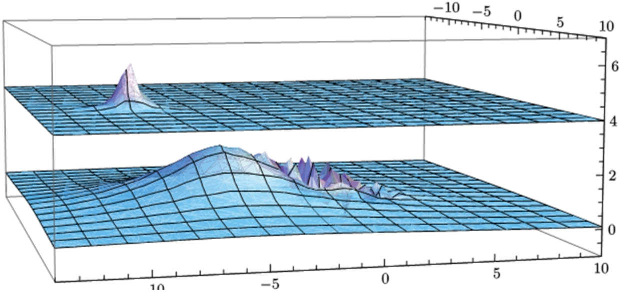
Простые решения задачи о волнах на поверхности воды, возбуждаемых локализованными источниками внутри упругого основания.

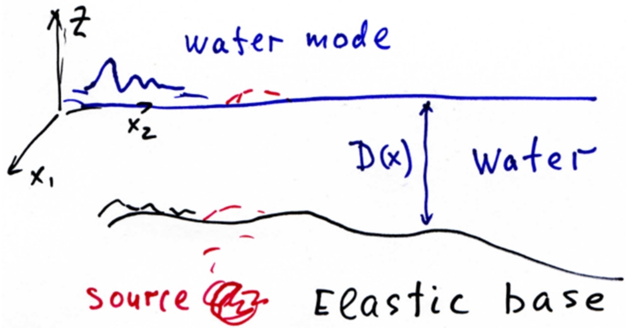
С.Ю.Доброхотов, Х.Х.Ильясов, С.Я.Секерж-Зенькович, О.Л.Толстова

Институт проблем механики им А.Ю.Ишлинского РАН, Московский физико-технический институт

работа поддержана грантом РФФИ N 17-01-00644

17 мая 2019 г.


−10
−5
0
5
10
6
4
2
0
10
5
0
−5
10


z
water mode
x_2
x_1
D(x)
water
source
Elastic base

Постановка задачи (модель Подъяпольского)

Kanamori (1972, Yamashita, Sato (1974), Pod'japolskii (1978), Sabatier (1983), Fragela (1989), Zvolinskii, Nikitin, Sekerzh-Zenkovich (1991), Gusjakov-Chubarov (1989), Dobrokhotov, Tolstova, Chudinovich (1993), Griniv, Dobrokhotov, Shkalikov (2000), Dobrokhotov, Tolstova, Sekerzh-Zenkovich, Vargas (2018)

Пусть (x_1, x_2, z), t -пространственные координаты и время. Упругая деформируемая среда занимает нижнее полупространство $z < -D$ и описывается вектором перемещений $U(x, z, t) = u_1, u_2, u_3$,
слой идеальной незавихренной жидкости над ней $-D < z < 0$, описывается потенциалом перемещений $\Psi(x, z, t)$.
Движения жидкости задаются уравнением Лапласа:

$$\nabla^2\Psi = 0, \quad -D < z < 0,$$

перемещения упругой среды –уравнениями Ламе:

$$c_t^2\nabla^2 U + (c_l^2 - c_t^2)\nabla(divU) = U_{tt}, \quad z \leq -D.$$

Граничные условия

свободная граница жидкости: $z = 0$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0,$$

граница жидкость – упругая среда: $z = -D$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$(c_l^2 - c_t^2)(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial z}) + 2c_t^2\frac{\partial u_3}{\partial z} = \boldsymbol{\rho}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + (\boldsymbol{\rho} - 1)u_3,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = u_3,$$

а также $U \to 0$ при $z \to -\infty$

g – ускорение свободного падения, $\boldsymbol{\rho} = \rho_w/\rho_c \approx \frac{1}{3}$, ρ_w и ρ_c –плотности жидкости и упругой среды, c_l, c_t – скорости продольной и поперечной волн в упругой среде.

Переход от U, Ψ к стандартной задаче Коши

Определим вектор

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} \psi_W(x_1, x_2, t) = \Psi|_{z=0} \\ \psi_D(x_1, x_2, t) = \Psi|_{z=-D} \\ u_1(x_1, x_2, z, t) \\ u_2(x_1, x_2, z, t) \\ u_2(x_1, x_2, z, t) \end{pmatrix}$$

в пространстве $\mathcal{M} = \{z = 0\} \bigcup \{z = -D\} \bigcup \{z \le -D(x)\} \sim \mathbb{R}^2 \bigoplus \mathbb{R}^2 \bigoplus \mathbb{R}^3_+$ со скалярным произведением (энергетической нормой)

$$(\Upsilon^1, \Upsilon^2) = \int_{\mathbb{R}^2_x} \Big(\int_{-\infty}^{-D} \langle \bar{U}^1, U^2 \rangle dz \Big) dx + \boldsymbol{\rho} \int_{\mathbb{R}^2_p} \langle \bar{\tilde{\psi}}(p, t), R(p) \tilde{\psi}(p, t) \rangle dp,$$

где $\bar{\cdot}$ – комплексное сопряжение,
$\tilde{\cdot}$ –преобразование Фурье по переменным (x_1, x_2) с двойственными им переменными (p_1, p_2),
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидово вещественное произведение векторов

$$R = \begin{pmatrix} |p|\coth(|p|D) & -|p|/\sinh(|p|D) \\ |p|/\sinh(|p|D) & -|p|\coth(|p|D) \end{pmatrix}.$$

тогда для Υ:

$$\Upsilon_{tt} = \hat{\mathcal{L}}\Upsilon, \qquad \Upsilon|_{t=0} = \Upsilon^0(x,z), \quad \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}|_{t=0} = \Upsilon^1(x,z).$$

Рассмотрим специальную задачу с начальными условиями вида $(x = 0, z_0), z_0 < 0$

$$U|_{t=0} = U^0(x,z), \quad \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad \psi_{W,D}|_{t=0} = \frac{\partial \psi_{W,D}}{\partial t}|_{t=0} = 0,$$

где

$$U^0(x,z) = \mathbf{a}\,\mathbf{e}(z)V(x)e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2b_3^2}}, \; V(x) = (1 + (x_1/b_1)^2 + (x_2/b_2)^2)^{-3/2},$$

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_v)$ –вектор амплитуд, $\mathbf{e}(z) = 1, z < -D - 2\delta, \mathbf{e}(z) = 0, z > -D - \delta$

Ограничимся случаем постоянной глубины: $D(x) = D = \mathrm{const}$
и изучением т.н.“водяной моды”.
Применим преобразование Фурье по переменным (x_1, x_2):

$$\tilde{\Upsilon}_{tt} = \tilde{\mathcal{L}}(p, \frac{\partial}{\partial z})\tilde{\Upsilon}.$$

При каждом фиксированном p оператор $\tilde{\mathcal{L}}(p, \frac{\partial}{\partial z})$ действует на векторные функции из 5 компонент: 2 из них -комплексные числа $\tilde{\psi}_j(p)$ и 3 –функции $\tilde{u}_j(p, z)$, определенные при $z \leq -D$.

Спектр оператора $\tilde{\mathcal{L}}(p, \frac{\partial}{\partial z})$ ($\lambda = \omega^2$ –спектральный параметр, соответствующий -$\partial^2/\partial t^2$) устроен следующим образом.

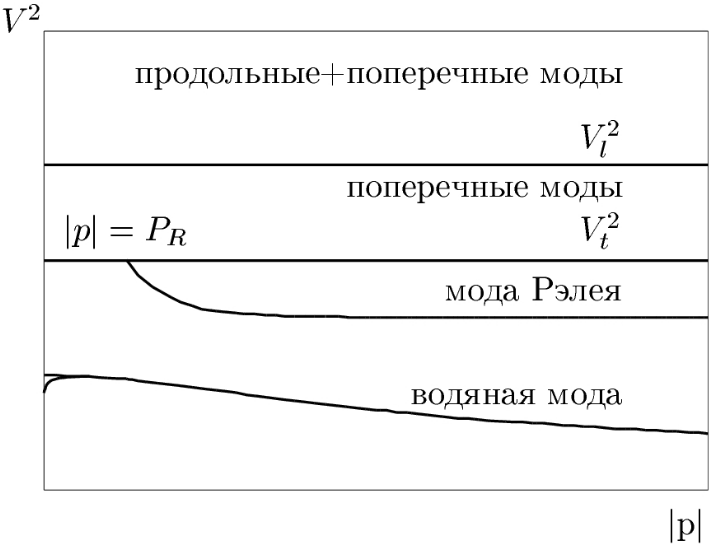
При $\lambda < p^2 c_t^2$ существуют две точки дискретного спектра (т.н. водяная мода и мода Рэлея) $\lambda_W = \omega^2(|p|)$, $\lambda_R = \omega_R^2(|p|)$ и отвечащие им собственные функции $\bar{\Upsilon}_{W,R}(p, z)$, соответствующие в предельных случаях $\boldsymbol{\rho} = 0, D = 0$ поверхностным волнам в жидкости и волнам Рэлея в упругом полупространстве.

При $\lambda \geq p^2 c_t^2$ спектр становится непрерывным.

Когда $p^2 c_t^2 \leq \lambda \leq p^2 c_l^2$, имеелся двумерное подпространство обобщенных собственных функций с базисом $\tilde{\Upsilon}_t^1(p, k, z), \tilde{\Upsilon}_t^2(p, k, z)$, отвечающих "упругим"поперечным волнам.

Когда $\lambda > p^2 c_l^2$ в дополнение к собственным функциииям, отвечающим "упругим"поперечным волнам, добавляются функции $\tilde{\Upsilon}_l^1(p, k, z)$, отвечающие "упругим"продольным волнам. Дополнительный параметр $k \geq 0$ характеризует эти обобщенные собственные функции: $\lambda = \omega_{t,l}^2(p, k)$.

Спектр задачи.



Водяная мода и мода Рэлея $\lambda_{W,R} \geq 0$ ($\omega_{W,R}(p) = \sqrt{\lambda_{W,R}}$) определяются из

$$\Big(\lambda - g|p|\tanh(|p|D)\Big)\Big(-4p^2 k_t k_l + (k_t^2 + p^2)^2 - g\frac{\lambda}{c_t^4}(\boldsymbol{\rho} - 1)k_l\Big) + \boldsymbol{\rho}\frac{\lambda^2}{c_t^4}k_l\Big(g - \lambda\frac{\tanh(|p|D)}{|p|}\Big) = 0$$

где $k_t = \sqrt{p^2 - \lambda/c_t^2}$, $k_l = \sqrt{p^2 - \lambda/c_l^2}$

Приближенные решения

Водяная мода

$$\omega^2 \approx g(1 - \frac{g\boldsymbol{\rho}}{g + 2c_t^2|p|})|p|\tanh(D|p|)$$

мода Рэлея

$$|p| \approx \frac{gv^2\sqrt{1 - v^2/c_l^2}}{4c_t^4 - 4c_t^2 v^2 + v^4 - 4c_t^4\sqrt{1 - v^2/c_l^2}\sqrt{1 - v^2/c_t^2}}, \quad v^2 = \omega^2/p^2$$

Разложение по модам:

Решение задачи представимо в виде разложения по собственным функциям оператора $\hat{L}$:

$$\Upsilon = \Upsilon_W + \Upsilon_R + \Upsilon_\perp + \Upsilon_\parallel =$$

$$\sum_{\pm}\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_{R^2} e^{i\langle p,x\rangle}\Big[e^{\pm it\omega_W(|p|)t}C_W^{\pm}\tilde{\Upsilon}_W(p,z) + e^{\pm it\omega_R(|p|)}C_R^{\pm}\tilde{\Upsilon}_R(p,z) +$$

$$\int_0^\infty\Big(e^{\pm it\omega_t(p,k)}\sum_{m=1}^{2}C_t^{\pm,m}\tilde{\Upsilon}_t^m(p,k,z) + e^{\pm it\omega_l(p,k)}C_l^{\pm}\tilde{\Upsilon}_l(p,k,z)\Big)dk\Big]dp\Big\},$$

Коэффициенты Фурье $C_W^{\pm}(p), C_R^{\pm}(p), C_t^{\pm,1}(p,k), C_t^{\pm,2}(p,k), C_l^{\pm}(p,k)$ находятся из разложения при $t=0$ начальных условий.

$\Upsilon_R, \Upsilon_\perp, \Upsilon_\| \gg \Upsilon_w$ ($>$ 20 000 км/ч для базальта, 700 км/ч для воды), тогда для $t \gg 1$ учитываем только водяную моду:

$$\Upsilon \approx \sum_{\pm} \Big\{ \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} e^{i\langle p,x\rangle} e^{\pm it\omega_W(|p|)t} C_W^{\pm} \tilde{\Upsilon}_W(p,z)dp \Big\},$$

$$\tilde{\Upsilon}_W(p,z) = \begin{pmatrix} \chi(p,z) \\ \zeta_W(p) \\ \zeta_D(p) \end{pmatrix}$$

$(\chi(p,z) \to \tilde{U}$, $\zeta_W(p) \to \tilde{\psi}_W, \quad \zeta_D(p)) \to \tilde{\psi}_D)$ and

$$\chi = A\Big(\begin{pmatrix} pk_t \\ -ip^2 \end{pmatrix} e^{k_t(z+D)} + \frac{k_t^2+p^2}{2k_l} \begin{pmatrix} -p \\ ik_l \end{pmatrix} e^{k_l(z+D)}\Big), \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

$$\zeta_W = -\frac{iAg\lambda_W}{2c_t^2\cosh(|p|D)(\lambda_W - g|p|\tanh(|p|D))},$$

$$\zeta_D = \zeta_W(1 - \frac{\lambda_W \tanh(|p|D)}{g|p|}).$$

A определяется из условия $\int_{-\infty}^{-D}\langle\bar{\chi},\chi\rangle dz+\langle\bar{\zeta},R(p)\zeta\rangle=1$:

$$A=\Big(\frac{p^2(k_t^2+p^2)}{2k_t}+\frac{(k_t^2+p^2)^2(k_l^2+p^2)}{8k_l^3}-\frac{p^2(k_t^2+p^2)}{k_l}$$
$$+\frac{\rho\lambda_W^2|p|\tanh(|p|D)}{4c_t^4(\lambda_W-g|p|\tanh(|p|D))^2}\Big(g^2-2g\frac{\lambda_W}{|p|}\tanh(|p|D)+\frac{\lambda_W^2}{p^2}\Big)\Big)^{-1/2}$$

Возвышение свободной поверхности жидкости $\eta=-\frac{1}{g}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\Big|_{z=0}$:

$$\eta=-\frac{1}{4\pi}\sum_{\pm}\int_{\mathbb{R}_p^2}e^{i(\langle p,x\rangle\pm t\omega(|p|))}\frac{i\omega^4C_W(p)A}{2c_t^2\cosh(|p|D)(\lambda_W(|p|)-g|p|\tanh(|p|D))}dp,$$

$$C_W(p)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-D}\bar{\chi}(p,z)\Big(\int_{\mathbb{R}_x^2}e^{-i\langle p,x\rangle}U^0(x,z)dx\Big)dz.$$

Для рассматриваемого возмущения

$$C_W = -iAb_1 b_2 e^{-|p|\mathbf{b}(\psi)} \times$$

$$\left((ik_t \langle p, a \rangle - p^2 a_v) e^{k_t(z_0+D)} F_t + \frac{k_t^2 + p^2}{2k_l} (-i \langle p, a \rangle + k_l a_v) e^{k_l(z_0+D)} F_l \right),$$

$$F_{t,l} \approx b_3 \sqrt{2\pi} e^{\frac{b_3^2 k_{t,l}^2}{2}} \mathbf{e}(z_0 + b_3^2 k_{t,l}),$$

$$\mathbf{b}(\psi) = \sqrt{b_1^2 \cos^2 \psi + b_2^2 \sin^2 \psi}, \quad \langle p, a \rangle = p_1 a_1 + p_2 a_2$$

$\mathbf{e}(y)$ –т.н. “срезающая” функция, например вида
$\mathbf{e}(y) = 1/(1 + \exp((y/b_3 + 2)^3)$

с учетом малости gD/c_l^2, c_t^2/c_l^2 и $k_t \approx |p|(1-\omega^2/(2c_t^2|p|^2))$

$$\eta = \frac{b_1 b_2 b_3 g}{4\sqrt{2\pi}c_t^2}\mathrm{Re}\Big[\int_{\mathbb{R}^2_{\mathrm{p}}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\big(\langle \mathrm{p},\mathrm{x}\rangle + \mathrm{t}\omega(|\mathrm{p}|)\big)}\mathrm{e}^{-|\mathrm{p}|\mathbf{b}(\psi)}(1-\boldsymbol{\rho}+2|\mathrm{p}|\mathrm{c}_\mathrm{t}^2/\mathrm{g})^2\sinh(\mathrm{D}|\mathrm{p}|)}{\mathrm{p}^2(1+2|\mathrm{p}|\mathrm{c}_\mathrm{t}^2/\mathrm{g})(\boldsymbol{\rho}\cosh^2(\mathrm{D}|\mathrm{p}|)+\tanh(\mathrm{D}|\mathrm{p}|))}\mathrm{Q}\mathrm{dp}\Big],$$

$$Q = (p^2 a_v - ik_t\langle p,a\rangle)e^{k_t(z_0+D)}e^{\frac{b_3^2 k_t^2}{2}}\mathbf{e}(z_0+b_3^2 k_t)+$$
$$\frac{k_t^2+p^2}{2k_l}(i\langle p,a\rangle - k_l a_v)e^{k_l(z_0+D)}e^{\frac{b_3^2 k_l^2}{2}}\mathbf{e}(z_0+b_3^2 k_l) \approx$$
$$\frac{e^{|p|(z_0+D)}e^{\frac{b_3^2 p^2}{2}}\lambda_W}{|p|2c_t^2 c_l^2}\Big(a_v|p|(c_l^2-R)+i\langle p,a\rangle(c_t^2+R)\Big)\mathbf{e}(z_0+b_3^2|p|),$$

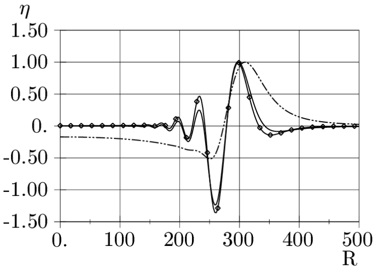
где $R = (c_l^2-c_t^2)|p|(D+b_3^2|p|+z_0)$.

Перейдем к полярным координатам:
φ–полярный угол вектора x и ψ–полярный угол вектора p,
$\langle p, x\rangle = |x|\varrho\cos(\psi-\varphi)$, $\varrho = |p|$. Тогда при $x \gg 1$

$$\eta_F = \frac{b_1 b_2 b_3 g^2}{8\pi c_t^2 c_l^2\sqrt{|x|}}\mathrm{Re}\Big[\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\varrho(\mathbf{b}(\psi)-\mathrm{z}_0-\mathrm{D})}(1-\boldsymbol{\rho}+2\varrho\mathrm{c}_\mathrm{t}^2/\mathrm{g})^3\sinh^2(\mathrm{D}\varrho)}{\sqrt{\varrho}(1+2\varrho\mathrm{c}_\mathrm{t}^2/\mathrm{g})^2(\boldsymbol{\rho}\cosh^3(\mathrm{D}\varrho)+\sinh(\mathrm{D}\varrho))}\times$$
$$e^{\frac{b_3^2\varrho^2}{2}}\Big(a_v(c^2-\mathcal{R})+ia_h(\varphi)(1+\mathcal{R})\Big)\mathbf{e}(z_0+b_3^2\varrho)\Big)e^{i\left(|x|\varrho-t\omega(\varrho)-\pi/4\right)}d\varrho\Big],$$

где $\mathcal{R} = (c^2-1)\varrho(D+b_3^2\varrho+z_0)$, $c = c_l/c_t$, $a_h(\varphi) = a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi$.

Результаты расчетов



Результаты расчетов η, η_F с параметрами $b = 2$, $t = 60$, $|z_0| = 43$, $D = 3$ в сравнении с возвышением, полученным по поршневой осесимметричной модели с $l = 40$ (слева) и $l = 15$, (справа).