Численное моделирование наката уединенных волн на откос с учетом частотной дисперсии. Модель, алгоритм, результаты

О.И.Гусев, Г.С.Хакимзянов, Л.Б.Чубаров

- *Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий;*
- *Новосибирский государственный университет*

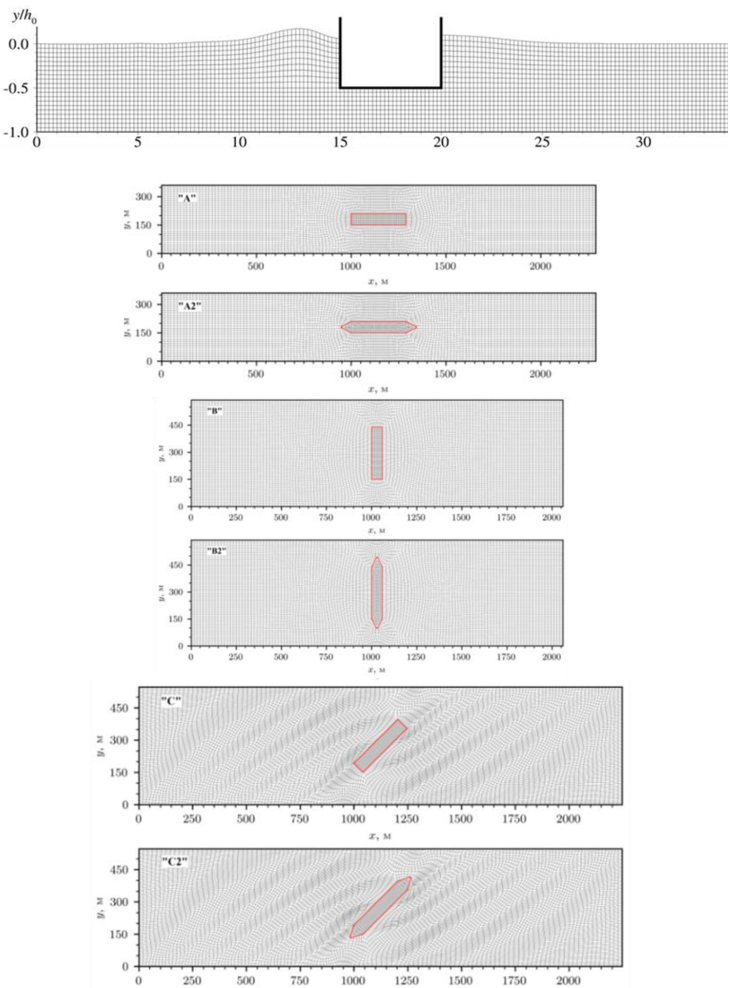
O.I.Gusev, G.S.Khakimzyanov, L.B.Chubarov, and D. Dutykh Assessing the frequency dispersion influence on the solitary-wave interaction with a constant sloping beach // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics,**2021**,Vol.62,No.4,pp.624-632. DOI: 10.1134/S0021894421040118
Гусев О.И., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Дутых Д. Оценки влияния частотной дисперсии на характеристики взаимодействия уединенных волн с плоским береговым склоном//Прикладная механика и техническая физика. Том:62.Номер:4.(368).Год:**2021**,С.114-123. DOI:10.15372/PMTF20210411

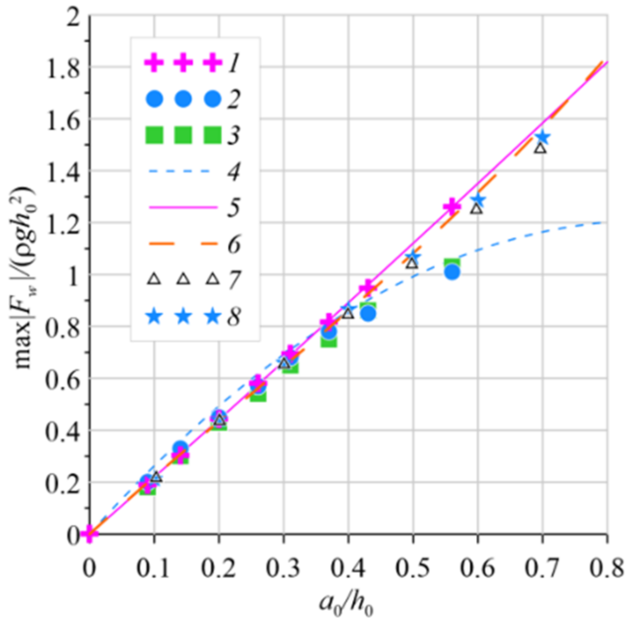
«ВОЛНЫ ЦУНАМИ: МОДЕЛИРОВАНИЕ, МОНИТОРИНГ, ПРОГНОЗ»
III Всероссийская научная конференция
Москва, 16-17 ноября 2021 г.

МОТИВАЦИЯ:

Оценка силового воздействия волны цунами на объект

(**вертикальная стенка**, сравнение с экспериментами и другими моделями)

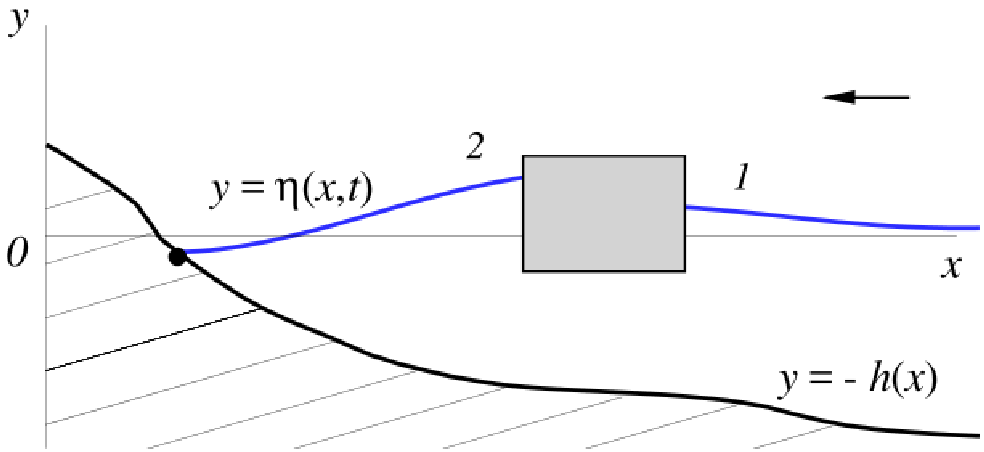




Зависимости максимальной (за всё время расчёта) волновой силы, действующей на неподвижную вертикальную стенку, от амплитуды набегающей волны

1 - результаты Pot-модели;
2 - экспериментальные данные Chen et al. (2019b);
3 - расчёты по модели Навье – Стокса Chen et al. (2019b);
4 - кривая, соответствующая формуле, аппроксимирующей данные *2* (после вычета гидростатической компоненты давления);
5 - кривая, соответствующая формуле, аппроксимирующей расчётные данные *1;*
6 и *7* результаты расчётов из работ Cooker et al. (1997) и Zheleznyak (1985) соответственно;
8 - результаты расчётов, выполненных с использованием НЛД-модели (Khakimzyanov and Dutykh, 2020)

МОТИВАЦИЯ-2



- **Oleg I. Gusev, Gayaz S. Khakimzyanov, Leonid B. Chubarov,** Numerical investigation of the wave force on a partially immersed rectangular structure: Long waves over a flat bottom // Ocean Engineering, Volume 221, **2021**, 108540, ISSN 0029-8018, https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.108540.

- **Khakimzyanov G.S., Dutykh D.** Long wave interaction with a partially immersed body. Part I: Mathematical models//Communications in Computational Physics. **2020**. V.27. No.2. P.321-378.

- **Для длинных волн дисперсионные эффекты могут проявиться только на трассах их длительного распространения**

- **Kirby J.T. et al. Dispersive tsunami waves in the ocean: Model equations and sensitivity to dispersion and Coriolis effects//Ocean Modelling.2013.V.62.P.39–55.**

- **Моделирование воздействия ондулярного бора с прибрежными отдельными волнорезами невозможно без учета дисперсии.**

- **Morichon D. et al. Tsunami impact on a detached breakwater: Insights from two numerical models // Preprint in Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering. 2021.**

Введение

- ***Методика***
  - *иерархический подход: исследование явления с помощью моделей различного порядка гидродинамической аппроксимации,*
  - *явное выделение подвижной линии уреза,*
  - *проведение расчетов на подвижных сетках.*

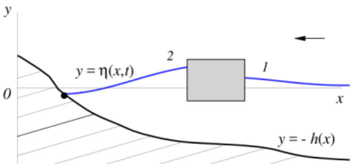
- ***Практическая значимость***
  - *повышение достоверности результатов за счет использования моделей «старших» приближений,*
  - *существенная экономия вычислительных ресурсов за счет использования менее затратных алгоритмов на основе «младших» моделей в тех случаях, когда они обеспечивают необходимую точность.*

Заключение

- Представлены **краевые условия** в подвижной точке уреза для **полностью нелинейной дисперсионной модели мелкой воды второго приближения**.
- Определено **влияние дисперсионных эффектов** при накате и формировании отражённых от плоского откоса волн **в зависимости от угла его наклона**.
- Показано, что **учёт дисперсии уменьшает** максимальные **высоту** и **дальность** заплеска, а также **амплитуду отражённой волны** на 10 — 20%.
- При **увеличении угла** склона **глубина отката уменьшается**, а **амплитуда отражённой волны увеличивается**.

- *Выявленные закономерности вместе с предложенными аналитическими и алгоритмическими конструкциями могут быть использованы для повышения точности моделирования взаимодействия длинных волн с полупогруженными телами, расположенными **вблизи береговых склонов**.*
- *Авторы предполагают в дальнейшем перейти к рассмотрению более реалистичных **рельефов дна**, **форм** подходящих к берегу **волн**, к моделированию взаимодействия волн **не только со склоном**, но и с расположенными вблизи берега полупогруженными телами, к учёту других важных факторов, например, **трения о дно**.*

Полностью нелинейная слабо дисперсионная SGN - модель (*Serre-Green-Naghdi*) 1D



$x \in \Omega(t) = (x_0(t), l)$,
$x_0(t)$ – подвижная точка уреза
$U(t)$ – скорость движения точки уреза

$H = \eta + h$ – полная глубина
$u(x,t)$ – осредненная по вертикали от дна до свободной поверхности скорость,
$\breve{p}$ – давление на дне,
p – проинтегрированное по глубине давление в SGN-модели,
φ – дисперсионная составляющая давления,
ψ – дисперсионная составляющая давления на дне,

$$H_t + (Hu)_x = 0,$$

$$(Hu)_t + (Hu^2 + p)_x = \breve{p} h_x$$

$$p = g\frac{H^2}{2} - \varphi, \quad \breve{p} = gH - \psi,$$

$$\varphi = \frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2, \quad \psi = \frac{H^2}{2}R_1 + HR_2,$$

$$R_1 = u_{xt} + uu_{xx} - u_x^2, \quad R_2 = (u_t + uu_x)h_x - u^2 h_{xx}.$$

Краевые условия на подвижной точке уреза:

$$\varphi(x_0(t),t) = 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\psi(x_0(t),t) = 0, \quad t \in [0,T].$$

$$H(x_0(t),t) = 0, \quad t \in [0,T],$$
$$H_x(x_0(t),t) \ge 0, \quad t \in [0,T].$$
$$h_x(x_0(t)) \ge \delta_h > 0, \quad t \in [0,T].$$
$$\dot{x}_0(t) = U(t) = u(x_0(t),t)$$

Краевое условие на правой границе:

$$u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T]$$

$$\left.\left(k\varphi_x - \frac{6h_x}{H^2 r}\varphi\right)\right|_{x=l} = \left.\left(g\eta_x + \frac{R}{r}h_x\right)\right|_{x=l}$$

Начальные условия:

$$H(x,0) = H_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [x_{00}, l],$$

Khakimzyanov G. Dispersive Shallow Water Waves. Theory, Modeling, and Numerical Methods. Lecture Notes in Geosystems Mathematics and Computing/G.Khakimzyanov, D.Dutykh, Z.Fedotova, O.Gusev. Basel:Birkhäuser,**2020**.

SGN – модель (1D): переход к подвижной (адаптивной) системе координат

$$x = x(q,t),\ \ x(0,t) = x_0(t),\ \ x(1,t) = l,$$
$$\bar{Q} = [0,1] \to \Omega(t) = \left(x_0(t), l\right)$$
$$J(q,t) = x_q(q,t) \ge J_0 = \text{const} > 0$$

гладкое, невырожденное преобразование координат

$$H_t + (Hu)_x = 0,$$
$$(Hu)_t + \left(Hu^2 + p\right)_x = \breve{p} h_x$$
$$p = g\frac{H^2}{2} - \varphi,\ \ \breve{p} = gH - \psi,$$
$$\varphi = \frac{H^3 R_1}{3} + \frac{H^2 R_2}{2},\ \ \psi = \frac{H^2 R_1}{2} + HR_2,$$
$$R_1 = u_{xt} + uu_x - u_x^2,\ \ R_2 = (u_t + uu_x)h_x - u^2 h_{xx}.$$

$$(JH)_t + \left[(u - x_t)H\right]_q = 0,$$
$$(k\varphi_q)_q - 6\varphi\left[\frac{2J}{H^3}\frac{r-3}{r} + \left(\frac{h_q}{JH^2 r}\right)_q\right] = F$$
$$(JHu)_t + \left[(u - x_t)Hu + g\frac{H^2}{2}\right]_q = gHh_q + \varphi_q - \psi h_q,$$
$$\psi = \frac{1}{r}\left(\frac{6\varphi}{H} + HR + \frac{\varphi_q h_q}{J^2}\right),\ \ r = 4 + \frac{h_q^2}{J^2},$$
$$R = -g\frac{\eta_q h_q}{J^2} + u^2\frac{1}{J}\left(\frac{h_q}{J}\right)_q,\ \ k = \frac{4}{JHr},$$
$$F = \left(g\frac{\eta_q}{J} + \frac{Rh_q}{Jr}\right)_q - \frac{6RJ}{Hr} + 2\frac{u_q^2}{J}.$$

Краевые условия:

$$\varphi(0,t) = 0,\ \ \left.\left(k\varphi_q - \frac{6h_q\varphi}{JH^2 r}\right)\right|_{q=0} = \dot{U}(t) + \left.\left(\frac{g\eta_q}{J} + \frac{Rh_q}{Jr}\right)\right|_{q=0},\ \ \left.\left(k\varphi_q - \frac{6h_q\varphi}{JH^2 r}\right)\right|_{q=1} = \left.\left(\frac{g\eta_q}{J} + \frac{Rh_q}{Jr}\right)\right|_{q=1}.$$

SGN – модель (1D):
численный алгоритм расчета во внутренних узлах

декартова неподвижная система координат

При построении численного алгоритма используется расщепление задачи на две более простые, в **одной** из которых решается система уравнений **гиперболического** типа

$$H_t + (Hu)_x = 0,$$

$$(Hu)_t + \left(Hu^2 + g\frac{H^2}{2}\right)_x = gHh_x + \varphi_x - \psi h_x,$$

в **другой**– линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции φ

$$(k\varphi_x)_x - k_0\varphi = F.$$

Система уравнений гиперболического типа и дифференциальное уравнение решаются с помощью метода типа **предиктор-корректор** поочередно как на шаге предиктор, так и корректор с использованием в правых частях и коэффициентах разностных уравнений значений сеточных функций, вычисленных на предыдущих этапах вычислительного алгоритма.

$$k = \frac{4}{Hr}, \quad k_0 = 6\left(\frac{2}{H^3}\frac{r-3}{r} + \left(\frac{h_x}{H^2 r}\right)_x\right),$$

$$F = \left(g\eta_x + \frac{Rh_x}{r}\right)_x - \frac{6R}{Hr} + 2u_x^2,$$

$$R = -g\eta_x h_x + u^2 h_{xx}, \quad r = 4 + h_x^2.$$

Подвижная адаптивная система координат

$$(JH)_t + \left[(u - x_t)H\right]_q = 0, \quad (JHu)_t + \left[(u - x_t)Hu + g\frac{H^2}{2}\right]_q = gHh_q + \varphi_q - \psi h_q,$$

$$\psi = \frac{1}{r}\left(\frac{6\varphi}{H} + HR + \frac{\varphi_q h_q}{J^2}\right), \quad r = 4 + \frac{h_q^2}{J^2}, \quad R = -g\frac{\eta_q h_q}{J^2} + u^2\frac{1}{J}\left(\frac{h_q}{J}\right)_q .$$

в **одной** из которых решается система уравнений **гиперболического** типа

$$(k\varphi_q)_q - k_0\varphi = F,$$

$$k = \frac{4}{JHr}, \quad k_0 = 6\left[\frac{2J}{H^3}\frac{r-3}{r} + \left(\frac{h_q}{JH^2 r}\right)_q\right], \quad F = \left(g\frac{\eta_q}{J} + \frac{Rh_q}{Jr}\right)_q - \frac{6RJ}{Hr} + 2\frac{u_q^2}{J}.$$

в **другой**– линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции φ


千絵の海

SGN – модель (1D):
расчет траектории подвижной точки уреза

Формулы для расчета траектории движения точки уреза зависят от наклона свободной границы в точке ее пересечения с береговым склоном. Этот наклон всегда удовлетворяет условию $H_q(0,t) \geq 0, \quad t \in [0,T]$

Случай 1: $H_q^n(0) > 0$

траекторию точки уреза можно искать в виде степенного ряда по времени:

$$x_0(t) = x_0^n + x_{01}(t-t^n) + x_{02}\frac{(t-t^n)^2}{2} + x_{03}\frac{(t-t^n)^3}{6} + O\left(\left(t-t^n\right)\right)^4$$

$$U(t) = x_{01} + x_{02}(t-t^n) + x_{03}\frac{(t-t^n)^2}{2} + O\left(\left(t-t^n\right)^3\right),$$

$x_{01} = U(t^n) = u_0^n$ Остальные коэффициенты можно выразить через известные величины на n-ом временном слое.

Для частного случая плоского откоса (под углом Θ), сопряженного справа (в точке x_s) с участком дна постоянной глубины h_0: $x_s = (y_0 + h_0)\cot\theta$

$$x_{01} = u_0^n, \quad x_{02} = -g\left(1+\eta_x^n \tan\theta\right)\eta_x^n\Big|_{x=x_0^n}, \quad x_{02} = 2g\left(1+2\eta_x^n \tan\theta\right)u_x^n H_x^n\Big|_{x=x_0^n}.$$

Для **бездисперсионной** модели: $x_{01} = u_0^n, \quad x_{02} = -g\eta_x^n\Big|_{x=x_0^n}, \quad x_{02} = 2gu_x^n H_x^n\Big|_{x=x_0^n}.$

Bautin S.P., Deryabin S.L., Sommer A.F., Khakimzyanov G. S., Shokina N. Yu. Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on a movable shoreline//Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. **2011**. V.26, No.4. P.353-377.

SGN – модель (1D):
расчет траектории подвижной точки уреза

Случай 2: $H_q^n(0)=0$

Касательная к свободной поверхности в точке уреза совпадает с касательной к поверхности дна в этой же точке .

Закон движения точки уреза определяется решением **системы дифференциальных уравнений**:

$$\dot{x}_0(t)=U(t),\ t>t^n,$$

$$\dot{U}(t)=\left[g-g\left(\frac{h_q}{J}\right)^2-\frac{U^2(t)}{J}\left(\frac{h_q}{J}\right)_q\right]\frac{h_q}{J}\Bigg|_{q=0},\ t>t^n \qquad x_0(t^n)=x_0^n,\ U(t^n)=u_0^n$$

Для **частного случая** плоского откоса, сопряженного справа с участком дна постоянной глубины h_0:

$$x_0(t)=x_0^n+u_0^n(t-t^n)+g(1-\tan^2\theta)\tan\theta\frac{(t-t^n)^2}{2},$$

$$U(t)=u_0^n+g(t-t^n)(1-\tan^2\theta)\tan\theta.$$

Для **бездисперсионной** модели: $x_0(t)=x_0^n+u_0^n(t-t^n)+g\tan\theta\frac{(t-t^n)^2}{2},$

$$U(t)=u_0^n+g(t-t^n)\tan\theta.$$

Bautin S.P.,Deryabin S.L.,Sommer A.F.,Khakimzyanov G. S.,Shokina N. Yu. Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on a movable shoreline//Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. **2011**. V.26, No.4. P.353-377.

Численное моделирование
(постановка задачи)

В расчетах **режим наката** определялся значением разностной производной в точке уреза:
Случай 1: $H^n_{x,0} \geq \delta_H$, **Случай 2:** $H^n_{x,0} < \delta_H$, $\delta_H > 0$.
Оптимальное значение параметра δ_H зависит от шага сетки и характеристик течения в окрестности точки уреза.

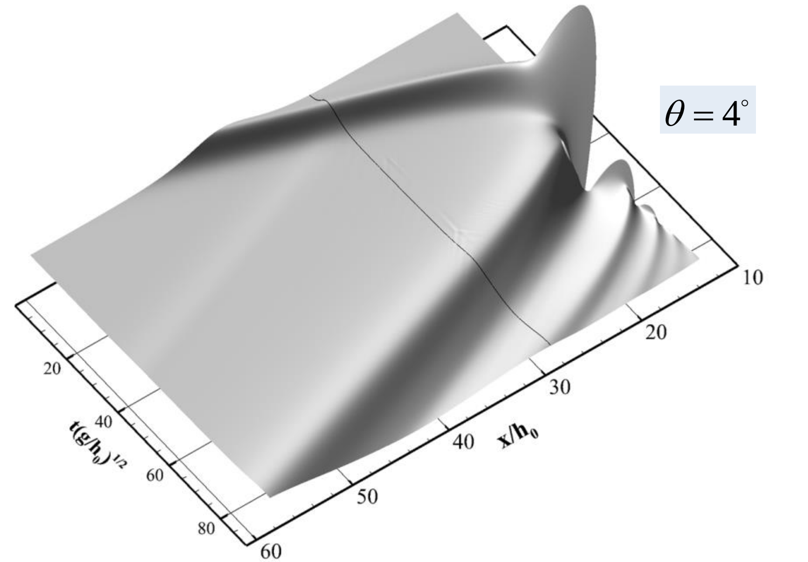
$$y = -h(x) = \begin{cases} y_0 - x\tan\theta & \text{при} \quad 0 \leq x \leq x_s, \\ -h_0 & \text{при} \quad x_s < x \leq l, \end{cases}$$

$$\eta_0(x) = a_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{3a_0 g}}{2U_0}\frac{x - x_w}{h_0}\right), \quad H_0(x) = h(x) + \eta_0(x),$$

$$u_0(x) = -U_0\frac{\eta_0(x)}{h_0 + \eta_0(x)}, \quad U_0 = \sqrt{g(h_0 + a_0)}, \quad x_w = x_s + \frac{\lambda}{2}$$

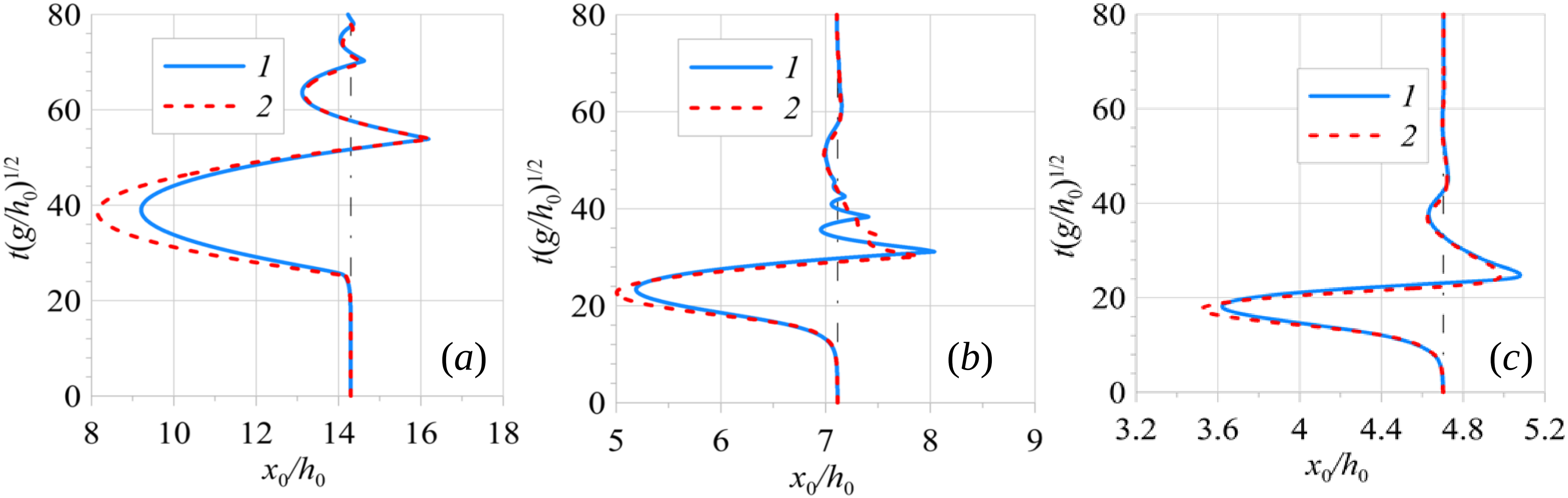
$$\lambda = 4h_0\sqrt{\frac{a_0 + h_0}{3a_0}}\ln\left(\sqrt{\frac{100}{\Pi}} + \sqrt{\frac{100}{\Pi} - 1}\right), \quad \Pi = 5, \; l = x_s + 100h_0,$$

$$h_0 = 42\text{м}, \quad a_0 = 3\text{м}, \quad \theta \in \left[4^\circ, 15^\circ\right]$$



С самого начала расчёта формируется отражённая от основания склона волна малой амплитуды, распространяющаяся в обратном направлении (вправо).
Передний фронт основной волны, продвигающейся по склону, заметно укручается.

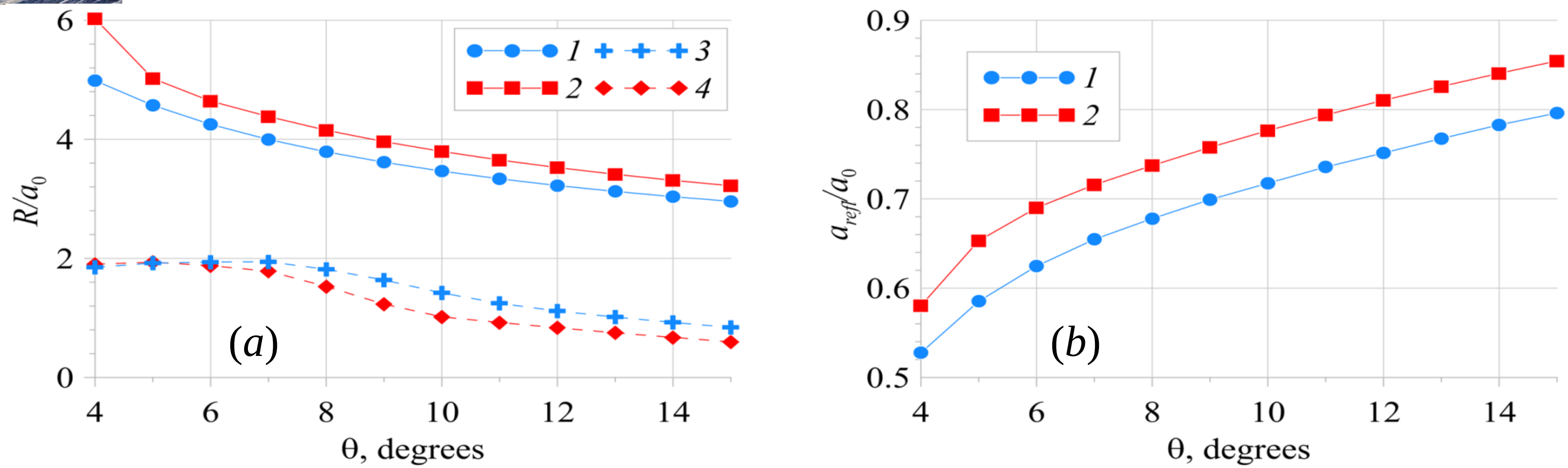
Численное моделирование
(результаты - 1)



Траектории движения точки уреза в расчётах с использованием SGN-(*1*) и NSWE-модели (*2*)
для углов склона $\theta = 4°(a), 8°(b), 12°(c)$

- С **уменьшением** угла склона наблюдается **усложнение траектории**, **увеличение числа фаз** наката и отката, **рост высоты** наката.
- При этом также, с одной стороны, **возрастает дистанция и время распространения** волны по склону, что **увеличивает влияние дисперсионных эффектов,**

Численное моделирование (результаты - 2)



Максимальные высоты заплесков (*a*: *1*, *2*) и **глубины** отката (*a*: *3*, *4*), **амплитуды отражённой** волны (*b*): **SGN-модель** (*1*, *3*), **NSWE-модель** (*2*, *4*)

- Рисунок **(*a*)** - **максимальная высота** наката, рассчитанная по **NSWE**-модели **больше** примерно на 10 – 20%, чем определенная с учетом частотной дисперсии, но **для глубины отката** наблюдается **обратное** соотношение.
- Рисунок **(*b*)** - максимальная амплитуда **отражённой** волны **уменьшается с уменьшением угла** склона так, что значения, полученные с использованием NSWE-модели, оказываются больше, рассчитанных в рамках SGN-модели.

Численное моделирование (результаты - 3)

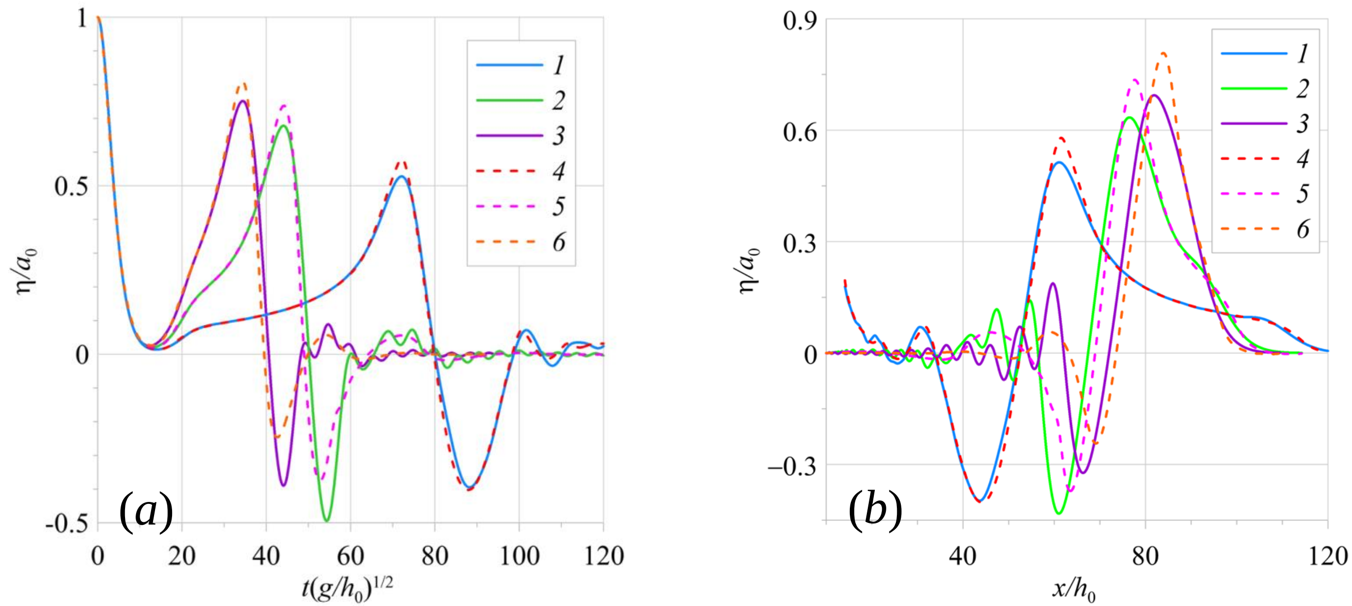


Рисунок (***a***) - записи виртуального **мареографа**, расположенного в точке x_w;

Рисунок (***b***) - **профили** свободной поверхности в момент времени $t\sqrt{g/h_0} = 94$;

SGN-модель - (*1, 2, 3*), **NSWE-модель** - (*4, 5, 6*); $\theta = 4^\circ\,(1,4)$, $8^\circ\,(2,5)$ и $12^\circ\,(3,6)$.

- При откате за головной волной формируется цуг из волн меньшей амплитуды, хорошо заметный на записях виртуального мареографа, расположенного в точке x_w,
- а также на графиках свободной поверхности в момент времени $t\sqrt{g/h_0} = 94$.

Заключение

- Представлены **краевые условия** в подвижной точке уреза для **полностью нелинейной дисперсионной модели мелкой воды второго приближения**.
- Определено **влияние дисперсионных эффектов** при накате и формировании отражённых от плоского откоса волн **в зависимости от угла его наклона**.
- Показано, что **учёт дисперсии уменьшает** максимальные **высоту** и **дальность** заплеска, а также **амплитуду отражённой волны** на 10 — 20%.
- При **увеличении угла** склона **глубина отката уменьшается**, а **амплитуда отражённой волны увеличивается**.

- *Выявленные закономерности вместе с предложенными аналитическими и алгоритмическими конструкциями могут быть использованы для повышения точности моделирования взаимодействия длинных волн с полупогруженными телами, расположенными* ***вблизи береговых склонов****.*
- *Авторы предполагают в дальнейшем перейти к рассмотрению более реалистичных* ***рельефов дна****,* ***форм*** *подходящих к берегу* ***волн****, к моделированию взаимодействия волн* ***не только со склоном****, но и с расположенными вблизи берега полупогруженными телами, к учёту других важных факторов, например,* ***трения о дно****.*