

Оценка влияния характеристик коротко действующих источников, локализованных в упругом основании, на профили длинных гравитационных волн.

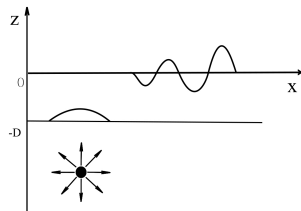
С.Ю.Доброхотов, Х.Х.Ильясов, О.Л.Толстова

Институт проблем механики им А.Ю.Ишлинского РАН, Московский физико-технический институт, Национальный исследовательский московский государственный строительный университет

16 ноября 2021 г.

Постановка задачи (модель Подъяпольского)

Kanamori (1972), Yamashita, Sato (1974), Pod'japolskii (1978), Sabatier (1983), Fragela (1989), Zvolinskii, Nikitin, Sekerzh-Zenkovich (1991), Gusjakov-Chubarov (1989), Dobrokhotov, Tolstova, Chudinovich (1993), Griniv, Dobrokhotov, Shkalikov (2000), Dobrokhotov, Tolstova, Sekerzh-Zenkovich, Vargas (2018).



Упругая деформируемая среда, описываемая вектором перемещений $U(x, z, t) = u_1, u_2, u_3$, занимает нижнее полупространство $z < -D$. Над ней располагается слой идеальной незавихренной жидкости $-D < z < 0$, описываемый потенциалом перемещений $\Psi(x, z, t)$, где $x \in R^2$ - горизонтальные, z - вертикальная координаты.

В упругой среде действует локализованный в пространстве и во времени источник $f(x, z, t)$.

Перемещения упругой среды определяются уравнениями Ламе, потенциал жидкости – уравнением Лапласа:

$$c_t^2 \nabla^2 U + (c_l^2 - c_t^2) \nabla(\operatorname{div} U) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad z \leq -D. \quad \nabla^2 \Psi = 0, \quad -D < z < 0,$$

Граничные условия

на свободной границе жидкости: $z = 0$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0,$$

на границе раздела жидкость – упругая среда: $z = -D$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} &= 0, \quad i = 1, 2, \\ (c_l^2 - c_t^2) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2c_t^2 \frac{\partial u_3}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + (\rho - 1)u_3, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= u_3, \end{aligned}$$

и $U \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$

g – ускорение свободного падения, $\rho = \rho_w / \rho_c \approx \frac{1}{3}$, ρ_w и ρ_c – плотности жидкости и упругой среды, c_l , c_t – скорости продольной и поперечной волн в упругой среде.

Переход от U, Ψ к стандартной задаче Коши

Определим вектор

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} \psi_W(x_1, x_2, t) = \Psi|_{z=0} \\ \psi_D(x_1, x_2, t) = \Psi|_{z=-D} \\ u_1(x_1, x_2, z, t) \\ u_2(x_1, x_2, z, t) \\ u_2(x_1, x_2, z, t) \end{pmatrix}$$

в пространстве $\mathcal{M} = \{z = 0\} \cup \{z = -D\} \cup \{z \leq -D(x)\} \sim \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}_+^3$
со скалярным произведением (энергетической нормой)

$$(\Upsilon^1, \Upsilon^2) = \int_{\mathbb{R}_x^2} \left(\int_{-\infty}^{-D} \langle \bar{U}^1, U^2 \rangle dz \right) dx + \rho \int_{\mathbb{R}_p^2} \langle \bar{\psi}(p, t), R(p)\tilde{\psi}(p, t) \rangle dp,$$

где $\bar{\cdot}$ – комплексное сопряжение,

$\tilde{\cdot}$ – преобразование Фурье по переменным (x_1, x_2) с двойственными им переменными (p_1, p_2) ,

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидово вещественное произведение векторов

$$R = \begin{pmatrix} |p| \coth(|p|D) & -|p|/\sinh(|p|D) \\ |p|/\sinh(|p|D) & -|p| \coth(|p|D) \end{pmatrix}.$$

тогда для Υ :

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = \hat{\mathcal{L}}\Upsilon + \frac{\partial^2 F(x, z, t)}{\partial t^2}, \quad \Upsilon \Big|_{t=0} = \Upsilon^0(x, z), \quad \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Upsilon^1(x, z). \quad (1)$$

Будем рассматривать задачу Коши с нулевыми начальными условиями

$$U|_{t=0} = \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \psi_{W,D}|_{t=0} = \frac{\partial \psi_{W,D}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

для получения эффективных формул, считаем

$$f(x, z, t) = \mathbf{a}G(t) \mathbf{e}(z) V(x) e^{-(z-z_0)^2/(2b_3^2)},$$

$$V(x) = (1 + (x_1/b_1)^2 + (x_2/b_2)^2)^{-3/2},$$

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_v)$ – вектор амплитуд, $\mathbf{e}(z) = 1, z < -D - 2\delta, \mathbf{e}(z) = 0, z > -D - \delta$

Водяная мода и мода Рэля $\lambda_{W,R} \geq 0$ ($\omega_{W,R}(p) = \sqrt{\lambda_{W,R}}$) определяются из дисперсионного соотношения

$$\left(\lambda - g|p| \tanh(|p|D)\right) \left(-4p^2 k_t k_l + (k_t^2 + p^2)^2 - g \frac{\lambda}{c_t^4} (\rho - 1) k_l\right) + \rho \frac{\lambda^2}{c_t^4} k_l \left(g - \lambda \frac{\tanh(|p|D)}{|p|}\right) = 0$$

где $k_t = \sqrt{p^2 - \lambda/c_t^2}$, $k_l = \sqrt{p^2 - \lambda/c_l^2}$

Приближенные решения

Водяная мода

$$\omega^2 \approx g \left(1 - \frac{g\rho}{g + 2c_t^2|p|}\right) |p| \tanh(D|p|)$$

мода Рэля

$$|p| \approx \frac{gv^2 \sqrt{1 - v^2/c_l^2}}{4c_t^4 - 4c_t^2 v^2 + v^4 - 4c_t^4 \sqrt{1 - v^2/c_l^2} \sqrt{1 - v^2/c_t^2}}, \quad v^2 = \omega^2/p^2$$

Для безразмерной функции $G(t)$ (зависимости возмущения от времени) предполагаем:

- $G(t) = \lambda G_0(\lambda t)$,
- $G_0(\tau)$ – гладкая функция на полупрямой $[0, \infty)$,
- $G_0(\tau)$ стремится к некоторой константе \mathfrak{G} , быстрее чем $1/\tau^\kappa$, $\kappa > 1$, при $\tau \rightarrow \infty$,
- $G_0(\tau) = 0$, $t \leq 0$.

Если $\mathfrak{G} \neq 0$, при $t \rightarrow \infty$, то в упругом основании имеются остаточные смещения, если $\mathfrak{G} = 0$, при $t \rightarrow \infty$ – остаточные смещения отсутствуют.

Для удобства представим

$$G_0(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

В дальнейшем будем изучать следующие примеры для функции g

- a) $g(\tau) = a e^{-\tau} (\sin(\alpha\tau + \phi) - \sin(\phi))$, $\alpha > 0$,
 $a = (\alpha^2 + 1)(\alpha \cos(\phi) - \alpha^2 \sin(\phi))$
- b) $g(\tau) = a\tau e^{-\tau}$.

–оба варианта порождают источники с остаточными смещениями.

Решение задачи в виде интеграла Дюгамеля

С помощью интеграла Дюгамеля решение задачи (1), (2) выражается через решение

$$W_{tt} = \hat{L}, \quad W|_{t=\tau} = \frac{\partial F}{\partial t}(\tau, x, z), \quad W_\tau|_{t=\tau} = 0,$$

по формуле

$$\Upsilon = \int_0^t W(t, \tau, x, z) d\tau.$$

С использованием ранее выведенного решения задачи с начальными условиями (Доброхотов С.Ю., Ильясов Х.Х., Секерж-Зенькович С.Я., Толстова О.Л.) получаем

$$\eta = -\frac{1}{4\pi} \int_0^t \left[\sum_{\pm} \int_{\mathbb{R}^2_p} e^{i(\langle p, x \rangle \pm (t-\tau)\omega(|p|))} \frac{\partial C_W}{\partial \tau}(p, \tau) \times \frac{i\omega^4(|p|)A}{2c_\xi^2 \cosh(|p|D)(\omega^2(|p|) - \mathbf{g}|p| \tanh(|p|D))} dp \right] d\tau, \quad (3)$$

где

$$A = \left(\frac{p^2(k_t^2 + p^2)}{2k_t} + \frac{(k_t^2 + p^2)^2(k_l^2 + p^2)}{8k_l^3} - \frac{p^2(k_t^2 + p^2)}{k_l} + \frac{\rho\omega^4|p|\tanh(|p|D)}{4c_t^4(\omega^2 - \mathbf{g}|p|\tanh(|p|D))^2} \left(\mathbf{g}^2 - 2\mathbf{g}\frac{\omega^2}{|p|}\tanh(|p|D) + \frac{\omega^4}{p^2} \right) \right)^{-1/2},$$

$$C_W = -iAb_1b_2e^{-|p|b(\varphi)}G(\lambda\tau) \times \left((ik_t\langle p, a \rangle - p^2a_v)e^{k_t(z_0+D)}f_t + \frac{k_t^2 + p^2}{2k_l}(-i\langle p, a \rangle + k_la_v)e^{k_l(z_0+D)}f_l \right)$$

$$\mathbf{b}(\varphi) = \sqrt{b_1^2 \cos^2 \psi + b_2^2 \sin^2 \psi}, \quad \langle p, a \rangle = p_1a_1 + p_2a_2,$$

$$f_{t,l} \approx b_3\sqrt{2\pi}e^{\frac{b_3^2k_{t,l}^2}{2}}\mathbf{e}(z_0 + b_3^2k_{t,l}) \quad k_t = \sqrt{p^2 - \lambda/c_t^2}, \quad k_l = \sqrt{p^2 - \lambda/c_l^2}.$$

Приближенное решение дисперсионного соотношения для водяной моды:

$$\omega^2 \approx \mathbf{g} \left(1 - \frac{\mathbf{g}\rho}{\mathbf{g} + 2c_t^2|p|} \right) |p|\tanh(D|p|), \quad \rho = \rho_w/\rho_e$$

Поменяем в (3) порядок интегрирования по времени с интегралом по p и представим интеграл в виде суммы

$$\int_0^t e^{\mp i\tau\omega(|p|)} \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \int_0^\infty e^{\mp i\tau\omega(|p|)} \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} d\tau - \int_t^\infty e^{\mp i\tau\omega(|p|)} \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

Ранее было показано, что второй интеграл быстро убывает при больших t и им можно пренебречь.

В результате получаем

$$\int_0^t e^{-i\tau\omega(|p|)} \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \int_0^\infty e^{-i\frac{\omega(|p|)}{\lambda}\tau} g(\tau) d\tau = \sqrt{2\pi} \tilde{g}^+(\omega(|p|)/\lambda)$$

$$\int_0^t e^{i\tau\omega(|p|)} \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \int_0^\infty e^{i\frac{\omega(|p|)}{\lambda}\tau} g(\tau) d\tau = \sqrt{2\pi} \tilde{g}^-(\omega(|p|)/\lambda)$$

$\tilde{g}^+ = \tilde{g}^- = \tilde{g}$, где \tilde{g} – Фурье преобразование функции g , $\bar{\cdot}$ – комплексное

сопряжение.

Приближение дальнего поля

Переходим к полярным координатам (ϱ, ψ) и считаем, что точка наблюдения находится далеко от источника. Применим метод стационарной фазы по ψ и учтем, что слагаемое $-(|x|\varrho - t\omega(\varrho))$ вносит вклад в асимптотику $O(|x|^{-2})$ и им можно пренебречь. В результате получим:

$$\eta_F = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{b_1 b_2 b_3 \mathbf{g}}{c_l^2 \sqrt{|x|}} \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \frac{e^{i(|x|\varrho - t\omega(\varrho) - \pi/4)} e^{-\varrho(\mathbf{b}(\varphi) - z_0 - D)} \sqrt{\varrho} \tanh^2(D\varrho)}{\cosh(D\varrho) (\rho + \tanh(D\varrho) / \cosh^2(D\varrho))} \times \right. \\ \left. \times e^{\frac{b_3^2 \varrho^2}{2}} \tilde{g} \left(\frac{\omega(\varrho)}{\lambda} \right) \left(a_v (c^2 - \mathcal{R}) + ia_h(\varphi) (1 + \mathcal{R}) \right) \mathbf{e}(z_0 + b_3^2 \varrho) d\varrho \right],$$

где $\mathcal{R} = (c^2 - 1)\varrho(D + b_3^2 \varrho + z_0)$, $c = c_l/c_t$, $a_h(\varphi) = a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi$.

“Срезающая функция” $\mathbf{e}(z_0 + b_3^2 \varrho)$ дает только сходимость интеграла, практически не влияя на результат.

Случай длинных волн

Считаем $|D\rho|$ – мало, $b_j + |z_0| \gg D$, $\sinh(D\rho) \approx D\rho$, $\cosh^2(D\rho) \approx 1$,
 $\omega \approx \tilde{\omega} = \rho\sqrt{\mathbf{g}D} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{g}\rho}{\mathbf{g} + 2c_t^2|\rho|}} \approx \rho\sqrt{\mathbf{g}D}$.

Отбрасываем $e^{\frac{b_3^2 \rho^2}{2}}$, $b_3 \rho$ в множителе \mathcal{R} , и “срезающую” функцию. В результате получаем:

$$\eta_L = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{b_1 b_2 b_3 \mathbf{g} D^2}{c_t^2 \sqrt{|x|}} \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \rho^{5/2} e^{i((|x| - t\mathbf{C})\rho - \pi/4)} \frac{e^{-\rho(\mathbf{b}(\varphi) + \mathbf{h})}}{(\rho + D\rho)} \times \right. \\ \left. \times \tilde{g} \left(\frac{\mathbf{C}\rho}{\lambda} \right) \left(a_v(c^2 - \mathcal{R}) + ia_h(\varphi)(1 + \mathcal{R}) \right) d\rho \right],$$

где $\mathcal{R} \approx -\rho(c^2 - 1)\mathbf{h}$, $\mathbf{C} = \sqrt{\mathbf{g}D}$ и $\mathbf{h} = -z_0 - D$ – глубина залегания источника.

Аналитические формулы для решения.

Для случае \mathbf{a} , когда $g = e^{-\tau} \tau$

$$\sqrt{2\pi} \tilde{g}^{-}(v) = \frac{1}{(1 - iv)^2},$$

Тогда нахождение η_L сводится к вычислению интегралов

$$\mathbf{I}_{km} = \mathbf{I}_{km}(y, \mathbf{L}, \rho, D, q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \varrho^{k+1/2} \frac{e^{(iy-L)\varrho}}{(1 - iq\varrho)^m (\rho + D\varrho)} d\varrho, \quad q = \frac{\mathbf{C}}{\lambda}. \quad (4)$$

где $y = |x| - tC$, числа k принимают значения 2, 3, а m - значения 2, 3, ... в зависимости от функции g . \mathbf{I}_{km} вычисляются точно и выражаются через функцию ошибок Erf комплексного аргумента:

$$\hat{\eta}_L = \frac{b_1 b_2 b_3 \mathbf{g} D^2}{2c_f^2 \sqrt{|x|}} \operatorname{Re} \left[e^{-i\pi/4} \left((a_v c^2 + ia_h(\varphi)) \mathbf{I}_{22} + (c^2 - 1) \mathbf{h}(a_v - ia_h(\varphi)) \mathbf{I}_{32} \right) \right]$$

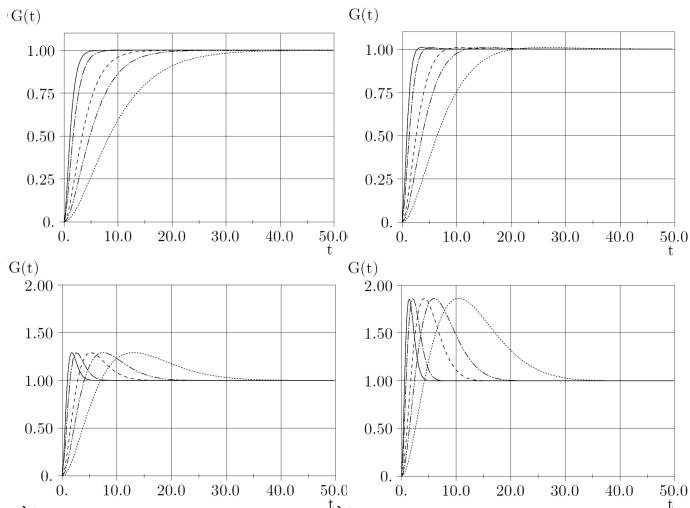
$$I_{22} = -\frac{i\rho}{4\theta^{3/2}\sqrt{\xi}q^4(q-i\theta)^2} \left(2i\sqrt{\xi}q^4 e^{\xi/\theta} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\xi/\theta} \right) \right) + \right. \\ \left. + \theta^{3/2}\sqrt{-iq\xi} e^{\frac{i\xi}{q}} (2\theta\xi + 5q^2 - 3i\theta q + 2i\xi q) \left(i + \operatorname{erfi} \left(\sqrt{-i\xi/q} \right) \right) - \right. \\ \left. - 2i\sqrt{\theta/\pi}q(q-i\theta) (\theta\xi + q^2 - i\theta q) \right)$$

$$I_{32} = -\frac{i\rho}{4\theta^{5/2}\xi^{3/2}q^5(q-i\theta)^2} \left(2i\xi^{3/2}q^5 e^{\xi/\theta} \left(\operatorname{erf} \left(\sqrt{\xi/\theta} \right) - 1 \right) + \right. \\ \left. + \theta^{5/2}\xi^{3/2}\sqrt{-iq\xi} e^{\frac{i\xi}{q}} \operatorname{erfi} \left(\sqrt{-i\xi/q} \right) (-2i\theta\xi - 7iq^2 - 5\theta q + 2\xi q) + \right. \\ \left. + \left(\theta^{5/2}\xi^{3/2}\sqrt{-iq\xi} e^{\frac{i\xi}{q}} (2\theta\xi + 7q^2 - 5i\theta q + 2i\xi q) + \right. \right. \\ \left. \left. + i\sqrt{\theta/\pi}q(q-i\theta) (2i\theta^2\xi^2 - q^3(\theta - 2\xi) + i\theta q^2(\theta + 2\xi) + 4\theta^2\xi q) \right) \right)$$

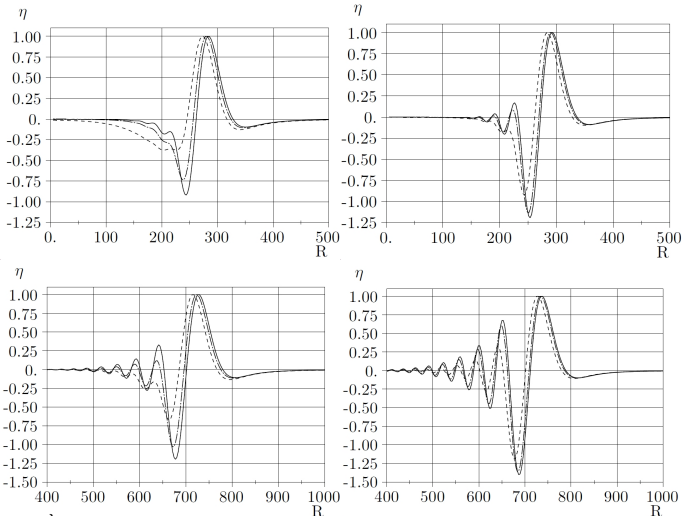
Где $\operatorname{Erfi}(z) = \operatorname{Erf}(iz)/i$, $\xi = L - iy$, $\theta = D/\rho$.

Результаты расчетов

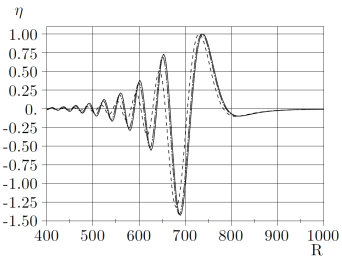
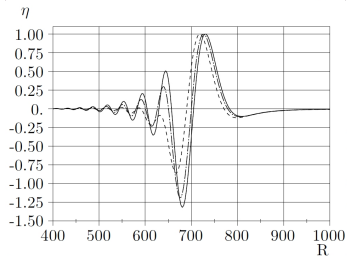
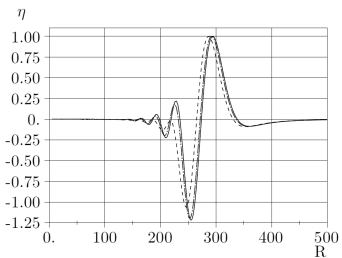
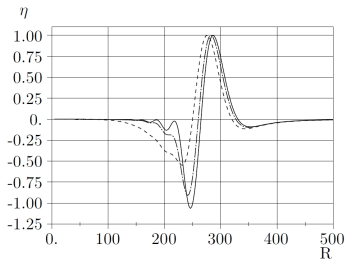
Зависимость возмущения от времени



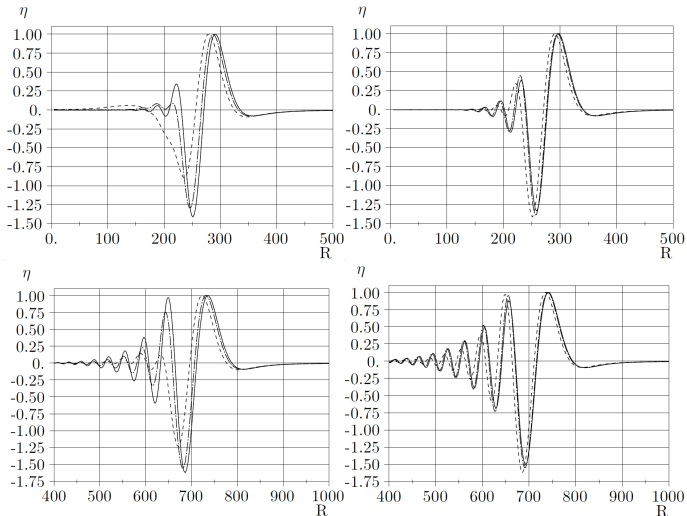
$g(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ – слева сверху, $g(t) = a e^{-\lambda t} (\sin(\lambda \alpha t + \varphi) - \sin(\varphi))$, $\alpha = 0.3$ – справа сверху, $\alpha = 0.6$ – слева внизу, $\alpha = 0.7$ – справа внизу. $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5, 0.35, 0.2$.



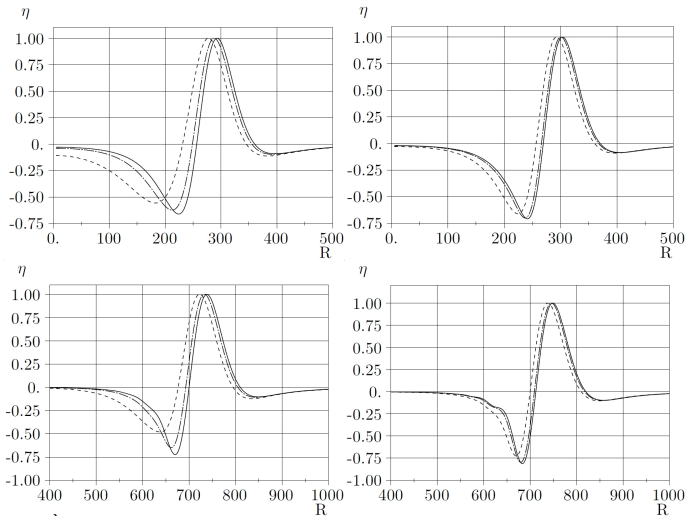
источник $\lambda \tau e^{-\lambda \tau}$, $b = 2$ км, $z_0 = 43$ км, $H = 5$ км, верхние графики $t_0 = 60$ (≈ 23 мин), нижние графики – $t_0 = 150$ (≈ 57 мин). Слева $\lambda = 0.5, 0.35, 0.2$ – сплошная, штрих-пунктирная, пунктирная линия, соответственно; справа $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5$ – сплошная, штрих-пунктирная, пунктирная линия соответственно.



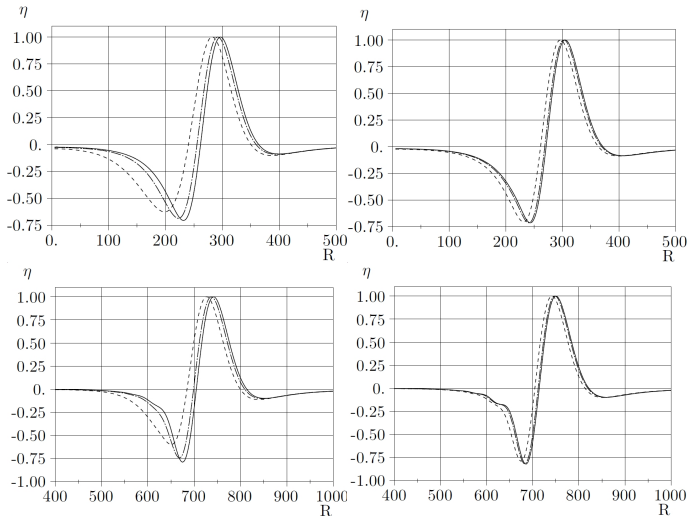
источник $ae^{-\tau}(\alpha \cos(\alpha\tau + \phi) - \sin(\alpha\tau + \phi) + \sin(\phi))$, $\alpha = 0.3$, $z_0 = 43$ км.
 Верхние графики $t_0 = 60$, нижние графики – $t_0 = 150$. Слева $\lambda = 0.5, 0.35, 0.2$
 –сплошная, штрих-пунктирная, пунктирная линия, соответственно; справа
 $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5$ –сплошная, штрих-пунктирная, пунктирная линия соответственно.



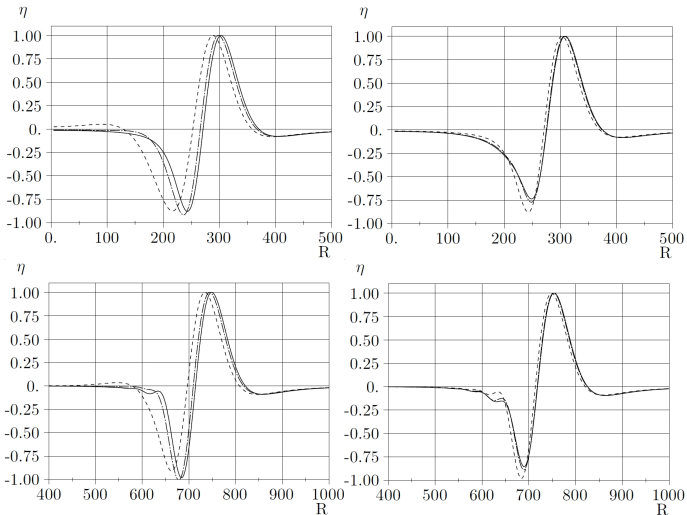
источник $ae^{-\tau}(\alpha \cos(\alpha\tau + \phi) - \sin(\alpha\tau + \phi) + \sin(\phi))$, $\alpha = 0.6$, $z_0 = 43$ км.
 Верхние графики $t_0 = 60$, нижние графики – $t_0 = 150$. Слева $\lambda = 0.5, 0.35, 0.2$
 –сплошная, штрих-пунктирная, пунктирная линия, соответственно; справа
 $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5$ –сплошная, штрих-пунктирная, пунктирная линия соответственно.



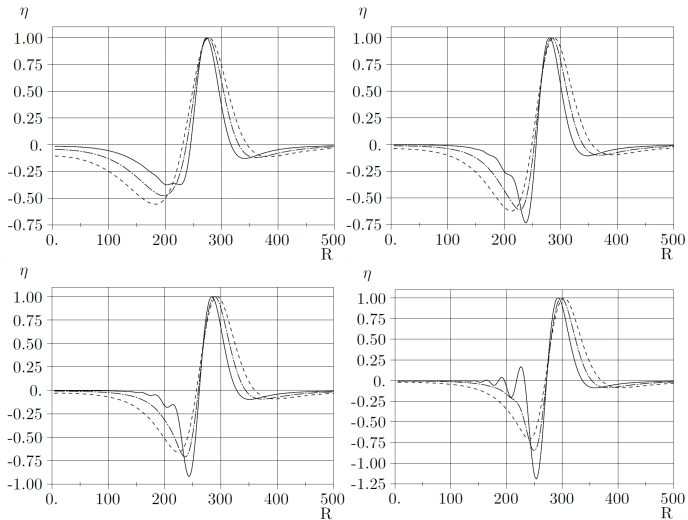
источник $\lambda\tau e^{-\lambda\tau}$, $b = 2$ км, $z_0 = 83$ км. Верхние графики $t_0 = 60$, нижние графики $t_0 = 150$. Слева $\lambda = 0.5, 0.35, 0.2$ – сплошная, штрих-пунктирная, пунктирная линия, соответственно; справа $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5$ – сплошная, штрих-пунктирная, пунктирная линия соответственно.



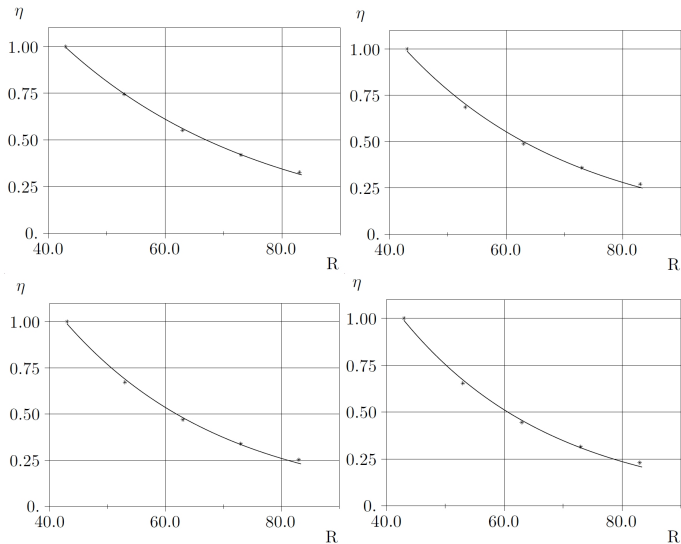
источник $ae^{-\tau}(\alpha \cos(\alpha\tau + \phi) - \sin(\alpha\tau + \phi) + \sin(\phi))$, $\alpha = 0.3$, $z_0 = 83$ км.
 Верхние графики $t_0 = 60$, нижние графики – $t_0 = 150$. Слева $\lambda = 0.5, 0.35, 0.2$
 –сплошная, штрих-пунктирная, пунктирная линия, соответственно; справа
 $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5$ –сплошная, штрих-пунктирная, пунктирная линия соответственно.



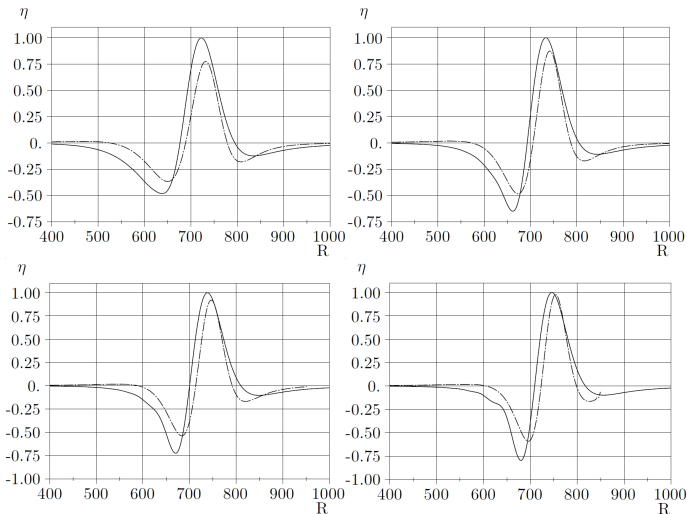
источник $a e^{-\tau} (\alpha \cos(\alpha \tau + \phi) - \sin(\alpha \tau + \phi) + \sin(\phi))$, $\alpha = 0.6$, $z_0 = 83$ км.
 Верхние графики $t_0 = 60$, нижние графики – $t_0 = 150$. Слева $\lambda = 0.5, 0.35, 0.2$
 –сплошная, штрих-пунктирная, пунктирная линия, соответственно; справа
 $\lambda = 1.5, 1.0, 0.5$ –сплошная, штрих-пунктирная, пунктирная линия соответственно.



Влияние глубины залегания источника, зависящего от времени как $\lambda \tau e^{-\lambda \tau}$, $t_0 = 60$, слева направо и сверху вниз $\lambda = 0.2, 0.35, 0.5, 1.5$. Глубина залегания z_0 43 км – сплошная, 63 км – штрих-пунктирная, 83 км – пунктирная линия.



Зависимость амплитуды головного гребня от глубины залегания источника, зависящего от времени как $\lambda \tau e^{-\lambda \tau}$. Точные значения отмечены звездочками, линиями показаны аппроксимированные значения по МНК. Аппроксимированные кривые имеют вид $a \cdot e^{-bz}$. Слева направо и сверху вниз $\lambda = 0.2, 0.35, 0.5, 1.5$.



Поведение волновых профилей в зависимости от длительности действия источника, зависящего от времени как $\tau e^{-\tau}$, глубина залегания $z_0 = 83$ км. Сплошная линия – получена по интегральным представлениям решения, штрих-пунктирная – по явным аналитическим формулам. Слева сверху $\lambda = 0.2$, слева внизу – 0.35 , слева внизу 0.5 , справа внизу – 1.0 .