



II Всероссийская научная конференция
«ВОЛНЫ ЦУНАМИ: МОДЕЛИРОВАНИЕ,
МОНИТОРИНГ, ПРОГНОЗ»
Москва, 16 - 17 ноября 2020 г.



Аналитико-численный вариационный траекторный
метод расчета длинных волн, порожденных
локализованными источниками

Доброхотов С. Ю.^{1,2}, Носиков И. А.³, Клименко М. В.³, Толченников А. А.^{1,2}

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

²Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Россия

³Калининградский филиал ИЗМИРАН, г. Калининград, Россия

Мотивация

Алгоритм аналитико-численного моделирования волн цунами, представленный в работах [Dobrokhotov et al., Dokl. Math. 2006; Dobrokhotov et al. Russ. J. Math. Phys. 2008; Dobrokhotov, Nazaikinskii. Math. Notes. 2017].

Шаг 1. Решение системы Гамильтона.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = H_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = c(\mathbf{r})\mathbf{p}/|\mathbf{p}| \\ \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\nabla c(\mathbf{r})|\mathbf{p}| \end{cases}'$$

где гамильтониан $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = |\mathbf{p}|c(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = \mathbf{R}(\varphi, t)$ и $\mathbf{p} = \mathbf{P}(\varphi, t)$ описывают лучевые характеристики.

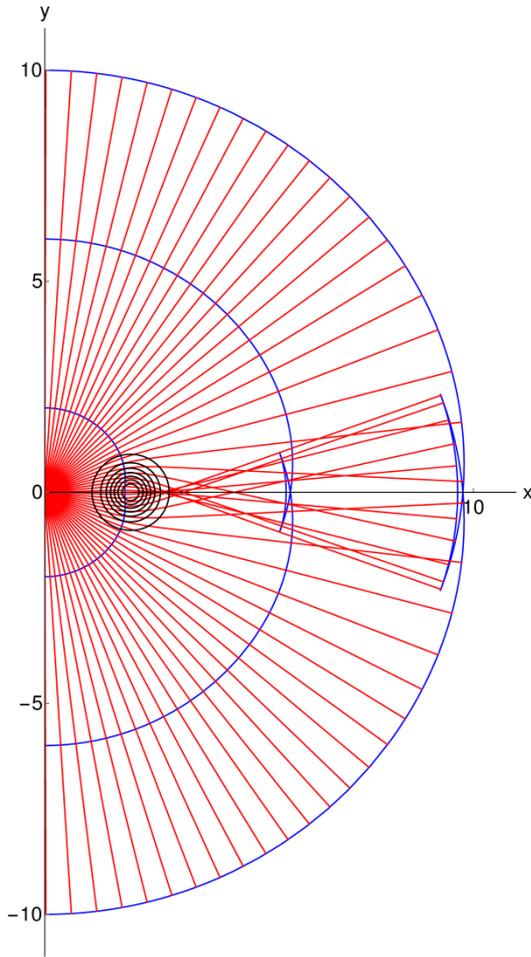
Шаг 2. Асимптотическая формула для волнового поля.

$$\eta(\mathbf{r}, t) \approx \sqrt{\frac{l}{|\mathbf{R}_{\varphi}|}} \sqrt[4]{\frac{D(\mathbf{r}_0)}{D(\mathbf{R}(\varphi, t))}} \operatorname{Re} \left[e^{-\frac{i\pi m(\varphi, t)}{2}} F\left(\frac{S(\mathbf{r}, t)}{l}, \varphi\right) \right] \Big|_{\varphi=\varphi(\mathbf{r}, t)}$$

где l - ширина начального возмущения, функция $\varphi(\mathbf{r}, t)$ определяется из уравнения $\langle \mathbf{r} - \mathbf{R}, \mathbf{R}_{\varphi} \rangle = 0$, $S(\mathbf{r}, t)$ - фаза, целое число $i\pi m(\varphi, t)$ - индекс, F - функция профиля.

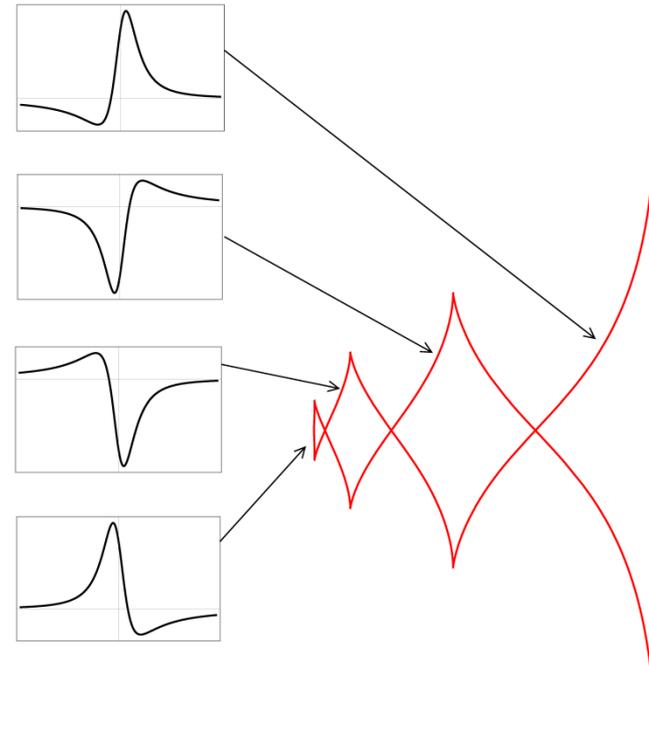
Мотивация

Шаг 1.



Примеры фронтов и лучей для
дна, имеющего форму
подводной горы

Шаг 2.



Эскизы профилей волны в разных
участках фронта

Мотивация

Возникает нелинейная краевая задача нахождения траекторий, выпущенных с неизвестным углом из заданной точки \mathbf{r}_0 и проходящих время в заданную точку наблюдения \mathbf{r}_1 :

$$\mathbf{R}(\varphi, t) = \mathbf{r}_1$$

Решение 1. Метод пристрелки. В нелинейном случае зачастую неустойчив и требует значительных вычислительных затрат!

Решение 2.1. Вариационный подход.

$$T = \int_B^A L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt,$$

Вариационное уравнение:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{1}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0.$$

Решение 2.2. Прямая оптимизация функционала S .

Альтернативный подход. Вариационный метод

В сейсмологии:

1. Um, J., & Thurber, C. (1987). A fast algorithm for two-point seismic ray tracing. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 77(3), 972-986.
2. Moser, T. J., Nolet, G., & Snieder, R. (1992). Ray bending revisited. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 82(1), 259-288.

В радиофизике:

1. Voronkov, V. A., Danilkin, I. P. (1985). A simple practical method for calculating radio paths in the ionosphere between fixed points by the variational method. Kaliningrad State University, 29.07.85, № 5545-85 Dep. (in Russian)
2. Karpenko, A. P., Popov, A. V. (1986). Method of establishment for a two-point ray problem. In "Radio wave propagation in the ionosphere". M.: IZMIRAN. P. 51. (in Russian)
3. Coleman, C. J. (2011). Point-to-point ionospheric ray tracing by a direct variational method. *Radio Science*, 46(05), 1-7.

Прямой вариационный метод. Принцип Ферма

Функционал времени пути:

$$T[\gamma] = \int_A^B \frac{1}{c} dl,$$

Принцип Ферма:

$$\delta T = 0,$$

[1]

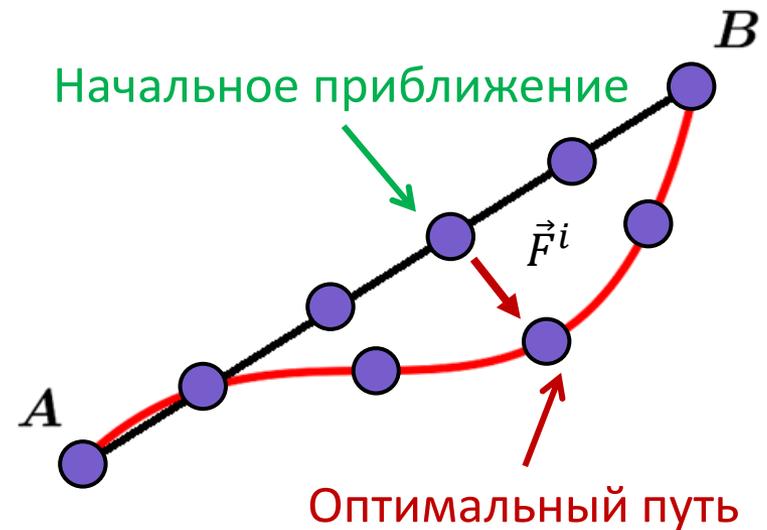
Метод трапеций для интеграла $T[\gamma]$:

$$T[\gamma] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{c_{i+1}} + \frac{1}{c_i} \right) |\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i|, \quad [2]$$

где i – индекс точки.

Минимизация $S[\gamma]$ основана на антиградиенте целевой функции:

$$\vec{F}^i = -\frac{\partial T}{\partial \vec{r}_i}. \quad [3]$$



Вариационный метод поиска лучевых траекторий



**Локальные
минимумы**



**Прямая минимизация
(Метод упругой нити)**



**Седловые
точки**



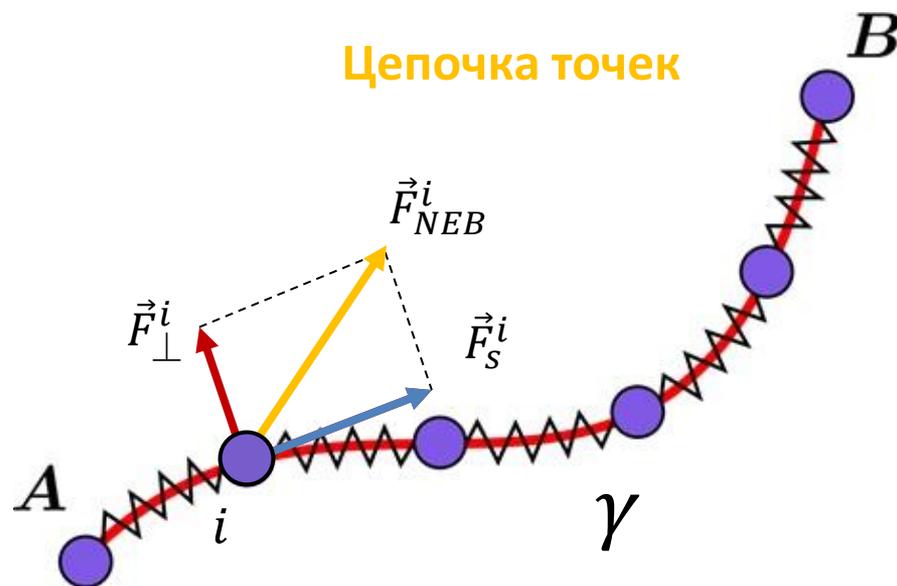
**Поиск седловых точек
(Метод упругой нити +
Метод минимальной моды)**

Поиск минимумов. Метод упругой нити

1. Проецирование сил:

$$\vec{F}_{\perp}^i = \frac{\partial T}{\partial \vec{r}_i} - \left(\frac{\partial T}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{\tau}_{\parallel}^i \right) \vec{\tau}_{\parallel}^i \quad [4]$$

Касательная вдоль луча



2. Силы упругости:

$$\vec{F}_S^i = k(|\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i| - |\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}|) \vec{\tau}_{\parallel}^i \quad [5]$$

Константа упругости

[Jónsson H. et al. (1998). World Scientific; Einarsdóttir D.M et al. (2012), Lecture Notes in Computer Science; Ásgeirsson V., Arnaldsson A. and Jónsson H. (2018), J. Chem. Phys]

Поиск седловых точек. Метод минимальной моды

1. Гессиан:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_P} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha_P \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha_P \partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha_P^2} \end{bmatrix} \quad [6]$$



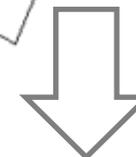
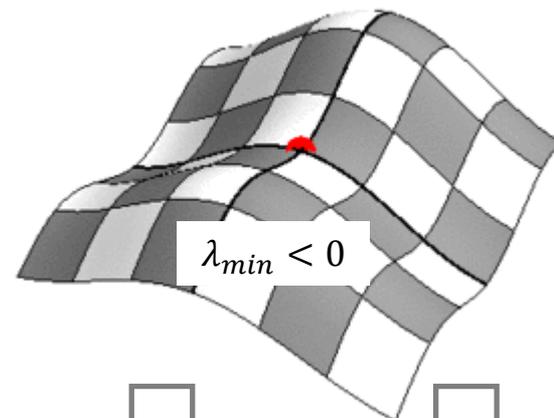
Собственные значения
($\lambda_1, \dots, \lambda_P$)



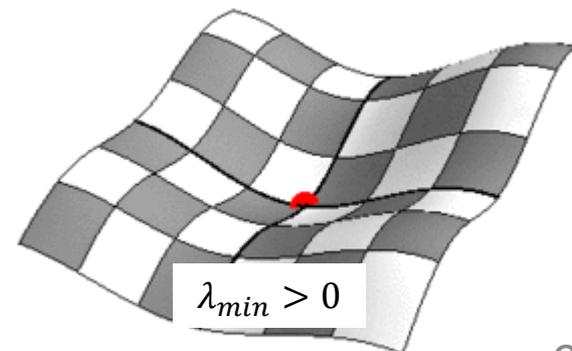
Собственные вектора
($\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_P$)

[G. Henkelman and H. Jónsson (1999), J. Chem. Phys.;
M.P. Gutiérrez, C. Argáez and H. Jónsson (2017), Journal
of Chemical Theory and Computation]

Седловая точка

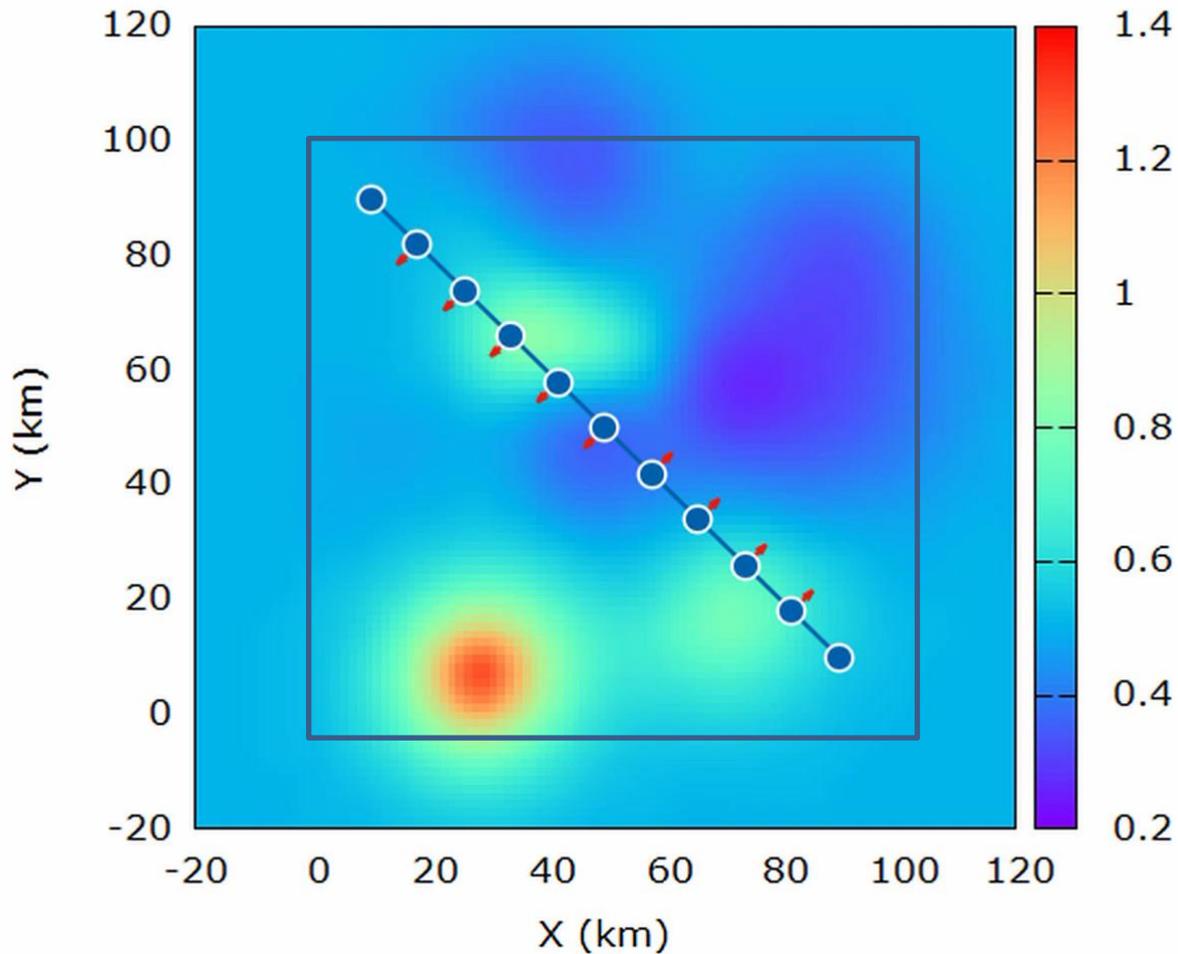


Локальный минимум

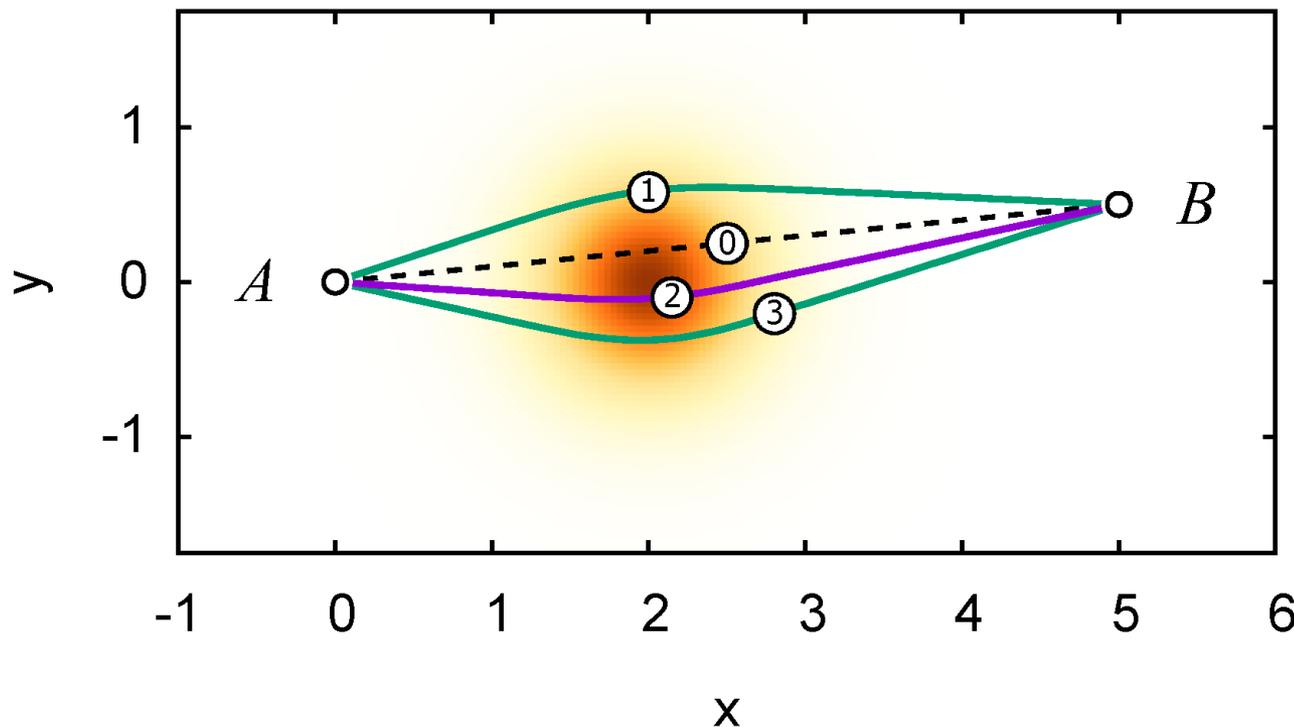


Глобальная оптимизация

Points: 11, It.: 0, Neg. ev.: 0, ev_{\min} : 0.00000, f: 0.2125



Моделирование. Модель подводной горы



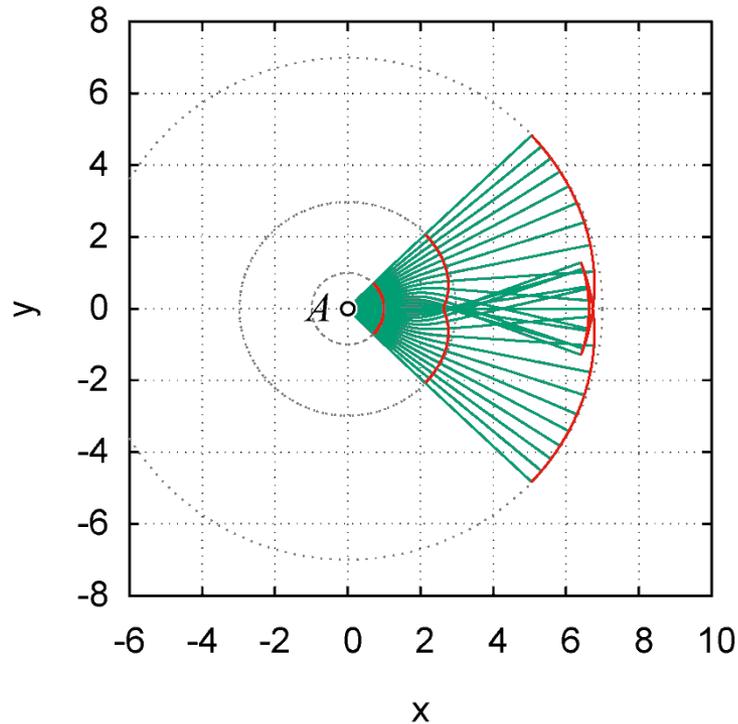
Типы лучей
на рисунке:

— минимум
— седло 1-го
порядка

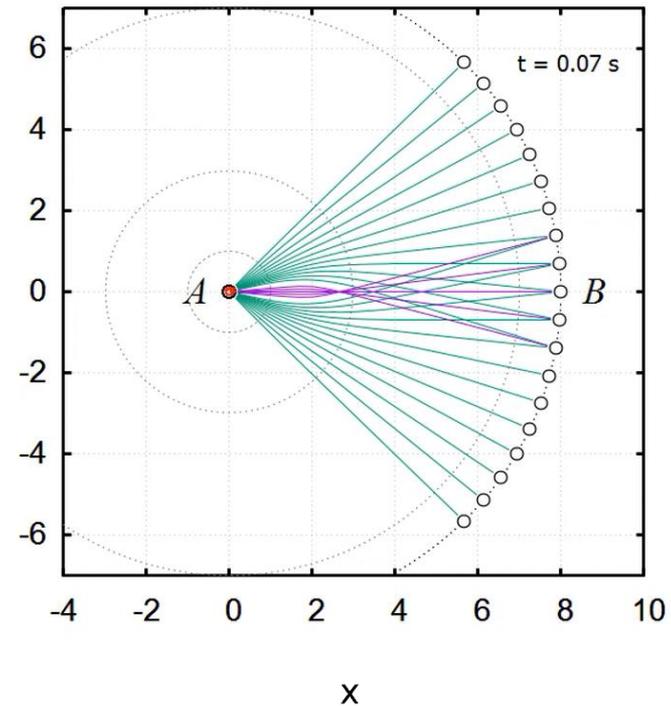
Доброхотов, С. Ю., Клименко, М. В., Носиков, И. А., Толченников, А. А. Вариационный метод расчета лучевых траекторий и фронтов волн цунами, порожденных локализованным источником //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2020. – Т. 60. – №. 8. – С. 1439-1448.

Моделирование. Модель подводной горы

Метод бихарактеристик



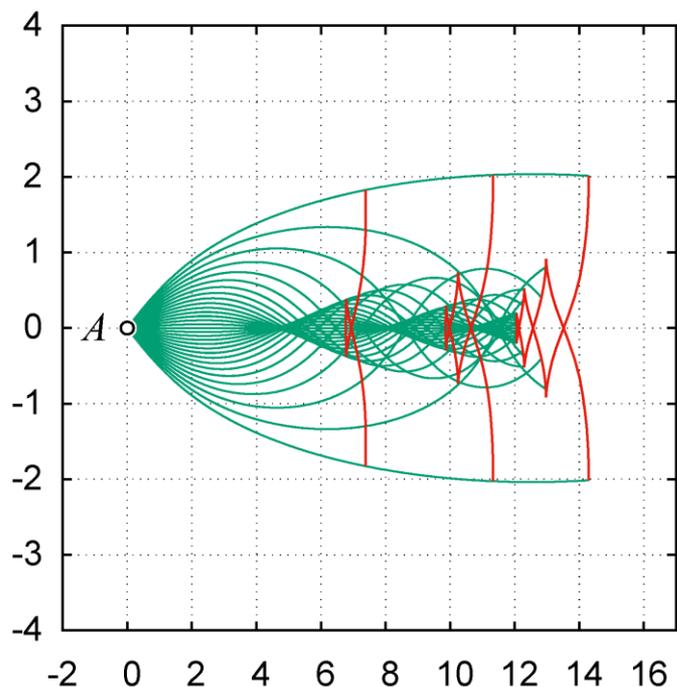
Вариационный метод



Доброхотов, С. Ю., Клименко, М. В., Носиков, И. А., Толченников, А. А. Вариационный метод расчета лучевых траекторий и фронтов волн цунами, порожденных локализованным источником //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2020. – Т. 60. – №. 8. – С. 1439-1448.

Моделирование. Модель подводного хребта

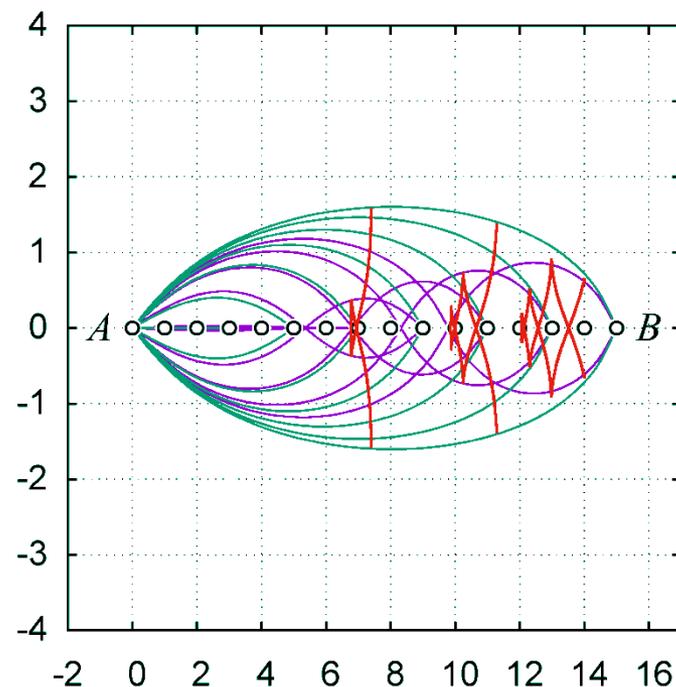
Метод бихарактеристик



Обозначения:

- все лучи
- фронт

Вариационный метод

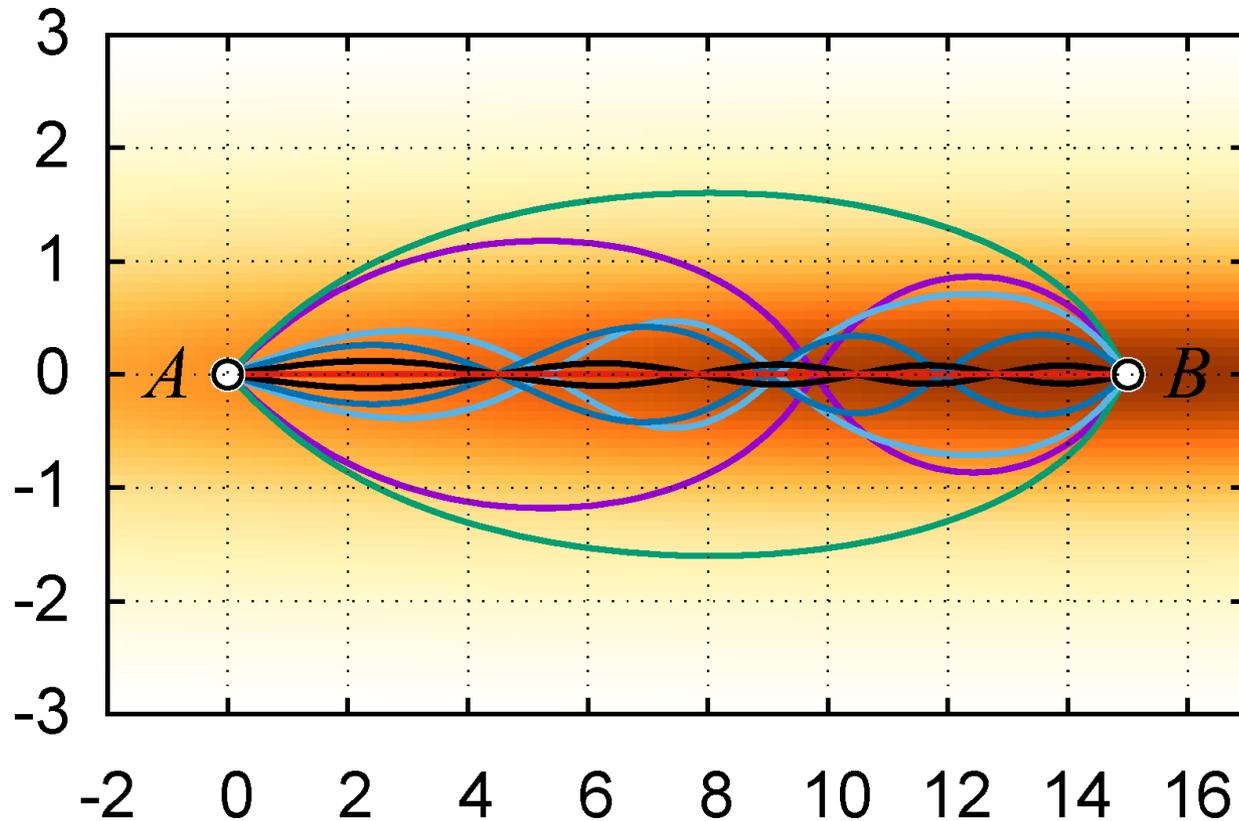


Обозначения:

- минимум
- седло 1-го порядка
- фронт

Доброхотов, С. Ю., Клименко, М. В., Носиков, И. А., Толченников, А. А. Вариационный метод расчета лучевых траекторий и фронтов волн цунами, порожденных локализованным источником //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2020. – Т. 60. – №. 8. – С. 1439-1448.

Моделирование. Модель подводного хребта

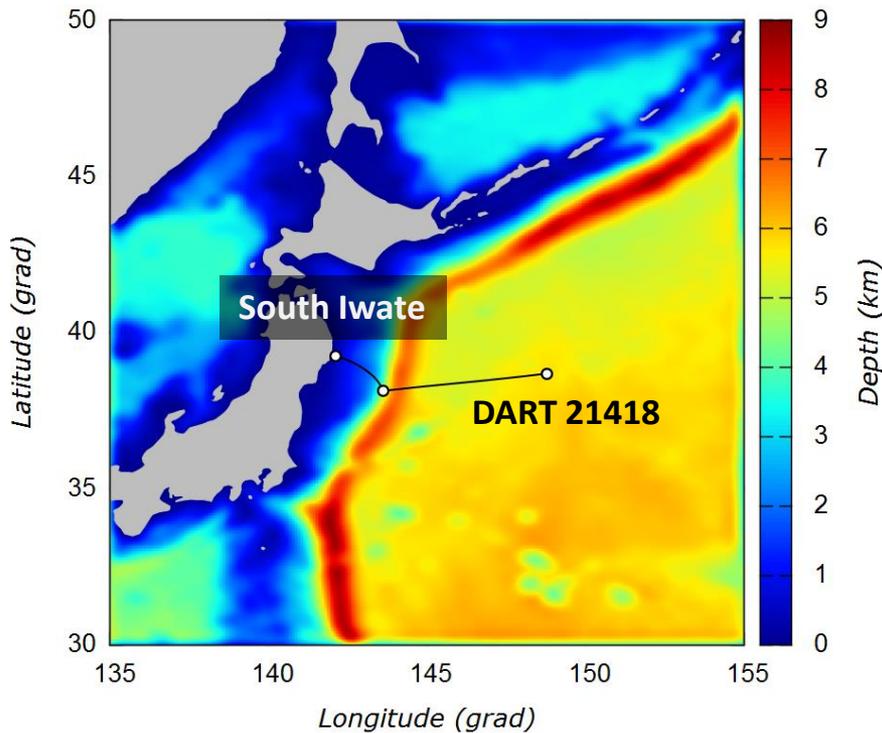


Типы лучей
на рисунке:

- минимум
- седло 1-го порядка
- седло 2-го порядка
- седло 3-го порядка
- седло 4-го порядка
- максимум

Доброхотов, С. Ю., Клименко, М. В., Носиков, И. А., Толченников, А. А. Вариационный метод расчета лучевых траекторий и фронтов волн цунами, порожденных локализованным источником //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2020. – Т. 60. – №. 8. – С. 1439-1448.

Расчет лучевых траекторий волны цунами 11 марта 2011 г.



Лучи волны цунами от источника (38.14 с.ш. 143.60 в.д.) до DART 21418 (38.322 с.ш. 142.369 в.д.) и South Iwate GPS GB802 (39.25 с.ш., 142.1 в.д.).

Параметр	Факт	Метод бихарактеристик + пристрелка		Вариационный метод	
		$L = 50$ км	$L = 32$ км	$L = 50$ км	$L = 32$ км
Время прихода головного гребня на DART 21418, ч	0.53	0.525	0.545	0.5404	0.5396
Время прихода головного гребня на буй South Iwate, ч	0.433	0.42	0.441	0.4284	0.4260

Ильясов, Х. Х., Назайкинский, В. Е., Секерж-Зенькович, С. Я., Толченников, А. А. Асимптотическая оценка координат эпицентра источника цунами 2011 г. по мареограммам, полученным на бье South Iwate GPS и на станции DART 21418. Доклады Академии наук. 2016.

Заключение

- Представлен новый вариационный метод расчета лучевых траекторий волн цунами с заданными граничными условиями.
- Вариационный метод позволяет определять лучевые траектории различных типов: локальные минимумы и седловые точки.
- Разработан алгоритм глобальной оптимизации, позволяющий последовательно определять множество лучевых траекторий без необходимости подбора начальных приближений.
- Результаты расчетов в аналитических средах и в модели реального океанического дна показали согласие между традиционной пристрелкой и вариационным подходом. К преимуществам последнего можно отнести точное выполнение граничных условий, устойчивость и высокая скорость сходимости.
- Подробное описание прямого вариационного метода представлено в работах:
 1. *Доброхотов, С. Ю., Клименко, М. В., Носиков, И. А., Толченников, А. А. //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2020. – Т. 60. – №. 8. – С. 1439-1448;*
 2. *Nosikov, I. A., Klimenko, M. V., Zhbakov, G. A., Podlesnyi, A. V., Ivanova, V. A., & Bessarab, P. F. //IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2020. – Т. 68. – №. 1. – С. 455-467.*