

Об асимптотических решениях нелинейной системы уравнений мелкой воды в бассейне с пологими берегами

С.Ю. Доброхотов, Д.С.Миненков, В.Е.Назайкинский

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

Региональный научно-образовательный математический центр при Ярославском
государственном университете им. П.Г. Демидова, г. Ярославль

III Всероссийская научная конференция

«ВОЛНЫ ЦУНАМИ: МОДЕЛИРОВАНИЕ, МОНИТОРИНГ, ПРОГНОЗ»

16 – 17 ноября 2021 г.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-30011)

Задача Коши для нелинейных уравнений мелкой воды

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_t + \nabla((D(x) + \tilde{\eta})\tilde{\mathbf{u}}) &= 0, & \tilde{\mathbf{u}}_t + \langle \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \rangle \tilde{\mathbf{u}} + g \nabla \tilde{\eta} &= 0, \\ \tilde{\eta}_{t=0} &= \tilde{\eta}^{(0)}(x), & \tilde{\mathbf{u}}_{t=0} &= \tilde{\mathbf{u}}^{(0)}(x),\end{aligned}$$

- $D(x) = D(x_1, x_2)$ - глубина бассейна
- g - ускорение свободного падения
- $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(x, t)$ - возвышение свободной поверхности
- $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(x, t) = (\tilde{u}_1(x, t), \tilde{u}_2(x, t))$ - горизонтальная скорость

Решение определено в области, такой, что функция $D(x) + \tilde{\eta}(x, t)$ в ней положительна, а на границе области равна нулю.

Асимптотическая задача: малое возмущение линейных уравнений

- Математическая формализация: вводим малый параметр $\varepsilon \geq 0$ и ищем зависящие от него решения вида

$$\tilde{\eta} = \varepsilon \eta(x, t, \varepsilon), \quad \tilde{\mathbf{u}} = \varepsilon \mathbf{u}(x, t, \varepsilon),$$

где $\eta(x, t, \varepsilon)$, $\mathbf{u}(x, t, \varepsilon)$ - гладкие функции; начальные условия ставим в виде

$$\tilde{\eta}^{(0)} = \varepsilon \eta^{(0)}(x, \varepsilon), \quad \tilde{\mathbf{u}}^{(0)} = \varepsilon \mathbf{u}^{(0)}(x, \varepsilon)$$

- Получаем задачу Коши

$$\begin{aligned} \eta_t + \nabla(D(x)\mathbf{u}) &= -\varepsilon \nabla(\eta \mathbf{u}), & \mathbf{u}_t + g \nabla \eta &= -\varepsilon \langle \mathbf{u}, \nabla \rangle \mathbf{u}, \\ \eta_{t=0} &= \eta^{(0)}(x, \varepsilon), & \mathbf{u}_{t=0} &= \mathbf{u}^{(0)}(x, \varepsilon). \end{aligned}$$

Метод построения асимптотического решения

- На первый взгляд, систему

$$\begin{aligned}\eta_t + \nabla(D(x)\mathbf{u}) &= -\varepsilon \nabla(\eta \mathbf{u}), & \mathbf{u}_t + g \nabla \eta &= -\varepsilon \langle \mathbf{u}, \nabla \rangle \mathbf{u}, \\ \eta_{t=0} &= \eta^{(0)}(x, \varepsilon), & \mathbf{u}_{t=0} &= \mathbf{u}^{(0)}(x, \varepsilon).\end{aligned}$$

естественно решать с помощью обычной регулярной теории возмущений по параметру ε , но сложность в том, что область $\Omega(t, \varepsilon)$, в которой определено решение, зависит от самого решения:

$$D(x) + \varepsilon \eta(x, t, \varepsilon) > 0 \quad \text{при } x \in \Omega(t, \varepsilon),$$

$$D(x) + \varepsilon \eta(x, t, \varepsilon) = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega(t, \varepsilon).$$

- Нужно сделать замену переменных, такую, чтобы в новых переменных область не зависела от решения.

- Пример: 1D, линейное дно – преобразование Кэрриера-Гринспена; задача в точности линеаризуется.

G. F. Carrier, H. P. Greenspan, “Water waves of finite amplitude on a sloping beach”, J. Fluid Mech., 4:1 (1958), 97–109.

С. Ю. Доброхотов, С. Б. Медведев, Д. С. Миненков, “О заменах, приводящих одномерные системы уравнений мелкой воды к волновому уравнению со скоростью звука $c^2 = x$ ”, Матем. заметки, 93:5 (2013), 716–727.

(в общем случае это невозможно, да и не нужно)

- Основная задача – «остановить» область.
- 1D case:

V.A. Chugunov, S.A. Fomin, W.Noland, B.R. Sagdiev, “Tsunami runup on a sloping beach”, <https://doi.org/10.1002/cmm4.1081>

- Пример: 1D, линейное дно – преобразование Кэрриера-Гринспена; задача в точности линеаризуется (в общем случае это невозможно, да и не нужно)
- Основная задача – «остановить» область.
- Предположение: $D(x)$ – гладкая функция, положительная в ограниченной области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$, отрицательная вне Ω_0 и такая, что на $\partial\Omega_0$ всюду выполняется условие $\nabla D(x) \neq 0$.
- Конструкция: рассмотрим области

$$\Omega_\lambda = \{x : D(x) + \lambda > 0\}$$

и гладкое семейство диффеоморфизмов

$$F(\cdot, \lambda) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(\cdot, 0) = \text{id}, \quad F(\cdot, \lambda)(\Omega_\lambda) = \Omega_0.$$

Замена переменных $y = F(x, \varepsilon \eta(x, t, \varepsilon))$ сводит задачу в область Ω_0 .

Возможный способ построения семейства диффеоморфизмов

$$G(\cdot, \lambda) = (F(\cdot, \lambda))^{-1}$$

$$\frac{d}{d\lambda} G(y, \lambda) = -\frac{\nabla D(G(y, \lambda))}{|\nabla D(G(y, \lambda))|^2}$$

$$G(y, 0) = y$$

Задача в области Ω_0

- Итак, делаем замену переменных $y = F(x, \varepsilon \eta(x, t, \varepsilon))$,

$$N(y, t, \varepsilon) = \eta(x, t, \varepsilon), \quad \mathbf{U}(y, t, \varepsilon) = \mathbf{u}(x, t, \varepsilon)$$

- Обратная замена имеет вид $x = G(y, \varepsilon N(y, t, \varepsilon))$, $G(\cdot, \lambda) = (F(\cdot, \lambda))^{-1}$
- Уравнения в области Ω_0 для вектора $\Psi = \begin{pmatrix} N \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}$:

$$\mathcal{L}_D \Psi = \varepsilon \tilde{B}(\Psi, \nabla \Psi, \varepsilon), \quad \mathcal{L}_D = \begin{pmatrix} \partial_t & \nabla_y \circ D(y) \\ g \nabla_y & \partial_t \end{pmatrix}$$

(плюс соответствующие начальные условия).

- Эти уравнения уже можно решать с помощью регулярной теории возмущений

Основной результат

- Теорема: *Асимптотическое решение задачи Коши для нелинейной системы уравнений мелкой воды существует и асимптотически единственно.*
- Ключевое утверждение в доказательстве:

Задача

$$\mathcal{L}_D \Psi = f(x, t), \quad \Psi|_{t=0} = \Psi_0(x)$$

в цилиндре $\overline{\Omega_0} \times [0, T]$ с гладкими начальными данными $\Psi_0(x)$ и правыми частями $f(x, t, \varepsilon)$ имеет единственное гладкое решение в $\overline{\Omega_0} \times [0, T]$.

- Оператор в этой линейной задаче вырождается на границе. Доказательство утверждения опирается на униформизацию, приводящую к волновому уравнению на трехмерном многообразии с гипоеллиптическим оператором пространственной части.

С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, “Униформизация уравнений с граничным вырождением бесселева типа и квазиклассические асимптотики”, Матем. заметки, 107:5 (2020), 780–786.