

# Эффективные асимптотические решения для линейной и нелинейной 2D задачи о накате цунами на берег

Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю.,  
Миненков Д.С., Назайкинский В.Е.  
ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского, Москва

Всероссийская научная конференция «ВОЛНЫ ЦУНАМИ:  
МОДЕЛИРОВАНИЕ, МОНИТОРИНГ, ПРОГНОЗ»  
Москва, 17 мая 2019 г.

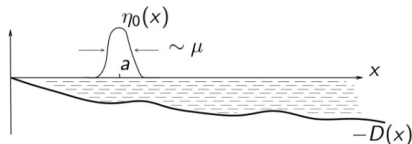
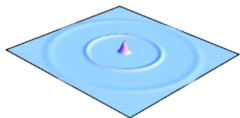
# Система мелкой воды, поршневая модель

Задача Коши для системы мелкой воды над дном  $D(x, y)$

$$\eta_t + \operatorname{div}(D \vec{u}) + \operatorname{div}(\eta \vec{u}) = 0, \quad \eta|_{t=0} = \nu \eta^0\left(\frac{x-a}{\mu}, \frac{y}{\mu}\right),$$

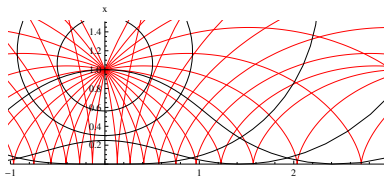
$$\vec{u}_t + g \operatorname{grad} \eta + \langle \vec{u}, \operatorname{grad} \rangle \vec{u} = 0, \quad \vec{u}|_{t=0} = 0.$$

Свободная поверхность  $\eta(x, y, t)$  и скорость  $\vec{u}(x, y, t) = (u, v)$ ,  
скорость распространения волн  $c(x, y) = \sqrt{gD(x, y)}$   
равна нулю на границе области  $\Omega$ :  $c|_{\partial\Omega} = 0$ ,  
длина волны  $\mu$  мала по сравнению с размерами  $\Omega$   
и амплитуда  $\nu$  мала по сравнению с глубиной.



# Линейные асимптотики, канонический оператор Маслова

Характеристики  $(X, P)$  определяются системой Гамильтона с  $H = |P|c(X)$ ,  $X(0) = (a, 0)$ ,  $P(0) = (\cos \psi, \sin \psi)$ . Асимптотики локализованы в окрестности фронтов.



Вблизи берега (координата по нормали к границе  $x = O(\mu)$ , параметр вдоль границы –  $y$ ):

$$\eta = \frac{B(y)}{\sqrt{2|Y_\psi(y)|}} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{\frac{ic_0\rho}{\mu}(T(y)-t) - \frac{i\pi m}{2}} J_0\left(\frac{B(y)\rho\sqrt{x}}{\mu}\right) \tilde{\eta}^0(\rho n(\psi(y))) \rho d\rho$$

$$u = \frac{B(y)\sqrt{g}}{\sqrt{2|Y_\psi(y)| \operatorname{tg} \Gamma(y)}} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{\frac{ic_0\rho}{\mu}(T(y)-t) - \frac{i\pi m}{2}} \frac{i}{\sqrt{x}} J_1\left(\frac{B(y)\rho\sqrt{x}}{\mu}\right) \tilde{\eta}^0 \rho d\rho$$

$$v = g T'(y) \eta(x, y, t), \quad B(y) = 2c_0 / \sqrt{g \operatorname{tg} \Gamma(y)}.$$

Здесь  $T(y)$  – время прихода траектории на берег, якобиан  $Y_\psi$  отвечает за расходимость траекторий,  $\Gamma(y)$  – угол наклона дна,  $m$  – индекс Маслова–Морса.

# Простой источник и моделирование цунами

Рассмотрим источник вида  $\eta|_{t=0} = \eta^0(M_\theta \frac{x-a}{\mu})$

(Доценко, Сергиевский, Черкасов, Секерж-Зенькович):

$$\eta^0(\xi) = \nu \left(1 + \frac{\xi_1^2}{b_1^2} + \frac{\xi_2^2}{b_2^2}\right)^{-3/2}, \quad M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}:$$

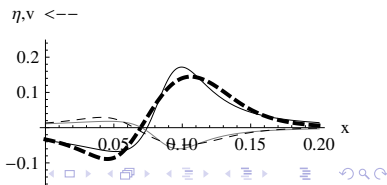
$$\tilde{\eta}(\rho \mathbf{n}(\psi)) = \nu b_1 b_2 e^{-\rho \beta(\psi)}, \quad \text{где } \beta(\psi) = \sqrt{b_1^2 \cos^2 \psi + b_2^2 \sin^2 \psi}.$$

В формуле для решения интегралы считаются явно.

Положим  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(y, t) = \beta(y) + \frac{ic_0(t-T(y))}{\mu}$ :

$$\eta(x, y, t) = \frac{\sqrt{2}c_0 \nu b_1 b_2}{\sqrt{g \operatorname{tg} \Gamma(y) |Y_\psi(y)|}} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-\frac{\pi i m}{2} \mathbf{B}(y, t)}}{\left(\mathbf{B}(y, t)^2 + \frac{4c_0^2 x}{g \operatorname{tg} \Gamma(y) \mu^2}\right)^{3/2}} \right],$$

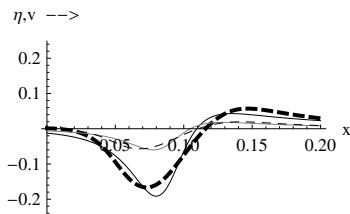
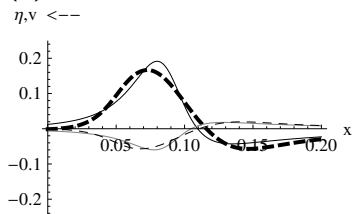
Решения для других источников (скажем, экспоненты Гаусса) можно приближать через такие “эталонные” решения и их производные по  $t$ .



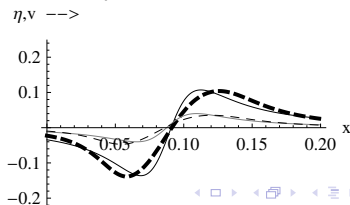
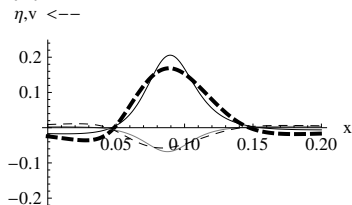
# Метаморфоза профиля при отражении от берега

Береговая линия – каустика особого вида,  
при отражении волны – преобразование Гильберта,  
что связано с увеличением индекса Маслова–Морса.

(1) Волна в поршневой модели зеркально отражается



(2) Шапочка переходит в  $N$ -волну (Пелиновский, Мазова):



# Нелинейная задача для $D(x, y) = x$

Применим замену Карьера–Гринспена вдоль  $x$ :

$$\begin{aligned} z &= x + \eta, & \tau &= t - u, & y &= y, \\ N &= \eta + u^2/2, & U &= u, & V &= v. \end{aligned}$$

Якобиан  $J_{CG} = 1 + U_\tau - N_z - U_\tau N_z + UU_z + N_\tau U_z$ .

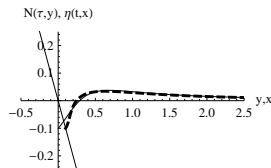
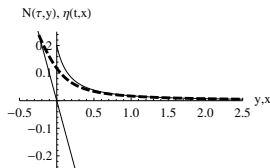
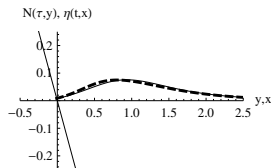
Получим систему со слабым нелинейным возмущением

$$N_\tau + (zU)_z + zV_z = R_1, \quad U_\tau + N_z = R_2, \quad V_\tau + N_y = R_3.$$

На асимптотиках линейной системы:  $J_{CG} = 1 + O(\nu/\mu^2)$ ,

$R_1, R_2, R_3 = O(\mu + \nu/\mu^2)$ .

При  $\nu \ll \mu^2$  опрокидывания нет и работает теория возмущений.



## Общие

Е.Н. Пелиновский, *Гидродинамика волн цунами*, Институт Прикладной Физики, Нижний Новгород, 1996; Ю.И. Шокин, Л.Б. Чубаров, Ан.Г. Марчук, К.В. Симонов, *Вычислительный эксперимент в проблеме цунами*, Наука, Новосибирск, 1989; В.П. Маслов, М.В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение квантовой механики*, М., Наука, 1976;

## Накат на берег

T. Vukasinac and P. Zhevandrov, *RJMP* **9** (2002), No. 3, 371–381; E.N. Pelinovsky, R.Kh. Mazova, *Nat. Hazards* **6** (1992), No. 3, 227–249; G.F. Carrier, H.P. Greenspan, *J. Fluid Mech.* **4** (1958), No. 1, 97–109; С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци, *УМН*, 65:1(391) (2010), 185–186; S. Dobrokhotov, A. Shafarevich, B. Tirozzi, *RJMP* **15** (2008), No. 2, 192–221; В. Е. Назайкинский, *Мат. заметки*, 96:2 (2014), 261–276;

## Окончательные формулы

С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, Мат. Заметки 100 (5), 710–731, 2016;

А.Ю. Аникин, С.Ю. Доброхотов, В.Е. Назайкинский, Мат. заметки, 104:4 (2018);

Аникин А.Ю., Доброхотов С.Ю. Вычислительные технологии. 2019. Т. 24, No 1. С. 42–54;

A. Anikin, S. Dobrokhotoov, V. Nazaikinskii, J. Math. Phys., Anal., Geom., 2018, Vol. 14, No. 3, pp. 393–405;

D. S. Minenkov, Proceedings of Days on Diffraction 2017, St. Petersburg, 2017, pp. 240-243.

А.Ю. Аникин, Д.С. Миненков, Мат. заметки, 2019 (в печати)



Спасибо за внимание!

Вопросы?