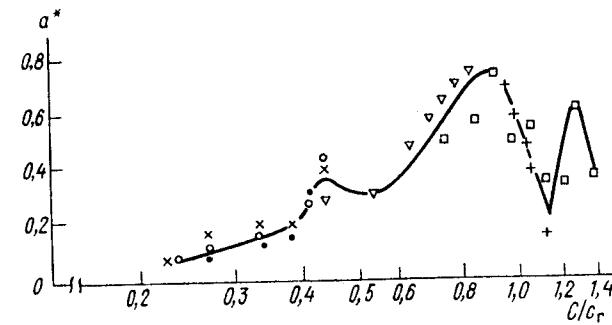


Рис. 7.7. Зависимость глубины амплитудной модуляции a^* от C/c_r

личины отношения $\frac{C}{c_r}$ (рис.7.7). Впервые резонансный характер

взаимодействия экспериментально был подтвержден в работе [17]. Резонанс в данном случае уширен по сравнению с наблюдавшимся в [17], что связано с большими значениями скоростей орбитального движения внутренней волны на поверхности и соответственно с большим интервалом длин захваченных поверхностных волн, что следует из (7.2), (7.3). На кривой $a^* = f\left(\frac{C}{c_r}\right)$

максимум для $\frac{C}{c_r} \approx 1,3$. Некоторое смещение положения максимума от 1 к 0,9 объясняется большой величиной u_0 .

Рассмотрим зависимость амплитудной модуляции от параметра $\beta = \frac{u_0}{C}$, характеризующего поле скорости на поверхности,

и расстояния взаимодействия KX . На рис.7.8 представлены результаты опыта, когда длина и частота внутренней волны поддерживались неизменными, а высоты изменялись в пределах от 0,5 до 3 см. При этом амплитуда орбитальной скорости u_0 изменялась от 0,26 до 1,6 см/с. Из кривых $a^* = f(\beta)$ видно, что для достаточно слабых взаимодействий, определяемых как удаленность частот поверхности волн от "резонансных" значений, так и малыми величинами относительной скорости пульсаций на поверхности воды β , глубина модуляции растет почти линейно с увеличением β , затем рост a^* замедляется. При $a^* < 0,3$ зависимость глубины модуляции от β линейная. Специально проведенный опыт, в котором амплитуда поверхности волн изменялась в 10 раз, а параметры внутренних волн оставались неизменными, показал, что a^* при этом не изменяется. На рис.7.8, б представлены результаты опыта, когда параметры внутренних и поверхностных волн поддерживались неизменными, а расстояние X изменялось. Зависимость a^* от KX близка к линейной вплоть до высоких значений KX , характерных для сильных взаимодействий ($a^* \sim 1$).

Рассмотренные примеры свидетельствуют о том, что зависимость a^* от KX и β носит универсальный характер и определяется комбинацией этих величин, что позволяет привлечь данные опытов с изменением сразу нескольких параметров внутренних волн. На рис.7.8, в результаты опытов представлены в координатах $\frac{a^*}{\beta}, KX$ для резонан-

сного условия $C = c_r$. При $KX < 10$ наблюдается хорошее согласие экспериментальных данных с теоретическим расчетом [17], с увеличением KX согласие ухудшается. Это расхождение может быть объяснено тем, что в расчете [17] были использованы очень малые величины $\beta < 0,01$; при этом нелинейные эффекты, вызывающие ограничение роста a^* , естественно не учитывались.

Перейдем к анализу частотной модуляции. Рассмотрим сначала зависимость величины частотной модуляции ν^* от частоты поверхности волн. Для данных экспериментов характерна почти линейная за-

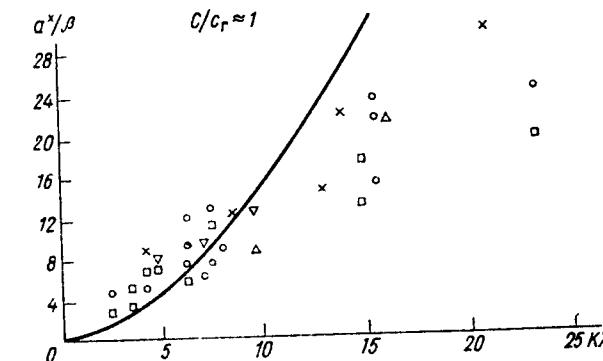
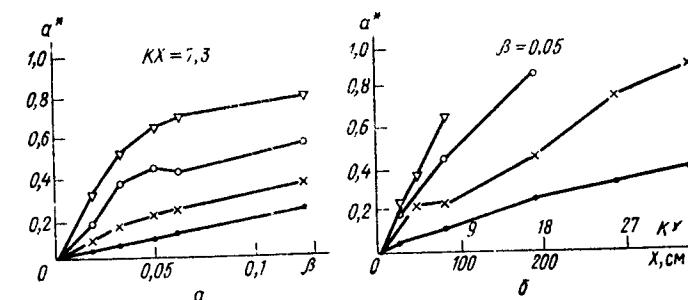


Рис.7.8. Зависимость величины амплитудной модуляции a^* от β и KX : а) $a^* = f(\beta)$, $KX = 7,3$; б) $a^* = f(KX)$, $\beta = 0,05$, $f = 4$ Гц, $\frac{C}{c_r} = 0,54$ (•); $f = 5$ Гц, $\frac{C}{c_r} = 0,62$ (x); $f = 6$ Гц, $\frac{C}{c_r} = 0,67$ (○); $f = 7$ Гц, $\frac{C}{c_r} = 0,7$ (▽); $T = 6$ с, $\Lambda = 70$ см; в) $\frac{a^*}{\beta} = f(KX)$, $C = c_r$

висимость ν^* от частоты f (рис.7.9, а). Следует отметить, что параметры внутренних волн в рассматриваемых опытах были таковы, что условию "резонанса" соответствовали разные частоты в разных опытах (например, 5,5 Гц для кривых I, II, III, 4 Гц для кривой Y) — тем не менее, никакой зависимости ν^* от резонансных частот, как это было с амплитудной модуляцией, здесь не обнаруживается. Вместе с тем наклон и абсолютные значения кривых ν^* на рис.7.9, а зависят от KX и β . Нормировка ν^*/β позволяет сгруппировать многочисленные экспериментальные данные. На рис.7.9, б построена зависимость частотной модуляции от β . KX в координатах $\frac{\nu^*}{\beta}, KX$

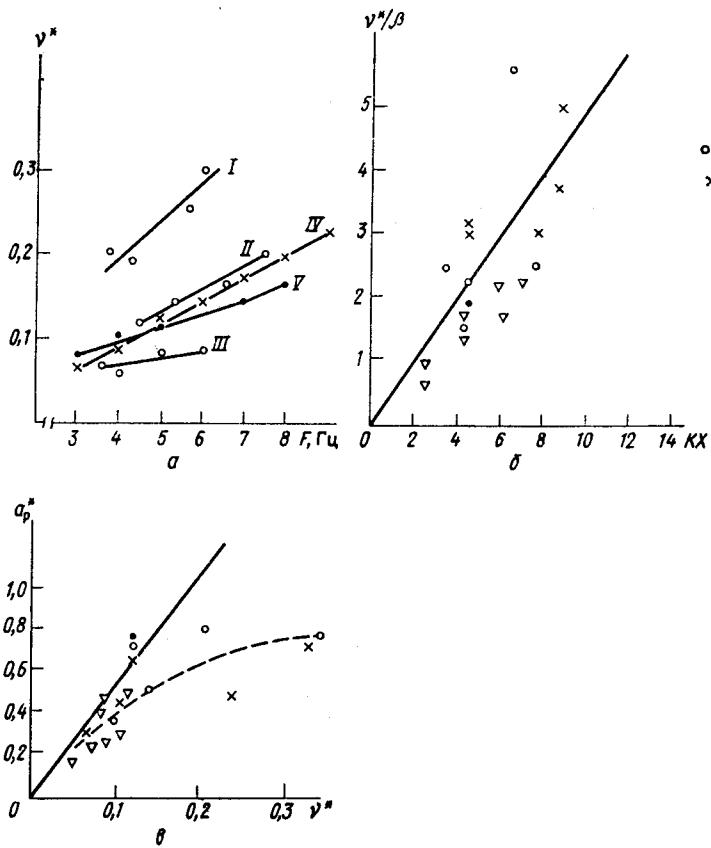


Рис. 7.9. Зависимость величины частотной модуляции от частоты, расстояния взаимодействия и амплитудной модуляции: а) и в) I: $T = 6$ с, $KX = 15$, $\beta = 0,045$; II: $T = 6$ с, $KX = 7,6$, $\beta = 0,045$; III: $T = 15,5$ с, $KX = 4$, $\beta = 0,045$ (○); IV: $T = 2,7$ с, $KX = 7,8$, $\beta = 0,04$ (x); V: $T = 6,5$ с, $KX = 4,3$, $\beta = 0,06$ (•)

$$\text{б)} \frac{\nu^*}{\beta} = f(KX), C = c_r$$

для резонансных условий $C = c_r$, экспериментальные значения хорошо согласуются с теоретическим расчетом [17]. Согласие экспериментальных значений ν^* с теоретическим расчетом нарушается, подобно зависимости a^*/β от KX . Универсальная зависимость амплитудной и частотной модуляции от β и KX позволяет сопоставить

a^* и ν^* . Пример такого сопоставления дан на рис. 7.9, в. Отсутствие резонансного эффекта в зависимости от частоты поверхностных волн при выполнении равенства $C = c_r$ является характерной особенностью работы [20]. В работе [17] частотная модуляция практически не исследовалась, величина ν^* была не более 0,02. Изменение a^* и ν^* от частоты f в окрестности $C = c_r$ подобно частотной зависимости амплитудной и фазовой характеристик в резонанском контуре. Такая зависимость a^* и ν^* от частоты позволяет при рассмотрении процессов взаимодействия поверхностных и внутренних волн ввести аналогию с резонансным контуром.

В [18] даны характерные пространственные масштабы или длины взаимодействия поверхностных и внутренних волн, на которых происходит развитие амплитудной и частотной модуляций. Эти соотношения могут быть получены из анализа зависимостей (7.5) – (7.8). В работе [18] установлено, что характерная длина развития амплитудной модуляции – $X_a = K \frac{2}{\beta^{1/2}}$, характерная длина развития

частотной модуляции – $X_\nu = (k\beta)^{-1}$. Величины X_a, X_ν определяют соотношения видов модуляции.

В экспериментах [17] X_ν значительно превышало X_a , что было обусловлено малой величиной β . Поэтому частотная модуляция была весьма слабой, и основным эффектом была амплитудная модуляция поверхностных волн. Следует отметить, что в [17] выражения для ве-

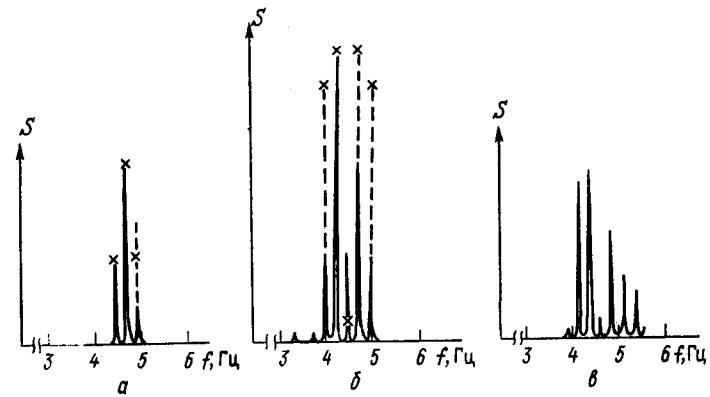


Рис. 7.10. Спектры поверхностной волны, промодулированной внутренней волной: а) $X = 0,5$ м; б) $X = 1,0$ м; в) $X = 1,5$ м, $f = 4,6$ Гц, $F = 0,25$ Гц. Пунктирные линии обозначают расчетную амплитуду сателлитов [18]

личины модуляции были получены путем линеаризации, которая справедлива при малых значениях ν^* . Спектральный анализ записей поверх-

ностных волн, на которые воздействуют внутренние волны, указывает на появление в спектре сателлитов на частотах $f \pm nF$, где n – целое число. С увеличением расстояния KX число сателлитов увеличивается [18]. Рис.7.10, взятый из [18], демонстрирует изменение спектра поверхности волн под действием внутренних волн.

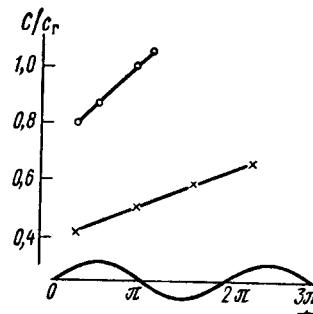


Рис.7.11. Зависимость положения максимальной амплитуды поверхности волн относительно фазы внутренней волны от C/c_r , $KX = 15,2$ (\circ), $KX = 9$ (\times)

Рассмотрим связь между положением мест экстремальной амплитудной и частотной модуляций друг с другом и относительно элементов внутренних волн. С высокой степенью точности (до $10-20^0$) местам максимумов огибающей поверхностных волн всегда соответствуют максимум частоты заполнения, уменьшению амплитуды – минимум частоты. Следует отметить при этом, что места максимумов и минимумов не обязательно сдвинуты на $\pi/2$ по фазе внутренней волны, что

объясняется отличием формы внутренних волн в некоторых случаях от синусоидальной. Примеры изменения положения максимума амплитуды поверхностных волн вдоль внутренней волны для разных частот поверхностных волн приведены на рис.7.11. Видно, что с изменением частоты поверхностного волнения при неизменных параметрах внутренних волн происходит линейное изменение положения максимума поверхностного волнения относительно фазы внутренней волны. Были построены гистограммы распределения длин поверхностных волн при воздействии на них внутренних волн и определены следующие характеристики: средняя длина волн, дисперсия, коэффициенты вариации, асимметрии и эксцесса. Под воздействием внутренних волн увеличивается разнообразие длин волн. Влияние внутренних волн на статистические параметры поверхностных возрастает с увеличением расстояния взаимодействия KX и приближении C/c_r к 1, что является естественным следствием соотношения (7.5).

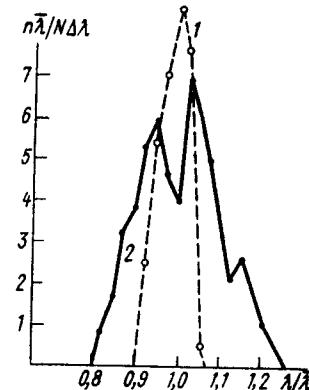


Рис.7.12. Гистограммы распределения длин поверхностных волн: 1 – без внутренних волн, 2 – при воздействии внутренних волн

На рис.7.12 представлены гистограммы распределения длин поверхностных волн, характеризующие воздействие внутренних волн на поверхность. Одномодовая гистограмма распределения длин превращается в двумодовую. Значительные изменения статистических параметров коротковолновых поверхностных волн, наблюдавшиеся в природных условиях, могут, в частности, вызываться внутренними волнами [21].

В результате лабораторных экспериментов было показано, что механизм модуляции поверхностных волн течениями, индуцированными внутренними волнами, действительно имеет место и достигает максимума при $C = c_r$ (условие резонанса или синхронизма). В океане скорость внутренних волн обычно меньше 1 м/с, поэтому резонансный механизм важен для поверхностных волн с длинами в несколько дециметров. Для поверхностных волн, длины которых меньше и больше резонансной, модуляция будет незначительной.

§ 7.3. Изменения спектров поверхностных волн под действием внутренних волн

Остановимся кратко на изменении спектров поверхностных волн $S(k, x, t)$ под действием внутренних волн. Следует отметить, что этот вопрос не решен еще полностью как в теоретическом, так и в экспериментальном плане. Однако именно изменение спектров ветрового поверхностного волнения представляет интерес для интерпретации образования сливок.

Характерный масштаб неоднородности течения, созданного внутренней волной, значительно превышает длины всех энергонесущих спектральных составляющих поверхностного волнения. Изменение энергии поверхностных волн в спектральной форме в движущейся среде удобно описать при помощи уравнения плотности волнового действия

$$M = \frac{S(k, x, t)}{\omega(k, x, t)} \quad [22]:$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{dk}{dt} \cdot \frac{\partial M}{\partial k} = -\frac{Q}{\omega}. \quad (7.9)$$

Здесь $\omega(k, x, t)$ – частота в системе координат, движущейся со скоростью течения, созданного внутренней волной. Функция источника Q определяет баланс энергии спектральной составляющей на данной частоте, т.е. поступление энергии от ветра, обмен энергией вследствие нелинейных взаимодействий спектральных составляющих, потери энергии из-за диссипации. Наиболее просто вопрос об изменении спектра под действием внутренних волн решается в адиабатическом при-

ближении, при этом $Q = 0$ [16, 22]. Можно пренебречь действием ветра и диссипации на поверхностные волны метрового диапазона, так как для них расстояние, на котором происходят их диссипация и развитие, превышает длину внутренней волны. При $Q = 0$ из уравнения волнового действия (7.1) следует сохранение $M(\underline{x}, \underline{k}, t)$ вдоль траектории движения волнового пакета в пространстве $(\underline{x}, \underline{k})$. Производные $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dk}{dt}$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega_0}{\partial \underline{k}} (\underline{x}, \underline{k}, t), \quad (7.10)$$

$$\frac{dk}{dt} = - \frac{\partial \omega_0}{\partial \underline{x}} (\underline{x}, \underline{k}, t), \quad (7.11)$$

где ω_0 – частота в лабораторной системе координат. Соотношения (7.10), (7.11), определяющие траекторию волнового пакета, подобны уравнениям движения в форме Гамильтона. Вполнив интегрирование (7.10), (7.11) и используя начальное значение $M(\underline{x}, \underline{k}, 0)$, получим [22]: $M(\underline{x}, \underline{k}, t) = M(\underline{x}_0(\underline{x}, \underline{k}, t); \underline{k}_0(\underline{x}, \underline{k}, t))$.

В адиабатическом приближении изменение спектра поверхностных волн под действием внутренних волн сводится к нахождению траектории движения пакетов поверхностных волн. Рассмотрение движения пакетов в скоростном поле внутренней волны проведено, например, в работе [22]. Ее автор показал, что отражение поверхностных волн в точках блокировки на переменном течении, созданном внутренней волной, приводит к значительным изменениям спектра поверхностных волн. В качестве примера автор рассмотрел изменение спектра поверхностных волн, задаваемого в форме спектра слабой турбулентности $S(k) = A k^{-9/2}$ под действием уединенной внутренней волны. Аналогичный пример изменения спектров наклонов поверхностных волн под действием пакета внутренних волн рассмотрен в [4, гл.У]. Наибольшее изменение испытывают составляющие спектра поверхностных волн, для которых выполняется условие синхронизма или резонанса $c_r = C$. Расчеты [23] показали, что для медленной ряби на быстрой внутренней волне ($c_r < C$) изменчивость волнового числа имеет порядок $\frac{u_0}{C}$, где u_0 – амплитуда скорости орбитального движения внутренней

волны на поверхности. Для быстрой поверхностной волны на медленной (но длинной!) внутренней изменчивость волнового числа имеет порядок $\frac{u_0}{c_r}$. Адиабатическое приближение уже неприемлемо для по-

верхностных волн дециметрового и сантиметрового диапазонов, которые нельзя рассматривать как свободные, так как расстояния, на которых происходит затухание и развитие волн этого диапазона, уже меньше длины внутренних волн [1; 2]. Поэтому правая часть уравне-

ния (7.9) должна быть отлична от нуля. Знания о функции источника Q в настоящее время недостаточно полны. Обычно поступление энергии от ветра задается членами, описывающими действие механизма Майлса, Филлипса или того и другого вместе. В [7] принимается, что поступление энергии от ветра определяется механизмом Майлса. Для достижения стационарного спектра в функцию источника Q вводится член $-y S^2$, приводящий к ограничению экспоненциального роста волн. В этом случае уравнение сохранения волнового действия (7.9) принимает вид

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \left\{ u(x, t) + \frac{\partial \omega}{\partial k} \right\} \frac{\partial M}{\partial x} = (\beta S - y S^2) \frac{1}{\omega}, \quad (7.12)$$

где $u(x, t)$ – поверхностная скорость течения, созданного внутренней волной. Используя кинематическое уравнение сохранения волн, а в качестве начальных условий невозмущенное значение спектра $S(k, x, t=0)$, авторы [7] нашли решение (7.12), которое здесь не приводится из-за его громоздкости. Единичные измерения спектров поверхностных волн в пределах слика и вне его хорошо согласуются с расчетом [6; 7]. В [24] показано, что в работе [7] не учитывался захват и отражение волн в точках блокировки, которые могут сильно изменить спектр. Расчет изменения спектров поверхностных волн с учетом особенностей движения волновых пакетов в точках блокировки произведен в [24].

При рассмотрении поверхностных волн сантиметрового диапазона в функции источника необходимо учесть эффект диссипации. Линейная модель изменения спектров ветрового волнения под действием внутренних волн развита в [1; 31, гл. IV]. Согласно [31, гл. IV] для чистой поверхности воды механизм генерации Майлса начинает действовать при превышении скоростью ветра критического значения, равного 1,3 м/с. Для воды, покрытой нерастворимой пленкой, это критическое значение равно 5,7 м/с. При меньших скоростях ветра определяющую роль, по-видимому, должен играть линейный рост. Сликовые полосы от внутренних волн также наблюдаются обычно при слабых ветрах (~ 5 м/с). Таким ветрам соответствует слабое волнение, поэтому можно предположить, что ограничение роста волн происходит под действием вязкой диссипации. При этих предположениях уравнение энергетического баланса имеет вид

$$\frac{dS(k, t)}{dt} = \left(\frac{k^2}{4\rho^2 \omega^2} \right) S_p(k, \omega) - 4\nu k^2 S(k, t), \quad (7.13)$$

где $S_p(k, \omega)$ – пространственно-частотный спектр пульсаций атмосферного давления. Первый член правой части (7.13) определяет механизм Филлипса, член $4\nu k^2 S(k, t)$ определяет вязкую диссипацию. Решение уравнения (7.13) для нулевых начальных условий $S(k, 0) = 0$ имеет вид

$$S(k, t) = S(k) [1 - e^{-4\nu k^2 t}], \quad (7.14)$$

где $S(\underline{k}) = \frac{(16)^{-1} S_p(k, \omega(k))}{\rho^2 \nu \omega(k)}$ – установившийся спектр волнения, время установления которого имеет порядок $\frac{1}{4 \nu k^2}$ и составляет несколько секунд для сантиметровых волн. Спектр пульсаций атмосферного давления $S_p(k, \omega)$ в настоящее время изучен еще недостаточно, поэтому для его нахождения используется обычно ряд гипотез.

Влияние поверхностных течений, созданных внутренней волной, проявляется в изменении дисперсионного соотношения для спектральных составляющих.

Спектр ряби на течении принимает следующий вид [31, гл. IV]:

$$S(\underline{k}, u) = \frac{S(\underline{k}, \omega + ku)}{16 \nu \rho^2 (\omega + ku)^2}. \quad (7.15)$$

Однако для волн сантиметрового диапазона резонансное условие ($c_\Gamma = C$) для океанских внутренних волн уже не выполняется (как правило, $C > c_r$), поэтому изменение спектра поверхностных волн в сантиметровом диапазоне под действием течений, индуцированных внутренней волной, будет незначительным. Существует другой механизм изменения поверхностных волн. На поверхностные волны сантиметрового диапазона значительное влияние оказывают пленки поверхностно-активных веществ, часто присутствующие на поверхности океана. На определяющую роль пленок поверхностно-активных веществ в образовании сниклов указывалось еще в работах Ла-Фонда [14]. В [1] рассмотрена линейная модель изменения спектра ветрового волнения под действием внутренних волн при наличии пленок поверхностно-активных веществ на поверхности. Течения, индуцированные внутренней волной, приводят к перераспределению концентрации поверхностно-активных веществ на поверхности, что вызывает изменение коэффициента затухания коротких поверхностных волн. В [1] поверхностная пленка рассматривалась как пассивная примесь, перераспределение которой происходит в поле горизонтальной скорости внутренней волны $u(X - Ct)$. Изменение концентрации Γ в поле плоской волны имеет следующий вид:

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = [1 + \frac{u(X - Ct)}{C}]^{-1} \approx 1 + \frac{u(X - Ct)}{C},$$

где Γ_0 – концентрация поверхностно-активных веществ в отсутствие внутренней волны. Над подошвами внутренней волны концентрация вещества пленки максимальна (пленка ската), над гребнями концентрация минимальна (пленка растянута). Коэффициент затухания ряби является функцией концентрации Γ . Если в исходном состоянии пленка растекается до некоторого минимального значения концентрации Γ_{min} , коэффициент затухания волн тоже минимальен. При сжатии пленки Γ возрастает, коэффициент затухания волн тоже увеличивается. При изменении концентрации от Γ_{min} в пределах некоторой переходной зоны u возрастает наиболее резко. На рис. 7.13 показан пример зависимости коэффициента затухания от концентрации. Увеличение ко-

эффициента затухания приводит к образованию сника. Если в исходном состоянии пленка ската, то могут наблюдаться уменьшение коэффициента затухания и рост ряби. Описание основных свойств морских пленок и библиографию можно найти в работе [1]. Наблюдаемые в реальных морских условиях внутренние волны, по оценкам авторов, создают изменения концентрации, которые должны приводить к резкому возрастанию декремента затухания над подошвой волны, т.е. сник должен быть расположен над впадиной внутренней волны. Установившийся спектр имеет вид

$$S(k, u) = \frac{S_p(k, \omega + ku) k^2}{8 \rho^2 \gamma[k, \Gamma(u)](\omega + ku)^2}. \quad (7.16)$$

Учет действия поверхностно-активных веществ производится при помощи члена $\gamma[k, \Gamma(u)]$, наличие которого отличает выражение (7.16) от спектра поверхностных волн на внутренних волнах без учета пленок (7.15).

Изменение спектра ряби под действием внутренних волн удобно описывается величиной гидродинамического контраста $R(k, u) = S(k, u) S^{-1}(k, 0)$, т.е. величиной отношения спектров ветровых волн в поле внутренней волны к спектру ряби без внутренней волны.

Гидродинамический контраст $R(k, u)$ можно представить произведением трех величин [31, гл. IV]:

$$R(k, u) = R_p R_\omega R_y.$$

Контраст R_p определяется спектром $S_p(k, \omega)$, при скорости ветра большей скорости ряби величина R_p близка к единице. R_ω определяется изменением ряби на течении, созданном внутренней волной. В зависимости от угла между скоростью u и волновым вектором k R_ω может быть как больше, так и меньше 1. Изменение спектра, обусловленное R_ω , достигает 20–30%. Величина $R_p^{-1} R_\omega$ определяется формулой (7.15). Контраст $R_y = \gamma(k, 0) \gamma[k, \Gamma(u)]$ определяется пленкой. Величина R_y сильно зависит от длины поверхностной волны, максимальное гасящее действие пленки достигается на длинах 2–3 см. На рис. 7.14, взятом из [2], показана зависимость контрастов $R_\omega R_y$ от волнового числа. Изменения спектра, обусловленные пленкой, значительно превосходят изменения спектра ряби, вызванные модулирующим действием поверхностной скорости внутренней волны. Величина высокочастотного участка спектра в снике, вызванного действием пленки, может быть меньше невозмущенного значения спектра почти на порядок. Вопрос о положении сника относительно внутренней волны еще полностью не выяснен. На рис. 7.14 наряду с теоретическими значениями контраста показаны значения R_y , полученные в [6; 7]. На-

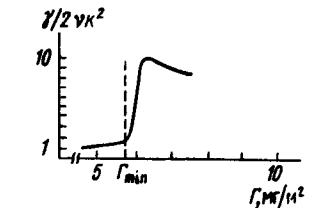


Рис. 7.13. Зависимость коэффициента затухания ряби в сантиметровом диапазоне ($\lambda = 2$ см) от концентрации Γ [2]

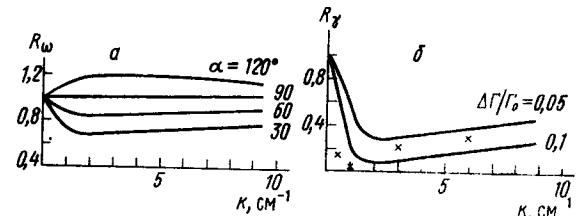


Рис. 7.14. Контрости R_ω (а) и R_y (б) в зависимости от волнового числа поверхности волн. а - угол между скоростью \bar{u} и волновым вектором k [1]

блодается согласие по порядку величины. Оценки величины гидродинамического контраста при учете действия пленки и механизма генерации волн Майлса и Филлипса получены Ермаковым и Пелиновским [2]. Как уже говорилось, имеется пока единственная работа, в которой в натурных условиях проведены измерения спектров волн в пределахslickов и вне их [6; 7]. Фрагментарные измерения спектров ветровых волн на внутренних волнах выполнены в лабораторных экспериментах [2]. В [2] показано, что для построения удовлетворительных теоретических моделей необходимо проведение специальных экспериментов с измерением спектров ветрового волнения, характеристик пленок поверхности-активных веществ.

Л и т е р а т у р а

1. Ермаков С.А., Пелиновский Е.Н., Талипов Т.Г. О влиянии пленок поверхности-активных веществ на изменение спектров ветрового волнения под действием внутренних волн. - "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1980, т. 16, № 10, 1068-1076.
2. Ермаков С.А., Пелиновский Е.Н. Воздействие внутренних волн на морскую поверхность. - Горький, Институт прикладной физики АН СССР, препринт № 34, 1981.
3. Curtin I.B., Mooers N.K. Observation and interpretation of a high-frequency internal wave packet and surface slick pattern. - 'J. Geophys. Res.', 1975, vol.80, N 6, p.882-894.
4. Apel I.R., Byrne H.M., Proni J.R., Charnell R.C. Observations of oceanic internal and surface waves from ERTS. - 'J. Geophys. Res.', 1975, vol.80, N 6, 865-881.
5. Лучинин А.Г., Титов В.И. О возможности дистанционной оптической регистрации параметров внутренних волн по их проявлениям на океанической поверхности. - "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1980, т. 16, № 2, 1284-1290.
6. Hughes B.A., Grant H.L. The effect of internal waves on surface wind waves. 1. Experimental measurements. - 'J. Geophys. Res.', 1978, vol.83, C 1, 443-454.
7. Hughes B.A. The effect of internal waves on surface wind waves. 2. Theoretical analysis. - 'J. Geophys. Res.', 1978, vol.83, C. 1, 455-469.
8. Brown W.E., Elachi Jr.C., Thompson J.W. Radar imaging of ocean surface patterns. - 'J. Geophys. Res.', 1976, vol.81, p.15, 2657-2667.
9. Калмыков А.И., Пичугин А.П. Особенности обнаружения неоднородностей морской поверхности радиолокационным методом. - "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1981, т. 17, № 7, 754-761.
10. Нелепо Б.А., Куттарков Ю.М. Экспериментальное исследование характеристик внутренних волн в океане дистанционными методами. - ДАН СССР, 1979, т. 249, № 4, 980-983.
11. Волков Ю.А., Куттарков Ю.М. Термический эффект внутренних гравитационных волн на свободной поверхности океана. - "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1980, т. 16, № 10, 1077-1081.
12. Куттарков Ю.М., Кудрявцев В.Н. Термодинамическая реакция свободной поверхности океана на внутренние волны. - "Морские гидрофизические исследования", Севастополь, 1979, № 4, 22-34.
13. Кудрявцев В.Н. Определение параметров внутренних волн дистанционными методами. - "Спутниковая гидрофизика", Севастополь, 1980, 19-27.
14. La Fond E.C., La Fond K.G. Sea surface features. - 'J. Marine Biol. Ass. India', 1972, vol.14, N 1, 1.
15. Долина И.С., Ермаков С.А., Лапко В.В., Пелиновский Е.И. Экспериментальное исследование колебаний свободной поверхности, вызванных внутренними волнами. - "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1978, т. 14, № 11, 1216-1218.
16. Филлипс О.М. О взаимодействии внутренних и поверхностных волн. - "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1973, т. 9, № 9, 954-962.
17. Lewis I.E., Lake B.M., KodR.S. On the interaction of internal waves and surface gravity waves. - 'J. Fluid Mech.', 1974, vol.63, p.4, 773-801.
18. Ермаков С.А., Коэлов С.И., Показеев К.В., Розенберг А.Д. Лабораторное исследование влияния внутренней волны на регулярные поверхностные волны. - "Океанология", 1982, т.22, вып. 2, 204-210.
19. Показеев К.В., Розенберг А.Д. Лабораторные исследования взаимодействия поверхностных и внутренних волн. - В кн.: Труды 1 Всесоюзной конференции "Метрология гидрофизических измерений". - М., 1980, с 201.
20. Показеев К.В., Розенберг А.Д. Лабораторное исследование амплитудно-частотной модуляции поверхностных волн

- внутренними волнами. - "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1982, т. 18, № 5, 522-531.
21. Христофоров Г.Н., Соловьев В.Е., Запевалов А.С. Проявление нелинейности поверхностных морских волн в статистических и спектральных характеристиках. - "Морские гидрофизические исследования", Севастополь, 1979, № 3, 113-124.
 22. Басович А.Я. Трансформация спектра поверхностного волнения под действием внутренней волны. - "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1979, т. 15, № 6, 655-661.
 23. Кутярков Ю.М., Кудрявцев В.Н. Влияние внутренних гравитационных волн на спектр ветрового волнения. - "Морские гидрофизические исследования", Севастополь, 1980, № 1, 44-45.
 24. Басович А.Я., Баханов В.В. Кинематика поверхностных волн в поле внутренней волны. - В кн.: Волны и дифракция, 8 Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространении волн. Т. 1. - М., 1981, 193-196.

ГЛАВА VIII

ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ

§ 8.1. Общие положения

Длинными называются волны, длина которых велика по сравнению с глубиной. Примерами длинных волн, наблюдаемых в морях и океанах, являются приливные волны, цунами, ветровые волны и зыбь, приходящие в прибрежную мелководную зону, а в водохранилищах и реках - волны паводка, бор и т.д.

Рассмотрим плоские длинные волны на поверхности жидкости глубиной H . Пусть ось Ox по-прежнему совпадает с направлением распространения волн, а ось Oz направлена вертикально вверх. Плоскость xOy совпадает с дном. Теория длинных волн является приближенной, основанной на предположении, что вертикальная компонента ускорения частиц воды оказывает незначительное влияние на давление. В соответствии с этим давление задается как в гидростатике:

$$p = \rho g (H + \zeta - z), \quad (8.1)$$

где ζ - отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня $z = H$.

Производная давления

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

не зависит от z . Тогда составляющая ускорения по оси Ox также не зависит от координаты z , а следовательно, от нее не зависит и горизонтальная составляющая скорости u . Таким образом, $u = u(x, t)$ и уравнение движения вдоль оси Ox запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (8.2)$$

Преобразуем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

проинтегрировав его по глубине жидкости от $z = 0$ до $z = \zeta + H$:

$$\int \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0.$$

Вынесем $\frac{\partial u}{\partial x}$ из-под знака интеграла, поскольку она не зависит от z , и получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} (H + \zeta) + w(z) \Big|_{z=H+\zeta} - w(z) \Big|_{z=0} = 0.$$

У дна вертикальная составляющая скорости w обращается в нуль, поэтому последнее слагаемое пропадает, а на поверхности воды

$$w_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} u.$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x} [u(\zeta + H)] + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (8.3)$$

Нелинейные дифференциальные уравнения (8.2) и (8.3) для функций $u(x, t)$ и $\zeta(x, t)$ являются основными в общей нелинейной теории длинных волн. При выводе этих уравнений было сделано единственное допущение, что давление задается выражением (8.1). Никакого предположения относительно величины возвышения поверхности ζ или скоростей u, w сделано не было. Поэтому они могут описывать волны не только малой, но и конечной амплитуды. Если в дополнение к основному предположению (8.1) принять, что u и ζ и их производные являются малыми величинами, квадратами и произведениями которых можно пренебречь, то уравнения (8.2) и (8.3) упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (uH) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (8.5)$$

Продифференцируем (8.4) и (8.5) соответственно по t и по x , вычтем одно из другого и для случая постоянной глубины получим линейное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - gH \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (8.6)$$

Аналогичное уравнение получается и для ζ :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gH \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0. \quad (8.7)$$

Из математической физики известно, что коэффициент при второй производной по координате в волновом уравнении равен квадрату скорости распространения волн. Следовательно, скорость распространения волн

$$c = (gH)^{1/2}.$$

Решение волнового уравнения (8.7) определяет две волны, распространяющиеся в разные стороны:

$$\zeta = f_1(x - (gH)^{1/2}t) + f_2(x + (gH)^{1/2}t),$$

где функции f_1, f_2 зависят от формы начального возмущения.

В линейном приближении любое начальное возмущение превращается в две группы волн, распространяющиеся в разные стороны с постоянной скоростью. Форма волны не изменяется, взаимодействия волн между собой не происходит. Для таких волн справедлив принцип суперпозиции.

§ 8.2. Уравнение Кортевега – де Бриза

Линейные волновые уравнения (8.6) и (8.7) описывают длинные волны малой амплитуды без дисперсии. Волновое уравнение, учитывающее конечность амплитуды, должно содержать нелинейный член. Для учета зависимости фазовой скорости от длины волны в уравнение должен быть введен дисперсионный член. Добавим к первому из линеаризованных уравнений мелкой воды (8.4) член вида $\frac{1}{3}c^2 H \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}$, где

$$c = (gH)^{1/2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{3}c^2 H \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0. \quad (8.8)$$

Исключив u из (8.8) и (8.5), при условии постоянства глубины жидкости получим линейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{1}{3}c^2 H^2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = 0. \quad (8.9)$$

Подставив в (8.9) выражение $\zeta = a \cos(kx - \omega t)$, получим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 - c^2 k^2 = \frac{1}{3} c^2 H^2 k^4.$$

Если учесть в нем члены с малым, но конечным значением $kH = 2\pi/\lambda$, то получим выражение для фазовой скорости

$$c' = \frac{\omega}{k} = \pm (gH)^{1/2} \left\{ 1 - \frac{1}{6} (kH)^2 + O(kH)^4 \right\}. \quad (8.10)$$

Выражение в фигурных скобках в (8.10) представляет собой первые члены разложения по малому параметру kH функции $\tanh kH$, входящей в дисперсионное соотношение (2.20) для волн бесконечно малой амплитуды при конечной глубине жидкости. Таким образом, волновое уравнение (8.9) уже позволяет учесть дисперсионные эффекты, так как фазовая скорость длинных волн, которые она описывает, зависит от волнового числа. Преобразуем дисперсионный член

$\frac{1}{3} c^2 H \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}$ с учетом (8.7) и добавим его в (8.2). Полученное уравнение и уравнение неразрывности (8.3) составляют систему уравнений Буссинеска

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{3} H \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(\zeta + H) u] &= 0. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Система (8.11) позволяет учесть как дисперсионные эффекты, так и конечность амплитуды (нелинейный эффект). Ограничеваясь рассмотрением только волн, бегущих вправо, для которых в (8.10) следует сохранить знак плюс, можно получить уравнение Кортевега – де Вриза. Линеаризованное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + c \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{6} c H^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0, \quad (8.12)$$

а нелинеаризованное

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + c \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\zeta}{H} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{c H^2}{6} \cdot \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0. \quad (8.13)$$

Уравнение (8.13) применяется при исследовании целого ряда физических явлений, например магнитогидродинамических и ионно-звуковых волн в плазме, продольных волн в упругих стержнях, волн давления в газожидкостных смесях, в ряде задач нелинейной оптики и многих других [2, гл. II]. В настоящее время создана теория уравнения Кортевега – де Вриза, которая установила важные закономерности нелинейных волн в слабодиспергирующих средах. Изложенный выше метод получения нелинейных уравнений с учетом дисперсии на гляден и общ, но данные нелинейные уравнения могут быть получены и формальным разложением уравнений и граничных условий для жидкости конечной глубины, по двум малым параметрам [2, гл. II]

$$\alpha = \frac{h}{H}, \quad \beta = \frac{H^2}{\lambda^2},$$

первый из которых определяет нелинейные эффекты, второй – дисперсионные (h – высота волны, λ – ее длина). Пусть ось Oz направлена

вертикально вверх. Плоскость xOy совпадает с дном. Уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (8.14)$$

Граничное условие на дне

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \Big|_{z=0}. \quad (8.15)$$

Потенциал скорости φ ищется в следующей форме:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n(x, t). \quad (8.16)$$

Подставив (8.16) в граничное условие (8.15), получим $f_1(x, t) = 0$.

Подставив в уравнения Лапласа значения производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^{(n-2)} f_n(x, t), \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\partial^2 f_n(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

и сгруппировав члены с одинаковыми степенями z , получим соотношения между f_n :

$$\begin{aligned} f_n &= -\frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{\partial^2 f_{n-2}}{\partial x^2}, & n &= 2, 4, \dots \\ f_k &= 0, & k &= 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

Откуда следует выражение для потенциала

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} \cdot \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}}. \quad (8.17)$$

Далее следует подставить выражение для потенциала в граничные условия на свободной поверхности $z = H + \zeta$ и выполнить разложение по малым параметрам α, β . Напомним, что кинематическое и динамическое граничные условия на свободной поверхности имеют вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=H+\zeta},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right\} + g \zeta \Big|_{z=H+\zeta} = 0.$$

Для удобства введем безразмерные переменные

$$x' = \lambda^{-1}x, z' = H^{-1}z, t' = \frac{t c}{\lambda}, \zeta' = \zeta h^{-1}, \varphi = \frac{c \varphi}{g \lambda h}.$$

В новых переменных (штрих в дальнейшем опускается для удобства) уравнения принимают следующий вид.

Уравнение Лапласа

$$\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < z < 1 + a\zeta.$$

Границное условие на дне

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0.$$

Границные условия на свободной поверхности $z = 1 + a\zeta$ имеют вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + a \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

$$\zeta + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Ряд для потенциала φ (8.17) принимает вид разложения по степеням параметра β

$$\varphi = \sum (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} \cdot \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}} \beta^m. \quad (8.18)$$

Подставив (8.18) в граничные условия на свободной поверхности, получим

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1 + a\zeta) \frac{\partial f}{\partial x} \right\} - \left\{ \frac{1}{6} (1 + a\zeta)^3 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{1}{2} a(1 + a\zeta)^2 \frac{\partial \zeta \cdot \partial^3 f}{\partial x \partial x^3} \right\} \beta + O(\beta^2) = 0,$$

$$\zeta + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{a}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{2} (1 + a\zeta)^2 \left\{ \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x^2} + a \frac{\partial f \cdot \partial^3 f}{\partial x \partial x^3} - a \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 \right\} \beta + O(\beta^2) = 0.$$

Опустив все члены с β и продифференцировав второе уравнение по x , получаем нелинейные уравнения мелкой воды (8.2) и (8.3) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + a\zeta) U] = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + aU \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0,$$

$$\text{где } U = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Если в граничных условиях сохранить члены первой степени по β , но опустить члены порядка $O(a\beta)$, то получим

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + a\zeta) U] - \frac{1}{6} \beta \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + O(a\beta, \beta^2) = 0, \quad (8.19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + aU \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{2} \beta \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x^2} + O(a\beta, \beta^2) = 0.$$

Данная система является вариантом уравнений Буссинеска (8.11).

Величина $U = \frac{\partial f}{\partial x}$ является первым членом разложения скорости по малому параметру β , которое имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = U - \beta \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + O(\beta^2).$$

Выполнив осреднение скорости по глубине $\overline{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \bar{U}$, получим

$$U = \bar{U} + \frac{1}{6} \beta \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + O(a\beta, \beta^2).$$

Подставив U в граничные условия (8.19), получим

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (1 + a\zeta) \bar{U} \} + O(a\beta, \beta^2) = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + a\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{3} \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + O(a\beta, \beta^2) = 0.$$

Из первого равенства в низшем приближении следует соотношение

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial U}{\partial x} + O(a\beta),$$

подставив которое в член $\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}$ второго уравнения системы получим уравнение Буссинеска в нормированном виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \alpha \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{3} \beta \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial t^2} + 0(\alpha \beta, \beta^2) = 0.$$

Уравнение Кортевега – де Вриза получается из любой из этих систем при рассмотрении волн движущихся только вправо (в положительном направлении оси Ox). В нижнем порядке приближения (без учета членов первого порядка по α, β) решение системы (8.19) имеет вид

$$U = \zeta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0.$$

Решение, учитывавшее члены первого порядка по α и β , запишем в виде $U = \zeta + \alpha A + \beta B + 0(\alpha^2 + \beta^2)$,

где A, B – функции от ζ и ее производных.

Подставив это выражение U в (8.19), получим

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial A}{\partial x} + 2\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \beta \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \right) + 0(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \beta \left(\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial t} \right) + 0(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

Используя равенство $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} + 0(\alpha, \beta)$, заменим все производные по t на производные по x . Из условия совместности уравнений получаем

$$A = -\frac{1}{4} \zeta^2, \quad B = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}.$$

Откуда получаем нормированную форму уравнения Кортевега – де Вриза (8.13)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3}{2} \alpha \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{6} \beta \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + 0(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

Уравнение Кортевега – де Вриза имеет стационарные решения, которым соответствуют два вида волн: периодические и уединенные волны. Переходя опять к размерным величинам, запишем решение, отвечающее уединенной или одиночной волне:

$$\zeta = h_0 \operatorname{sech}^2 \left\{ \left(\frac{3h_0}{4H^3} \right)^{\frac{1}{2}} (x - c't) \right\}. \quad (8.20)$$

Эта волна называется также иногда солитоном. Она представляет собой изолированный горб, который распространяется без изменения формы с постоянной скоростью

$$c' = c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h_0}{H} \right). \quad (8.21)$$

Решение, соответствующее уединенной волне, применяется для описания волн цунами. Длина волны зависит от ее высоты и глубины воды. $\lambda \sim H \left(\frac{H}{h_0} \right)^{\frac{1}{2}}$. Под ее длиной можно понимать длину промежутка, в пределах которого подъем поверхности воды превышает некоторый заданный уровень, например 3 или 10 % от максимального подъема.

Периодическое решение уравнения Кортевега – де Вриза выражается через эллиптические функции Якоби:

$$\zeta = h_0 \operatorname{sn}^2 \left\{ \left(\frac{3\beta}{4H^2} \right)^{\frac{1}{2}} (x - c't) \right\}. \quad (8.22)$$

Такие волны Кортевег и де Вриз назвали кноидальными, так как они выражаются через функцию $\operatorname{sn}(x)$. Функция $\operatorname{sn}(x)$ кроме аргумента зависит еще от величины модуля m , который явно в выражении для функции не фигурирует. Модуль m равен $(\alpha/\beta)^{\frac{1}{2}}$. Длина кноидальной волны равна

$$\lambda = \frac{4H}{3(\beta)^{\frac{1}{2}}} K(m),$$

где $K(m)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Модуль m характеризует отношение нелинейного и дисперсионных эффектов. Если $m \rightarrow 0$, кноидальная функция переходит в гармоническую. Решение уравнения Кортевега – де Вриза принимает вид

$$\frac{\zeta}{h_0} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \cos \left(\sqrt{3\beta} \frac{(x - ct)}{H} \right),$$

где

$$a = \frac{h_0}{H}, \quad c = c_0 \left(1 - \frac{\beta}{2} \right).$$

В этом предельном случае фазовая скорость не зависит от амплитуды, но зависит от длины волны, т.е. дисперсионный эффект сохраняется. По мере увеличения m влияние нелинейности возрастает, гребни обостряются, впадины становятся положе. Если модуль $m \rightarrow 1$ кноидальная функция переходит в гиперболическую, а волна – в уединенную. Следует отметить, что область значений α и β , для которой кноидальные и уединенные волны являются решением уравнения (8.13), значительно шире области α и β , для которой было получено уравнение Кортевега – де Вриза (α, β малы). Форма кноидальных и уединенных волн и их скорость зависят от амплитуды и длины волны, параметров невозмущенного состояния, на фоне которого распространяется волна. Таким образом, эти волны обладают как нелинейными, так и дисперсионными свойствами. Принцип суперпозиции для них неприменим, волны обладают рядом замечательных свойств, следующих из их нелинейной природы.

В настоящем параграфе уравнение Кортевега – де Вриза было получено для поверхностных волн на мелкой воде, однако оно может быть получено и для длинных внутренних волн, стационарные решения которого описаны, например, в монографии Миропольского [5, гл. У I]. Если длина волны значительно превышает глубину, влиянием дисперсии по сравнению с влиянием нелинейности можно пренебречь. При этом в уравнении (8.13) можно опустить последний член, учитывающий дисперсию; решение для неуставновившихся волн имеет форму волны Римана [6, гл. У I]:

$$\zeta = f \left\{ t - \frac{x}{(gH)^{1/2}} \left(1 - \frac{3\zeta}{2H} \right) \right\},$$

где f определяется формой волны в $x = 0$.

По мере распространения такой волны в прибрежной зоне ее передний фронт становится круче. Это решение справедливо только до точки обрушения волны.

§ 8.3. Одиночная волна

Впервые наблюдал и описал одиночную волну в 1844 г. Скотт Рассел [1]. Он показал экспериментально, что по поверхности жидкости в канале постоянной глубины может распространяться с постоянной скоростью и без изменения формы отдельное возвышение – одиночная волна. Для величины скорости волны он получил из наблюдений выражение

$$c = [g(H + h)]^{1/2},$$

где H – глубина канала, h – максимальное возвышение волны над средним уровнем.

Одиночная волна представляет собой особый вид волнового движения. Эта волна имеет конечную высоту и бесконечно большую длину. Несмотря на это, ее нельзя назвать "длинной волной" в том смысле, как это понятие истолковано в § 8.1, поскольку давление в ней не подчиняется гидростатическому закону и горизонтальная скорость частиц зависит от глубины рассматриваемого слоя. Однако, как это будет показано дальше, изменение горизонтальной скорости с глубиной в одиночной волне происходит довольно медленно, причем тем медленнее, чем меньше отношение высоты волны к глубине жидкости. В пределе, когда это отношение много меньше единицы, горизонтальная скорость частиц в волне перестает зависеть от вертикальной координаты, а закон изменения давления совпадает с гидростатическим. Учитывая указанные особенности, мы сочли возможным рассмотреть теорию одиночной волны в главе "Длинные волны", хотя она и отличается от последних по своим свойствам.

Рассмотрим решение задачи об одиночной волне, данное Рэлеем [2]. Задача состоит в отыскании профиля и других элементов волны, представляющей отдельное возвышение поверхности воды, плавно спадающее в обе стороны по мере удаления от ее максимума и

асимптотически приближающееся к положению невозвмущенного уровня. При этом волновым движением охвачен весь слой жидкости от поверхности до дна.

Пусть начало координат совпадает с дном, ось x – с направлением распространения волны, ось z – направлена вертикально вверх (рис. 8.1). Обозначим через c постоянную скорость волны и сообщим всей массе жидкости скорость – c . Тогда волна будет неподвижной в пространстве.

Разложим составляющие скорости u и w в ряды Маклорена по степеням z :

$$u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots,$$

$$w = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots + b_n z^n + \dots$$

(в разложении w отсутствует свободный член, поскольку $w = 0$ при $z = 0$), где коэффициенты $a_0, a_1, \dots, b_1, \dots, b_n$ являются функциями x .

Найдем из этих уравнений значения производных

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{da_0}{dx} + \frac{da_1}{dx} z + \frac{da_2}{dx} z^2 + \dots + \frac{da_n}{dx} z^n + \dots, \quad (8.23)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = b_1 + 2b_2 z + \dots + nb_n z^{n-1} + (n+1)b_{n+1} z^n + \dots$$

и подставим их в уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = b_1 + \left(\frac{da_1}{dx} + 2b_2 \right) z + \dots + \left[\frac{da_n}{dx} + (n+1)b_{n+1} \right] z^n + \dots = 0.$$

Поскольку это равенство должно соблюдаться при любых значениях z , то коэффициенты при степенях z должны быть равны нулю. Отсюда получаем соотношение между коэффициентами a и b :

$$\frac{da_n}{dx} = -(n+1)b_{n+1}, \quad (8.24)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

Из условия безвихревого характера движения

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (8.25)$$

получим второе соотношение между коэффициентами a и b :

$$na_n = \frac{db_{n-1}}{dx}. \quad (8.26)$$

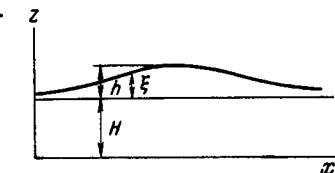


Рис. 8.1. Одиночная волна

Поскольку $b_0 = 0$, то из выражений (8.24) и (8.26) следует, что $a_1 = 0$ и $b_2 = 0$, а исключив из этих выражений b , получим уравнение для коэффициентов a :

$$a_n = -\frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{d^2 a_{n-2}}{dx^2}.$$

Положим $a_0 = f(x)$, тогда, обозначив $\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}$, выразим скорости u и w :

$$\begin{aligned} u &= f - \frac{z^2}{2!} f^{(II)} + \frac{z^4}{4!} f^{(IV)} - \dots \\ w &= -f z + \frac{z^3}{3!} f^{(III)}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Из этих уравнений определим функцию тока ψ , которая определяется из условий $\frac{\partial \psi}{\partial z} = u$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -w$. Функция тока $\psi(x, z)$

сохраняет постоянное значение на каждой линии тока, т.е. линии, касательная которой в каждой точке совпадает со скоростью. Поскольку на бесконечно большом расстоянии от начала координат скорость движения есть $-c$, а глубина H , то уравнение свободной поверхности запишется так: $\psi = -cH$. (8.28)

Интегрируя выражение (8.27) для u и применяя (8.28), получим первое основное уравнение теории одиночной волны:

$$zf - \frac{z^3}{3!} f^{(II)} + \frac{z^5}{5!} f^{(IV)} - \dots = -cH. \quad (8.29)$$

Второе уравнение получим из теоремы Бернулли, положив давление на поверхности воды равным нулю:

$$gz + \frac{1}{2} (u^2 + w^2) = \text{const.}$$

Так как одиночная волна состоит из одного возвышения, спадающего в обе стороны и стремящегося к положительному невозмущенному уровню при $x \rightarrow \infty$, то при $x \rightarrow \pm \infty$ имеем $z = H$, $u = -c$, $w = 0$.

Отсюда $u^2 + w^2 = 2g(H - z) + c^2$.

Поскольку поверхность волны является линией тока и

$$\frac{dx}{u} = \frac{dz}{w},$$

левую часть уравнения перепишем в следующем виде:

$$u^2 + w^2 = u^2 [1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2]$$

Тогда скорость

$$u = \left[\frac{2g(H-z) + c^2}{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \right]^{1/2}$$

Умножим это уравнение на z , заменим u его выражением (8.27) и получим второе уравнение задачи:

$$zf - \frac{z^3}{2!} f^{(II)} + \frac{z^5}{4!} f^{(IV)} - \dots = \left[\frac{(2gH + c^2)z^2 - 2gz^3}{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \right]^{1/2}. \quad (8.30)$$

Уравнения (8.29) и (8.30) позволяют решить задачу об одиночной волне, т.е. найти ее профиль, скорость распространения, скорости и траектории частиц воды в волне. Задача решается методом последовательных приближений, для чего из этих уравнений исключается прежде всего функция f . Ограничиваюсь членами первого порядка малости, из уравнения (8.29) получим

$$\begin{aligned} zf &= -cH, \\ \frac{f^{(n)}}{cH} &= -\left(\frac{1}{z}\right)^n. \end{aligned}$$

Подставляя выражение для функции f и ее производных по x в уравнение (8.30), придем к уравнению для $z(x)$:

$$\begin{aligned} cH \left[1 - \frac{z^3}{3} \left(\frac{1}{z}\right)^{(II)} - \frac{z^5}{45} \left(\frac{1}{z}\right)^{(IV)} - \dots \right] &= \\ = \left[\frac{(2gH + c^2)z^2 - 2gz^3}{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Будем считать волну настолько пологой, что в левой части этого уравнения можно пренебречь третьим и всеми остальными членами:

$$c^2 H^2 \left[1 - \frac{z^3}{3} \left(\frac{1}{z}\right)^{(II)} \right]^2 = \frac{(2gH + c^2)z^2 - 2gz^3}{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Преобразуем производную $\left(\frac{1}{z}\right)$ (II) :

$$\left(\frac{1}{z}\right)^{(II)} = \frac{z^2 \frac{d^2 z}{dx^2} - 2z \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{z^4} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{z}\right).$$

Тогда, пренебрегая членами высоких порядков, находим

$$c^2 H^2 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \frac{2}{3} z \frac{d^2 z}{dx^2} \right] = (2gH + c^2) z^2 - 2g z^3,$$

или

$$\frac{1}{z^2} + \frac{2}{3} z \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{1}{3} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = \frac{1}{H^2} - \frac{2g(z-H)}{c^2 H^2}.$$

Умножим это уравнение на $\frac{dz}{dx}$ и проинтегрируем по x :

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{dz}{dx} \right)^2}{z} = A + \frac{z}{H^2} - \frac{gz^2}{c^2 H^2} + \frac{2gH z}{c^2 H^2}, \quad (8.31)$$

а произвольную постоянную A найдем из условия $\frac{dz}{dx} = 0$ при $z = H$:

$$A = \frac{2}{H} - \frac{g}{c^2}.$$

Подставив в уравнение (8.31) вместо A его выражение, найдем производную $\frac{dz}{dx}$:

$$\left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = 3 \frac{(z-H)^2}{H^2} \left(1 - \frac{gz}{c^2} \right). \quad (8.32)$$

Воспользуемся условием, что на гребне волны, т.е. при $z = H + h$, производная $\frac{dz}{dx}$ равна нулю. Тогда скорость волны

$$c = [g(H+h)]^{1/2}$$

и уравнение (8.32) принимает вид

$$\left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = \frac{3(z-H)^2 (H+h-z)}{H^2 (H+h)}.$$

Проинтегрируем это уравнение, учитывая, что при $x = 0$ $z = H + h$, и получим уравнение для профиля одиночной волны:

$$z = H + h \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2y},$$

$$\text{где } y^2 = \frac{H^2 (H+h)}{3h}.$$

Отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня пропорционально квадрату гиперболического секанса x :

$$\zeta = h \operatorname{sech}^2 \frac{x \sqrt{3h}}{2H(H+h)^{1/2}}.$$

Профиль волны, соответствующий этому уровню, совпадает с изображенным на рис.8.1. Для одиночной волны не существует понятия длины, но можно ввести некоторую условную длину волны. Например, Рэлей предложил называть длиной одиночной волны расстояние между ее точками, в которых $\zeta/h = 0,1$. При этом

$$\lambda = 7,27 \text{ y}.$$

Таким образом, y характеризует "длину волны". Величины h , y , H связаны между собой таким образом, что чем больше высота волны при заданной глубине H , тем меньше y :

$$y^2 = \frac{H^3}{3h} + \frac{H^2}{3}.$$

Иначе говоря, чем волна выше, тем она короче, чем ниже – тем длиннее. При возрастании глубины "длина волны" увеличивается. От тех же параметров h и H зависит объем волны, который рассчитывается по следующей формуле:

$$\Omega = 2h \int_0^\infty \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} \right) dx.$$

Введем обозначение $\frac{1}{2} \frac{x}{y} = \chi$. Тогда

$$\Omega = 4yh \int_0^\infty \operatorname{sech}^2 \chi dx = 4yh \int_0^\infty d(\operatorname{th} \chi).$$

После подстановки пределов находим, что объем одиночной волны

$$\Omega = 4yh = 4yh \left(\frac{h+H}{3h} \right)^{1/2}.$$

Объем волны, заключенный в пределах от $-x$ до x ,

$$\Omega_x = 2 \int_0^x \zeta(x) dx = 4hH \left(\frac{h+H}{3h} \right)^{1/2} \operatorname{th} \frac{x}{2y}.$$

Большая часть объема волны сосредоточена вблизи гребня. Например, при $h = 0,5$ м объем волны, заключенный в пределах $x = \pm 2,5$ м, составляет 84 % полного объема волны, а в пределах $x = \pm 3,8$ м – 95 %. Энергия одиночной волны согласно расчету Буссинеска выражается так:

$$E = \frac{8}{3} \rho g H^2 h \left(\frac{h}{3H} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Выражения для скоростей частиц, дающие хорошие совпадения с результатами измерений, получил Мак-Коэн [3]. Он, подобно Рэлею, сводил задачу к установившемуся движению, сообщая жидкости поступательную скорость $-c$, где c — скорость распространения волны. Далее он предположил, что потенциал скорости φ и функция тока ψ определяются следующим комплексным выражением:

$$\psi + i\varphi = -c(z + ix) + \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1} \operatorname{tg}^{2j+1} \left[\frac{m}{2}(z + ix) \right],$$

где a_{2j+1} и m — неизвестные постоянные, причем $mz < \pi$. Это выражение может быть принято за комплексный потенциал установившегося течения с наличием одиночной волны. Скорость в бесконечности ($x = \pm \infty$) равна c , так как бесконечная сумма при этом обращается в нуль.

В первом приближении ограничимся одним первым членом в сумме:

$$\psi + i\varphi = -c(z + ix) + c a \operatorname{tg} \frac{m}{2}(z + ix).$$

Отделив действительную и мнимую части, получим

$$\psi = -cz + ac \frac{\sin mz}{\cos mz + \operatorname{ch} mx}, \quad (8.33)$$

$$\varphi = -cx + ac \frac{\operatorname{sh} mx}{\cos mz + \operatorname{ch} mx}. \quad (8.34)$$

Зная потенциал скорости (8.34) или функцию тока (8.33), легко найти составляющие скорости u и w частиц воды в одиночной волне:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} = -c \left[1 - ma \frac{1 + \cos mz \operatorname{ch} mx}{(\cos mz + \operatorname{ch} mx)^2} \right],$$

$$w = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{amc \operatorname{sh} mx \sin mz}{(\cos mz + \operatorname{ch} mx)^2}.$$

Относительно движущейся воды горизонтальная составляющая скорости частиц в волне выражается следующим образом:

$$u_1 = mac \frac{1 + \cos mz \operatorname{ch} mx}{(\cos mz + \operatorname{ch} mx)^2}.$$

Для того чтобы применить эти формулы к расчету скоростей частиц в одиночной волне, необходимо найти неизвестные постоянные a и m . Мак Коэн показал, что величины a и m связаны с глубиной жидкости H и высотой волны h следующими соотношениями:

$$ma = \frac{2}{3} \sin^2 \left[m \left(H + \frac{2}{3} h \right) \right],$$

$$a = h \operatorname{tg} \left[\frac{m}{2} (h + H) \right].$$

Мунк преобразовал эти уравнения к более удобной форме, введя в них безразмерные переменные $ta = N$, $mH = M$ и $a = h/H$:

$$N = \frac{2}{3} \sin^2 M \left(1 + \frac{2}{3} a \right),$$

$$a = \frac{N}{M} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} [M(1+a)]}.$$

Решения этих трансцендентных уравнений Мунк [4] дает в форме графиков зависимости M и N от относительной высоты волны a . Определив по графикам M и N , можно найти m и a и рассчитать скорости u и w . Эти формулы показывают, что горизонтальная составляющая скорости u достигает максимума на гребне волны и постепенно убывает по мере возрастания x , оставаясь при этом всегда положительной. Вертикальная составляющая w возрастает от нуля на бесконечно большом расстоянии от гребня до максимума, который достигается в некоторой точке на переднем склоне волны, затем начинает уменьшаться и на гребне обращается в нуль. После этого w меняет знак и снова растет по абсолютной величине, которая достигает максимума в некоторой точке заднего склона. При дальнейшем возрастании x w снова приближается к нулю (рис.8.2).

Смена знака на противоположный при переходе через гребень волны объясняется тем, что на переднем и заднем склонах волны вертикальные составляющие скоростей частиц направлены противоположно: на переднем склоне происходит подъем частиц, на заднем — опускание. Такой ход кривых изменения составляющих вдоль волнового профиля подтвержден экспериментами, выполненными в большом волновом канале. При этом вертикальная и горизонтальная составляющие скорости измерялись проволочным термогидрометром.

По мере удаления от поверхности жидкости вертикальная составляющая быстро убывает и у дна обращается в нуль, горизонтальная же убывает незначительно.

Теория одиночной волны находит приложение не только к цунами, но и к ветровым волнам в прибрежной зоне на определенной стадии их деформации мелководьем. При этом гребни волн становятся более узкими и крутыми и разделяются длинными пологими впадинами. Считают, что эти гребни становятся как бы изолированными друг от друга и не зависят от расстояний между ними. Поэтому к ветровым волнам в этой стадии применяют теорию одиночных волн.

ГЛАВА IX

ЦУНАМИ

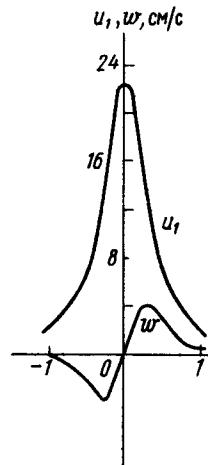


Рис. 8.2. График зависимости горизонтальной u_1 и вертикальной w составляющих скорости в одиночной волне от времени

Л и т е р а т у р а

1. Russel I.S. Report on waves. — 'Rep. 14th Meeting Brit. Assoc. Adv. Sci.', Murray, London, 1844, 311–390.
2. Rayleigh (J.W. Strutt). On waves. — 'Phil. Mag.', 1876, vol. 1, N 257–275.
3. Mc Cowan. On the solitary waves. — 'Phil. Mag.', 1891, ser. 5, 32, 45–58.
4. Мунк В. Теория одиночных волн и ее применение к зоне прибоя. — В кн.: Основы предсказания ветровых волн, эзби, и прибоя. — М.: ИЛ, 1951, с. 403–449.

§ 9.1. Причины возникновения цунами, их интенсивность и повторяемость

Распространенным видом длинных волн являются цунами. Периоды этих волн составляют от 2 до 200 мин, длины – от нескольких десятков до нескольких сотен километров, скорость распространения в глубоких местах океана достигает скорости реактивных самолетов (800–1000 км/ч).

В открытом океане волны цунами почти неощущимы для кораблей. Это объясняется их малой крутизной при большой глубине воды. При подходе к берегу высоты волн растут до громадных размеров (30–40 м). Достигая берега, волны цунами приносят колоссальные бедствия. Они оказывают разрушительное действие на берега, прибрежные постройки, сопровождаются человеческими жертвами, наносят огромный материальный ущерб. Описания картины цунами даны в [1].

Цунами вызываются подводными землетрясениями, извержениями вулканов, падением в воду обломков скал, резкими изменениями атмосферного давления. Кроме природных процессов причиной цунами могут быть взрывы атомных бомб.

Наиболее частой причиной цунами являются землетрясения. На земном шаре четко выделяются две зоны очагов землетрясений. Одна из них расположена в меридиональном направлении и проходит вдоль восточных и западных берегов Тихого океана, который как бы окаймлен подводными горными хребтами. Их вершины поднимаются в виде островных дуг – Алеуто-Аляскинской, Курило-Камчатской, Японской и др. На западе и юго-западе Тихого океана очаги землетрясений тянутся вдоль берегов Центральной и Южной Америки. Тихоокеанская зона очагов землетрясений порождает наибольшее

количество цунами. В Японии цунами являются страшным стихийным бедствием. При каждом более или менее крупном цунами гибнет много людей, разрушаются здания, портовые сооружения. Губительному воздействию цунами, вызываемых землетрясениями, подвержены также Курильские острова, Камчатка, побережье Северной и Южной Америки.

Другая зона очагов землетрясений занимает широтное положение (Апенины, Альпы, Карпаты, Кавказ, Тянь-Шань). В пределах этой зоны цунами наблюдаются на берегах Средиземного, Адриатического, Аравийского морей, и в северной части Индийского океана, однако здесь они происходят редко и составляют менее 20 % всех зарегистрированных на земном шаре случаев этого грозного явления.

Описание возможного механизма генерации волн цунами при землетрясениях дано в [2]. Непосредственной причиной возникновения цунами являются происходящие при землетрясениях быстрые изменения рельефа морского дна (подвижки), вызывающие внезапные отклонения поверхности океана от своего равновесного положения. Деформируемые участки дна имеют достаточно большую протяженность. Описываемый на поднявшийся или опустившийся участок дна столб воды ввиду ее малой сжимаемости и быстротечности процесса деформации также поднимается или опускается, не успевая полностью растечься, и создает положительное или отрицательное возвышение поверхности. Образовавшееся возмущение распространяется в виде длинных гравитационных волн.

Другой причиной, вызывающей цунами, являются извержения вулканов, либо возвышающихся над поверхностью океана в виде островков, либо находящихся под водой. Например, при извержении островного вулкана Кракатау в Индонезии (1833) высота подъема уровня составляла в Зондском проливе 30 м, на южном побережье острова Суматра - 4 м, на острове Ява - 2 м. Волны цунами распространились по всему Индийскому океану, в Атлантическом океане достигли Панамского перешейка, в Тихом океане - Аляски, Сан-Франциско и Южной Америки. Это цунами унесло жизни 36 тысяч жителей.

В 1952 г. произошло сильное извержение подводного вулкана на рифе Майдзин в нескольких сотнях километров от Токио, вызвавшее цунами. Во время его погибло японское гидрографическое судно "Кайе-Мару-5", с борта которого велись наблюдения.

При падении в море обломков горных пород также могут возникнуть цунами большой разрушительной силы. Так, например, огромную одиночную волну вызвало падение горных пород массой $3 \cdot 10^6$ т с высоты 500 м, произшедшее в Норвегии в 1934 г. Высота волны достигала 37 м. Эта волна вызвала многочисленные человеческие жертвы и забросила на десятки метров в глубь суши несколько мелких судов.

Можно привести множество примеров, показывающих связь цунами с землетрясениями, извержениями вулканов, оползнями.

Приведем пример цунами, вызванного, по-видимому, подводным оползнем. Это цунами возникло в декабре 1951 г. у берегов Пуэрто-Рико и Барбадоса и вызвало значительные разрушения. В то

время на сейсмических станциях никаких толчков не отмечалось и погода была спокойной. Вероятной причиной образования волн в данном случае является подводный оползень на склонах океанической впадины Пуэрто-Рико.

Сведения о всех известных цунами приводятся в специальных каталогах [3; 4].

Для классификации цунами можно пользоваться предложенной С.Л. Соловьевым [5] полуколичественной шкалой, в основу которой положена высота подъема уровня на берегу.

Согласно этой шкале катастрофическим цунами соответствует максимальная интенсивность 4. При цунами такой интенсивности средний подъем уровня воды на участке побережья длиной 400 км и более достигает 8 м. При этом местами волны имеют огромную высоту - 20-30 м. Такие цунами разрушают практически все сооружения на берегу, выкорчевывают деревья, увлекают на сушу или в океан суда любых размеров, стоящие у берега. Побережье затапливается (особенно по долинам рек) на многие километры. Такие цунами фиксируются по всему побережью Тихого океана.

Интенсивность 3 соответствует очень сильным цунами, когда на участке протяженностью 200-400 км вода повышается в среднем на 4-8 м, а местами до 11 м. Все строения, задетые такими цунами, повреждаются, а некоторые разрушаются. Суда, кроме самых крупных, оказываются выброшенными на берег. Такие цунами наблюдаются на значительной части океана.

Сильные цунами, вызывающие на побережье длиной 80-200 км средний подъем уровня воды на 2-4 м, а в отдельных местах 3-6 м, имеют интенсивность 2.

Интенсивность 1 характеризует умеренные цунами, при которых вода поднимается на 1-2 м на протяжении 20-80 км и затапливается только низменные участки берега. На берег выбрасываются только легкие суда и лодки, сооружения не разрушаются.

Интенсивность 0 имеют слабые цунами с высотой подъема уровня около 1 м.

Прочие цунами, не замечаемые человеком и регистрируемые только метеографами, имеют интенсивность от -1 до -5. Высота подъема уровня при таких цунами составляет от 30-40 см до 1 м.

Чем сильнее цунами, тем реже они происходят. В среднем цунами интенсивности 4 происходят в Тихом океане один раз в 10 лет, с интенсивностью 3 - один раз в 3 года, с интенсивностью 2 - один раз в год, с интенсивностью 1 - два раза в год, с интенсивностью 0 - четыре раза в год.

§ 9.2. Распространение волн цунами от очага генерации до подхода к берегу

В развитии волн цунами можно выделить три стадии [6]: формирование волн под действием вызвавшей их причины и распростране-

ние вблизи места зарождения (очага), распространение волн в открытом океане большой глубины, трансформация, отражение и разрушение волн на материковом склоне и шельфе и набегание их на берег, резонансные явления в бухтах и на шельфах.

Процесс генерации цунами до сих пор слабо изучен. Известно, что при землетрясениях характеристики возникающих волн цунами зависят от величины и продолжительности деформации дна, геометрии очага возмущения. Величина начального возвышения воды в очаге не превышает, по мнению большинства ученых, нескольких метров.

Распространение волн в открытом глубоком океане обычно описывается линейными теориями, поскольку амплитуда волн мала по сравнению с глубиной и длиной волны. Применяют либо теорию волн бесконечно малой амплитуды, либо линейную теорию длинных волн. Теоретически эта стадия развития цунами изучена более полно, чем первая и третья.

Следует, однако, иметь в виду, что применимость линейной теории требует, строго говоря, выполнения трех условий [10]:

$$\mu^2 = \left(\frac{H}{\lambda} \right)^2 \ll 1,$$

$$\xi = \frac{h}{H} < 1,$$

$$U = \frac{h \lambda^2}{H^3} < 1,$$

где μ^2 - параметр частотной дисперсии, ξ - параметр нелинейности или амплитудной дисперсии, U - параметр Урселла, отражающий относительное значение амплитудной и фазовой дисперсии.

Если первые два параметра для волн цунами в открытом океане заведомо меньше единицы, то параметр Урселла может быть и больше единицы. При заданных глубине воды и высоте волны условие $U < 1$ может быть выполнено только для волн, период которых $T < T_{max}$, где

$$T_{max}^2 = \frac{H^2}{g h}.$$

Например, при $H = 5$ км и $h = 1$ м $T = 25$ мин.

Для длинных волн на мелкой воде понятие длины волны зачастую становится неоднозначным. Например, одиночная волна и квандальная при одной и той же крутизне гребня имеют существенно разные длины.

Поскольку параметр Урселла зависит от длины волны, то в подобных случаях им лучше не пользоваться, а для оценки важности нелинейных членов ограничиться параметром ξ .

Наблюдать цунами в открытом океане, а тем более около источника еще никому не удавалось. Однако представление о волнах вблизи

источника цунами дают наблюдения Ван-Дорна [7], произведенные во время подземных ядерных взрывов в районе атолла Бикини в 1956 г. Волнографы были установлены на нескольких атоллах. Измерения показали, что уменьшение амплитуды этих искусственно возбужденных волн цунами при их удалении от очага происходит примерно обратно пропорционально расстоянию.

При уменьшении максимальной высоты волны в процессе ее распространения от 1,4 м до 0,16 м длина волны возросла от 49 км до 112,5 км, а период от 5,8 мин до 11 мин. Возрастание периода волн при их удалении от очага является общей закономерностью рассматриваемого процесса. При этом первая волна в цуге имеет наибольший период, а периоды последующих волн меньше периодов предыдущих.

Задача регистрации цунами в открытом океане и вблизи очага является весьма актуальной в настоящее время. Над решением ее работают специалисты различных стран. Чтобы определить параметры волн в открытом океане, необходимо установить глубоководные метеографы. В 1975 и 1978 г. были проведены совместные экспедиции СССР и США в Тихом океане юго-восточнее острова Хоккайдо [8]. На дно были установлены автономные приборы, регистрирующие колебания уровня океана и придонные течения. Чувствительным элементом метеографа были пьезокварцевые датчики [9]. Прибор позволял регистрировать статические колебания уровня до 1-2 см. Регистрация колебаний уровня и придонных течений производилась в течение 40 сут. В этот период цунами не возбуждались, но были зарегистрированы волны другого происхождения в частотном диапазоне цунами. Таким образом, была подтверждена возможность регистрации цунами донными приборами.

Поскольку скорость распространения волн цунами пропорциональна квадратному корню из глубины воды, то рельеф дна оказывает большое влияние на их распространение, вызывая рефракцию. Над подводной возвышенностью волновые лучи сходятся, что приводит к концентрации волновой энергии над мелководными участками бассейна и в то же время к исчезновению волнового движения в ряде лежащих областях [11; 12]. Таким образом, на фоне общего охвата акватории волнами цунами можно выделить участки, представляющие собой "мертвые зоны" и зоны с наибольшими высотами. При этом подводные хребты играют роль волноводов, над которыми концентрируется волновая энергия.

§ 9.3. Теоретические исследования трансформации цунами в прибрежной зоне

В зависимости от условий возникновения в прибрежной зоне наблюдаются различные типы волн цунами. Их можно разделить на три группы [13]: 1) волны, приходящие к берегу положительной фазой и описываемые теорией Коши - Пуассона; 2) цуг волн, приходящих к

берегу отрицательной фазой; 3) одиночные (удиненные) волны. Первый тип волны возникает чаще всего от подводных извержений. Предполагается, что второй тип волн возникает при внезапном опускании большого подводного массива. В этом случае образуется впадина, в которую со всех сторон устремляется вода, вследствие чего у берегов, расположенных сравнительно недалеко от места катастрофы, ощущается понижение уровня (отрицательная фаза волны). Одиночные волны в некоторых случаях возникают в открытом океане. Происхождение их объясняют метеорологическими причинами, обвалами, оползнями, мутьевыми потоками. Кроме того, следующие друг за другом волны цунами в прибрежной зоне приобретают свойства одиночных.

При выходе волн цунами на материковый склон и шельф происходят их трансформация, отражение и обрушение, а также набегание на сухой берег. В зоне уменьшающихся глубин высоты волн растут, принимая иногда устрашающие размеры.

Рассмотрим некоторые теоретические исследования возрастания высот волн типа цунами в береговой зоне. Для расчета изменения высоты длинной гармонической волны при изменении глубины воды существует формула Эри-Грина:

$$\frac{h}{h_0} = \left(\frac{H_0}{H} \right)^{1/4}, \quad (9.1)$$

которую легко получить, исходя из предположения, что на откосе укладывается несколько длин волн и энергия каждой волны остается постоянной при ее распространении в бассейне с изменяющейся глубиной:

$$\frac{\rho g h^2}{8} \lambda = \frac{\rho g h_0^2}{8} \lambda_0.$$

Поскольку период волны предполагается неизменным, то

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{H}{H_0}},$$

откуда и следует (9.1). В [14] получена более общая, чем (9.1), формула, учитывающая потери энергии из-за трения о дно, перестройку волны на мелководье и угол наклона берегового склона:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{h_0} \sqrt{\frac{H}{H_0}} - \operatorname{ctg} \alpha \left\{ \frac{16 \beta_1}{5\pi^3} \left[\frac{1}{H_0} \sqrt{\frac{H}{H_0}} - \frac{1}{H} \right] + \frac{2\beta_2}{3\sqrt{gT}} \left[\sqrt{\frac{H}{H_0}} - \frac{1}{\sqrt{H}} \right] \right\}.$$

Для расчета возрастания высоты волны цунами при подходе к берегу формула Эри-Грина обычно имеет ограниченную применимость, так как длина этой волны велика и на протяженности прибрежной зоны несколько длин волн обычно не укладываются. Кроме того, на урезе воды $H=0$ эта формула дает бесконечно большую высоту волны, что не имеет физического смысла. Поэтому если формулу и применяют, то расчеты ведут до некоторой изобаты, например 10 м, т.е. не доходя до уреза воды.

Изменение амплитуды длиной гармонической волны $\zeta = a(x) \exp i \omega t$ на плоском береговом откосе вплоть до уреза воды рассмотрено в [15; 17]. В основу взято линейное уравнение мелкой воды

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - g \frac{\partial}{\partial x} \left[H(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] = 0. \quad (9.2)$$

С учетом закона изменения глубины воды $H = x \operatorname{ctg} \alpha$, где α – угол наклона откоса, ось x направлена по нормали от берега в море, уравнение (9.2) приводится к виду

$$x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\omega^2 \zeta}{g \operatorname{tg} \alpha} = 0. \quad (9.3)$$

Запишем точное решение (9.3):

$$\zeta = \left[A I_0 \left(\sqrt{\frac{4\omega^2 x}{g \operatorname{tg} \alpha}} \right) + (B N_0 \sqrt{\frac{4\omega^2 x}{g \operatorname{tg} \alpha}}) \right] \cos \omega t.$$

Здесь I_0 – функция Бесселя первого рода, N_0 – функция Неймана, А и В – произвольные константы. Далее авторы [17] накладывают условие, что решение должно быть ограничено всюду, в том числе и на урезе, т.е. $B = 0$ (так как функция N_0 имеет логарифмическую особенность при $x = 0$). На больших расстояниях от уреза воды с учетом асимптотической формулы для I_0 получается следующее выражение:

$$\zeta = \frac{A}{2} \left(\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{\pi^2 \omega^2 H(x)} \right)^{1/4} \left\{ \cos \left[\omega(t+\tau) - \frac{\pi}{4} \right] + \cos \left[\omega(t-\tau) + \frac{\pi}{4} \right] \right\}, \quad (9.4)$$

$$\text{где } \tau = \sqrt{\frac{4x}{g \operatorname{tg} \alpha}}.$$

Нетрудно видеть, что волна (9.4) представляет собой суперпозицию падающей и отраженной волн, амплитуда которых изменяется с глубиной по закону Эри-Грина. Константу А в (9.4) можно найти из условия, что на глубине H_0 амплитуда падающей волны равна a_0 .

Окончательно решение уравнения записывается в виде

$$\zeta = 2\pi a_0 \sqrt{\frac{2I_B}{\lambda_0}} I_0 \left(\frac{4\pi}{\lambda_0} \sqrt{\frac{2I_B}{\lambda_0} x} \right), \quad (9.5)$$

где $I_B = \frac{H_0}{\operatorname{tg} \alpha}$ – расстояние от берега до изобаты, где $H = H_0$, длина волны $\lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{g H_0}$.

Амплитуда волны на урезе

$$a_y = 2\pi a_0 \sqrt{\frac{2I_B}{\lambda_0}} \quad (9.6)$$

не стремится к бесконечности, так как учтено отражение волны от

откоса. Можно выразить a_y через глубину воды H_0 , период волны и наклон откоса:

$$a_y = 2\sqrt{2} \pi a_0 (T \operatorname{tg} \alpha)^{-1/2} \left(\frac{H_0}{g}\right)^{1/4}.$$

Итак, рассмотренное решение показывает, что амплитуда волны на урезе прямо пропорциональна начальной высоте волны и корню четвертой степени из начальной глубины воды и обратно пропорциональна квадратному корню из периода волны и тангенса угла наклона откоса.

Поскольку для описания волн цунами иногда применяют теорию одиночной волны, рассмотрим изменение ее высоты в предположении постоянства потока ее энергии

$$c_0 E_0 = c E.$$

Энергия одиночной волны

$$E = \frac{8}{3\sqrt{3}} \rho g H (H h)^{3/2},$$

а скорость распространения

$$c = \sqrt{g(H + h)}.$$

Зависимость высоты волны от глубины имеет вид

$$h = h_0 \left(\frac{H_0}{H}\right)^{4/3} \left[\left(1 + \frac{h_0}{H_0}\right) \left(1 + \frac{h}{H}\right)^{-1} \right]^{1/3}.$$

Поскольку $\frac{h}{H} < 1$, то последнее выражение можно упростить:

$$h \approx h_0 \left(\frac{H_0}{H}\right)^{4/3}.$$

Итак, высота одиночной волны изменяется обратно пропорционально глубине в степени $4/3$.

§ 9.4. Экспериментальные исследования трансформации цунами

Экспериментальные исследования трансформации одиночных волн на откосах показали, что явление это определяется не только начальными и конечными значениями глубины, но и углом наклона откоса и другими параметрами. Например, в работе [18] показано, что изменение высот одиночных волн на откосе происходит по закону

$$\frac{h}{h_0} = \left(\frac{H_0}{H}\right)^n,$$

где показатель n различен для различных углов наклона откоса, а именно:

$$\begin{aligned} n &= 0,49 \text{ при } \operatorname{ctg} \alpha = 43, \\ n &= 0,26 \text{ при } \operatorname{ctg} \alpha = 20, \\ n &= 0,19 \text{ при } \operatorname{ctg} \alpha = 15. \end{aligned}$$

Эти опыты относятся к очень пологим откосам ($\operatorname{ctg} \alpha \gg 15$). Подробное экспериментальное исследование трансформации, разрушения и наката одиночных волн на более крутых откосах ($5 < \operatorname{ctg} \alpha \leq 15$) описано в [19; 20]. Эксперименты выполнены в стеклянном лотке длиной 25 м, шириной 0,6 м, высотой 0,5 м при глубинах воды $H_0 = 16; 19; 22; 25$ см. Начальные высоты волн в различных опытах задавались от 3 до 8 см. Профиль волн совпадал с описываемым формулой (8.20). Регистрация формы волны и скорости ее продвижения по каналу осуществлялась струнными волнографами. В области трансформации на откосе проводилась профильная киносъемка. Для определения скорости и длины наката проводилась плановая киносъемка.

Эксперименты показали, что характер трансформации одиночных волн зависит от начального значения параметра волны: $\gamma_0 = \frac{h_0}{H_0}$,

от угла наклона откоса и шероховатости его поверхности. Высота волн на пологих откосах возрастает быстрее, чем на крутых.

На откосе с $\operatorname{ctg} \alpha = 5$ наблюдалось монотонное возрастание высоты волны (рис.9.1) в широком диапазоне относительных глубин

$(0,4 > \frac{H}{H_0} > 0,2)$ при $0,18 \leq \gamma_0 \leq 0,37$ (отрицательные значения $\frac{H}{H_0}$ соответствуют сухому берегу). Высота волны на урезе составляла от 1,6 ($\gamma_0 = 0,18$) до 1,2 ($\gamma_0 = 0,37$) начальной высоты h_0 .

Помимо возрастания высот волн на достаточно пологих откосах происходит их разрушение. Распространяясь по откосу, волна деформируется, ее передний склон становится более крутым, пока не наступит разрушение (рис.9.2). Можно указать несколько типов разрушения волн [21]: скользящий обрушающийся вал (spilling), ныряющий (plunging), нагонный (surging) и разрывный (collapsing). Последний является промежуточным между ныряющим и нагонным. В [22] показано, что разрушение одиночных волн с заданным начальным параметром γ_0 происходит на откосах, угол наклона которых меньше критического. Величина критического угла зависит от γ_0 и возрастает с ростом этой величины. При заданном γ_0 разрушение волн на откосах более пологих, чем критический, происходит при больших относительных глубинах. В самом деле, на рис.9.3 показано возрастание высоты волны с заданным $\gamma_0 = 0,31$ на откосах с $\operatorname{ctg} \alpha = 5, 7, 10, 15$. На откосе с $\operatorname{ctg} \alpha = 5$ разрушения волн ($0,18 \leq \gamma_0 \leq 0,37$) не происходит (о разрушении мы судим по уменьшению высоты волны). Крутая волна, имеющая параметр $\gamma_0 = 0,42$, является, по-видимому, критической для данного откоса. На откосе с $\operatorname{ctg} \alpha = 7$ происходит, вероятно, разрушение вблизи уреза волн. На откосе с $\operatorname{ctg} \alpha = 10$ разрушение происходит при $\frac{H}{H_0} > 0,10$. Разрушение той же волны на откосе с $\operatorname{ctg} \alpha = 15$ происходит при $\frac{H}{H_0} = 0,20$.

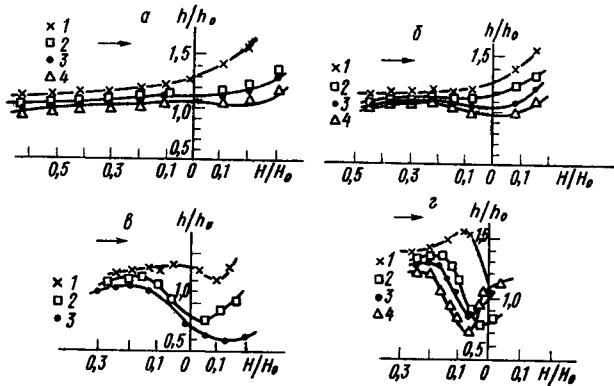


Рис. 9.1. Изменение относительной высоты волны h/h_0 в зависимости от относительной глубины H/H_0 на шероховатых откосах, покрытых гравием ($d = 0,5 - 0,7$ см). γ_0 равняется: а) 1-0,18; 2-0,33; 3-0,37; 4-0,42; б) 1-0,18; 2-0,24; 3-0,29; 4-0,37; в) 1-0,24; 2-0,31; 3-0,41; г) 1-0,20; 2-0,24; 3-0,34; 4-0,44; $\operatorname{ctg} \alpha$ равен: а - 5; б - 7; в - 10; г - 15. Откос $\operatorname{ctg} \alpha = 7$ с незакрепленной шероховатостью

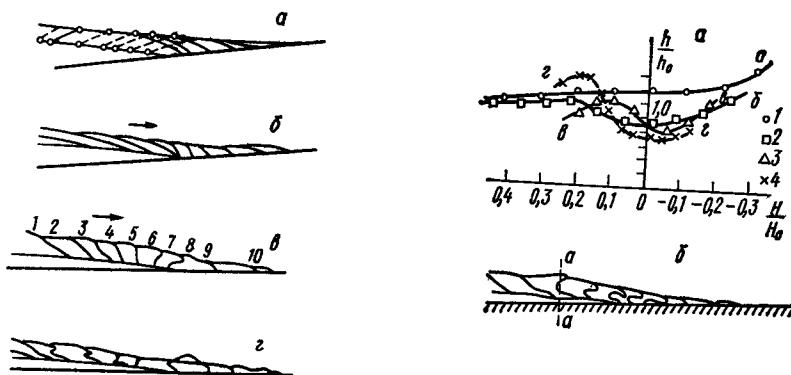


Рис. 9.2. Последовательные положения переднего склона волны $\gamma_0 = 0,30$ на шероховатых откосах; $\operatorname{ctg} \alpha$ равен а - 5; б - 7; в - 10; г - 15
Рис. 9.3. а) Изменение относительной высоты волны $\gamma_0 = 0,31$ в зависимости от относительной глубины на шероховатых откосах; $\operatorname{ctg} \alpha$ равен: а - 5; б - 7; в - 10; г - 15. б) Последовательные положения переднего склона волны на откосе $\operatorname{ctg} \alpha = 15$. На линии "аа", где гребень начинает заворачивать, высота волны становится максимальной

На откосе с $\operatorname{ctg} \alpha = 43$ критическое значение параметра $\gamma_0 = 1,2$. Любопытно, что эта величина превосходит критическую величину $\gamma_0 = 0,78$, полученную теоретически Мак Куэном [3, гл. VIII] для одиночной волны в канале постоянного сечения.

§ 9.5. Теоретические исследования наката волн цунами на берег

Подходя к урезу воды, необрушившиеся или обрушившиеся волны цунами продолжают свое движение по сухому берегу. Набегание воды на сухое побережье называют "накатом" или "заплеском". Вопрос о накате волн на берег является одним из важнейших аспектов проблемы цунами. Обстоятельный обзор работ по этому вопросу дан в [23].

Для решения многих практических задач необходимо знать средние и максимальные скорости наката волны на сухой берег при заданных параметрах волны на глубокой воде и определенных рельефе и шероховатости подводного склона и берега. Наибольший практический интерес имеют данные о границе и уровне затопления при накате цунами на сухой берег.

Определение границы затопления суши представляет одну из самых трудных задач гидродинамики, поскольку при ее решении необходимо учитывать нелинейность, диссиацию, отражение, неоднородность, связанную с топографией дна. Рассмотрение величины заплеска с учетом нелинейности явления дано в [16]. В [17] эта задача решается в линейном приближении. Авторы рассматривают достаточно крутые плоские откосы, на которых не происходит обрушения волн.

В § 9.3 приведена формула (9.5) для высоты волны на откосе, полученная в [17]. Накат воды на сухой берег, где $x < 0$, рассчитывают по той же формуле (9.5), заменив x на $|x|$:

$$\zeta = 2\pi a_0 \sqrt{\frac{2I_B}{\lambda}} I_0 \left(\frac{4\pi \sqrt{I_B |x|}}{\lambda_0} \right).$$

Граница затопления суши определяется из равенства $H(x) + \zeta(x, t) = 0$. Отсюда получено уравнение для высоты наката L_h :

$$L_h = 2\pi a_0 \sqrt{\frac{2I_B}{\lambda}} I_0 \left(\frac{4\pi \sqrt{2I_B L_1}}{\lambda_0} \right), \quad (9.7)$$

где L_1 – горизонтальная составляющая наката.

Если $L_1 \ll \frac{\lambda_0^2}{100 I_B}$, получим простую асимптотическую формулу

$$L_h = 2\pi a_0 \sqrt{\frac{2I_B}{\lambda_0}}. \quad (9.8)$$

Сравнивая эту формулу с (9.6), находим связь высоты заплеска с амплитудой волны на урезе:

$$L_h = a_y \cdot$$

(9.9)

Анализ уравнения (9.7) показывает, что его решение существует только при условии

$$\operatorname{tg} \alpha > 10,4 H_0^{2/5} h_0^{3/5} \lambda_0^{-1},$$

связывающем параметры волны цунами, глубину воды и крутизну откоса. При этом горизонтальный накат не превосходит величины

$$L_{\max} \approx 0,04 \frac{\lambda_0^2}{l_b} = 0,04 g T^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

В [24] проведено сравнение результата (9.8) с рассчитанным по нелинейной теории и установлено, что для расчета наката необрушившихся гармонических волн на берег достаточно найти высоту волны на урезе, пользуясь линейным приближением, т.е. максимальная высота наката в нелинейной теории совпадает с максимальной высотой волны на урезе, рассчитанной в линейном приближении.

Далее в [17] доказывается, что этот результат можно распространить и на волны цунами, имеющие вид отдельных импульсных возмущений, и приводится формула для расчета высоты на урезе:

$$h_y = h_0 \sqrt{\frac{2l_b}{\lambda_0}} P\left(\frac{t}{T_0}\right), \quad (9.10)$$

где h_0 – высота, λ_0 – длина волны цунами, T_0 – ее длительность до выхода на откос.

Расчеты показали, что безразмерная функция $P\left(\frac{t}{T_0}\right)$ слабо зависит от формы приходящей волны и для рассмотренных классов волн колеблется в пределах $4,6 \leq P \leq 6,3$.

Формула (9.10), позволяющая оценить максимальную высоту волны на урезе воды, если известны значения высоты волны и длины этой волны на расстоянии l_b от берега, представляется чрезвычайно важной для практики. В связи с этим первостепенное значение приобретает ее экспериментальная проверка. В [25] указывается на удовлетворительное совпадение результатов экспериментов, проведенных в лотке длиной 1,5 м, с рассчитанными по (9.10).

8.9.6 Экспериментальные исследования наката волн

Накамура [26] исследовал экспериментально трансформацию и накат длиннопериодных синусоидальных волн ($0,3 \leq T \leq 30$ мин) на береговой склон небольшой бухты. Опыты проводились в бассейне размерами $20 \times 0,9 \times 0,4$ м. Глубина воды была 10 см, уклон дна под водной поверхностью 1:50, уклон берегового склона 1:200. Обрушения волн не наблюдалось.

В работе отмечается заметное влияние периода и крутизны волны на возрастание ее высоты на откосе и накат на сухой берег. Наибольшая наблюденная высота волны вблизи уреза воды (на расстоянии

~ 50 см от него) превышала начальную в 4 раза.

Наибольшая высота наката превышала начальную высоту волны до двух раз, а в экспериментах на откосе 1:10 при периоде волн 1–2 с – до трех раз.

В [19; 20] в лотке длиной 25 м исследован накат одиночных волн на плоские береговые откосы в зависимости от их угла наклона, высоты волны, глубины воды в канале, размеров и подвижности береговых отложений. Обозначения величин, характеризующих накат, указаны на рис. 9.4.

Опыты проводились как с гладким, так и с шероховатым дном. В качестве подстилающей поверхности использовался гравий размером 0,5–0,7 см, полистироловые шарики диаметром 1,0–1,2 см и гофрированная жесть с высотой выступов 2,5–2,7 см и с шагом 5,2 см ("пила"). При распространении одиночной волны в канале постоянной глубины первые два вида шероховатости не оказывали заметного влияния ни на высоту, ни на кинематику частиц воды в волне [27]. И только у самого дна, где относительная глубина $\frac{z}{H}$ $< 0,2$, удалось обнаружить некоторые отличия экспериментальных эпюров горизонтальной и вертикальной составляющих скорости от рассчитанных по теории Мак Коуэна. Третий тип шероховатости оказывает заметное влияние на кинематику и высоту волны. На эпюрах скоростей частицы уже "чувствуют" дно. В своем движении они частично повторяют очертания дна, однако их движение имеет отрывной характер, что связано с вихреобразованием на пилообразной подстилающей поверхности. Отрыв пограничного слоя и образование вихрей отнимают энергию у волны, что и проявляется в уменьшении ее высоты по мере распространения вдоль канала (рис. 9.4).

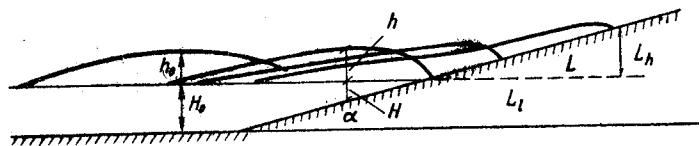


Рис. 9.4. Обозначения параметров наката на откос

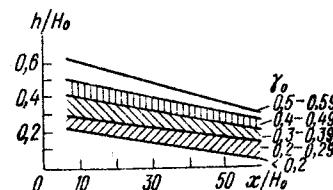


Рис. 9.5. Уменьшение высоты волны с различными γ_0 по мере их распространения вдоль канала с горизонтальным шероховатым дном
($d = 2,7$ см)

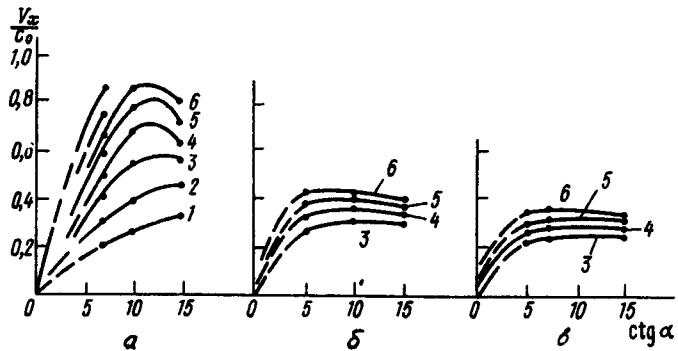


Рис.9.6. Зависимость относительных дальности ($1,2,3\dots; 8$) и высоты наката ($1', 2', \dots, 8'$) от $\operatorname{ctg} \alpha$ для волн с разными y_0 : 1-0,10; 2-0,15; 3-0,20; 4-0,25; 5-0,30; 6-0,35; 7-0,40; 8-0,45; на гладком откосе (а), с закрепленной шероховатостью (б), с подвижной шероховатостью (в)

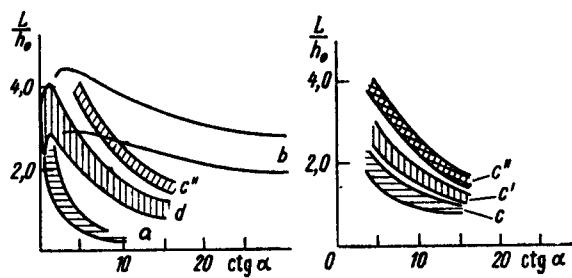


Рис.9.7. Сравнение относительной высоты наката для волн разных типов: а) ветровых (а), бора (б), одиночных волн на гладком откосе (с) волн "солитонного типа" (д); б) Влияние шероховатости откоса на накат одиночных волн. с" - гладкий откос, с' - шероховатый откос с закрепленной шероховатостью, с - откос с незакрепленной шероховатостью

На откосе влияние шероховатости более заметно, особенно если она не закреплена. В частности, длина L_1 и высота L_h наката рис.9.5 на закрепленной шероховатой поверхности меньше, чем на гладкой, а на незакрепленной меньше, чем на закрепленной (рис.9.6, 9.7).

Относительная длина наката $\frac{L_1}{H_0}$ возрастает с ростом y_0 . Для

достаточно высоких волн ($y_0 \geq 0,15$) на кривых зависимости относительной длины наката на гладкие откосы от их крутизны наблюдается максимум в области $\operatorname{ctg} \alpha = 10-15$. Это можно объяснить тем, что при продвижении волны вверх по откосу работают два механизма, противодействующие накату: отражение волны от откоса и трение воды о дно. Первый механизм превалирует на крутых откосах, второй - на пологих. Дело в том, что на пологих откосах происходит разрушение волн и турбулизация движения. При этом увеличивается коэффициент сопротивления и потери энергии. Скачкообразное возрастание коэффициента трения при разрушении волны вероятно определяет появление максимума на кривой зависимости длины наката от угла откоса.

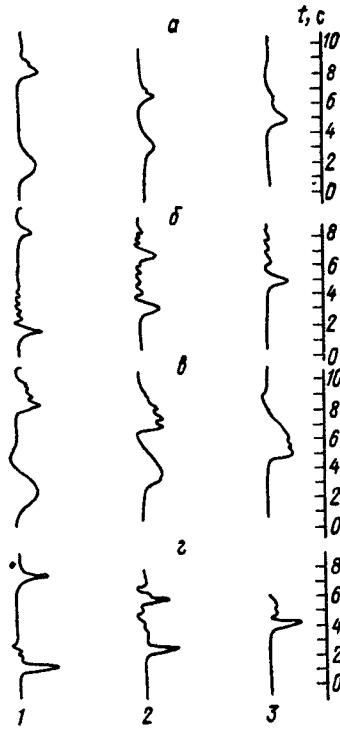
На рис.9.7 приведена зависимость относительной высоты наката от угла откоса для волн различных классов: ветровых, одиночных, бора [28] и волн "солитонного типа", профиль которых не поддается описанию простым аналитическим выражением. Накат волн "солитонного типа" исследован авторами на гладком дне. Для возбуждения волн "солитонного типа" использовались последовательно четыре различных волнноделителя. Осциллограммы возбуждаемых ими волн даны на рис.9.8. Приводимые здесь результаты получены осреднением данных опытов с четырьмя различными волнноделителями.

В области пологих откосов ($\operatorname{ctg} \alpha = 5$) высота наката возрастает с увеличением крутизны откоса, при этом для ветровых волн она наименьшая, для бора, в котором перенос массы выражен наиболее существенно, наибольшая. Для одиночных волн на откосе с закрепленной шероховатостью ($d = 0,5-0,7$ см) высота наката может быть рассчитана по следующей эмпирической формуле:

$$\frac{L_h}{h_0} = 0,8 \left(\frac{H}{h_0} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Высоты наката волн "солитонного типа" также близки к рассчитанным по этой формуле. В области более крутых откосов ($\operatorname{ctg} \alpha < 0,1$) значения высот наката одиночных волн и бора перекрываются. Это подтверждает сделанное в [17] заключение, что на крутых откосах накат практически не зависит от класса длинных волн.

Интересно рассмотреть поведение этих волн в области $0 \leq \operatorname{ctg} \alpha \leq 0,5$. На кривых наката бора обозначен максимум при $\operatorname{ctg} \alpha < 0,5$. Накат одиночных волн на откосах с $\operatorname{ctg} \alpha < 0,5$ экспериментально не исследован. Волны "солитонного типа" создают максимальный накат на откосах с $\operatorname{ctg} \alpha \approx 1$. На вертикальной стенке они создают высоту подъема воды,



превышающую в 2,2 раза начальную высоту волны, что превышает теоретическое значение 2.

Существенно, что для всех рассмотренных классов длинных волн максимальные значения высоты наката превышают начальную высоту волны в 3,5-4,5 раза.

Аппроксимация берега и дна плоскостью является простейшей. Фактический рельеф прибрежной зоны и берега может быть очень разнообразным, что несомненно осложняет процесс набегания волн цунами. Как скажутся подводные и надводные ступеньки на величину наката и скорости набегания воды на сухой берег, исследовано экспериментально в [29].

Рассмотрены три типа ступенчатого профиля берега и дна (рис. 9.9): а) берег в виде вертикальной стенки с примыкающим к ней подводным откосом; б) выступающая над поверхностью воды ступенька конечной высоты, урез воды совпадает с положением ступеньки, вода частично накатывается на плоский наклонный сухой берег; в) затопленная ступенька, урез воды не совпадает с положением ступеньки.

От высокой вертикальной стенки с примыкающим к ней подводным откосом происходит полное отражение волны с искажением профиля вследствие трансформации на подводном откосе и частичной потерей энергии. На стенке подъем уровня превышает начальную высоту волны в 2,2-2,5 раза. При этом снижается уровень на расстоянии от стенки, т.е. наличие подводного откоса заставляет набегающую волну как бы прижиматься к стенке.

Затопленная ступенька малой высоты при большом заглублении практически не изменяет картину трансформации и набегания волны по сравнению с плоским откосом. Ступенька большой высоты при малом заглублении существенно изменяет картину. Эффекты обрушения гребня и набегания аэрированного потока, имеющие место на плоском откосе, здесь менее заметны, так как большая часть энергии волны отражается от подводной ступеньки, что приводит к уменьшению величины наката.

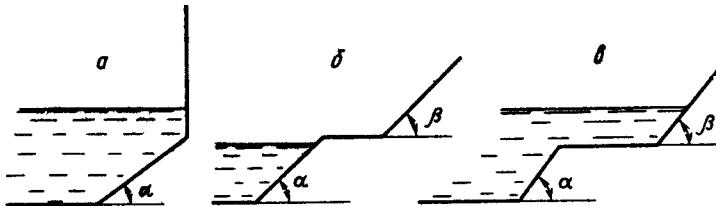


Рис. 9.9. Типы ступенчатого профиля берега и дна

Когда одиночная волна проходит область резкого изменения глубины, она становится двугорбой, т.е. образуются солитоны. В дальнейшем по сухому берегу распространяются две волны, следующие одна за другой. Это явление было предсказано теоретически в [30]. В [31] показано, что солитонные деформации в бассейне переменной глубины присущи различным типам волн, состоящих из одного гребня.

В случае слегка выступающей из воды ступеньки процесс развивается так же, как и около вертикальной стенки с затопленным откосом, т.е. наблюдается подъем уровня на выступающей части ступеньки. Когда величина подъема уровня превысит высоту ступеньки, начинается заплеск воды на сухой берег. Выплеснувшийся объем воды в течение некоторого времени распространяется вверх по откосу, а затем стекает обратно. Длина наката при этом меньше, чем в случае затопленной ступеньки.

Следовательно, естественные или искусственные прибрежные стены могут существенно ослабить цунами и стать защитой береговых сооружений.

§ 9.7. Скорости наката одиночных волн на откос

Помимо величины наката волн цунами значительный научный и практический интерес представляют исследования скоростей набегания волн на береговой откос. Эксперименты [19; 32] с одиночными волнами позволили определить мгновенные V и средние \bar{V} скорости набегания воды на берег посредством плановой киносъемки со скоростью 24 кадра в секунду. Ось объектива кинокамеры проходила через середину линии уреза воды. В кадре фиксировался участок откоса от 1 до 2,5 м в различных опытах. Координатная сетка имела шаг 5 см. На линию уреза воды перед пуском волны наносились поплавки (пенопластовые шарики), которые затем продвигались вместе с границей воды. Скорости при откате не измерялись. За мгновенную принималась скорость, с которой поплавок двигался в течение времени $\Delta t = 0,05$ с. Для

расчета средней скорости определялось время, прошедшее с момента прохождения уреза воды до остановки потока на откосе.

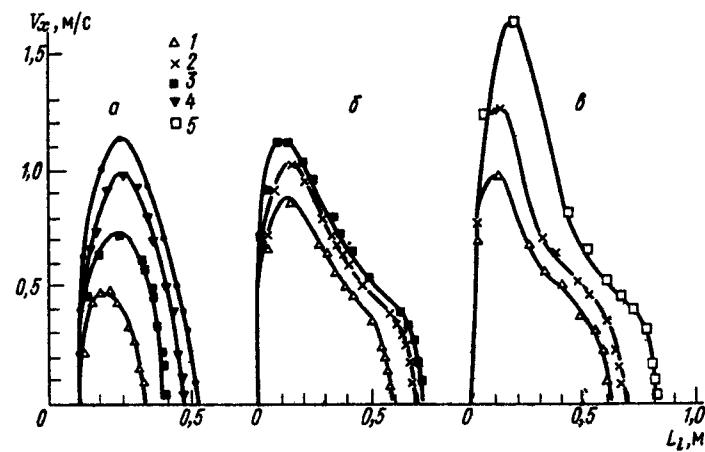


Рис. 9.10. Изменение горизонтальной составляющей V_x мгновенной скорости на разных по крутизне откосах. y_0 равняется: 1-0,18; 2-0,24; 3-0,29; 4-0,36; 5-0,42; $\operatorname{ctg} \alpha$ равен: а - 5; б - 10; в - 15

Рассмотрим изменение горизонтальной составляющей V_x мгновенной скорости на разных по крутизне откосах (рис. 9.10). Мгновенные скорости водной границы вначале нарастают вдоль откоса, достигают максимума и затем уменьшаются до нуля. На наиболее крутом из рассмотренных откосов ($\operatorname{ctg} \alpha = 5$) волны, характеризуемые параметром $0,12 \leq y_0 \leq 0,42$, не обрушаются. Нарастание и уменьшение скорости на этом откосе происходит практически одинаково интенсивно, т.е. кривые $V_x(L)$ симметричны относительно вертикали, проходящей через точку максимума скорости. Скорости увеличиваются с ростом y_0 . Наибольшая измеренная на откосе с $\operatorname{ctg} \alpha = 5$ скорость равна 1,15 м/с.

На менее крутых откосах достигаются значительно большие скорости (до 1,7 м/с), причем кривые изменения скорости вдоль таких откосов имеют более пологую правую ветвь, чем левую. Изменение скорости наката вдоль откоса связано с трансформацией и обрушением волны. Например, на откосе с $\operatorname{ctg} \alpha = 10$ гребень волны вытягивается "каплей" и с большой скоростью пролетает над неподвижной линией уреза. Именно в этот момент вблизи уреза воды фиксируются максимальные скорости. Затем капля заворачивается, ударяется об откос, при этом слышен характерный хлопок, вызванный, вероятно, разрывом поверхности пленки при ударе. Вперед с большой скоростью выбрасывается струя воды, летят брызги. На берег набегает сильно аэри-

рованный поток воды. По-видимому, такой тип обрушения Galvin [21] классифицирует как *plunging*.

В момент заворачивания и обрушения гребня горизонтальная скорость значительно уменьшается. После выброса струи уменьшение скорости происходит более медленно, при этом по откосу распространяется уже не волна, а поток, на который существенно влияет трение о подстилающую поверхность. На откосе с $\operatorname{ctg} \alpha = 15$ все исследованные волны разрушаются. Заворачивание и опрокидывание гребня происходит до линии уреза воды, причем опрокидывающийся гребень ударяется о поверхность воды, а не берегового откоса.

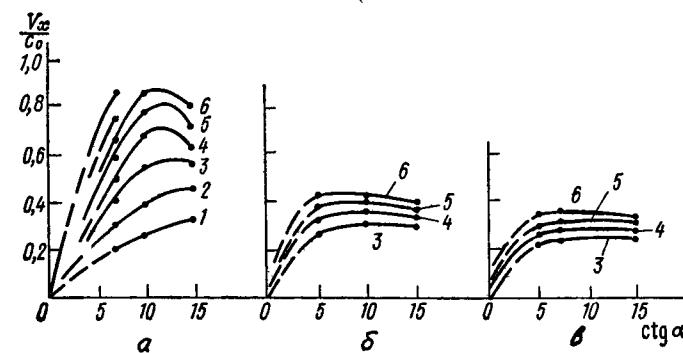


Рис.9.11. Зависимость относительной скорости наката волн на откос от $\operatorname{ctg} \alpha$. Обозначения те же, что и на рис.9.6

Зависимость средней относительной горизонтальной скорости V_x/c_0

наката волн на откос от его крутизны и шероховатости представлена на рис.9.11. На гладком откосе эта скорость имеет максимум в области наклонов $\operatorname{ctg} \alpha = 10 \div 15$, так же как и горизонтальные составляющие наката L_1 (рис.9.6).

§ 9.8. Накат цуга волн, подходящих к откосу отрицательной фазой

В случае, если цунами представляют собой цуг волн, подходящих к берегу отрицательной фазой (рис.9.12), скорости наката оказываются значительно меньшими, чем для одиночной волны [33]. Набегание такого цуга волн на откос было исследовано экспериментально в том же лотке, что и одиночных волн, но способ возбуждения волн был другой. Рассмотрим картину набегания цуга, для которого $y_0 = 0,21$, на откос с $\operatorname{ctg} \alpha = 5$, $y_0 = h_0 / H_0$, где h_0 - высота волны от пер-

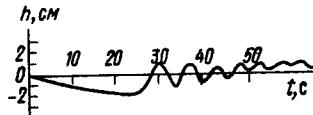


Рис. 9.12. Цуг волн, подходящих к берегу отрицательной фазой (впадиной)

по сухому берегу, все последующие волны обрушаются вблизи уреза. Объясняется это, по-видимому, тем, что вторая и последующие волны цуга движутся по встречному потоку воды. При этом их гребни обгоняют подошвы и волны опрокидываются.

На откосе колебания происходят около уровня, расположенного несколько выше невозмущенного, т.е. происходит нагон воды на откос. При набегании того же цуга волн на менее крутой откос ($\operatorname{ctg} \alpha = 7$) первый гребень уже близок к разрушению. По-видимому, при большем значении y_0 первая волна уже обрушится. На еще более пологом откосе ($\operatorname{ctg} \alpha = 10$) при подходе цуга обнажается большая часть откоса. Первый гребень обрушивается до линии первоначального уреза воды, а последующие – на этой линии.

На самом пологом откосе с $\operatorname{ctg} \alpha = 15$ происходит очень мощный отлив. Затем уровень воды поднимается, а волны не видно. Потом по тонкому слою воды вдоль откоса начинает двигаться бурный поток с большой скоростью. Когда поток выходит на сухой берег, движение его замедляется и он останавливается. В это время подходит следующая волна, и движение продолжается, как было описано. По графикам изменения уровня в различных сечениях были рассчитаны средние для участка длиной 50–60 см скорости впадины, а также первого и второго гребней. Результаты представлены на рис. 9.13. На крутых откосах ($\operatorname{ctg} \alpha = 5$ и 7) скорости второго гребня меньше, чем первого. Второй гребень движется на некотором расстоянии от первого и не оказывает на него влияния. При $\operatorname{ctg} \alpha = 10$ скорости обоих гребней одинаковы, при $\operatorname{ctg} \alpha = 15$ второй гребень движется быстрее первого. Это происходит, вероятно, потому, что первый гребень движется по сухому дну и обрушивается, а второй – по "водной подушке", т.е. на попутном потоке воды, образованном первым обрушившимся гребнем.

Длина наката цуга волн (рис. 9.14) при всех наблюдавшихся значениях y_0 на пологих откосах больше, чем на крутых, в то время как для одиночной волны наблюдается максимум в некоторой области наклонов откоса ($\operatorname{ctg} \alpha = 10 \div 15$). Это отличие связано с тем, что длина наката цуга обусловлена не первой волной, а второй и последующими. На более пологих откосах потеря энергии на трение для второй и последующих волн меньше, так как они движутся по попутному потоку воды, образованному обрушившейся первой волной.

вого гребня до последующей подошвы. Цуг состоял обычно из 5–6 волн. При подходе цуга вначале происходит отлив воды и обнажение дна до тех пор, пока не подойдет первый гребень. Передний склон волны становится все более крутым. Когда угол между этим склоном и горизонтальной плоскостью достигает достаточной величины ($\sim 45^\circ$) волна начинает двигаться по откосу. Первая волна проходит линию первоначального уреза воды и продвигается

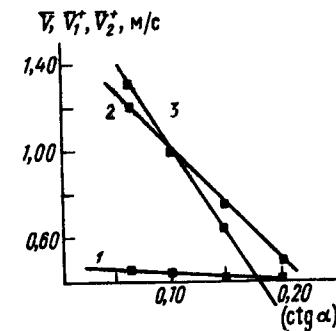


Рис. 9.13. Средние скорости набегания впадины \bar{V} (1), первого гребня \bar{V}_1 (2), второго гребня \bar{V}_2 (3) в зависимости от $\operatorname{ctg} \alpha$

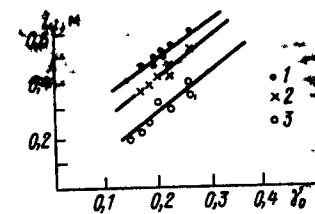


Рис. 9.14. Длина наката цуга волн при различных $\operatorname{ctg} \alpha$: 1–5; 2–10; 3–15

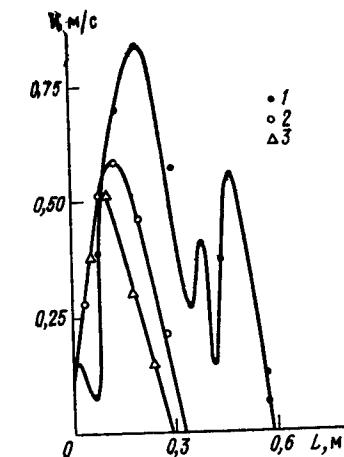
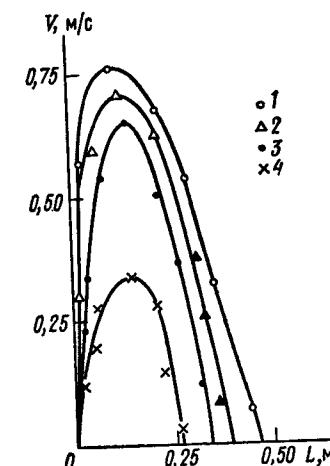


Рис. 9.15. Мгновенные скорости набегания воды на сухой берег:
а) y_0 равен: 1 – 0,28; 2 – 0,21; 3 – 0,20; 4 – 0,16;
б) $\operatorname{ctg} \alpha$ равен: 1 – 15; 2 – 10; 3 – 5; $y_0 = 0,20$

Мгновенные скорости набегания воды на сухой берег представлены на рис. 9.15, а, б, на котором по оси абсцисс отложено горизонтальное расстояние от уреза воды, по оси ординат – мгновенные скорости на данном участке.

На откосах с $\operatorname{ctg} \alpha = 5$ и $\operatorname{ctg} \alpha = 10$ кривая изменения скорости для пуга с параметром $y_0 = 0,20$ симметрична относительно прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку максимума скорости, причем на более пологом откосе ($\operatorname{ctg} \alpha = 10$) скорости сильно больше. На откосе с $\operatorname{ctg} \alpha = 15$ распределение скоростей сильно отличается от предыдущих наличием нескольких максимумов и минимумов. Это связано с разрушением последующих волн на откосе. Скорости наката для пуга волн с начальной отрицательной фазой значительно меньше, чем для одиночных волн. По-видимому, это объясняется первоначальным оттоком воды и осушением части прибрежного откоса, в результате чего волны должны пройти значительное расстояние по твердому грунту и понести значительные потери энергии на трение.

8.9. Цунами в бухтах

Поле волн в краевой области океана, в частности в бухтах, определяется возникновением в ней сложных волновых систем, резко отличающихся от волн, приходящих из открытого океана. Вопрос о том, как влияют краевые эффекты, обусловленные наличием береговой черты произвольной геометрии и изменяющихся глубин, на формирование поля длинных волн вблизи берега, нуждается в тщательном исследовании. Рассмотрению этого вопроса посвящены некоторые теоретические [34 - 37] и экспериментальные [38 - 42] работы.

Высоты волн и накат в бухтах могут быть значительно усилены в условиях резонанса. В [36] показано, что большие коэффициенты усиления в заданном эстуарии имеют место при определенных длинах приходящих волн, не обязательно соответствующих его собственным частотам. В [42] изложены результаты лабораторного исследования волновых систем, возникающих в бухтах закрытого и открытого типов при различных направлениях подхода начальной одиночной волны.

Эксперименты выполнены в лотке размером 20x4 м. Колебания уровня фиксировались киносъемкой на фоне измерительных вех, установленных в характерных точках.

Одиночные волны, возбуждавшиеся подъемом щита, имели длительность 3-4 с, начальные высоты волн составляли 2-4 см, длины - 3-5 м. Планы бухт с расположеными в них вехами представлены на рис. 9.16. В закрытой Мало-Курильской бухте, имеющей узкое горло, по-видимому, не бывает катастрофических цунами, тем более что она расположена на западном побережье острова и в нее доходят только дифрагированные волны. Однако в силу своей замкнутости она интересна с точки зрения возбуждения в ней собственных колебаний под влиянием приходящей волны.

Модель бухты выполнена в масштабе $a_L = 1:700$ по горизонтали и $a_h = 1:100$ по вертикали. Масштабные коэффициенты времени, скорости, шероховатости могут быть рассчитаны с помощью критерия подобия, вытекающих из уравнений длинных волн на мелкой воде в приближении математической гидравлики [43; 44], а именно

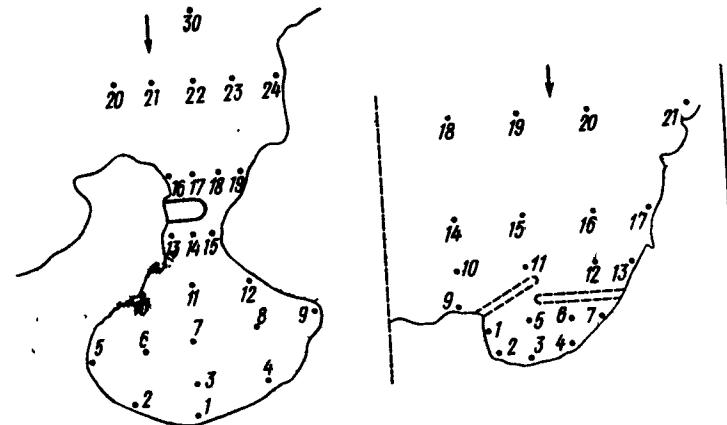


Рис. 9.16. Планы бухт с расположенными в них измерительными вехами: а) Мало-Курильская; б) Южно-Курильская

$$F_f = \frac{V^2}{g H} = \text{const.}$$

$$S_t = \frac{V t}{L} = \text{const.}$$

$$K_f = \frac{V^2}{i C^2 R} = \text{const.}$$

Здесь i - наклон дна, C - коэффициент Шези, R - гидравлический радиус.

Масштаб скорости для данной модели $a_v = 1:10$, масштаб времени $a_t = 1:70$, масштаб наклона $a_i = 7$. Масштаб шероховатости a_p можно найти, воспользовавшись критерием трения K_f . Сначала определим масштаб коэффициента Шези $a_C = \frac{C_M}{C_N}$ (индексы "M" и

"N" соответствуют значениям величины на модели и в натуре):

$$a_C = \frac{a_v}{\sqrt{a_R} \sqrt{a_i}} = \frac{1}{\sqrt{a_i}}.$$

Для данной модели $a_C = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Необходимо отметить, что коэффициент Шези является постоянной величиной только в случае равномерного стационарного течения, когда он может быть рассчитан по одной из формул, предлагаемых гидравликой. С натяжкой применяют найденные по этим формулам значения коэффициента Шези для расчета нестационарного неравномерного движения, т.е. паводков и попусков в реках. Наша оценка коэффициентов Шези по опубликованным ГГИ данным [45] о паводках на реках Тверце и Оредеже показали, что для одного и того же участка реки при одинаковом заполнении русла коэффициент Шези оказывается неодинаковым для разных паводков. Он больше (сопротивление меньше) в случае, когда изменения скорости и уровня происходят быстрее, т.е. когда волновые свойства процесса проявляются ярче.

Естественно, что для цунами, представляющего собой волновой процесс, сопротивление должно быть существенно меньше, чем дают расчеты по формуле Шези. Однако ввиду отсутствия других формул, которыми можно было бы практически воспользоваться, исследователи продолжают применять формулу Шези.

Выразим коэффициент Шези по формуле Маннинга:

$$C = \frac{R^{1/6}}{n},$$

где n – шероховатость поверхности, определяемая с помощью гидравлического справочника. Масштаб шероховатости

$$\alpha_n = \frac{\sqrt[6]{a_L}}{a_C}, \quad \text{или} \quad a_n = a_L^{-\frac{1}{2}} a_H^{\frac{2}{3}}.$$

Для нашей модели $a_n = 1,21$, т.е. шероховатость модели должна быть несколько больше, чем в натуре. Это является следствием значительного геометрического искажения модели.

Для эксперимента Накамуры [38] на модели с малым искажением ($a_i = 2,5$) $a_n = 0,74$ при том же a_H (0,01), т.е. шероховатость этой модели должна быть меньше, чем в натуре. На моделях без геометрического искажения должно быть $a_n = a_L^{1/6}$. В [42] модель была выложена из песка 0,2 мм и покрыта цементом. Реальная шероховатость дна бухты неизвестна. Длительностям волн на модели 3–4 с в натуре соответствуют 3,5–4,6 мин, т.е. возбуждаемые в эксперименте волны находятся в диапазоне волн цунами (2–200 мин [1]) вблизи его короткопериодной границы.

Рассмотрим типичную картину прямого подхода волны в бухту (когда первоначальное направление волны совпадает с осевой линией бухты) и характер возникающих в ней колебаний уровня. Вначале начинаются подъем воды и бурное движение в горле бухты, затем в бухте возникают прогрессивно-стоячие волны: формируется вал (рис. 9.17), распространяющийся по нормали к берегу и примерно повторяющий по форме его очертания, и возникают одноузловые сейши с периодом 5,5 с, что соответствует 6,7 мин в натуре. Вал, или гребень волны, вошедшей в бухту, подходит к урезу воды почти одновременно вдоль всего побережья бухты. Вблизи уреза вал частично опрокидывается и

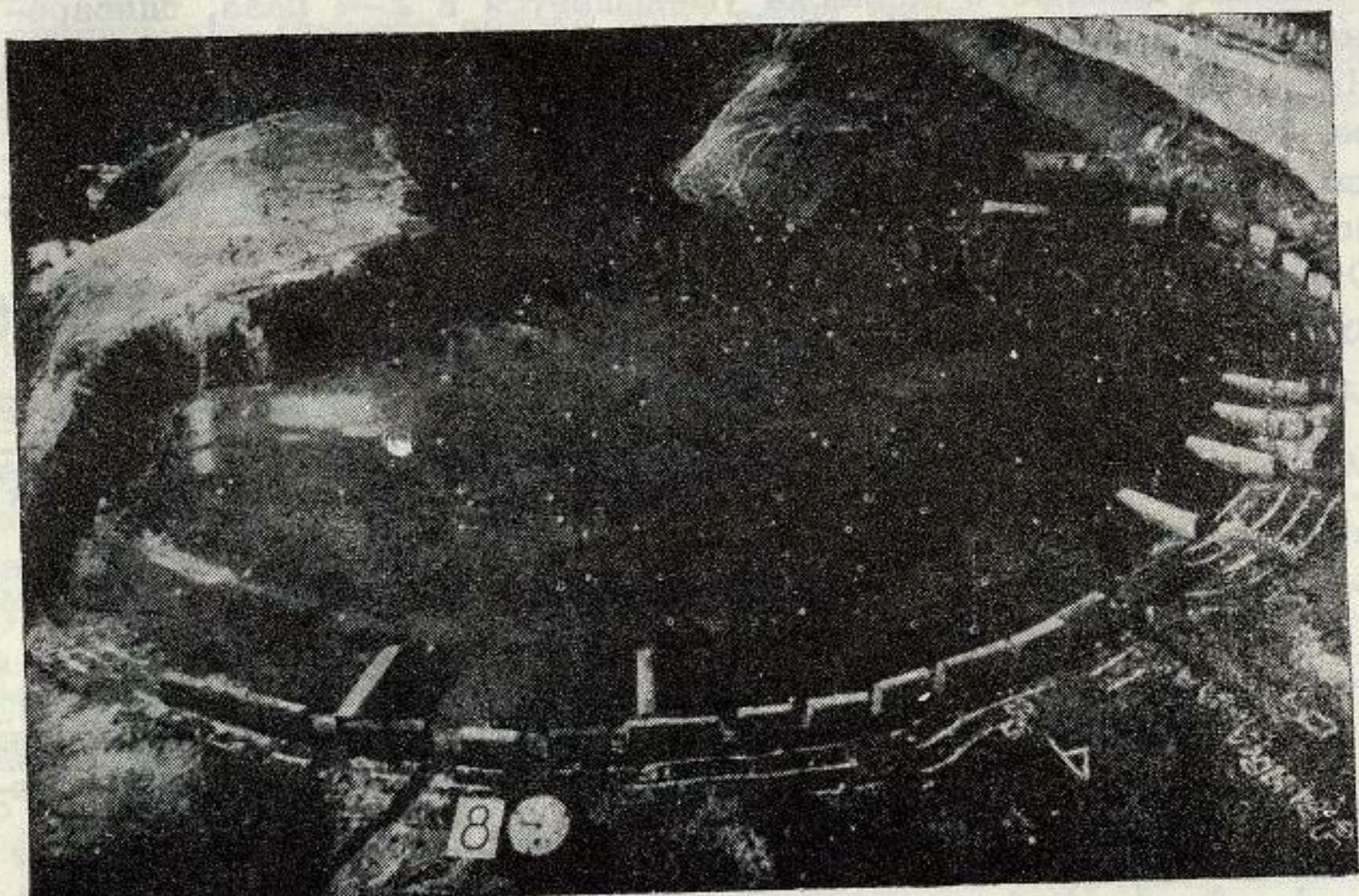


Рис. 9.17. Модель Мало-Курильской бухты. Виден вал, повторяющий очертания береговой линии

частично отражается от тянущейся вдоль берега террасы. Отраженный вал движется к центру бухты и сходится между вехами № 7 и 11. Затем вал снова расходится, двигаясь к берегу, и т.д. До полного успокоения он совершает 3–5 пробегов, постепенно затухая. Горизонтальное движение поверхностных частиц воды в бухте, как показали поплавки-индикаторы, происходит по сильно вытянутым эллиптическим орбитам.

Практический интерес представляет высота подъема уровня на урезе воды, продолжительность стояния повышенного уровня, дальность заплеска на сухой берег. Высота подъема уровня h_1 на урезе воды в точке, лежащей на осевой линии бухты, при прямом подходе волн превышает начальную высоту волны h_0 , измеренную вдали от входа в бухту, в среднем в 1,3 раза.

Коэффициент усиления $\frac{h_1}{h_0}$ уменьшается с ростом начальной высоты волны (рис. 9.18), т.е. более высокие волны усиливаются меньше, чем более низкие, что характеризует защищенность бухты от разрушительных цунами. Длина наката, создаваемого волнами с начальной высотой до 4 м (в пересчете на натуру), в районе поселка Мало-Курильский доходила до 350 м, а по руслу речки до 850 м.

Опыты с косым подходом волн, когда направление распространения приходящих волн составляло угол 45° с осевой линией бухты, показа-

ли, что отношение $\frac{h_1}{h_0}$ падает гораздо более резко с ростом h_0 , чем при прямом подходе, и становится даже меньше единицы. При косом подходе дальность заплеска уменьшается в 2-4 раза, одновременно уменьшается время стояния повышенного уровня воды на урезе.

Часть опытов была проведена с дамбой, суживающей горло бухты вдвое. При прямом подходе воли защитное действие дамбы практически отсутствует, при косом – проявляется слабо, уменьшая высоту подъема уровня в среднем на 20 %.

Открытая Южно-Курильская бухта (рис. 9.16) ничем не защищена от цунами и более подвергнута их разрушительному действию, чем

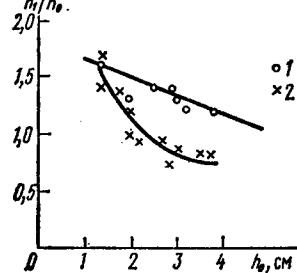


Рис. 9.18. Зависимость коэффициента усиления волны на модели Мало-Курильской бухты. h_1 измерена на вехе № 1

столь существенной отрицательной фазы, она сформировалась в области уменьшающихся глубин (вехи № 15 – 11 – 5).

Нарастание высоты волны при подходе к берегу проявляется впервые на вехе № 5, где подъем уровня составляет 7,5 м. В других точках на урезе (№ 1 и 2) максимальная высота подъема уровня несколько меньше (6-7 м). При отходе волны на вехах № 1,2,3,5 оголялось дно. Затем происходил вторичный накат, не сопровождавшийся существенным подъемом уровня.

В последующих опытах часть бухты с поселком и портовыми сооружениями была отгорожена двумя сплошными дамбами, расположение которых показано пунктиром на рис. 9.16. В этих опытах волна той же начальной высоты 3,8 м (на вехе № 19) вблизи вех № 15-11 представляла собой тоже двумодальную кривую, но подъем уровня на вехе № 11 был значительно больше, а именно 6,5 м вместо 4,0 м без дамбы. Большой перепад уровня воды в открытом море и в отгороженной части бухты создавал быстрый поток воды в проходе между двумя дамбами. Бурный характер движения воды приводил к тому, что на вехе № 5 отмечалось несколько мелких максимумов подъема уровня. На урезе подъем уровня не превышал 4 м, что значительно меньше, чем в незащищенной бухте.

Характер движения воды в открытой бухте с дамбами напоминает тот, что наблюдался в закрытой Мало-Курильской бухте: заметно формирование вала, распространяющегося от прохода в дамбе к берегу. Дамба, уменьшая подъем уровня на урезе, приводит в то же время к возникновению бурного потока воды через горло в бухту и формированию вихря на большей части ее акватории. По-видимому, в натуре такой вихрь представлял бы немалую опасность для судов, не успевших уйти в открытое море.

§ 9.10. Защита от цунами

Защита от цунами является одной из важнейших задач для стран, берега которых омываются водами цунамигенных морей и океанов. Защита от цунами в настоящее время сводится к своевременному оповещению об опасности. Наиболее интенсивно исследования цунами ведутся в Японии, США и СССР. В этих странах созданы специальные службы предупреждения о приближении цунами к побережью. В Советском Союзе такая служба была создана после Камчатского цунами 1952 г., наиболее опустошительного за 250-летнюю историю Камчатки и Курильских островов. Исследования цунами ведутся многими институтами страны. Координацию работ осуществляют комиссия по цунами научного совета по проблеме "Изучение океанов и морей и их ресурсов" при Государственном комитете по науке и технике.

Важнейшую роль в исследованиях цунами играет международное сотрудничество ученых. Оно осуществляется через Комитет по цунами, входящий в состав Международного геодезического и геофизического союза, через координационную группу по службам предупреждения о цунами в Тихом океане, через Международный информационный центр цунами на Гавайских островах, а также путем совместных работ [8].

Для предупреждения населения о приближении опасности можно использовать то небольшое время, которое протекает между появлением возмущения воды над очагом землетрясения и приходом фронта цунами к берегу. В СССР главная угроза цунами исходит из сейсмической зоны, расположенной в районе островного склона глубоководной Курильско-Камчатской впадины.

Очаги цунами удалены от побережья Курильских островов и Камчатки на 100–150 км, скорость распространения волн в этой области по глубокой воде ~ 500 км/ч, по мелководью – 200 км/ч. Следовательно, до того момента, когда разрушительные волны достигнут важнейших населенных пунктов Тихоокеанского побережья СССР, остаются десятки минут, а иногда и час. Этого времени достаточно, чтобы обнаружить цунами и оповестить население. Но как узнать, что возникли волны цунами?

Узнать о возникновении цунами можно практически двумя путями. Первый путь основывается на анализе показаний сейсмографов. Дело в том, что упругие сейсмические волны бегут от очага земле-

трясения сквозь недра земли до станции наблюдения раз в 30 быстрее, чем цунами.

Однако не всякое землетрясение вызывает цунами. По каким же особенностям сигналов землетрясения можно судить о его цунами-опасности? Как в советской службе предупреждения о цунами, так и в американской и японской используется один параметр землетрясения - его энергия (магнитуда).

Слабые землетрясения не вызывают цунами. Все сильные подводные землетрясения магнитудой более 7,5 обязательно вызывают цунами. Но существует диапазон магнитуд землетрясений (6,5-7,5), в котором точно предсказать цунами невозможно, прогноз носит сугубо статистический характер. В последние годы в СахКНИИ АН СССР при регистрации сейсмических волн данного диапазона (10-100 с) обнаружено, что форма и спектр продольной сейсмической волны в какой-то мере служат критериями цунамиопасности землетрясений. Учитывают время нарастания максимума и общую длительность волны, продолжительность и скорость вспарывания тектонического разрыва в очаге землетрясения, положение длинноволнового края спектра и его максимума.

Второй путь обнаружения цунами состоит в прямой регистрации волн в открытом океане с заблаговременной передачей информации. Практически датчики цунами достаточно установить на краю шельфа, т.е. на глубинах порядка 200 м.

По инициативе С.Л.Соловьева дистанционная гидрофизическая система, состоящая из датчиков гидростатического давления и течения, впервые установлена в 1964 г. на шельфе острова Шикотан. В 1980 г. впервые удалось зарегистрировать цунами с помощью датчика давления, установленного на острове Шикотан на глубине 113 м. Цунами было вызвано землетрясением с магнитудой 7,0. Возвышение воды 7 см было зарегистрировано за 1 ч до подхода волн к населенным пунктам. Это была первая в мире регистрация цунами в океане [5].

В Гонолулу на Гавайских островах работает Координационный центр международной службы (SSWWS), дающий предупреждение о цунами ряду стран и территорий, лежащих на Тихоокеанском побережье (США, Канада, Новая Зеландия, Япония, Филиппины, Чили, Французская Полинезия, Гонконг, Тайвань, острова Фиджи). Работа этой службы основывается на показаниях сети сейсмических приборов и метеографических станций, довольно густо расположенных в Тихом океане [10]. Когда происходит землетрясение с достаточно большой амплитудой, сразу на всех сейсмических станциях срабатывает сигнал тревоги. В Гонолулу поступают сведения о времени добегания сейсмических волн (р и s). На основе этой информации в Гонолулу определяют эпицентр землетрясения. Если он оказывается в океане или близко от него, то участникам системы SSWWS передается информация об эпицентре землетрясения и возможности возникновения цунами. На основе карт изохрон определяется расчетное время добегания волны. Затем центр запрашивает станции, прежде всего находящиеся вблизи эпицентра, о ходе уровня. При наличии аномалий в ходе уровня центр пе-

редает предупреждение о цунами. В случаях, когда очаги землетрясения расположены близко к берегу, прогноз цунами может быть дан только по сейсмическим данным.

Как меру защиты от цунами рассматривают районирование побережья по степени цунамиопасности. Выявляются зоны возможного затопления побережья с целью ограничения строительства. В некоторых случаях в наиболее опасных местах возводятся дамбы. Строительство инженерных защитных сооружений наиболее распространено в Японии, где население живет в устьях рек и в узких бухтах.

Цунамирайонирование включает в себя следующие задачи:

1. Выявление очагов генерации цунами, т.е. сейсмоактивных зон, определение повторяемости цунами с различной магнитудой и т.д.
2. Расчет цунами в очаге, т.е. определения поля смещений водной поверхности и скоростей частиц воды.
3. Расчеты распространения волн в океане с учетом реального рельефа дна.
4. Расчеты трансформации волн на шельфе и выхода их на берег.

Каждая из этих задач является весьма сложной и включает в себя много нерешенных вопросов. Однако практическая необходимость составления карт цунамиопасности Тихоокеанского побережья требует решения, хотя бы с более или менее обоснованными допущениями и упрощениями, всего комплекса указанных задач.

Начиная с 1963 г. составлены четыре схемы цунамирайонирования Курило-Камчатской зоны [46 - 49], однако ввиду слабой изученности сейсмических процессов в Тихом океане и влияния прибрежного рельефа на трансформацию волн не существует пока одной официально утвержденной карты цунамирайонирования.

Л и т е р а т у р а

1. Соловьев С.Л. Проблема цунами и ее значение для Камчатки и Курильских островов. - В кн.: Проблема цунами. - М.: Наука, 1968, 7-50.
2. Соловьев С.Л. Цунами. - "Земля и Вселенная", 1980, № 3, 12-16.
3. Соловьев С.Л., Го Ч.Н. Каталог цунами на западном побережье Тихого океана. - М.: Наука, 1974.
4. Соловьев С.Л., Го Ч.Н. Каталог цунами на восточном побережье Тихого океана. - М.: Наука, 1975.
5. Соловьев С.Л. Защита против цунами. - "Природа", 1981, № 5, 54-67.
6. Гусаков В.К. Обзор работ по проблеме возбуждения волн цунами. - В кн.: Методы расчета возникновения и распространения цунами. - М.: Наука, 1978, 18-29.
7. Van Dorn W.G. Some characteristics of surface gravity waves in the sea produced by nuclear explosions. - "J. Geoph. Res.", 1961, 66, 3845-3862.

8. Соловьев С.Л., Лаппо С.С., Миллер Г. Организация и проведение советско-американской экспедиции по изучению цунами в открытом океане. – В кн.: Гидрофизические исследования океана. Труды СахКНИИ ДВНЦ АН СССР. – Владивосток: 1977, вып. 54, с. 3–8.
9. Харви Р., Витусек М., Шинмото Д., Константинов Ф.И. Аппаратура, использованная в советско-американском рейсе. – В кн.: Гидрофизические исследования океана. Труды СахКНИИ ДВНЦ АН СССР. – Владивосток: 1977, вып. 54, с. 50–58.
10. Мурти Т.С. Сейсмические морские волны цунами. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
11. Войт С.С., Себекин Б.И. Некоторые вопросы теории распространения волн цунами. – В кн.: Методы расчета возникновения и распространения цунами. – М.: Наука, 1978, с. 73–81.
12. Войт С.С. Волны цунами. – В кн.: Физика океана. М.: Наука; 1978, с. 229–252.
13. Гусев А.М., Кононкова Г.Е., Рейхральд А.Э. Некоторые направления исследования цунами. – В кн.: История и методология естественных наук. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978, вып. XIX, сер. физика, 102–115.
14. Бровиков И.С. Изменение элементов волн при их выходе на мелководье. – "Труды ГОИН", 1960, вып. 50, 27–32.
15. Шулейкин В.В. Физика моря. Изд. 4-е. – М.: Наука, 1968.
16. Черкесов Л.В., Иванов В.Ф., Кныш В.В., Ярошения Р.А. Некоторые вопросы определения величины заплеска волн цунами. – В кн.: Цунами и внутренние волны. – Севастополь, Изд. МГИ АН УССР, 1976, с. 54–66.
17. Мазова Р.Х., Пелиновский Е.Н. Линейная теория набегания волн цунами на берег. – Горький: Изд. ИПФ АН СССР, 1981, препринт № 25.
18. Ippen A., Kulin G. L'effect produit sur les ondes solitaires par les frottements à la paroi. – 'Hydrod. Lal. Techn. Rep.', 1955, N 15.
19. Кононкова Г.Е., Рейхральд А.Э. Модельные исследования выхода одиночных волн цунами на берег. – В кн.: Волны цунами. Труды СахКНИИ. – Южно-Сахалинск, 1972, вып. 29, с. 135–139.
20. Kononkova G.E., Reihrudek A.E. Experimental study of solitary tsunami waves. – In: Tsunami research symposium Roy. Soc. of New Zealand. Wellington, 1974, p.213–219.
21. Galvin C.I. Breaker type classification on the laboratory beaches. – 'J. Geoph. Res.', 1968, 73, N 12.
22. Кононкова Г.Е., Рейхральд А.Э., Нгуен Тхе Тыонг. Изменение высот и разрушение одиночных волн на плоском береговом откосе. – "Вестн. Моск. ун-та. Сер. физика", 1974, № 2, 138–146.
23. Le Méhauté B., Koh R.C., Hwang L.S. A synthesis on wave run-up. – 'J. water-ways and harbors'. Div. Proc. Amer. Soc. Civil. Eng., 1968, vol.94, N 1, 77–92.
24. Мазова Р.Х., Пелиновский Е.Н., Шаврацкий С.Х. Одномерная теория наката необрушившихся волн цунами на берег. – Горький: Изд. ИПФ АН СССР, 1982, препринт 46.
25. Козлов С.И. О накате волн цунами на берег без обрушения. – "Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана", 1981, т. 17, № 9, 996–1000.
26. Nakamura S. An Experimental study on Transformation and Run-up of long period waves on a gentle slope of a Beach. – "Bull. Dis Prevention. Res. Inst. Kyoto. Univ.", 1976, December, vol.26.
27. Рейхральд А.Э., Апекишева Н.И. Кинематика одиночной волны над различными подстилающими поверхностями. – В кн.: Волны цунами. – Южно-Сахалинск, 1973, с. 188–198.
28. Miller R.L. Experimental determination of run-up undular and fully developed bores. – "J. Geophys. Res.", 1968, vol.73, N 14.
29. Кононкова Г.Е., Олевинская С.К., Показеев К.В. Накат одиночных волн цунами при различных профилях дна и берегового склона. – В кн.: Эволюция цунами от очага до выхода на берег. – М.: Радио и связь, 1982, с. 69–74.
30. Madson O.S., Mei C.C. The transformation of a solitary waves over uneven bottom: – "J. Fluid. Mech.", 1969, 39, part 4, 781–791.
31. Черкесов Л.В. Гидродинамика волн. – Киев: Наукова думка, 1980.
32. Кононкова Г.Е., Пожил А.Э. Скорости наката одиночных волн на плоский береговой откос. – В кн.: (в печати), 1983.
33. Кононкова Г.Е., Пожил А.Э. Набегание волн цунами, подходящих к берегу отрицательной фазой. – В кн.: (в печати).
34. Le Méhauté B. Theory of wave Agitation in a Harbor. – "Trans. Amer. Soc. Civ. Eng.", 1962, vol.127, part 1, N 3313, 364–383.
35. Ярошения Р.А. Исследование собственных колебаний уровня бухт Курило-Камчатского побережья. – В кн.: Теоретические и экспериментальные исследования проблемы цунами. – М.: Наука, 1977, с. 153–164.
36. Бабий М.В., Ярошения Р.А. Результаты расчета периодов собственных колебаний уровня бухт на примере залива Касатка. – В кн.: Изучение цунами в открытом океане. – М.: Наука, 1978, с. 43–47.
37. Abe K., Ishii H. Propagation of tsunami on a linear slope between two Regions. – "J. Rhys. Earth.", 1980, 28, part I, II, 531–552.
38. Nakamura S., Iwagaki Y., Tsuchiya Y. Model study of transformations of tsunami in Urado Bay. – In: XII Coastal Eng. Conference.

Washington, 1970, vol.III, ch.126.

39. Nakamura S. Nonlinear lateral oscillation in a Harbour Model. — 'Proc. Symp. Modelling Techn. Amer. Soc. Civ. Eng.', 1975, September, 3–5, 836–853.
40. Nakamura S. Study on suppression of long period waves by impervious breakwaters. — "Coast. Eng. Japan.", 1975, vol.18.
41. К р и в о ш е й М.И. Лабораторное определение границ и уровня затопления берега в районе г. Усть-Камчатка при накатывании волн цунами. — В кн.: Проблема цунами. — М.: Наука, 1968, с. 184–197.
42. Г у с е в А.М., Кононкова Г.Е., О л е в и н – ск а я С.К. Экспериментальное исследование длинных волн типа цунами в бухтах. — В кн.: Процессы возбуждения и распространения цунами. — М., 1982. Ротапринт Ин-та океанологии АН СССР, 108–112.
43. Е ги а з а р о в И.В. Моделирование явлений неуставновившегося волнового движения безнапорного и напорного потоков. — "Изв. АН СССР. Отд. технич. наук", 1953, № 10, 1417–1427.
44. Гидравлическое моделирование. (Перевод с англ. под ред. Е.В.Близняка). — М.–Л.: Госэнергоиздат, 1947.
45. Исследование неуставновившегося движения воды на реках Тверце и Оредеж. (Под ред. Н.Е.Кондратьева, В.А.Урываева).—Л.: Гидрометеоиздат, 1961.
46. И конников а Л.Н. Атлас цунами. — М.: Изд. ДВНИГМИ, 1963.
47. Соловьев С.Л., Некрасов А.В., Бухте – ев В.Г., П я сковский Р.В. Предварительное цунами-районирование Курило-Камчатского побережья на основе гидродинамических расчетов. — В кн.: Теоретические и экспериментальные исследования по проблеме цунами. — М.: Наука, 1977, с. 131–139.
48. Ч ер кесов Л.В., Я ро шен я Р.А. Атлас максимальных заплесков волн цунами. — Владивосток: Изд. ДВНИГМИ, МГИ АН УССР, 1978.
49. П елиновский Е.Н., П линик Н.Л. Предварительная схема цунамирайонирования побережья Курило-Камчатской зоны на основе одномерных расчетов (модельный очаг). — Горький: Изд. ИПФ АН СССР, 1980, препринт № 5.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Глава I. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГИДРОДИНАМИКИ.....	6
§ 1.1. Жидкость как объект изучения.....	6
§ 1.2. Силы, действующие в жидкости.....	7
§ 1.3. Динамическое уравнение движения идеальной жидкости..	8
§ 1.4. Основные уравнения гидродинамики в форме Эйлера.....	9
§ 1.5. Основные уравнения гидродинамики в форме Лагранжа.....	11
§ 1.6. Уравнения движения вязкой жидкости.....	12
§ 1.7. Понятие о турбулентной вязкости.....	14
Л и т е р а т у р а	17
Глава II. УСТАНОВИВШИЕСЯ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ.....	18
§ 2.1. Потенциальное волновое движение жидкости.....	18
§ 2.2. Гравитационные волны бесконечно малой амплитуды при бесконечной глубине жидкости.....	20
§ 2.3. Гравитационные волны бесконечно малой амплитуды при конечной глубине жидкости.....	25
§ 2.4. Групповая скорость волн.....	28
§ 2.5. Энергия волн.....	31
§ 2.6. Капиллярные волны.....	33
§ 2.7. Трохоидальные волны.....	36
§ 2.8. Потенциальные волны квадратной амплитуды.....	42
§ 2.9. Влияние вязкости на волны.....	44
§ 2.10. Законы сохранения для волн.....	49
Л и т е р а т у р а	56
Глава III. СТАТИСТИЧЕСКИЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕТРОВОГО ВОЛНЕНИЯ.....	58
§ 3.1. Нерегулярность морского волнения.....	58
§ 3.2. Функции распределения элементов волн в точке в глубоком море.....	60
§ 3.3. Некоторые характеристики функций распределения элементов волн.....	67
§ 3.4. Функции распределения высот трехмерных волн.....	68
§ 3.5. Спектральные характеристики волновой поверхности.....	72
§ 3.6. Оценки спектров случайных процессов.....	75
§ 3.7. Спектр ветрового волнения.....	81
§ 3.8. Связь спектров ветровых волн с элементами наблюдаемых волн.....	87
Л и т е р а т у р а	88
Глава IV. ГЕНЕРАЦИЯ И РАЗВИТИЕ ВЕТРОВЫХ ВОЛН.....	92
§ 4.1. Исторический очерк развития учения о генерации волн ветром	92

§ 4.2. Зарождение волн под действием ветра.....	98	§ 8.3. Одиночная волна.....	254
§ 4.3. Измерение в море величины энергии, передаваемой ветром поверхности волн	105	Литература.....	262
§ 4.4. Воздушный поток над волнами.....	111	Глава IX. ЦУНАМИ.....	263
§ 4.5. Теория генерации волн Майлса-Филлипса.....	116	§ 9.1. Причины возникновения цунами, их интенсивность и по- вторяемость.....	263
§ 4.6. Развитие ветровых волн.....	121	§ 9.2. Распространение волн цунами от очага генерации до подхода к берегу.....	265
§ 4.7. Применение методов теории подобия и размерностей к описанию спектров ветрового волнения.....	128	§ 9.3. Теоретические исследования трансформации цунами в прибрежной зоне.....	267
§ 4.8. Исследование ветрового волнения в лабораторных усло- виях.....	132	§ 9.4. Экспериментальные исследования трансформации цунами..	270
§ 4.9. Фазовая скорость ветровых волн.....	140	§ 9.5. Теоретические исследования наката волн цунами на берег..	273
§ 4.10. Волновая энергетика.....	147	§ 9.6. Экспериментальные исследования наката волн.....	274
Литература.....	151	§ 9.7. Скорости наката одиночных волн на откос.....	279
Глава У. ВОЛНЫ НА ТЕЧЕНИЯХ.....	153	§ 9.8. Накат цуга волн, подходящих к откосу отрицательной фа- зой.....	281
§ 5.1. Волны на стационарном потоке, создаваемые препятст- вием.....	156	§ 9.9. Цунами в бухтах.....	284
§ 5.2. Волны на неоднородном стационарном потоке.....	157	§ 9.10. Защита от цунами.....	289
§ 5.3. Лабораторные исследования регулярных волн на течении..	164	Литература.....	291
§ 5.4. Генерация волн на течениях.....	170		
§ 5.5. Изменение поверхностного волнения под действием прило- верхностной турбулентности.....	173		
§ 5.6. Взаимодействие поверхностных волн различных масш- табов.....	182		
Литература.....	184		
Глава УІ. ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ.....	187		
§ 6.1. Явление внутренних волн.....	187		
§ 6.2. Уравнения Буссинеска для стратифицированной жидкости...	189		
§ 6.3. Внутренние волны малой амплитуды.....	191		
§ 6.4. Вырождение внутренних волн.....	199		
§ 6.5. Генерация внутренних волн.....	207		
§ 6.6. Спектральные и статистические характеристики внутрен- них волн.....	212		
Литература.....	214		
Глава УІІ. ВОЗДЕЙСТВИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН НА ПОВЕРХ- НОСТИ.....	217		
§ 7.1. Формы проявления внутренних волн на поверхности океана	217		
§ 7.2. Влияние внутренних волн на регулярные поверхностные волны.....	220		
§ 7.3. Изменения спектров поверхностных волн под действием внутренних волн.....	237		
Литература.....	242		
Глава УІІІ. ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ.....	245		
§ 8.1. Общие положения.....	245		
§ 8.2. Уравнение Кортевега – де Вриза.....	247		

Галина Евгеньевна КОНОНКОВА,
Константин Васильевич ПОКАЗЕЕВ

ДИНАМИКА МОРСКИХ ВОЛН

Зав. редакцией С.И.Зеленский

Редактор Р.А.Бунатян

Художественный редактор Ю.М.Добрянская

Технический редактор К.С.Чистякова

Корректоры В.П.Кададинская, Т.И.Алейникова,
Н.И.Коновалова

ИБ № 1835

Подписано к печати 15.01.85. Л-68033. Формат 60x90 1/16.
Бумага офс. № 1. Офсетная печать. Усл.печ.л.18,75 Уч.-изд.л.
18,98. Тираж 1100 экз. Заказ 1142. Цена 3 руб. Изд.№ 2908

Набор выполнен на наборно-пишущих машинках в ордена "Знак
Почета" издательстве Московского университета.
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.
Типография ордена "Знак Почета" изд-ва МГУ. 119899,
Москва, Ленинские горы