Эффективные асимптотики профилей длинных волн, порожденных коротко действующими источниками, локализованными в упругом основании.

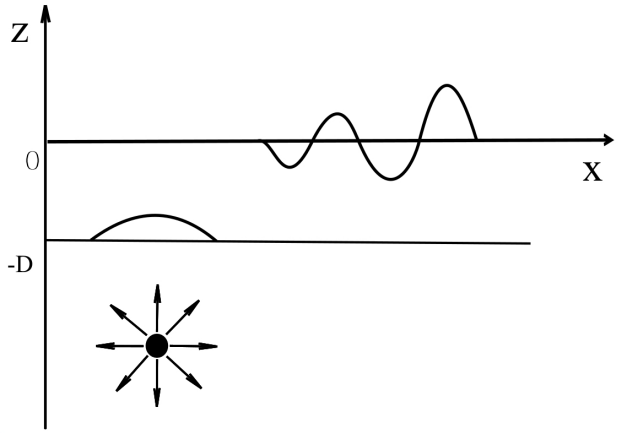
С.Ю.Доброхотов, Х.Х.Ильясов, О.Л.Толстова

Институт проблем механики им А.Ю.Ишлинского РАН, Московский физико-технический институт

16 ноября 2020 г.

Постановка задачи (модель Подъяпольского)

Kanamori (1972), Yamashita, Sato (1974), Pod'japolskii (1978), Sabatier (1983), Fragela (1989), Zvolinskii, Nikitin, Sekerzh-Zenkovich (1991), Gusjakov-Chubarov (1989), Dobrokhotov, Tolstova, Chudinovich (1993), Griniv, Dobrokhotov, Shkalikov (2000), Dobrokhotov, Tolstova, Sekerzh-Zenkovich, Vargas (2018).



Упругая деформируемая среда, описываемая вектором перемещений $U(x,z,t) = u_1, u_2, u_3$, занимает нижнее полупространство $z < -D$. Над ней располагается слой идеальной незавихренной жидкости $-D < z < 0$, описываемый потенциалом перемещений $\Psi(x,z,t)$, где $x \in R^2$ - горизонтальные, z - вертикальная координаты.

В упругой среде действует локализованный в пространстве и во времени источник $f(x,z,t)$.

Перемещения упругой среды определяются уравнениями Ламе, потенциал жидкости –уравнением Лапласса:

$$c_t^2\nabla^2 U+(c_l^2-c_t^2)\nabla(divU)+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad z \le -D. \qquad \nabla^2\Psi = 0, \quad -D < z < 0,$$

Граничные условия

на свободной границе жидкости: $z = 0$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0,$$

на границе раздела жидкость – упругая среда: $z = -D$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\left(c_l^2 - c_t^2\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right) + 2c_t^2\frac{\partial u_3}{\partial z} = \boldsymbol{\rho}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + (\boldsymbol{\rho} - 1)u_3,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = u_3,$$

и $U \to 0$ при $z \to -\infty$

g – ускорение свободного падения, $\boldsymbol{\rho} = \rho_w/\rho_c \approx \frac{1}{3}$, ρ_w и ρ_c –плотности жидкости и упругой среды, c_l, c_t – скорости продольной и поперечной волн в упругой среде.

Переход от U, Ψ к стандартной задаче Коши

Определим вектор

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} \psi_W(x_1, x_2, t) = \Psi|_{z=0} \\ \psi_D(x_1, x_2, t) = \Psi|_{z=-D} \\ u_1(x_1, x_2, z, t) \\ u_2(x_1, x_2, z, t) \\ u_2(x_1, x_2, z, t) \end{pmatrix}$$

в пространстве $\mathcal{M} = \{z = 0\} \bigcup \{z = -D\} \bigcup \{z \leq -D(x)\} \sim \mathbb{R}^2 \bigoplus \mathbb{R}^2 \bigoplus \mathbb{R}^3_+$
со скалярным произведением (энергетической нормой)

$$(\Upsilon^1, \Upsilon^2) = \int_{\mathbb{R}^2_x} \Big(\int_{-\infty}^{-D} \langle \bar{U}^1, U^2 \rangle dz \Big) dx + \boldsymbol{\rho} \int_{\mathbb{R}^2_p} \langle \bar{\tilde{\psi}}(p, t), R(p) \tilde{\psi}(p, t) \rangle dp,$$

где $\bar{\cdot}$ – комплексное сопряжение,
$\tilde{\cdot}$ –преобразование Фурье по переменным (x_1, x_2) с двойственными им переменными (p_1, p_2),
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидово вещественное произведение векторов

$$R = \begin{pmatrix} |p|\coth(|p|D) & -|p|/\sinh(|p|D) \\ |p|/\sinh(|p|D) & -|p|\coth(|p|D) \end{pmatrix}.$$

тогда для Υ:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = \hat{\mathcal{L}}\Upsilon + \frac{\partial^2 F(x,z,t)}{\partial t^2}, \qquad \Upsilon\Big|_{t=0} = \Upsilon^0(x,z), \quad \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\Big|_{t=0} = \Upsilon^1(x,z). \tag{1}$$

Будем рассматривать задачу Коши с нулевыми начальными условиями

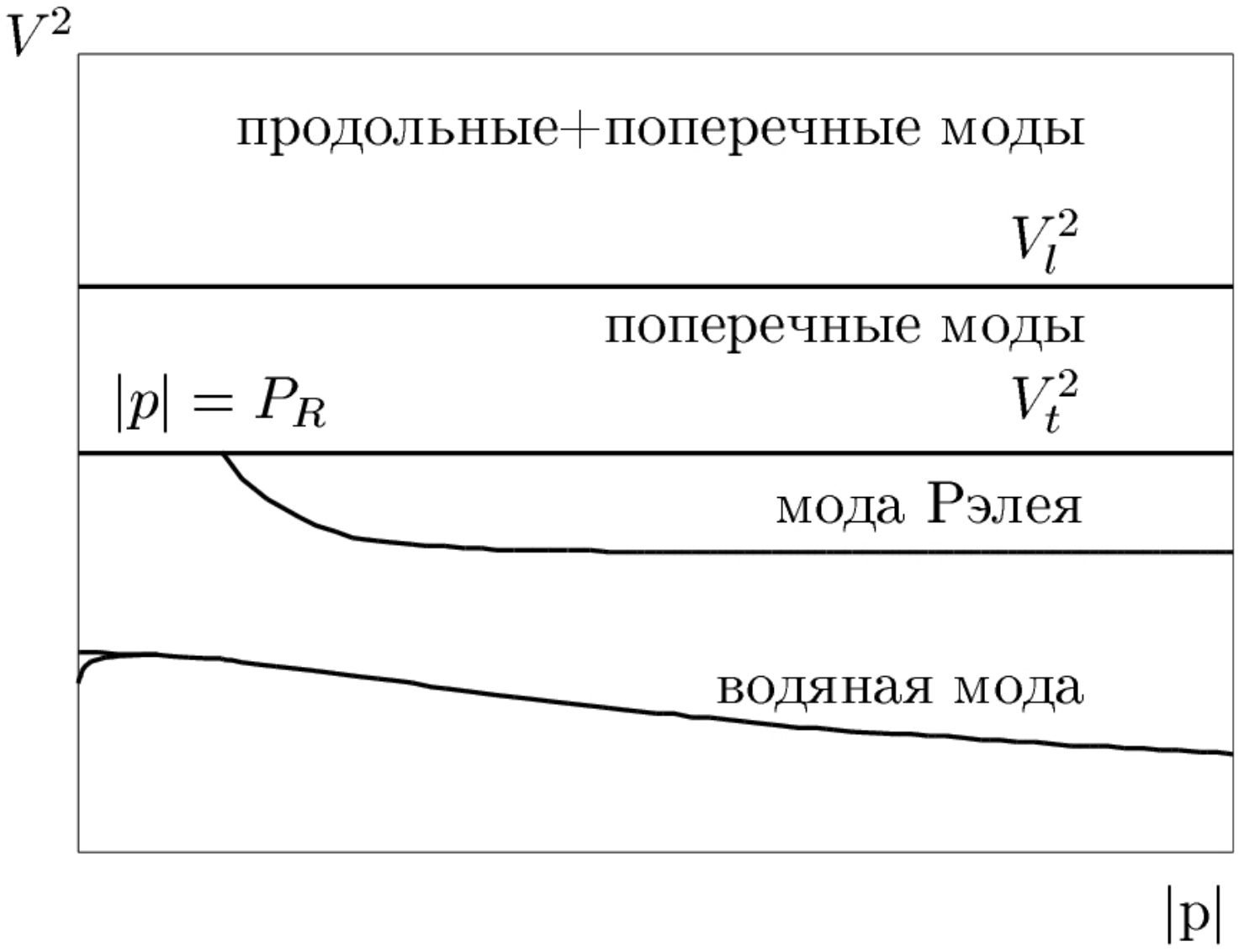
$$U|_{t=0} = \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad \psi_{W,D}|_{t=0} = \frac{\partial \psi_{W,D}}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

для получения эффективных формул, считаем

$$f(x,z,t) = \mathbf{a}G(t)\,\mathbf{e}(z)V(x)e^{-(z-z_0)^2/(2b_3^2)},$$
$$V(x) = (1 + (x_1/b_1)^2 + (x_2/b_2)^2)^{-3/2},$$

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_v)$ –вектор амплитуд, $\mathbf{e}(z) = 1, z < -D - 2\delta, \mathbf{e}(z) = 0, z > -D - \delta$

Спектр задачи



Водяная мода и мода Рэлея $\lambda_{W,R} \geq 0$ ($\omega_{W,R}(p) = \sqrt{\lambda_{W,R}}$) определяются из

$$\Big(\lambda - g|p|\tanh(|p|D)\Big)\Big(-4p^2 k_t k_l + (k_t^2 + p^2)^2 - g\frac{\lambda}{c_t^4}(\boldsymbol{\rho} - 1)k_l\Big) +$$
$$\boldsymbol{\rho}\frac{\lambda^2}{c_t^4}k_l\Big(g - \lambda\frac{\tanh(|p|D)}{|p|}\Big) = 0$$

где $k_t = \sqrt{p^2 - \lambda/c_t^2}$, $k_l = \sqrt{p^2 - \lambda/c_l^2}$

Приближенные решения
Водяная мода

$$\omega^2 \approx g\left(1 - \frac{g\boldsymbol{\rho}}{g + 2c_t^2|p|}\right)|p|\tanh(D|p|)$$

мода Рэлея

$$|p| \approx \frac{gv^2\sqrt{1 - v^2/c_l^2}}{4c_t^4 - 4c_t^2v^2 + v^4 - 4c_t^4\sqrt{1 - v^2/c_l^2}\sqrt{1 - v^2/c_t^2}}, \quad v^2 = \omega^2/p^2$$

Для безразмерной функции $G(t)$ (зависимости возмущения от времени) предполагаем:

- $G(t) = \lambda G_0(\lambda t)$,
- $G_0(\tau)$ – гладкая функция на полупрямой $[0, \infty)$,
- $G_0(\tau)$ стремится к некоторой константе $\mathfrak{G}$, быстрее чем $1/\tau^\kappa$, $\kappa > 1$, при $\tau \to \infty$,
- $G_0(\tau) = 0, \quad t \leq 0$.

Если $\mathfrak{G} \neq 0$, при $t \to \infty$, то в упругом основании имеются остаточные смещения, если $\mathfrak{G} = 0$, при $t \to \infty$ –остаточные смещения отсутствуют. Для удобства представим

$$G_0(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

В дальнейшем будем изучать следующие примеры для функции g

a) $g(\tau) = ae^{-\tau}(\sin(\alpha\tau + \phi) - sin(\phi)), \qquad \alpha > 0,$
$a = (\alpha^2 + 1)(\alpha \cos(\phi) - \alpha^2 \sin(\phi))$

b) $g(\tau) = ae^{-\tau}\mathcal{P}(\tau)$, где $\mathcal{P}(\tau) = \sum_{k=1}^n \mathcal{P}_k / k\tau^k$ –полином степени n, и $\sum_{k=1}^n \mathcal{P}_k = 1$.

c) $g(\tau) = ae^{-\tau}(\alpha \cos(\alpha\tau + \phi) - \sin(\alpha\tau + \phi) + sin(\phi))$

Решение задачи в виде интеграла Дюгамеля

С помощью интеграла Дюгамеля решение задачи (1), (2) выражается через решение

$$\mathcal{W}_{tt} = \hat{L}, \qquad \mathcal{W}|_{t=\tau} = \frac{\partial F}{\partial t}(\tau, x, z), \quad \mathcal{W}_\tau|_{t=\tau} = 0,$$

по формуле

$$\Upsilon = \int_0^t \mathcal{W}(t, \tau, x, z)\, d\tau.$$

С использованием ранее выведенного решения задачи с начальными условиями (Доброхотов С.Ю, Ильясов Х.Х., Секерж-Зенькович С.Я., Толстова О.Л.) получаем

$$\eta = -\frac{1}{4\pi}\int_0^t \left[\sum_{\pm}\int_{\mathbb{R}^2_p} e^{i(\langle p,x\rangle \pm (t-\tau)\omega(|p|))}\frac{\partial C_W}{\partial \tau}(p,\tau)\times \right.$$

$$\left. \frac{i\omega^4(|p|)A}{2c_t^2\cosh(|p|D)(\omega^2(|p|) - \mathbf{g}|p|\tanh(|p|D))}dp\right] d\tau, \quad (3)$$

где

$$A = \left(\frac{p^2(k_t^2+p^2)}{2k_t} + \frac{(k_t^2+p^2)^2(k_l^2+p^2)}{8k_l^3} - \frac{p^2(k_t^2+p^2)}{k_l} \right.$$
$$\left. + \frac{\boldsymbol{\rho}\omega^4|p|\tanh(|p|D)}{4c_t^4(\omega^2-\mathbf{g}|p|\tanh(|p|D))^2}\left(\mathbf{g}^2 - 2\mathbf{g}\frac{\omega^2}{|p|}\tanh(|p|D) + \frac{\omega^4}{p^2}\right)\right)^{-1/2},$$

$$C_W = -iAb_1b_2e^{-|p|\mathbf{b}(\varphi)}G(\lambda\tau)\times$$
$$\left((ik_t\langle p,a\rangle - p^2a_v)e^{k_t(z_0+D)}f_t + \frac{k_t^2+p^2}{2k_l}(-i\langle p,a\rangle + k_la_v)e^{k_l(z_0+D)}f_l\right)$$

$$\mathbf{b}(\varphi) = \sqrt{b_1^2\cos^2\psi + b_2^2\sin^2\psi}, \quad \langle p,a\rangle = p_1a_1 + p_2a_2,$$
$$f_{t,l} \approx b_3\sqrt{2\pi}e^{\frac{b_3^2k_{t,l}^2}{2}}\mathbf{e}(z_0 + b_3^2k_{t,l}) \quad k_t = \sqrt{p^2-\lambda/c_t^2}, \quad k_l = \sqrt{p^2-\lambda/c_l^2}.$$

Приближенное решение дисперсионного соотношения для водяной моды:

$$\omega^2 \approx \mathbf{g}\left(1 - \frac{\mathbf{g}\boldsymbol{\rho}}{\mathbf{g}+2c_t^2|p|}\right)|p|\tanh(D|p|), \qquad \boldsymbol{\rho} = \rho_w/\rho_e$$

Поменяем в (3) порядок интегрирования по времени с интегралом по p и представим интеграл в виде суммы

$$\int_0^t e^{\mp i\tau\omega(|p|)}\frac{\partial G(\tau)}{\partial\tau}d\tau = \int_0^\infty e^{\mp i\tau\omega(|p|)}\frac{\partial G(\tau)}{\partial\tau}d\tau - \int_t^\infty e^{\mp i\tau\omega(|p|)}\frac{\partial G(\tau)}{\partial\tau}d\tau$$

Ранее было показано, что второй интеграл быстро убывает при больших t и им можно пренебречь.
В результате получаем

$$\int_0^t e^{-i\tau\omega(|p|)}\frac{\partial G(\tau)}{\partial\tau}d\tau = \int_0^\infty e^{-i\frac{\omega(|p|)}{\lambda}\tau}g(\tau)d\tau = \sqrt{2\pi}\tilde{g}^+\left(\omega(|p|)/\lambda\right)$$

$$\int_0^t e^{i\tau\omega(|p|)}\frac{\partial G(\tau)}{\partial\tau}d\tau = \int_0^\infty e^{i\frac{\omega(|p|)}{\lambda}\tau}g(\tau)d\tau = \sqrt{2\pi}\tilde{g}^-\left(\omega(|p|)/\lambda\right)$$

$\tilde{g}^+ = \bar{\tilde{g}}^- = \tilde{g}$, где $\tilde{g}$ – Фурье преобразование функции g, $\bar{\cdot}$ – комплексное сопряжение.

Приближение дальнего поля

Переходим к полярным координатам (ϱ, ψ) и считаем, что точка наблюдения находится далеко от источника. Применим метод стационарной фазы по ψ и учтем, что слагаемое $-(|x|\varrho - t\omega(\varrho))$ вносит вклад в асимптотику $O(|x|^{-2})$ и им можно пренебречь. В результате получим:

$$\eta_F = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{b_1 b_2 b_3 \mathbf{g}}{c_l^2\sqrt{|x|}}\mathrm{Re}\Big[\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(|\mathrm{x}|\varrho - \mathrm{t}\omega(\varrho) - \pi/4\right)}\mathrm{e}^{-\varrho(\mathbf{b}(\varphi) - \mathrm{z}_0 - \mathrm{D})}\sqrt{\varrho}\tanh^2(\mathrm{D}\varrho)}{\cosh(\mathrm{D}\varrho)(\boldsymbol{\rho} + \tanh(\mathrm{D}\varrho)/\cosh^2(\mathrm{D}\varrho))}\times$$
$$\times e^{\frac{b_3^2\varrho^2}{2}}\tilde{g}\left(\frac{\omega(\varrho)}{\lambda}\right)\Big(a_v\big(c^2 - \mathcal{R}\big) + ia_h(\varphi)\big(1 + \mathcal{R}\big)\Big)\mathbf{e}\big(z_0 + b_3^2\varrho\big)\Big)d\varrho\Big],$$

где $\mathcal{R} = (c^2 - 1)\varrho(D + b_3^2\varrho + z_0)$, $c = c_l/c_t$, $a_h(\varphi) = a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi$.

“Срезающая функция“ $\mathbf{e}(z_0 + b_3^2\varrho)$ дает только сходимость интеграла, практически не влияя на результат.

Случай длинных волн

Считаем $|D\varrho|$ – мало, $b_j + |z_0| \gg D$, $\sinh(D\varrho) \approx D\varrho, \cosh^2(D\varrho) \approx 1$,
$\omega \approx \tilde{\omega} = \varrho\sqrt{\mathbf{g}D}\sqrt{1 - \frac{g\rho}{\mathbf{g}+2c_t^2|p|}} \approx \varrho\sqrt{\mathbf{g}D}$.

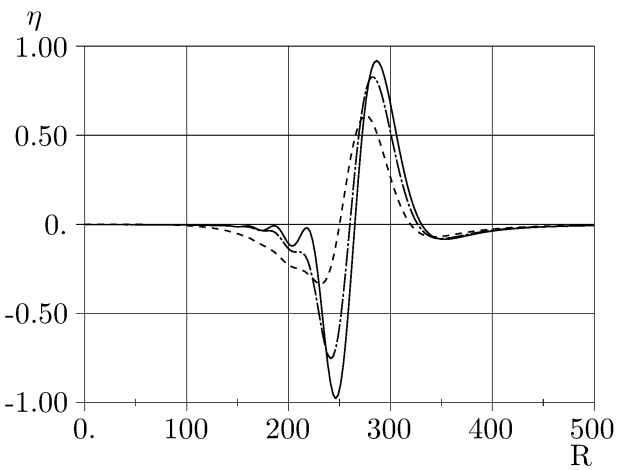
Отбрасываем $e^{\frac{b_3^2\varrho^2}{2}}$, $b_3\varrho$ в множителе $\mathcal{R}$, и "срезающую" функцию. В результате получаем:

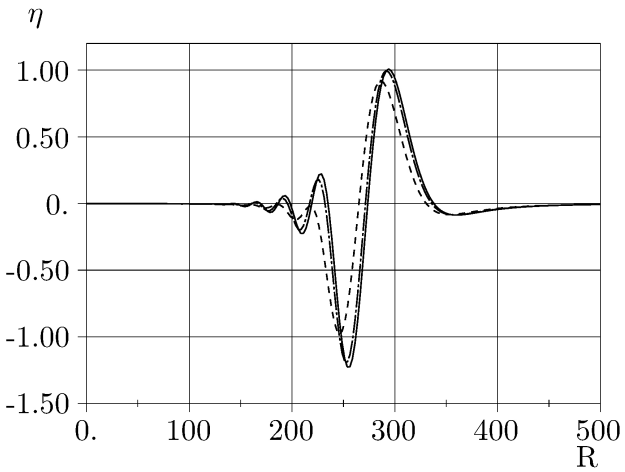
$$\eta_L = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{b_1 b_2 b_3 \mathbf{g} D^2}{c_l^2\sqrt{|x|}}\mathrm{Re}\Big[\int_0^\infty \varrho^{5/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left((|\mathrm{x}|-\mathrm{t}\mathbf{C})\varrho-\pi/4\right)}\frac{\mathrm{e}^{-\varrho(\mathbf{b}(\varphi))+\mathbf{h}}}{(\boldsymbol{\rho}+\mathrm{D}\varrho)}\times$$
$$\times\tilde{g}\left(\frac{\mathbf{C}\rho}{\lambda}\right)\Big(a_v\big(c^2-\mathcal{R}\big)+ia_h(\varphi)\big(1+\mathcal{R}\big)\Big)\Big)d\varrho\Big],$$

где $\mathcal{R} \approx -\varrho(c^2-1)\mathbf{h}$, $\mathbf{C} = \sqrt{\mathbf{g}D}$ и $\mathbf{h} = -z_0 - D$ – глубина залегания источника.

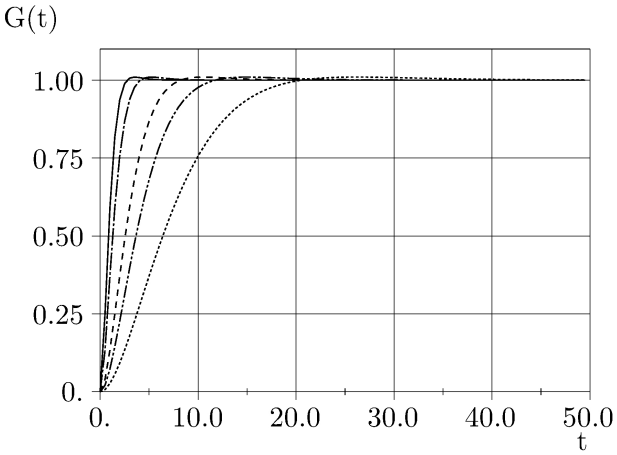
Результаты расчетов

Зависимость возмущения от времени $g(\xi) = ae^{-\lambda t}(\sin(\lambda\alpha t + \varphi) - \sin(\varphi))$

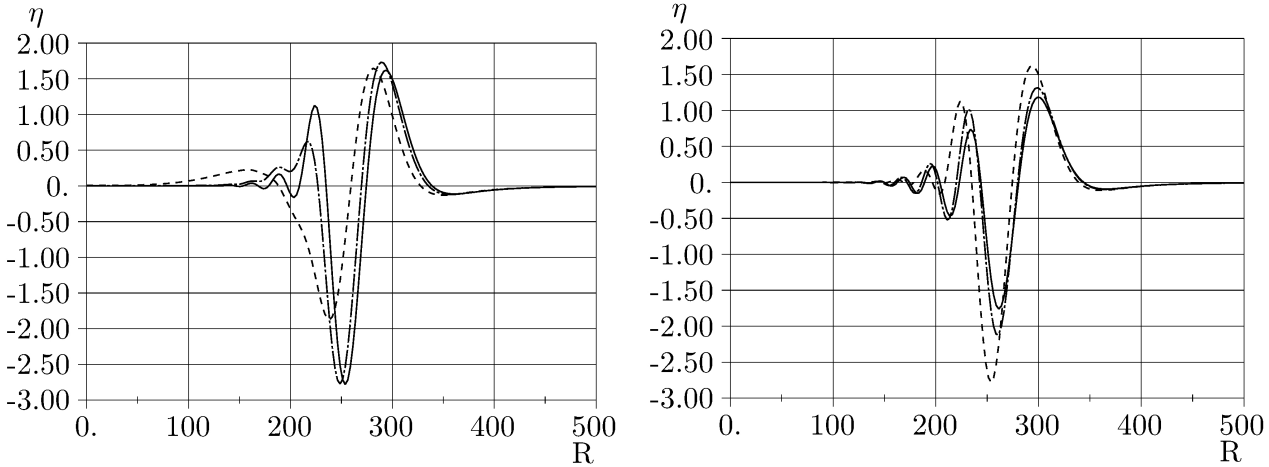




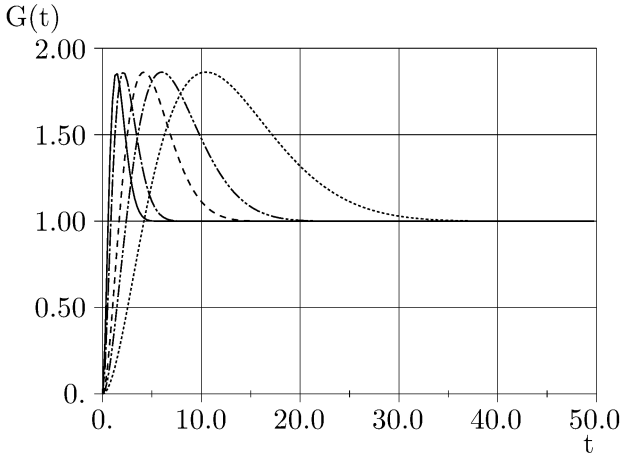
Результаты расчета возвышения жидкости, $\lambda = 0.5, 0.35, 0.2$ – слева, $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5$ – справа.



Зависимость возмущения от времени, $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5, 0.35, 0.2$. Параметры для расчета: $b = 2$, $|z0| = 43$, $t = 60$, $\alpha = 0.3$.

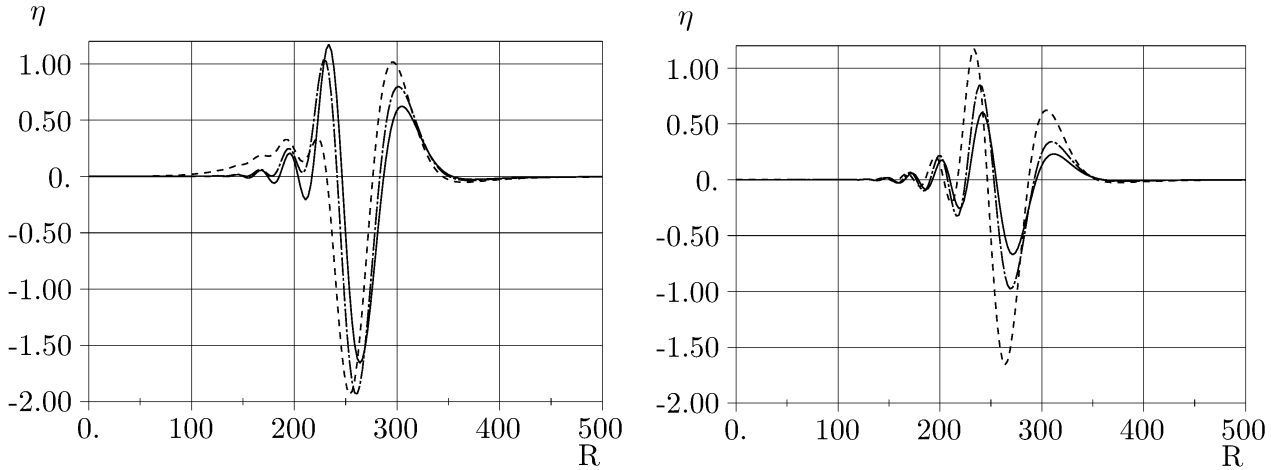


Результаты расчета возвышения жидкости, $\lambda = 0.5, 0.35, 0.2$ – слева, $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5$ – справа.

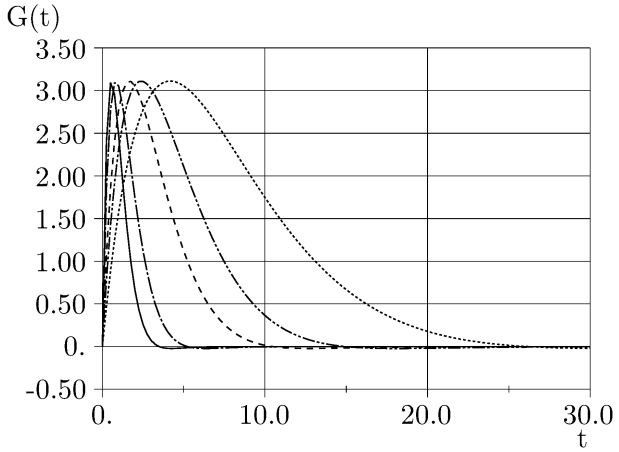


Зависимость возмущения от времени, $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5, 0.35, 0.2$. Параметры для расчета: $b = 2$, $|z0| = 43$, $t = 60$, $\alpha = 0.75$.

Зависимость возмущения от времени
$g(\tau) = ae^{-\tau}(\alpha\cos(\alpha\tau+\phi) - \sin(\alpha\tau+\phi) + sin(\phi))$



Результаты расчета возвышения жидкости, $\lambda = 0.5, 0.35, 0.2$ – слева, $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5$ – справа.



Зависимость возмущения от времени, $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5, 0.35, 0.2$. Параметры для расчета: $b = 2$, $|z0| = 43$, $t = 60$, $\alpha = 0.3$.