

# ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОДХОДА К РАСЧЕТУ ОКЕАНИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПРИМЕРЕ ЦУНАМИ ТОХОКУ 2011 Г.

С.А. Бейзель<sup>1</sup>, С.Ю. Доброхотов<sup>2</sup>, В.Е. Назайкинский<sup>2</sup>,  
И.А. Носиков<sup>3</sup>, А.А. Толченников<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск

<sup>2</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

<sup>3</sup> Калининградский филиал института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова РАН, г. Калининград

ВОЛНЫ ЦУНАМИ: МОДЕЛИРОВАНИЕ, МОНИТОРИНГ,  
ПРОГНОЗ, 2021

# Модель

Распространение волн, порожденных локализованным возмущением, будем моделировать при помощи линейной системы мелкой воды на невращающейся сфере:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{g}{R \cos \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{g}{R} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{R \cos \theta} \left( \frac{\partial (uD)}{\partial \phi} + \frac{\partial (vD \cos \theta)}{\partial \theta} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u, v$  — скорость,  $\eta$  — превышение свободной поверхности,  $D$  — функция глубины,  $g$  — ускорение свободного падения,  $R$  — радиус Земли,  $\phi$  — долгота,  $\theta$  — широта, отсчитываемая от экватора. Начальные условия локализованы в окрестности  $(\phi_0, \theta_0)$  ( $l$  — ширина начального возмущения,  $\eta^0$  — быстроубывающая функция)

$$u|_{t=0} = v|_{t=0} = 0, \eta|_{t=0} = \eta^0 \left( (\phi - \phi_0) \frac{R \cos \theta_0}{l}, (\theta - \theta_0) \frac{R}{l} \right).$$

Цель — найти асимптотическую временную историю в фиксированной точке  $X^*$ , находящейся далеко от центра начального возмущения  $X_0 = (\phi_0, \theta_0)$ . Длина волны будет велика по сравнению с глубиной бассейна, но мала по сравнению с расстоянием от  $X_0$  до  $X^*$ . Поэтому задачу Коши можно решать асимптотически в коротковолновом приближении методом канонического оператора Маслова.

- S. Yu. Dobrokhotov, A. I. Shafarevich, B. Tirozzi, “Localized wave and vortical solutions to linear hyperbolic systems and their application to linear shallow water equations”, Russ. J. Math. Phys. — 2008.
- S. Yu. Dobrokhotov, B. Tirozzi, A. A. Tolchennikov, “Asymptotics of Shallow Water Equations on the Sphere”, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 21, No. 4, 2014, pp. 430–449.

# Система Гамильтона, лучи, фронты

Асимптотические формулы будет писать удобнее в координатах Меркатора:

$$x_1 = \phi, \quad x_2 = \log \left( \tan \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

Определим гамильтониан  $H(x_1, x_2, p_1, p_2) = c(x_1, x_2) \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ , где

$$c(x_1, x_2) = \sqrt{gD(x)} \frac{\cosh x_2}{R}.$$

Решим систему Гамильтона

$$\dot{X} = c(X) \frac{P}{|P|}, \quad \dot{P} = -|P| \nabla c(X), \quad X|_{t=0} = X^0, \quad P|_{t=0} = \mathbf{n}^0(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$$

Определим *луч*  $\{X(\psi, t) | t \in [0, T]\}$ , *фронт*

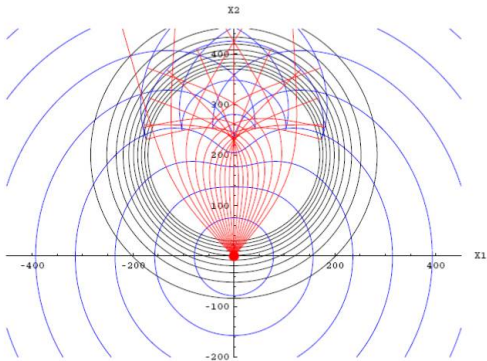
$\gamma_t = \{X(\psi, t) | \psi \in [0, 2\pi)\}$ . Точка  $X(\psi^*, t)$  *фокальная*, если

$X_\psi(\psi^*, t) = 0$  и *регулярная* в противном случае.

# Пример: фронты и лучи над подводной горой

Плавные изменения глубины приводят к появлению фокальных точек.

Синие линии — фронты, красные — лучи.



(2)

## Вклад регулярной точки фронта во временную историю

Если в станцию наблюдения  $X^*$  приходит луч  $X(\psi^*, t^*) = X^*$  и точка  $X^*$  регулярная на фронте  $\gamma_{t^*}$ , то этот луч дает следующий вклад во временную историю:

$$\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{|X_\psi(\psi^*, t^*)|}} \sqrt{\frac{\cosh X_2^*}{\cosh x_2^0}} \sqrt[4]{\frac{D^0}{D(X^*)}} \operatorname{Re} \left[ e^{-i\frac{\pi m}{2}} U \left( \frac{(t^* - t)c_0}{l}, \psi^* \right) \right]$$

$$U(z, \psi) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{iz\rho} \sqrt{\rho} \tilde{\eta}^0(\rho \mathbf{n}^0(\psi)) d\rho$$

В случае т.н. “простого” источника (Сретенский, Доценко, Ванг, Сергиевский, Черкесов, Секерж–Зенькович)

$$\eta^0(y) = (1 + |y|^2)^{-\frac{3}{2}}$$

имеем  $\tilde{\eta}^0(p) = e^{-|p|}$  и интеграл вычисляется

$$U(z) = \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{2}} (1 - iz)^{-\frac{3}{2}}$$

## Вклад фокальной точки – складки

*Складка* — фокальная точка, в которой  $X_{\psi\psi} \neq 0$ .

Если вблизи от точки наблюдения  $X^*$  проходит точка-складка  $X(\psi(t), t)$ , то она даёт вклад во временную историю (для простого источника):

$$-\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[ e^{-i\pi\tilde{m}/2} \sqrt{\tilde{J}(\psi(t), t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(i + \frac{b_0 + b_1\xi + b_3\xi^3}{t})^2} d\xi \right]$$

где

$$b_0 = \langle P(\psi(t), t), X^* - X(\psi(t), t) \rangle,$$

$$b_1 = \langle P_\psi(\psi(t), t), X^* - X(\psi(t), t) \rangle,$$

$$b_3 = -\frac{1}{6} \langle P_\psi(\psi(t), t), X_{\psi\psi}(\psi(t), t) \rangle$$

$$\tilde{J}(\psi, t) = \det(P, P_\psi)$$

# Пример вычисления мареограммы для японского цунами 2011 года

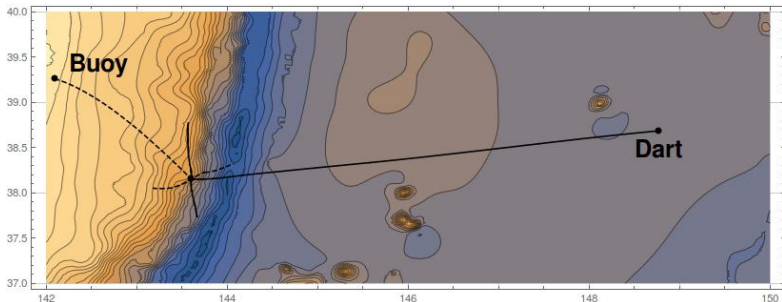
Цель — применить асимптотический метод для вычисления мареограмм. На первом этапе мы используем реальное дно и реальное положение станции наблюдения, а источник берем простой. Сравниваем асимптотические мареограммы с численными. На следующем этапе мы будем усложнять источник, моделируя его из простых.



## Положение начального возмущения

Положение центра начального возмущения было найдено методом обратных лучей в статье

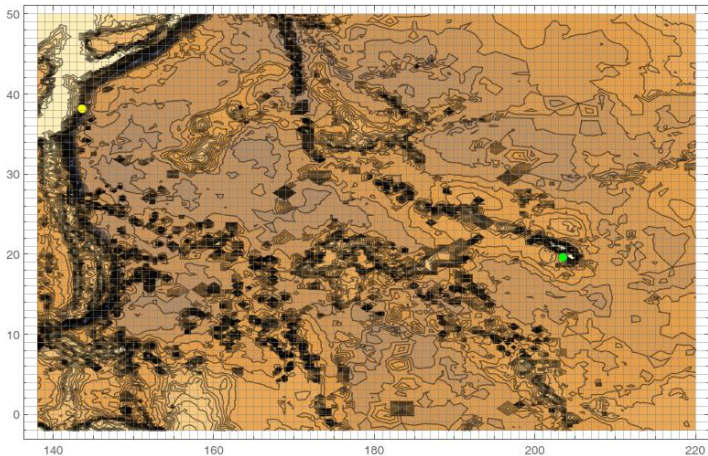
Ильясов Х.Х., Назайкинский В.Е., Секерж–Зенькович С.Я., Толченников А.А., “Асимптотическая оценка координат эпицентра источника цунами 2011 г. по мареограммам, полученным на буе South Iwate GPS и на станции DART 21418”, ДАН, том 469, номер 1, 2016, стр. 46–50



Начальное возмущения локализовано в окрестности точки  $143.6^{\circ}$  в.д.,  $38.15^{\circ}$  с.ш.

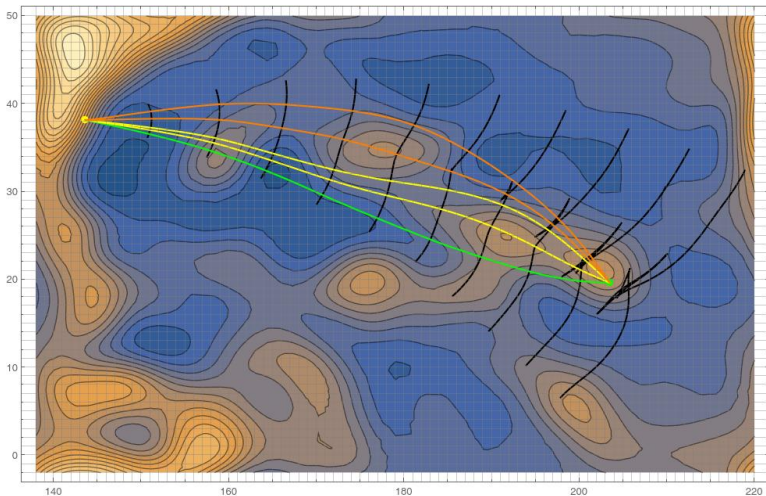
# Рабочая область

Рассмотрим станцию DART 51407 с координатами  $203.489^\circ$  в.д.,  $19.62^\circ$  с.ш. (зеленая точка).



## Осреднение дна

Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Тироци Б. "О методе осреднения для дифференциальных операторов с осциллирующими коэффициентами // Докл. РАН. — 2015. — Т. 461. — Вып. 5. — С. 516–520.



# Вариационный метод поиска лучей

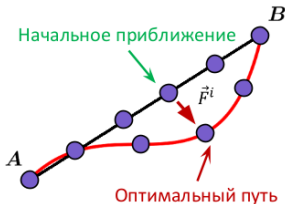
Функционал времени пути  $T[\gamma] = \int_A^B \frac{dl}{c}$ . Принцип Ферма:  $\delta T = 0$ .

Метод трапеций для интеграла

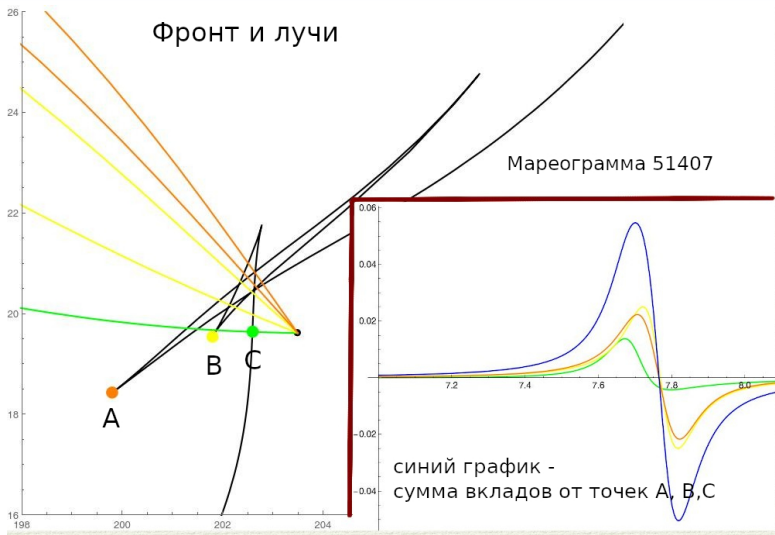
$$T[\gamma] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{c_{i+1}} + \frac{1}{c_i} \right) |r_{i+1} - r_i|$$

Минимизация  $T[\gamma]$  основана на антиградиенте целевой функции:

$$F^i = -\frac{\partial T}{\partial r_i}.$$

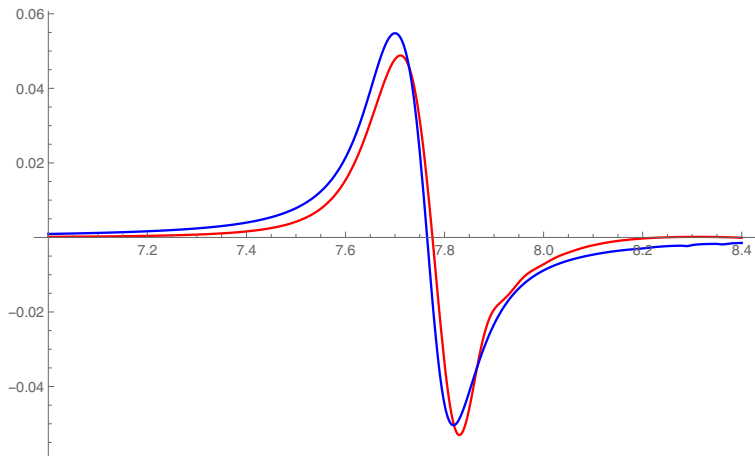


С. Ю. Доброхотов, М. В. Клименко, И. А. Носиков, А. А. Толченников,  
“Вариационный метод расчета лучевых траекторий и фронтов волн  
цунами, порожденных локализованным источником”, Ж. вычисл. матем.  
и матем. физ., 60:8 (2020)



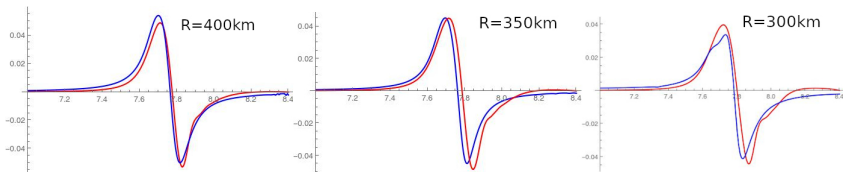
# Сравнение численной мареогаммы и асимптотической

Синий график - асимптотическая мареогамма (полученная как сумма вкладов от двух фокальных точек и одной регулярной), красный график - численная мареогамма.



# Сравнение численной мареограммы и асимптотической для разных радиусов осреднения

Синий график - асимптотическая мареограмма, красный график – численная мареограмма.



# План дальнейших работ

- Уменьшать радиус осреднения, найти предельный радиус, для которого еще возможно использовать лучевой подход
- Изучать другие дальние станции DART
- Усложнить начальное возмущение