Асимптотики двумерных длинных волн в бассейне переменной глубины, порожденных движущимся по дну локализованным источником

Анна Цветкова
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

совместно с С.Ю. Доброхотовым и П.Н. Петровым

"Волны цунами: моделирование, мониторинг, прогноз",
17 ноября 2021 г.

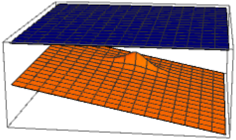
Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный слой жидкости $\mathcal{D}$ переменной глубины

$$\mathcal{D} = \{0 \geq z \geq -D(x),\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}, \tag{1}$$

т.е. дно бассейна определяется уравнением $z = -D(x)$ $(D(x) > 0)$.

Будем изучать эволюцию свободной поверхности, вызванную меняющимся во времени участком дна



$$z = -D(x) + D_1(x,t),\ D_1(x,t) \ll D(x). \tag{2}$$

Предполагаем, что источник локализован и действует в течение небольшого промежутка времени

$$D_1 = f\left(\frac{x - \xi(t)}{l}, t\right), \tag{3}$$

где $\xi(t)$ – гладкая вектор-функция, которая определяет траекторию возмущения, l – размер области локализации.

Некоторые работы

- E. Pelinovsky, A. Poplavsky (1996)
  модель генерации цунами
- S. Tinti, E. Bortolucci, C. Chiavettieri (2001)
  модель и аналитическое решение
- G. Papadopoulos et al (2007)
  численный подход
- S. Beizel, L. Chubarov, G. Khakimzianov (2011)
  модель и численный расчет
- I. Didenkulova, E. Pelinovsky (2010, 2013)
  аналитические решения
- S. Dobrokhotov, P. Petrov (2019)
  ПДУ, одномерный случай

Псевдодифференциальное уравнение

Задача сводится к следующей задаче Коши для псевдодифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \hat{L}\eta = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad \eta|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \eta}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{4}$$

где

$$\hat{L} = L\Big(\overset{2}{x}, \frac{\overset{1}{\hat{p}} + \overset{3}{\hat{p}}}{2}\Big), \quad L = g|p| \tanh(|p|D(x)), \quad \hat{p} = -i\nabla = -i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right), \tag{5}$$

функция $V(x,t)$ связана с возмущением D_1 следующим образом

$$V = \hat{R}D_1, \quad \hat{R} = R\Big(\overset{2}{x}, \frac{\overset{1}{\hat{p}} + \overset{3}{\hat{p}}}{2}\Big), \quad R(x,p) = \frac{1}{\cosh(D(x)|p|)}. \tag{6}$$

[.] S.Yu. Dobrokhotov, V.E. Nazaikinskii. "Waves on the free surface described by linearized equations of hydrodynamics with localized right-hand sides." Rus. J. Math. Phys., Vol. 25, No. 1, 2018, pp. 1-16.

Одномерный случай

$$D_1 = \frac{\gamma(t)}{b(t)} e^{-\frac{(x-\xi(t))^2}{2l^2 b^2(t)}}, \qquad (7)$$

$\gamma(t)$ – объем оползня, $\xi(t)$ – траектория движения источника. Источник движется время t_1.

Результат:

- Образуется длинная волна. Характерная длина волны $\sqrt{gD}t_1$
- Асимптотическое решение при $t > t_1$

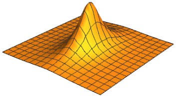
$$\eta(x,t) \sim \sum_{\pm} \sqrt{\frac{c_0}{c(\mathcal{X}^{\pm}(t))}} F^{\pm}\left(\frac{c_0}{c(\mathcal{X}^{\pm}(t))}(x - \mathcal{X}^{\pm}(t))\right), \qquad (8)$$

$$F^{\pm}(x) = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\sqrt{\pi} l \gamma(\tau)}{c + \dot{X}_D(\tau)}\right)\Bigg|_{\tau=\tau^{\pm}(x,t_1)}, \quad X_D(\tau) = \xi(\tau/t_1),$$

$\mathcal{X}^{\pm}$ – решение уравнения $\dot{x} = \sqrt{gD(x)}$ с начальным условием $x^{\pm}|_{t=t_1} = \pm c_0 t_1$, $\tau^{\pm}(x,t_1) = \frac{ct_1 \pm x}{c} \pm \frac{1}{c}\xi\left(\frac{ct_1 \pm x}{ct_1}\right)$.

Двумерный случай. Источник

$$D_1 = f\left(\frac{x-\xi(t)}{l}, t\right).$$



Источник будем моделировать функцией

$$f = g\Big(T(\phi(t))y, t\Big), \quad g(z,t) = \frac{\gamma(t)}{b_1(t)b_2(t)\left(1 + \frac{z_1^2}{b_1^2(t)} + \frac{z_2^2}{b_2^2(t)}\right)^{3/2}}, \qquad (9)$$

- $\gamma(t)$ – гладкая функция, такая что $\gamma(t) = \gamma_1$ при $t < 0$ и $\gamma(t) = \gamma_2$ при $t > t_1$ (характеризует объем оползня)
- $b_1(t)$, $b_2(t)$ – гладкие функции (в сечении эллипс с осями b_1, b_2)
- $T(\phi(t))$ – 2×2 матрица поворота на угол $\phi(t)$ (угол поворота эллипса)
- $\xi(t)$ – траектория движения источника

$$\xi(t) = \log\left(\cosh\left(\frac{2t}{t_1}\right)\right) q\left(\frac{t}{t_1}\right) \text{ или } \xi(t) = \frac{\left(1 + \tanh\left(\frac{4t-2t_1}{t_1}\right)\right)}{2} q\left(\frac{t}{t_1}\right),$$

где $q(\tau)$ – вектор, лежащий на единичной окружности.

Принцип Дюамеля

Поскольку время действия источника конечное, то при $t > t_1$

$$\eta(x,t) = \eta_1(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}\eta_2(x,t), \tag{10}$$

где $\eta_{1,2}$ – решения задач

$$\frac{\partial^2 \eta_{1,2}}{\partial t^2} + \hat{L}\eta_{1,2} = 0 \tag{11}$$

с соответственно начальными условиями

$$\eta_1|_{t=0} = \mathrm{Re}[W(x)], \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \eta_2|_{t=0} = \frac{1}{\hat{\mathcal{L}}}\mathrm{Im}[W(x)], \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial t} = 0. \tag{12}$$

$$W(x) = \int_0^{t_1} e^{-i\hat{\mathcal{L}}\tau}\frac{\partial V}{\partial \tau}(x,\tau)d\tau = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_0^{t_1} e^{-i\hat{\mathcal{L}}\tau}V(x,\tau+a)d\tau\Big|_{\alpha=0}, \quad \hat{\mathcal{L}} = \sqrt{\hat{L}}. \tag{13}$$

Эквивалентный источник

Мы "поднимаем" источник на поверхность. При этом его приближенно можно заменить на эквивалентный. А именно,

$$V = \hat{R} D_1, \quad \hat{R} = \frac{1}{\cosh(D(x)|\hat{p}|)}, \; D_1 = f\left(\frac{x - \xi(t)}{l}, t\right) \quad \Rightarrow \tag{14}$$

$$V^{ap} = \tilde{f}\left(\frac{x - \xi(t)}{l}, t\right), \quad \tilde{f} = \frac{\gamma(t)}{\tilde{b_1}\tilde{b_2}\left(1 + \frac{z_1^2}{\tilde{b_1}^2} + \frac{z_2^2}{\tilde{b_2}^2}\right)^{3/2}}, \quad \tilde{b_i} = b_i + \frac{D_0}{2l} \tag{15}$$

Это связано с тем, что Фурье-образы этих функций схожи

$$\hat{V}(\varrho\cos\psi, \varrho\sin\psi, t) = \gamma(t)\exp\left(-|\varrho|\sqrt{b_1^2\cos^2(\phi-\psi)+b_2^2\sin^2(\phi-\psi)}\right)\frac{1}{\cosh(D\varrho/l)}, \quad (16)$$

$$\hat{V}^{ap}(\varrho\cos\psi, \varrho\sin\psi, t) = \gamma(t)\exp\left(-|\varrho|\sqrt{\left(b_1+\frac{D}{2l}\right)^2\cos^2(\phi-\psi)+\left(b_2+\frac{D}{2l}\right)^2\sin^2(\phi-\psi)}\right) \quad (17)$$

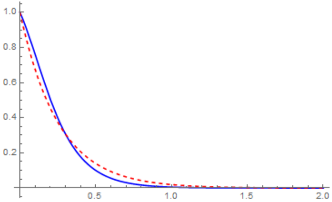


Figure: Синей сплошной линией изображен Фурье-образ $\hat{V}$, красным пунктиром – Фурье-образ $\hat{V}^{ap}$ в зависимости от ϱ при фиксированном ψ.

Ответ через канонический оператор

Окончательно получаем, что решение η при $\mathrm{t} > \mathrm{t}_1$ имеет вид

$$\eta(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \frac{\sqrt{\mathrm{l}}}{\sqrt{2\pi}}\cdot$$

$$\cdot\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}\int_0^\infty \mathrm{K}^{\mathrm{l}/\varrho}_{\Lambda^{\mathrm{t}}}\left[\sqrt{\varrho}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^{\mathrm{t}_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\frac{\mathrm{g}\varrho}{\mathrm{l}}\tanh\left(\frac{\varrho \mathrm{D}(\mathrm{x}(\mathrm{r},\psi))}{\mathrm{l}}\right)}\tau}\mathrm{A}_1^{\mathrm{ap}}(\varrho,\psi,\tau+\alpha)\mathrm{d}\tau\Big|_{\alpha=0}\right]\mathrm{d}\varrho\right), \tag{18}$$

где

$$\mathrm{A}_1^{\mathrm{ap}}(\varrho,\psi,\mathrm{t}) = \gamma(\mathrm{t})\exp\left(-\mathrm{i}<\beta,\frac{\xi(\mathrm{t})-\xi(\mathrm{t}_1/2)}{\mathrm{l}}>\right)\cdot \tag{19}$$

$$\exp\left(-\varrho\sqrt{\cos^2(\phi(\mathrm{t})-\psi)\left(\mathrm{b}_1(\mathrm{t})+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{D}_0}{\mathrm{l}}\right)^2+\sin^2(\phi(\mathrm{t})-\psi)\left(\mathrm{b}_2(\mathrm{t})+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{D}_0}{\mathrm{l}}\right)^2}\right), \tag{20}$$

а Λ^{t} получено сдвигом

$$\Lambda^0 = \{\mathrm{p}=\mathrm{p}(\psi)=\mathrm{n}(\psi),\quad \mathrm{x}=\mathrm{x}(\mathrm{r},\psi)=\xi(\mathrm{t}_1/2)+\mathrm{r}\mathrm{n}(\psi)\}$$

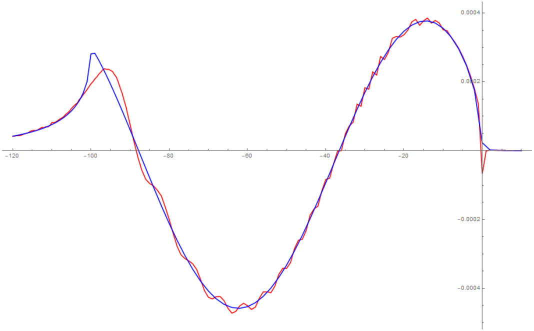
вдоль траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$\mathcal{L} = \sqrt{\mathrm{g}|\mathrm{p}|\tanh(\mathrm{D}(\mathrm{x})|\mathrm{p}|)}. \tag{21}$$

Волновое уравнение

Анализируя аналитическое выражение, а также основываясь на численном сравнении, предполагаем, что можно рассматривать волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \nabla c^2(x) \nabla \eta = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad \eta|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \eta}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \qquad (22)$$



Синяя линия – профиль для волнового уравнения, красная – для псевдодифференциального

Для волнового уравнения решение можно упростить.
В окрестности неособой точки фронта оно представляется в виде

$$\eta(x,t) = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{|X_\psi|}}\sqrt{\frac{c(\xi(t_1/2))}{c(X(\psi,t))}}\mathrm{Re}\left(F\left(\frac{S(x,t)}{l},\psi\right)\right)\Bigg|_{\psi=\psi(x,t)}, \tag{23}$$

$$F(z,\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \sqrt{\varrho}e^{iz\varrho}\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^{t_1} e^{i\tau\frac{c(x)\varrho}{l}} A_1^{ap}(\varrho,\psi,\tau+\alpha)d\tau\Bigg|_{\alpha=0} d\varrho, \tag{24}$$

$$S(x,t) =< P(\psi(x,t),t), y(x) >, \quad y(x) \text{ – расстояние до фронта.} \tag{25}$$

Фронт определяется функциями $X(\psi,t), P(\psi,t)$, которые являются решениями системы Гамильтона с гамильтонианом

$$H = c(x)|p| \tag{26}$$

и начальными условиями

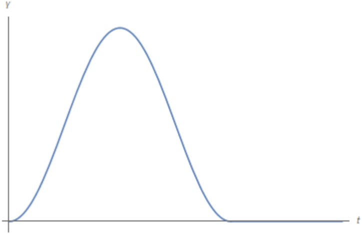
$$x|_{t=0} = \xi(t_1/2), \quad p|_{t=0} = n(\psi). \tag{27}$$

Поскольку действие источника мало, то при $t < t_1$ можно рассмотреть волновое уравнение с "замороженной" скоростью $c(x) = c_0 = c(\xi(t_1/2))$. В этом случае упрощается вид функции профиля

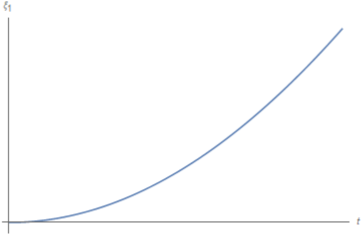
$$F(z,\psi) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\gamma(\tau)}{(\sqrt{B^{ap}(\tau,\psi)} - \frac{ic_0\tau}{l} - iz - \frac{i}{l} < n(\psi), \xi(t_1/2) - \xi(\tau) >)^{3/2}} \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t_1} -$$

$$- \frac{3i}{4l\sqrt{2}} \int_0^{t_1} \frac{c_0\gamma(\tau)d\tau}{(\sqrt{B^{ap}(\tau,\psi)} - \frac{ic_0\tau}{l} - iz - \frac{i}{l} < n(\psi), \xi(t_1/2) - \xi(\tau) >)^{5/2}}, \tag{28}$$

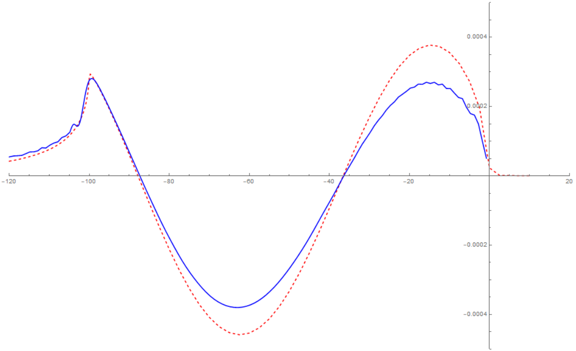
$$B^{ap}(\tau,\psi) = \cos^2(\phi(\tau)-\psi)\left(b_1(\tau) + \frac{1}{2}\frac{D_0}{l}\right)^2 + \sin^2(\phi(\tau)-\psi)\left(b_2(\tau) + \frac{1}{2}\frac{D_0}{l}\right)^2. \tag{29}$$



функция $\gamma(\mathrm{t}) = 1 - \cos\left(\frac{2\pi \mathrm{t}}{\mathrm{t}_1}\right)$ – объем оползня

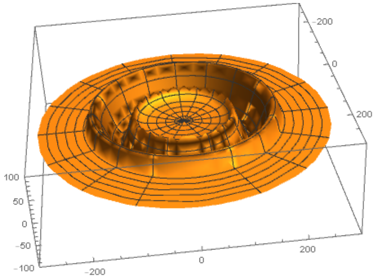


функция $\xi(\mathrm{t}) = \log\left(\cosh\frac{5\mathrm{t}}{\mathrm{t}_1}\right)$ – траектория движения



Синяя линия – численное решение для волнового уравнения, красный пунктир – асимптотика в случае $b_1 = b_2 = 1$, $\phi = 0$, $\psi = 0$, $l = 0.08$

Поршневая модель



Вопрос: Можно ли и при каких условиях заменить исходную модель на поршневую модель с эквивалентным источником?

Спасибо за внимание!