НЕСТАНДАРТНЫЕ КАУСТИКИ И АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА ГОЛОВНЫХ ПРОФИЛЕЙ ВОДЯНЫХ ВОЛН, ПОРОЖДЕННЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ С УЧЕТОМ БЫСТРОМЕНЯЮЩИХСЯ УЧАСТКОВ ДНА

С.Ю. Доброхотов[1,2] , В.Е. Назайкинский[1,2] , С.А. Сергеев[1,2], А.А. Толченников[1,2]

1 – Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва
2 – Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный

Линейная потенциальная модель поверхностных волн

Рассмотрим линеаризованную систему уравнений для потенциала скоростей $\Phi(x,y,t)$, $x=(x_1,x_2)$, $-D(x)\leq y\leq 0$ жидкости, находящейся в поле силы тяжести в безграничном по горизонтали бассейне переменной глубины $D(x)$. В безразмерных переменных система имеет вид

$$h^2\Delta_x\Phi+\Phi_{yy}=0,\ \text{при}\ -D(x)<y<0$$

$$[\Phi_y+h^2\langle\nabla D,\nabla\Phi\rangle]_{y=-D(x)}=0,\ [h^2\Phi_{tt}+\Phi_y]_{y=0}=0$$

где $D(x)$ — глубина бассейна в точке x, $h<<1$ — отношение глубины к типичному горизонтальному масштабу. Для этой системы изучается задача Коши–Пуассона

$$\Phi|_{y=0,t=0}=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial t}|_{y=0,t=0}=-V(x/\mu)$$

где $\mu<<1$ и при этом параметр $\delta:=h/\mu$ ограничен. Нас будет интересовать возвышение свободной поверхности

$$\eta(x,t)=-h\frac{\partial\Phi}{\partial t}|_{y=0}$$

Асимптотическое решение

В работе С. Ю. Доброхотова, В. Е. Назайкинского "Проколотые лагранжевы многообразия и асимптотические решения линейных уравнений волн на воде с локализованными начальными условиями" (Матем. заметки, 101:6, 2017) построено асимптотическое решение

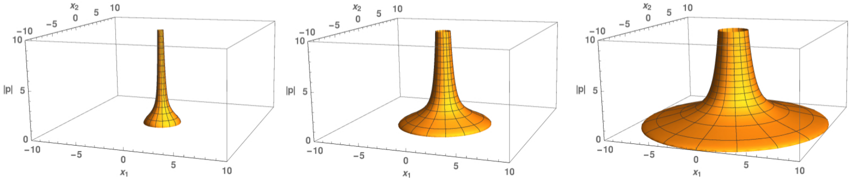
$$\eta_{as}(x,t) = \frac{h}{\delta^2} \mathrm{Re}\, K^h_{\Lambda^2_t} \widetilde{V}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) \tag{1}$$

где Λ^2_t — лагранжева поверхность, которая является результатом сдвига двумерной плоскости $(X = 0, P = \alpha \in \mathbb{R}^2)$ вдоль траекторий системы Гамильтона за время t

$$\dot{x} = H_p,\ \dot{p} = -H_x$$

с гамильтонианом $H(x,p) = \sqrt{|p| \tanh(D(x)|p|)}$,
$K^h_{\Lambda^2_t}$ — канонический оператор на Λ_t (с малым параметром h),

Поверхность Λ_t^2 является поверхностью с краем Γ_t, который является **нестандартной каустикой**. Проекция края Γ_t на координатное пространство дает передний фронт волны γ_t.



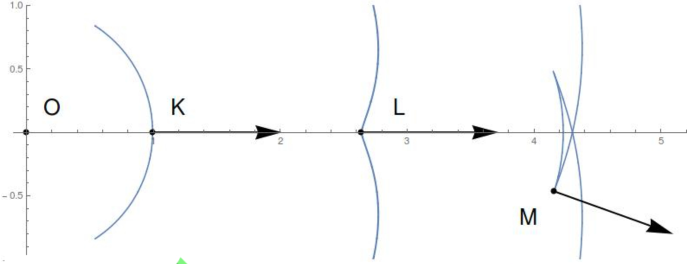
Этот край $\Gamma_t = \{(x,p) \in \mathbb{R}^4 : p = P^0(t,\phi), x = X^0(t,\phi)\}$ определяется решением $X^0(t,\phi), P^0(t,\phi)$ гамильтоновой системы

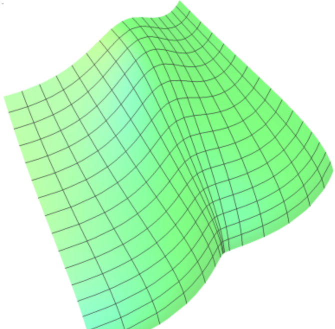
$$\dot{x} = H_p^0,\ \dot{p} = -H_x^0,\ p|_{t=0} = n(\phi),\ x|_{t=0} = 0$$

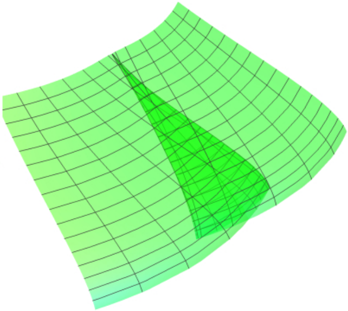
с гамильтонианом $H^0(x,p) = |p|\sqrt{D(x)}$.

Образование фокальных точек

K - регулярная точка, L - сборка, M - складка.







Формула в регулярных точках

$$\eta_{as}(x,t) = \sqrt{\frac{\mu}{|X_\phi|}}\sqrt[4]{\frac{D(0)}{D(X(t,\phi))}}\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-i\pi/4 - i\pi m/2}}{\sqrt{2\pi}}\right.$$

$$\left.\int_0^\infty \sqrt{\rho}e^{\frac{i}{\mu}\left(\rho\Delta + \delta^2\rho^3\Theta(t,x,\phi)\right)}\widetilde{V}(\rho\mathbf{n}(\phi))d\rho\right],$$

где

$$\Theta(t,x,\phi) = \frac{D^{\frac{3}{2}}(0)}{6}\int_0^t D(X(\tau,\phi))d\tau,\ \ \Delta = \langle P(t,\phi), x - X(t,\phi)\rangle$$

а $\phi = \phi(t,x)$ находится из уравнения $\langle X_\phi(t,\phi), x - X(t,\phi)\rangle = 0$.

- μ — отношение характерного радиуса источника к расстоянию от x^0 до точки наблюдения,
- δ— отношение характерной глубины к радиусу источника.
- Формула равномерна по $1 >> h \geq \mu > 0$.
- δ — параметр, отвечающий за эффекты дисперсии, чем больше δ, тем они сильнее.

Источник специального вида

Предыдущий интеграл выражается через специальные функции в случае, если начальное возвышение выбрать в специальном виде:

$$V(y) = V^0(T(\theta)y),\ T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ V^0(y) = \frac{A}{(1 + \frac{y_1^2}{b_1^2} + \frac{y_2^2}{b_2^2})^{\frac{3}{2}}}$$

Тогда

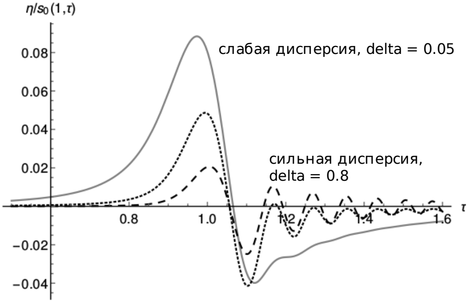
$$\widetilde{V}(\rho\mathbf{n}(\phi)) = Ab_1b_2e^{-\rho\sigma(\phi,\theta)},\ \ \sigma = \sqrt{b_1^2\cos^2(\phi-\theta) + b_2^2\sin^2(\phi-\theta)}$$

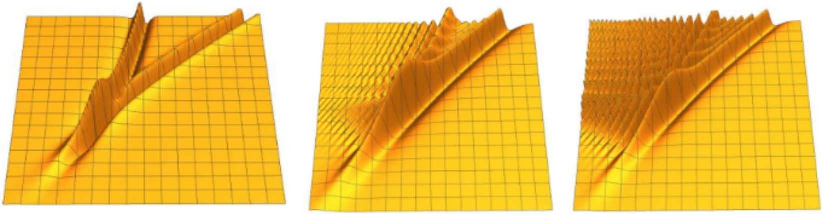
$$\eta_{as} = \frac{Ab_1b_2\mu^{\frac{3}{2}}}{h\sqrt{|X_\phi^0(t,\phi(x,t))|}}\sqrt[4]{\frac{D(0)}{D(X^0(t,\phi(x,t)))}}\frac{\mathrm{Re}[e^{-i\pi m/2}U(z)]}{\sqrt{\Theta(x,t,\phi(x,t))}}$$

$$U(z) = -\frac{\pi}{\sqrt{6}}\frac{d(Ai^2(z) + iAi(z)Bi(z))}{dz}$$

$$z = \frac{\Delta(x,t) + i\mu\sigma}{\sqrt[3]{12}h^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\Theta(x,t,\phi(x,t))}}$$

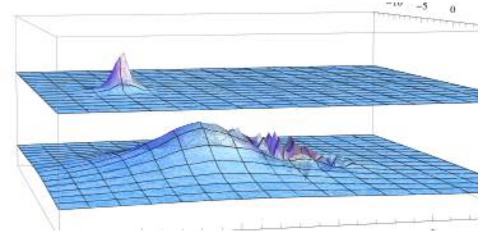
Эффекты дисперсии

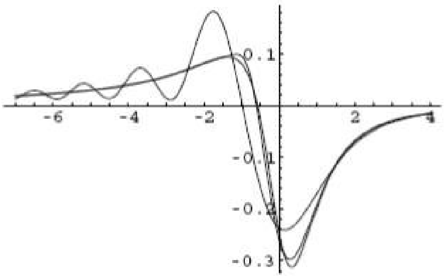




Быстро осциллирующее дно

Быстрые изменения глубины дают хвостовые волны (после проведения необходимого усреднения).





Мы строим усредненное уравнение для задачи Коши с локализованной начальной функцией для волнового уравнения с быстроменяющейся скоростью распространения волны. В данном случае волнвое уравнение записано в недивергентной форме

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = C^2\left(\frac{\theta(x)}{\varepsilon}, x\right)\Delta u, \, x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Здесь функции $\theta_k(x)$, $k = 1, \ldots, m$ — гладкие вещественные функции т.ч. ранг матрицы $\frac{\partial \theta_k(x)}{\partial x_j}$ равен m при всех x. Функция $C^2(y, x)$, $y \in \mathbb{R}^n$ является 2π-периодичной по каждой переменной y_j и является ограниченной и гладкой по всем переменным, а также отделена от нуля константой. Параметр $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, отвечающий скорости быстрых осцилляций, описываемх фазами $\theta_k(x)/\varepsilon$.

Определим функцию $q(x)$ следующим образом

$$q^2(x) = \left\langle \frac{1}{C^2(y,\,x)} \right\rangle_{T^n}^{-1} = \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} \frac{dy}{C^2(y,\,x)} \right)^{-1}. \qquad (5)$$

Также определим функцию ψ_2 как решение задачи на ячейке

$$-\Delta_y^\theta \psi_2 = \frac{q^2(x) - C^2(y,\,x)}{C^2(y,\,x)},\ \langle \psi_2(y,\,x) \rangle_{T^n} = 0. \qquad (6)$$

Здесь $\Delta_y^\theta = \langle \nabla_y^\theta,\, \nabla_y^\theta \rangle$, где $\nabla_y^\theta = \Theta \nabla_y = \sum\limits_{j=1}^{m} \nabla \theta_j(x) \frac{\partial}{\partial y_j}$, а вектор $\Theta(x) = (\theta_1(x),\, \ldots,\, \theta_m(x))$.

Тогда для усредненной задачи справедлвы следующие утверждения

Theorem

Пусть $\varepsilon \sim \mu^{3/2}$, *тогда усредненная задача Коши имеет вид*

$$v_{tt}(x,\, t) = q^2(x)\Delta v(x,\, t) + \varepsilon^2 \langle |\nabla_y^\theta \psi_2|^2 \rangle_{T^n} q(x)\Delta^2 v(x,\, t). \qquad (7)$$

$$v|_{t=0} = V(x/\mu),\; v_t|_{t=0} = 0.$$

При этом для погрешности $z(x,\, t) = u(x,\, t) - v(x,\, t)$ *справедлива оценка*

$$\|z(x,\, t)\|_{L_{2,C}} = O(\mu), \qquad (8)$$

при $t \in [0,\, T]$, *где* T *определяет некоторый интервал по времени.*

Theorem

В окрестности переднего фронта в неособых точках асимптотика имеет вид

$$v(x,t)=\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{|X^0_\psi(t,\psi)|}}\sqrt[4]{\frac{q(0)}{q(X^0(t,\psi))}}e^{-\int\limits_0^t \frac{\langle\nabla q(X^0(\tau,\psi)),P^0(\tau,\psi)\rangle}{|P^0(\tau,\psi)|}d\tau}\times \quad (9)$$

$$\times Re\left[\frac{e^{-i\pi m/2}e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{\rho}\tilde{V}(\rho n(\psi))f(\rho)\times\right.$$

$$\left.\times\, exp\left(\frac{i}{\mu}(\rho\langle P^0(t,\psi),x-X^0(t,\psi)\rangle-\rho^3\frac{\varepsilon^2}{\mu^2}Q(t,\psi))\right)\Big|_{\psi=\psi(x,t)}d\rho\right],$$

где функция $Q(t,\psi)$ имеет вид

$$Q(t,\psi)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\langle|\nabla^\theta_y\psi_2(y,x)|_{x=X^0(\tau,\psi)}|^2\rangle_{T^2}|P^0(\tau,\psi)|^3d\tau.$$

Thank you for your attention!